



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Equilibrio Estelar en Einsteinian Cubic Gravity

Un ejemplo aplicado a estrellas de neutrones en $D = 4$

Por: Esteban D. Arratia Kandalajt

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al grado académico de Magíster en
Ciencias con Mención en Física

Diciembre 2023
Concepción, Chile

**Profesor Guía: Dr. Guillermo Rubilar A.
Dr. Octavio Fierro M.**

© 2023, Esteban Arratia Kandalaft

Ninguna parte de esta tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio o procedimiento, sin permiso por escrito del autor.

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis es el producto de varios años de trabajo e investigación. No habría podido llegar a este punto si no fuera por el apoyo, comprensión y amistad de las distintas personas con las que he tenido el gusto de compartir.

Estoy muy agradecido con mi padre Rodolfo y mi madre Viviana por su paciencia, amor y apoyo incondicional que me han dado a lo largo de mi vida. Soy afortunado de tener unos padres que me quieren y apoyan tanto en los estudios como en la vida personal con tal de poder crecer como persona. También estoy agradecido de mi hermana Victoria, quien en los últimos años ha sido mi confidente, consejera, compañera de debate y sobre todo mi mejor amiga. Le deseo mejor junto a su prometido Pablo. También estoy muy agradecido de mi perrita Jacinta, quien me acompaña 14 años y durante todo ese tiempo ha sido mi apoyo emocional.

De mi Familia cercana quiero agradecer a mi tía Magaly, mi primo José y a la sra. Nelly Varela, quien fue por muchos años como una segunda madre. También agradezco a mi tío Francisco, mi madrina Jessica, mis primos Fran, Tomás y Benjamín, mis abuelos adoptivos Jimena y Jorge, mis tías Marcela y Bárbara y a muchos más. De los que ya no están conmigo siempre estaré agradecido de mi abuelo Francisco, mi “Tata” Mario y mis abuelas Andriana y Sonia, quienes siempre recuerdo con cariño.

De mi etapa escolar en el colegio SSCC, aunque creo que varios profesores me han marcado, quiero agradecer a mi profesora de física Lisbetty Ávila, quien junto al Dr. Luis Braga de la Universidad de Concepción me motivaron a estudiar física. Aunque sigo cercano a varios compañeros de colegio, tengo que agradecerles a Felipe Baltierra, Iván Salazar, Bruno Cereghino, Lucas provoste y Vicente Orellana por el apoyo y amistad que me han dado durante tantos años. De mi etapa escolar también quiero agradecer al programa Talentos UdeC, el cual me dio la oportunidad de participar un ambiente de aprendizaje y desarrollo, lo que motivo a que siguiera un carrera científica.

Deseo agradecer a mi tutor, el Dr. Guillermo Rubilar de la Universidad de

Concepción, por su apoyo, paciencia y disposición para guiar mi tesis. También deseo agradecer al mi cotutor, el Dr. Octavio Fierro de la Universidad Católica de Concepción, cuya disposición y apoyo fueron fundamentales a la hora de desarrollar este trabajo. Este trabajo contó con la ayuda del Dr. Nicolás Grandi, quién nos ayudo a corregir un elemento fundamental de nuestros cálculos. También en este apartado, le quiero dar las gracias al Dr. Cristóbal Corral, quien me dio la oportunidad de trabajar durante la pandemia.

De la Universidad de Concepción quiero agradecer a los profesores miembros del departamento de Física, quienes me dieron las herramientas con las que puedo trabajar hoy día, a las secretarias del Departamento de Física Soledad Daroch y Julia Herrera, quienes siempre estuvieron disponibles y dispuestas a ayudar, y a los Jefes de Carrera Dr. Joaquin Diaz de Valdes y Dr. Hernan Astudillo por todo lo que han hecho por los estudiantes de pregrado y posgrado en la carrera Ciencias Físicas. Quiero también agradecer en particular al Dr. Julio Oliva por su dedicación y disposición, tanto en el aula como fuera de esta. Además de mis profesores, quisiera agradecer a mis compañeros y amigos, los cuales han hecho memorables toda mi etapa académica en la UdeC; César Riquelme, Daniel Concha, Ricardo Stuardo, José Figueroa, Leonardo Sanhueza, Matías Cardenas, Jeremy Echeverria, Gonzalo Barriga, Marcel Yañez, Scarlett Rebolledo, Camilo Alegría entre muchos otros. Ellos me dieron su apoyo, comprensión y amistad, además de alentarme a salir de mi zona de confort y mejorar como científico y persona.

Por último, quiero agradecer a las personas que, por diversas razones, no he podido agregar los párrafos anteriores. Gracias a Abelor Riquelme, Josseff, Pablo Yañez, Javiera Cárdenas, Valentín Orellana y a muchos más. También quiero agradecer a mis psiquiatras, los doctores Marcelo Cruz y Raúl Hernández, y mi terapeuta Carla Gutierrez por su ayuda durante este proceso.

Este trabajo fue posible gracias al el apoyo de la Universidad de Concepción y el financiamiento de FONDECYT y la beca de Articulación, gracias a los cuales pude financiar mi magíster.

Resumen

En este trabajo se obtuvieron soluciones de estrellas de neutrones, modeladas como un fluido perfecto estático y esféricamente simétrico, en la teoría de curvatura cúbica Einsteinian Cubic Gravity (ECG) en $D = 4$ mediante la construcción de un modelo perturbativo de equilibrio estelar.

Debido a la complejidad de las ecuaciones de campo de ECG, y en particular a la presencia de derivadas de orden superior (tercero y cuarto), se optó por el uso de métodos perturbativos para la obtención de soluciones, tomando como parámetro de expansión la constante de acoplamiento λ introducida en la teoría. Como resultado se obtuvo un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que describe la estructura interna de estrellas en este modelo. Del análisis del comportamiento de estas ecuaciones se pudo ver que la métrica de la solución externa coincide con la solución perturbativa de agujeros negros en $D = 4$ reportada en trabajos anteriores.

Considerando un gas ideal de Fermi a temperatura cero como modelo de estrellas de neutrones degeneradas, fue posible obtener mediante métodos numéricos un conjunto de soluciones de estrellas de neutrones para distintos valores del parámetro λ y de densidad central de la estrella. Cada una de estas soluciones posee una masa y radio característico, así como perfiles de presión y densidad para el interior de la estrella. Los resultados son contrastados con las soluciones correspondientes al caso análogo en Relatividad General (RG), obtenidas de forma independiente y también a través del límite $\lambda \rightarrow 0$ (como medida de control de la perturbación). A densidades centrales bajas ($\rho_c \lesssim 10^{13}[\text{g}/\text{cm}^3]$) las soluciones en ECG reproducen las soluciones de RG, pero en general, las soluciones de ECG admiten estrellas de igual radio y mayor masa que aquellas de RG, es decir, dada la misma densidad central la solución de ECG es más densa que aquella de RG.

Abstract

In this work neutron star solutions modelled using a static and spherically symmetrical perfect fluid in the cubic curvature theory of Einsteinian Cubic Gravity (ECG) for $D = 4$, through the construction of a perturbative model of stellar equilibrium.

Due to the complexity of the equations of motion of ECG, and in particular to the presence of higher derivatives in the equations, we have chosen to use perturbative methods to obtain solutions, taking as expansion parameter the coupling constant λ introduced by the theory. As a result, we obtain a first order system of equations that describes the inner structure of stars in this theory. Analysing the behavior of the equations we found that the metric form outside the star agrees with the perturbed black hole solution in $D = 4$ reported in other works in this theory.

Considering an ideal Fermi gas at zero temperature as a model of degenerated neutron stars, it was possible to obtain by numerical means a set of neutron star solutions for different values of the parameter λ and the central density of the star. Each of these solutions has a characteristic mass-radius value as well as pressure and density profiles inside the star. We compare these results with the corresponding solutions of the analogous case in General Relativity (GR), which can be obtained independently and from the limit $\lambda \rightarrow 0$. Additionally, we found that ECG solutions match GR solutions for low central density regime ($\rho_c \lesssim 10^{13}[\text{g}/\text{cm}^3]$). For higher central densities the ECG solutions differ from those of GR and are more dense given the same central density value.

Índice general

AGRADECIMIENTOS	I
Resumen	III
Abstract	IV
1 Introducción: Modelos clásicos de equilibrio estelar	1
1.1 Reseña histórica	1
1.2 Conceptos básicos de equilibrio estelar	2
1.2.1 Ecuaciones de estructura	2
1.2.2 Ecuación de estado	3
1.2.3 Condiciones de borde	5
1.2.4 Estrellas estáticas y esféricamente simétricas	5
2 Equilibrio estelar relativista	7
2.1 Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkof	9
2.1.1 Obtención de la ecuación de estructura para la presión	9
2.2 Solución de densidad constante	10
2.2.1 Estabilidad de la solución	12
2.3 Solución para un gas degenerado de Fermi	13
2.3.1 Solución numérica	14
3 Equilibrio Estelar en Einsteinian Cubic Gravity	21
3.1 Motivación: Teorías de curvaturas altas	21
3.2 Ecuaciones de Campo	22
3.3 Expansión a primer orden en λ	25
3.3.1 Radio de la estrella	29
3.3.2 Solución externa y comportamiento asintótico	30
4 Soluciones de la ecuación de TOV modificada para $\Lambda = 0$	32
4.1 Solución de gas ideal de Fermi	32
4.1.1 Comportamiento cercano al origen	34
4.1.2 Solución numérica	36
5 Conclusiones	51
5.1 Conclusiones	51
5.2 Objetivos a futuro	53

5.2.1	Soluciones rotantes	53
5.2.2	Solución no perturbativa y de orden superior en λ	53
5.2.3	Aplicaciones en Holografía	54
Apéndices		54
A Ecuaciones de estado de un gas ideal de Fermi		55
A.1	Definiciones estadísticas y función de distribución de Fermi	55
A.1.1	Caso particular: Neutrones	57
B Ecuaciones generalizadas		60
B.1	Ecuaciones generalizadas	60
B.2	Ecuaciones de ECG en $D = 4$	63
Bibliografía		68

Índice de figuras

1.1.1	Esquema de la relación entre la presión interna y la gravedad de una estrella.	2
2.3.1	Ejemplo de soluciones de m y t en Relatividad General	16
2.3.2	Ejemplo de soluciones de P y ρ en Relatividad General	17
2.3.3	Relación Masa-Radio para estrellas de neutrones en el modelo relativista	18
2.3.4	Relación Masa, radio y densidad para estrellas de neutrones en Relatividad General	19
4.1.1	Ejemplo de perfil de presión y densidad	37
4.1.2	Ejemplo de perfiles de $m_{\text{GR}}(x)$, $m_1(x)$ y $m_0(x) + m_1(x)$	41
4.1.3	Ejemplo de perfiles de $t_{\text{GR}}(x)$, $t_1(x)$ y $t(x)$	42
4.1.4	Ejemplo de perfiles de $P_{\text{GR}}(r)$, $P_1(r)$ y $P(r)$	43
4.1.5	Ejemplo de perfiles de $\rho_{\text{GR}}(r)$, $\rho_1(r)$ y $\rho(r)$	44
4.1.6	Ejemplo de soluciones de la teoría ECG	46
4.1.7	Relación entre la densidad central y los radios en ECG	46
4.1.8	Perfiles de la diferencia entre los radios de estrellas de neutrones en ECG y RG	47
4.1.9	Perfiles de la diferencia entre los radios en ECG	47
4.1.10	Relación entre la densidad central y la masa en ECG	48
4.1.11	Cociente entre las masas en ECG y las masas en RG	49
4.1.12	Cociente entre la densidad media de las estrellas en ECG y las estrellas en RG	50
4.1.13	Compacticidad de las estrellas de neutrones en ECG	50

Capítulo 1

Introducción: Modelos clásicos de equilibrio estelar

1.1. Reseña histórica

Los modelos de equilibrio estelar se usan para describir a las estrellas en estado de equilibrio. Este estado de equilibrio se logra debido a que la atracción gravitacional es contrarrestada por las fuerzas internas de la estrella, que en general son de carácter termodinámico o cuántico. Una forma simple de construir estos modelos es considerar a las estrellas como cuerpos estáticos que poseen simetría esférica.

En 1934 W. Baade y F. Zwicky propusieron la idea de estrellas compuestas exclusivamente por neutrones, las cuales serían estrellas pequeñas de alta densidad con campos gravitacionales superiores a las estrellas ordinarias. No sería hasta 1939 que R. Tolman, seguido por J. Oppenheimer y M. Volkoff, propondrían un modelo basado en la teoría de la relatividad general [1].

El equilibrio en las estrellas de neutrones tiene origen en la naturaleza fermiónica de éstas, lo que las hace satisfacer el principio de exclusión de Pauli. De esta manera, en la micro-escala, la presión ejercida por la repulsión entre las partículas cercanas contrarresta la atracción gravitacional de la estrella.

En 1932 L. Landau propuso como primera aproximación para describir estrellas

compuestas por partículas fermiónicas¹ al suponer que éstas conforman un gas degenerado de partículas no-interactuantes (gas de Fermi). Esta descripción posteriormente sería aplicada al caso de las estrellas de neutrones, destacando el trabajo de R. Tolman, J. Oppenheimer, M. Volkoff y S. Chandrasekhar, entre otros [1].

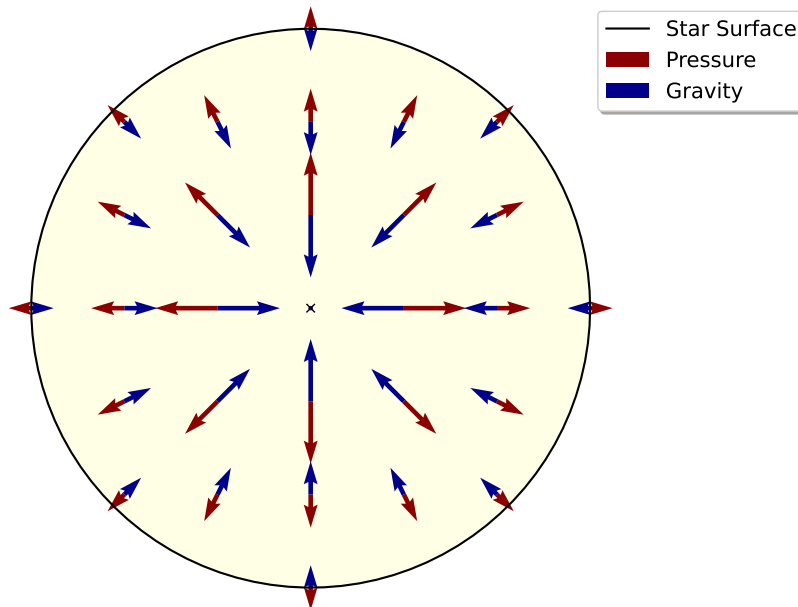


Figura 1.1.1: Esquema de la relación entre la presión interna y la gravedad de una estrella.

1.2. Conceptos básicos de equilibrio estelar

1.2.1. Ecuaciones de estructura

Las ecuaciones de estructura tienen por objetivo describir la estructura interna de las estrellas, además de caracterizar elementos tales como su luminosidad, color, formación y posible colapso. La parametrización más simple es dada por densidad (ρ), presión (P) y masa (M), los cuales en el caso de que la estrellas sea estática y esféricamente simétrica dependen sólo de la coordenada radial r desde el centro

¹Ejemplo: Enanas Blancas.

de la estrella, mediante las ecuaciones de equilibrio, de masa y de estado

$$P' = \frac{dP}{dr}(\rho, P, M), \quad (1.2.1)$$

$$M' = \frac{dM}{dr}(\rho), \quad (1.2.2)$$

$$P = P(\rho). \quad (1.2.3)$$

La ecuación de equilibrio (1.2.1), alternativamente ecuación de equilibrio hidrostático, describe el balance entre las fuerzas internas con la gravedad de la estrella. Ésta se deriva de la teoría gravitacional en conjunto con las ecuaciones hidrodinámicas correspondientes. En este trabajo nos enfocaremos exclusivamente a los fluidos ideales.

La ecuación de masa (1.2.2), alternativamente ecuación de continuidad de la masa, describe el crecimiento acumulado de la función de masa con respecto al radio. La relación es parametrizada por

$$M(r, n, S) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r, n, S) dr, \quad (1.2.4)$$

donde n y S son la densidad numérica de partículas y la entropía respectivamente. Por último, la ecuación de estado (1.2.3) caracteriza la relación entre la presión interna y la densidad de la estrella debido a la composición y procesos internos de ésta, variando según el tipo de estrella que se desea estudiar.

1.2.2. Ecuación de estado

Para encontrar soluciones de los modelos de equilibrio estelar es necesario incluir una ecuación que describa la microfísica dentro de un objeto compacto, el cual puede ser una estrella, planeta, etc. Esta ecuación corresponde a la ecuación de estado, la cual caracteriza la relación que se da entre distintas variables que describen el estado macroscópico de un sistema dinámico (variables de estado). En termodinámica las variables de estado son la energía interna (U), la entalpía (H), la temperatura (T), la presión (P), la densidad (ρ), el volumen (V) y la entropía (S) [3].

Asumiendo equilibrio hidrostático y que la materia que forma a la estrella puede ser descrita como un fluido perfecto, podemos describir su densidad de masa y su presión interna, como

$$\rho = \rho(n, S), \quad (1.2.5)$$

$$P = P(n, S). \quad (1.2.6)$$

Aunque los fluidos perfectos son adiabáticos (la entropía S de cualquier partícula de fluido se mantiene constante a medida que la partícula se mueve en el espacio, es decir, $dS/dt = 0$), no necesariamente son isoentrópicos (S tiene el mismo valor en todas partes) [1, 4]. En el caso de enanas blancas frías y estrellas de neutrones la temperatura es esencialmente cero en todas partes (más precisamente la temperatura es mucho menor que la temperatura de Fermi del sistema $k_B T < E_F$) y por tanto $S \approx 0$ también en todas partes. En estos casos la ecuación de estado se reduce a $P = P(\rho)$ [1]. Un ejemplo de ecuaciones de estado de este tipo es la ecuación de estado politrópica (o adiabática) [1]

$$P = K\rho^\gamma, \quad (1.2.7)$$

donde K es una constante de conversión y γ el *índice politrópico*. Esta ecuación de estado es particularmente útil en la teoría newtoniana, cuya ecuación de estructura P' se reduce a la ecuación de *Lane-Emden*[1], permitiendo obtener soluciones analíticas para algunos valores específicos de γ . Los casos $\gamma = 4/3$, $\gamma = 5/3$ y $\gamma \rightarrow 0$ llevan a: una solución de masa total independiente del radio de la estrella (*masa de Chandrasekhar*), una solución que se comporta como un gas monoatómico y a una solución con densidad constante (estrella incompresible), respectivamente.

Otros ejemplos de ecuaciones de estado para modelar estrellas de neutrones son los modelos de SLy, AP4, MPA1, GM1nph [8, 13]. En este trabajo usaremos la ecuación de estado de un gas ideal de Fermi, en particular el caso del gas degenerado ($T \rightarrow 0$), explicada con más detalle en el apéndice A.

1.2.3. Condiciones de borde

Debido a que la estrella se encuentra en estado de equilibrio, sabemos que en su superficie la presión, densidad y masa deben satisfacer las siguientes condiciones

$$\left\{ \begin{array}{ll} P(r) = 0, & r \geq R, \\ \rho(r) = 0, & r > R, \\ M(r) = \mathcal{M}, & r \geq R, \end{array} \right. \quad (1.2.8)$$

donde R y \mathcal{M} son el radio y la masa de la estrella. Por otro lado, en el centro de la estrella podemos considerar que ésta tiene presión y densidad finitas, además de que no posee singularidades en el origen, por lo que tenemos las condiciones

$$\left\{ \begin{array}{ll} P(r = 0) = P_c, \\ \rho(r = 0) = \rho_c, \\ M(r = 0) = 0, \end{array} \right. \quad (1.2.9)$$

donde P_c y ρ_c son la presión y densidad centrales.

1.2.4. Estrellas estáticas y esféricamente simétricas

Existe el caso particular en que una estrella está estática y no presenta ninguna deformación debido a fuerzas que sean ajenas a la gravedad propia o a la presión de sus propios procesos termonucleares, que suele usarse como un modelo de juguete para construir un modelo simplificado. El ejemplo más emblemático es el de J. Oppenheimer y M. Volkoff [5], en el cual encontraron la ecuación de equilibrio para Relatividad General, junto con soluciones para un gas degenerado de neutrones, con lo cual sentaron las bases de los modelos de equilibrio estelar en teorías relativistas.

En la teoría de Newton ésta se deriva de la ecuación de Euler para el campo de velocidades v^i de un fluido ideal

$$\rho(\vec{r}) \frac{dv^i}{dt} = \rho(\vec{r}) \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \partial_j v^i \right) = -\partial^i P + f^i(\vec{r}), \quad (1.2.10)$$

donde f^i es la densidad de fuerza externa que actúa en cada elemento de volumen, en conjunto con el potencial gravitacional newtoniano ϕ , que satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho(\vec{r}). \quad (1.2.11)$$

En el caso de Relatividad General, la ecuación de equilibrio se deriva de las ecuaciones del movimiento para un fluido ideal, tal como se ve en el capítulo 2.

La ecuación de masa se interpreta como la masa dentro de un radio r_0

$$M(r_0) = \int_0^{r_0} 4\pi r^2 \rho(r) dr, \quad (1.2.12)$$

tal que para el radio R de la estrella

$$\mathcal{M} = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr, \quad (1.2.13)$$

es la masa total de la estrella.

Capítulo 2

Equilibrio estelar relativista

En la teoría de la Relatividad General de Einstein tenemos la acción de *Einstein-Hilbert*

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{|g|} R + S_{\text{matter}}, \quad (2.0.1)$$

con ecuaciones de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.0.2)$$

donde

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.0.3)$$

Para modelar una estrella de neutrones consideraremos a ésta como una distribución esférica y estática de un fluido ideal en equilibrio, que corresponde al caso en que la propia presión que ejerce la materia es capaz de contrarrestar a la atracción gravitacional. Entonces, considerando un espacio esféricamente simétrico parametrizado en las coordenadas $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$ por la métrica $g_{\mu\nu}$

$$ds^2 = -e^{\alpha(r)}(cdt)^2 + e^{\beta(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.0.4)$$

y usando el tensor energía-momentum de un fluido ideal

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} (\rho c^2 + P) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (2.0.5)$$

donde $u^\mu = dx^\mu/d\tau = u^0\delta_0^\mu$ es la 4-velocidad, se puede construir un sistema de ecuaciones al reemplazar en (2.0.2). De este sistema se obtiene que las componentes del tensor de Ricci son

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}e^{-\beta} \left(\alpha'' - \frac{\beta'\alpha'}{2} + \frac{2\alpha'}{r} + \frac{\alpha'^2}{2} \right) = -\frac{\kappa}{2}(\rho c^2 + 3P)e^\alpha, \quad (2.0.6)$$

$$R_1^1 = -\frac{1}{2}e^{-\beta} \left(\alpha'' - \frac{\beta'\alpha'}{2} + \frac{2\beta'}{r} + \frac{\alpha'^2}{2} \right) = \frac{\kappa}{2}(\rho c^2 - P)e^\beta, \quad (2.0.7)$$

$$R_2^2 = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{-\beta} \left(1 - \frac{1}{2}r\beta' + \frac{1}{2}r\alpha' \right) = \frac{\kappa}{2}(\rho c^2 - P)r^2, \quad (2.0.8)$$

con lo que se puede construir un sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones α y β . Considerando la siguiente suma de términos

$$R_0^0 - R_1^1 - 2R_2^2 = -2e^{-\beta} \left(\frac{\beta'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{2}{r^2} = -2\kappa\rho c^2, \quad (2.0.9)$$

podemos despejar la siguiente ecuación diferencial para $e^{\beta(r)}$:

$$\frac{d}{dr}(re^\beta) = 1 - \kappa\rho c^2 r^2. \quad (2.0.10)$$

Integrando desde el centro de la estrella hasta un radio r despejamos el coeficiente $e^{\beta(r)}$

$$e^{\beta(r)} = \left[1 + \frac{1}{r} \lim_{r \rightarrow 0} re^{-\beta(r)} - \frac{\kappa c^2}{r} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' \right]^{-1} \quad (2.0.11)$$

$$= \left[1 + \frac{1}{r} \lim_{r \rightarrow 0} re^{-\beta(r)} - \frac{2GM(r)}{rc^2} \right]^{-1}. \quad (2.0.12)$$

Suponiendo que $g_{11} = e^{\beta(r)}$ no tenga una singularidad en el origen podemos

imponer que $\lim_{r \rightarrow 0} r e^{-\beta(r)} = 0$, obteniéndose

$$e^{\beta(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}}, \quad (2.0.13)$$

o equivalentemente

$$\beta(r) = -\ln \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right). \quad (2.0.14)$$

Por otro lado, de la “ley de conservación” $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{1\nu} &= \partial_\nu T^{1\nu} + \Gamma^\nu_{\nu\lambda} T^{1\lambda} + \Gamma^1_{\nu\lambda} T^{\lambda\nu} \\ &= \frac{\alpha'}{2} (\rho c^2 + P) e^{-\beta} + P' e^{-\beta} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.0.15)$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{dr} = -\frac{2}{\rho c^2 + P} \frac{dP}{dr}, \quad (2.0.16)$$

obteniéndose así expresiones para α' y β necesarias para construir la ecuación de *Tolman-Oppenheimer-Volkof*.

2.1. Ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkof

2.1.1. Obtención de la ecuación de estructura para la presión

Reemplazando (2.0.14) y (2.0.16) en R_{22} obtenemos la ecuación

$$\frac{GM}{rc^2} + 4\pi G \rho c^2 r + \left(1 - \frac{2GM(r)}{rc^2} \right) \frac{r}{\rho c^2 + P} \frac{dP}{dr} = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 + 3P) r^2, \quad (2.1.1)$$

de la cual podemos despejar dP/dr , obteniendo una de las ecuaciones de estructura,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \left[1 + \frac{4\pi r^3 P}{Mc^2} \right] \left[1 + \frac{P}{\rho c^2} \right] \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right]^{-1}, \quad (2.1.2)$$

conocida como ecuación de *Tolman-Oppenheimer-Volkoff* (**TOV**)¹.

2.2. Solución de densidad constante

Consideremos el caso límite en que la estrella es incompresible y de densidad ρ_c . En tal caso tenemos que la masa de la estrella es dada por

$$M(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_c, & r < R, \\ \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_c, & r \geq R. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Reemplazando en la ecuación de **TOV** se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -\frac{4\pi G \rho_c^2 r}{3} \left(1 + \frac{3P}{\rho_c c^2} \right) \left(1 + \frac{P}{\rho_c c^2} \right) \left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} r^2 \rho_c \right)^{-1} \\ &= -\frac{4\pi G r}{3c^4} (\rho_c c^2 + 3P) (\rho_c c^2 + P) \left(1 - \frac{8\pi G \rho_c}{3c^2} r^2 \right)^{-1}, \end{aligned}$$

por lo que es posible despejar la expresión

$$\frac{dP}{(\rho_c c^2 + 3P)(\rho_c c^2 + P)} = -\frac{4\pi G r}{3c^4} \left(1 - \frac{8\pi G \rho_c}{3c^2} r^2 \right)^{-1} dr. \quad (2.2.2)$$

Mediante el cambio de variable

$$x = \left(\frac{8\pi G \rho_c}{3c^2} \right)^{\frac{1}{2}} r, \quad (2.2.3)$$

¹Esta expresión fue derivada por Oppenheimer y Volkoff en 1939 [5], en base a trabajos de R. Tolman [6].

la ecuación (2.2.3) se reescribe como

$$\frac{-2\rho_c c^2}{(\rho_c c^2 + 3P)(\rho_c c^2 + P)} dP = \frac{x}{1-x^2} dx \quad / \int$$

$$\int \frac{-2\rho_c c^2}{(\rho_c c^2 + 3P)(\rho_c c^2 + P)} dP = \int \frac{x}{1-x^2} dx$$

integrando por partes

$$-\rho_c c^2 \ln(\rho_c c^2 + 3P) + \rho_c c^2 \ln(\rho_c c^2 + P) = -\frac{1}{2} \rho_c c^2 \ln(1-x^2) + C_1$$

$$\ln\left(\frac{\rho_c c^2 + P}{\rho_c c^2 + 3P}\right) = \ln([\bar{C}_1(1-x^2)]^{-1/2}),$$

se obtiene

$$\frac{\rho_c c^2 + P}{\rho_c c^2 + 3P} = \bar{C}_1^{-1/2} \left(1 - \frac{8\pi G \rho_c r^2}{3c^2}\right)^{-1/2}. \quad (2.2.4)$$

Evaluando en $r = R$ se despeja la constante de integración

$$1 = \bar{C}_1^{-1/2} \left(1 - \frac{8\pi G \rho_c R^2}{3c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \bar{C}_1 = \left(1 - \frac{8\pi G \rho_c R^2}{3c^2}\right)^{-1}. \quad (2.2.5)$$

Con esto, se puede reescribir (2.2.4) como

$$\frac{\rho_c c^2 + P}{\rho_c c^2 + 3P} = \left(\frac{1 - \frac{8\pi G \rho_c r^2}{3c^2}}{1 - \frac{8\pi G \rho_c R^2}{3c^2}}\right)^{1/2}. \quad (2.2.6)$$

Introduciendo el radio de Schwarzschild $r_s = 2GM/c^2 = 8\pi G \rho_c R^3/3c^2$ se puede despejar $P(r)$, obteniendo

$$P(r) = \rho_c c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{r_s r^2}{R^3}} - \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_s}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_s r^2}{R^3}}}, \quad r \leq R. \quad (2.2.7)$$

Es posible obtener la aproximación newtoniana, es decir, la presión en el modelo de Newton, si se toma el límite en que el radio de Schwarzschild r_s de la estrella sea mucho menor que su radio R , por lo que al expandir las raíces en potencias de r_s/R , la presión (2.2.7) se reduce a

$$\begin{aligned} P(r) &\approx \rho_c c^2 \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_s r^2}{R^3}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_s}{R}\right)}{3 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_s}{R}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_s r^2}{R^3}\right)} \\ &\approx \rho_c c^2 \frac{r_s}{4R^3} (R^2 - r^2), \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

siendo el resultado anterior la solución newtoniana de la presión para una estrella incompresible.

2.2.1. Estabilidad de la solución

En el origen la presión dada por (2.2.7) toma la forma

$$P_c := P(r=0) = \rho_c c^2 \left[\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_s}{R}} - 1} \right]. \quad (2.2.9)$$

Esta presión central divergirá si su denominador se anula, lo que implica

$$\begin{aligned} P_c \rightarrow \infty &\Leftrightarrow 3\sqrt{1 - \frac{r_s}{R}} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow R = \frac{9}{8}r_s. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Sin embargo, si la presión diverge en el centro de la estrella no es posible que ésta esté en estado de equilibrio, lo que impone una cota en el radio de la estrella tal que la presión central sea finita

$$R > \frac{9}{8}r_s = \frac{9GM}{4c^2}. \quad (2.2.11)$$

2.3. Solución para un gas degenerado de Fermi

Proponiendo el cambio de variables $r \rightarrow x$, $M \rightarrow m$, dado por

$$r = ax, \quad M = bm, \quad (2.3.1)$$

donde m es la función adimensional para la masa y x es el parámetro adimensional del radio. Haciendo uso de la ecuaciones de estado del gas degenerado de Fermi (A.1.15) y (A.1.16), la ecuación (2.1.2) se reescribe como

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} = & -\frac{4G}{axc^2} \left(\frac{4\pi a^3 K^2}{3c^2} \right) \left(x - \frac{2Gb}{ac^2} m \right)^{-1} \left(\sinh(t) - 2 \sinh\left(\frac{t}{2}\right) \right) \\ & \times \left[\left(\frac{bc^2}{4\pi a^3 K} \right) m + \frac{x^3}{3} (\sinh(t) - 8 \sinh\left(\frac{t}{2}\right) + 3t) \right], \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

de la cual se puede despejar una ecuación para t si usamos la siguiente relación

$$\frac{dP}{dr} = a^{-1} \frac{dP}{dt} \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = a \frac{dP}{dr} \left(\frac{dP}{dt} \right)^{-1}. \quad (2.3.3)$$

Reemplazando (A.1.15) y (2.3.2) en (2.3.3), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} = & -\frac{4G}{axc^2} \left(\frac{4\pi a^3 K}{c^2} \right) \left(x - \frac{2Gb}{ac^2} m \right)^{-1} \left(\frac{\sinh(t) - 2 \sinh(\frac{t}{2})}{\cosh(t) - 4 \cosh(\frac{t}{2}) + 3} \right) \\ & \times \left[\left(\frac{bc^2}{4\pi a^3 K} \right) m + \frac{x^3}{3} (\sinh(t) - 8 \sinh\left(\frac{t}{2}\right) + 3t) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Por otra parte, de las ecuaciones (1.2.4) y (A.1.16) se puede despejar una ecuación para la masa en función del parámetro t

$$\frac{dm}{dx} = \left(\frac{4\pi a^3 K}{bc^2} \right) x^2 (\sinh(t) - t). \quad (2.3.5)$$

Debido a que a y b aún no han sido determinados, es posible imponer

$$\frac{4\pi a^3 K}{bc^2} \stackrel{!}{=} 1, \quad \frac{2Gb}{ac^2} \stackrel{!}{=} 1,$$

con tal de simplificar las ecuaciones anteriores. Despejando los valores de a y b

$$a = \left(\frac{8\pi GK}{c^4} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{c^2}{2G} \left(\frac{8\pi GK}{c^4} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3.6)$$

el sistema queda de la forma

$$\frac{dm}{dx} = x^2(\sinh(t) - t), \quad (2.3.7)$$

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{2}{x(x-m)} \left(\frac{\sinh(t) - 2\sinh\left(\frac{t}{2}\right)}{\cosh(t) - 4\cosh\left(\frac{t}{2}\right) + 3} \right) \left[m + \frac{x^3}{3}(\sinh(t) - 8\sinh\left(\frac{t}{2}\right) + 3t) \right], \quad (2.3.8)$$

con condiciones de borde

$$t(x=0) = t_i, \quad t(x=x_f) = 0, \quad m(x=0) = 0, \quad (2.3.9)$$

donde t_i es el valor de t que define la presión central y la densidad central y x_f es el radio adimensional total de ésta.

2.3.1. Solución numérica

Integrando numéricamente el sistema compuesto por (2.3.7) y (2.3.8) con las condiciones de borde (2.3.9) se obtienen soluciones de $t(x)$, $m(x)$ dependiendo de la condición inicial t_i para $x = 0$ (centro de la estrella). A continuación se presentan los módulos implementados para la correspondiente integración numérica en lenguaje Python (para el caso de RG)

```
from numpy import *
from scipy.integrate import odeint, quad, solve_ivp
from scipy.special.cython_special import j0, j1, y0, y1

#Constantes Físicas útiles *
G = 6.6743*10**(-11) #[m^3 Kg^-1 s^-2]
h = 6.626*10**(-34) #[J s] = [m^2 Kg s^-1]
```



```

c = 299792458 #[m s^-1]
m_n = 1.6749*10**(-27) #[Kg]
Mo = 1.989*10**(30) #[Kg]

kappa = 8*pi*G/c**4
K = pi*(m_n**4)*(c**5)/(4*h**3) #Constante K [N/m^2]
a = sqrt(2)/sqrt(K*kappa) #[m]
b = (8*sqrt(2)*pi)/(sqrt(K*kappa)*kappa*c**2) #[Kg]

```

Para integrar el sistema propuesto se define la función

```

# Solución Numérica
def Sol(t0):
    y0 = [0.,t0] # m, t
    x = linspace(1.0e-30, 6., 10**6)

    def dy(x, y):
        #def dy(y, x, y0):
            m = y[0]
            t = y[1]

        # Funciones Sigma
            sigma = sinh(t) - t
            Sigma = (sinh(t) - 8*sinh(t/2) + 3*t)/3

        #EDOs
            # dmdx
            dmdx = x**2 *sigma

            # dtdx
            dtdx = - 3*(Sigma + sigma)*(Sigma*x**3 + m)
                    / (2*x*(x - 2*m) *(cosh(t/2) - 1)**2)

        return(dmdx, dtdx)

    x_span = [x[0], x[-1]]
    sol = solve_ivp(lambda x, y: dy(x, y),
                    x_span, y0, method= 'RK45', t_eval = x,
                    rtol = 10**-6, atol = 10**-12)

    x1 = sol.t
    m = sol.y[0]
    t = sol.y[1]
    P = K*(sinh(t) - 8*sinh(t/2) + 3*t)/3
    rho = (K/c**2)*(sinh(t) - t)

```

```
return x1, m, t, P, rho
```

donde “**RK45**” es el método de integración numérica que se va a usar (referencia en SciPy). La figura 2.3.1 muestra algunos ejemplos de soluciones obtenidas con el código anterior

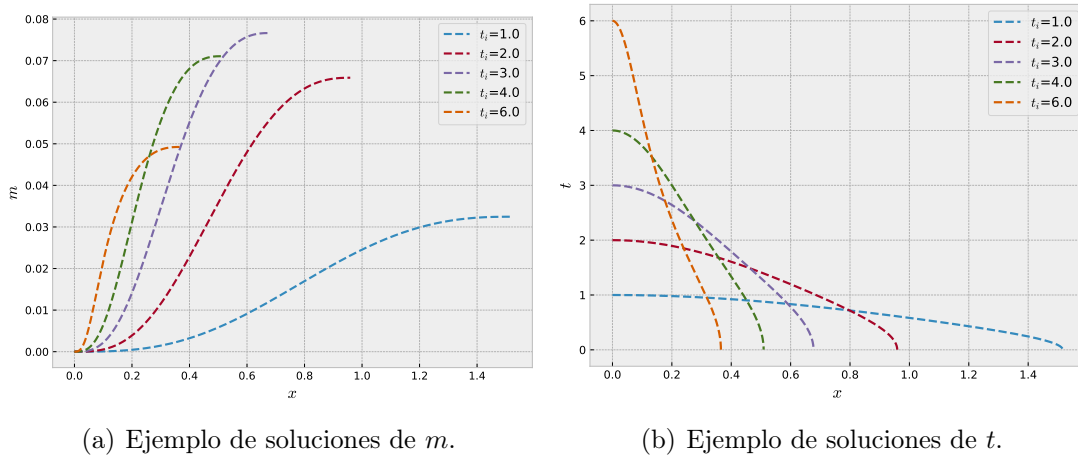
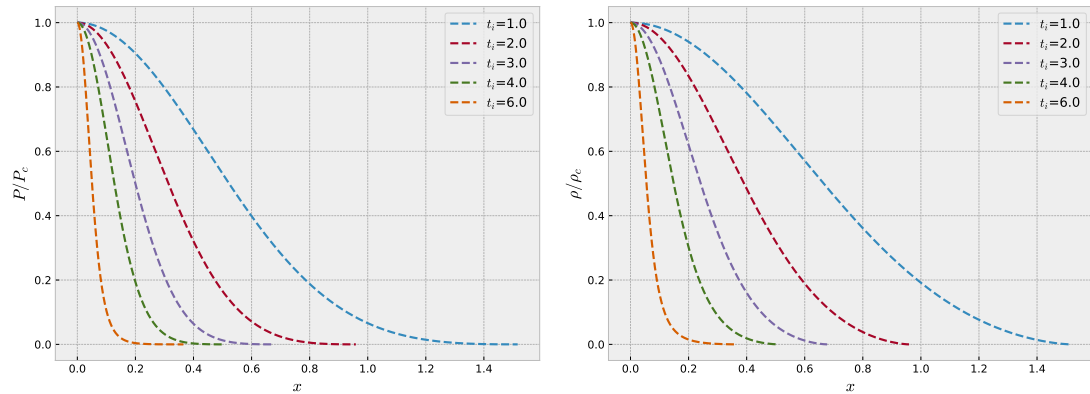


Figura 2.3.1: Ejemplo de soluciones de m y t en Relatividad General. Cada valor inicial t_i define una presión y densidad central distinta, de acuerdo a las ecuaciones (A.1.15) u (A.1.16), respectivamente. Como se aprecia en la primera gráfica, la solución con mayor masa se obtiene con cerca de $t_i = 3.0$.

con los cuales se pueden obtener las soluciones de la presión y densidad de la figura 2.3.2. Tomando distintos valores de $t(0) = t_i$, donde cada valor de t_i define una presión y densidad central distinta, es posible hacerse una idea de en qué rango se obtienen soluciones válidas para las ecuaciones.



(a) Ejemplo de soluciones de la presión.

(b) Ejemplo de soluciones de la densidad.

Figura 2.3.2: Ejemplo de soluciones de P y ρ en Relatividad General.

Así, considerando $t_i \in [0.1, 12]$ como el intervalo de valores iniciales para el parámetro t , siendo que para cada uno de estos valores existe una solución aceptable de las ecuaciones (2.3.7) y (2.3.8). Los valores de masa, densidad y radio para la estrella de neutrones son entonces calculados con el siguiente código que restaura las unidades a los valores finales de R y M

```
def EER(t0):
    x, m, t, P, rho = Sol(t0)

    xf = x[-1]
    mf = m[-1]

    R = a*xf *1e-3           # Radio total [Km]
    M = b*mf                 # Masa total [Kg]
    rhoc = rho[0]           # Densidad central
    rhom = M/(4*pi*R**3 /3) # Densidad media
    return R, M, rhoc, rhom
```

Una forma de ver si la solución es físicamente viable es comprobando si la velocidad del sonido dentro de la estrella satisface las condiciones de micro-estabilidad y causalidad [1], es decir

$$0 < \frac{dP}{d\rho} < c^2, \quad (2.3.10)$$

y si la compacticidad de la estrella es menor que el límite de compacticidad de Buchdahl (*Buchdahl compactness limit*) para fluidos estáticos y esféricamente simétricos [1]

$$2\mathcal{C} = \frac{2G\mathcal{M}}{Rc^2} < 8/9, \quad (2.3.11)$$

el cual marca un límite entre estrellas y agujeros negros. Como es de esperar las soluciones de RG satisfacen ambos límites.

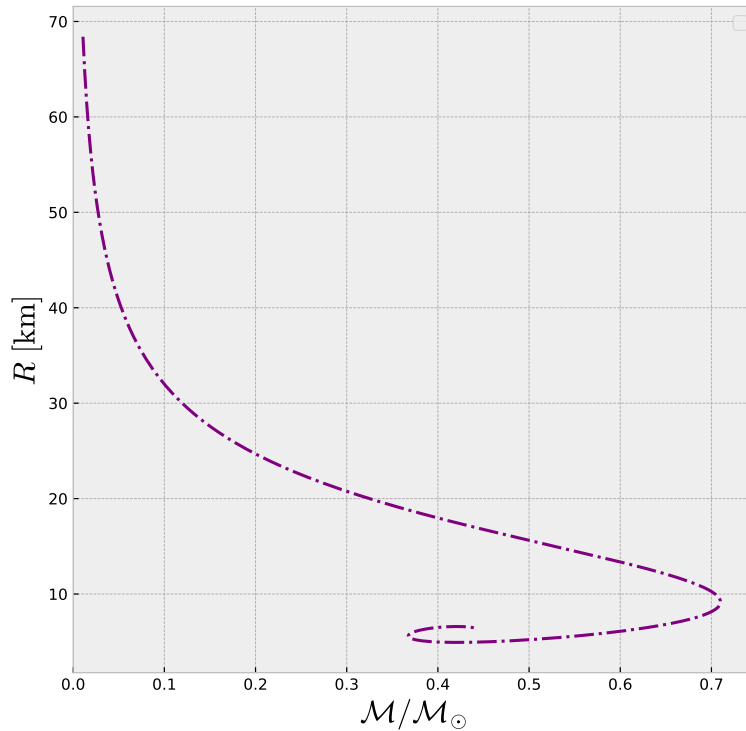


Figura 2.3.3: Relación Masa-Radius para estrellas de neutrones en el modelo de RG. Cada punto corresponde solución de las ecuaciones(2.3.7) y (2.3.8) y representa una estrella de masa \mathcal{M} y radio R .

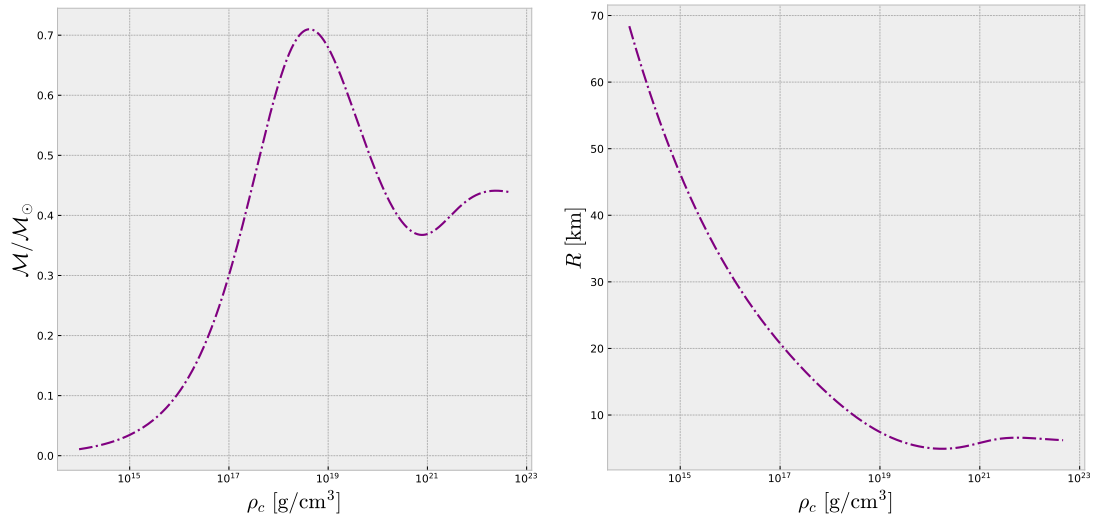
Las estrellas compuestas por un fluido perfecto pueden pasar de una configuración estable a inestable con respecto a cualquier modo de oscilación radial sólo en el valor de densidad central en que la masa está en equilibrio estacionario,

$$\frac{d\mathcal{M}(\rho_c)}{d\rho_c} = 0, \quad (2.3.12)$$

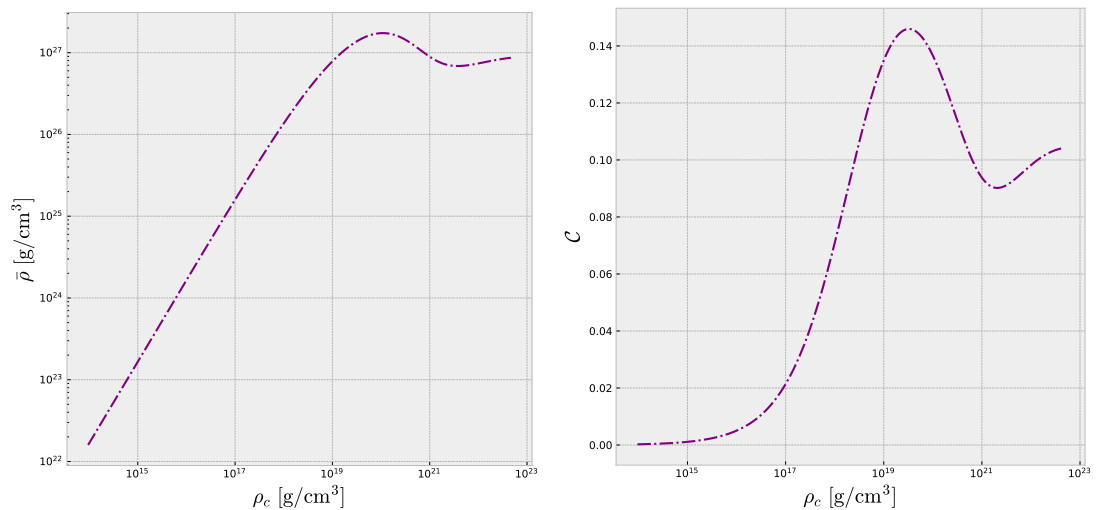
por lo que las configuraciones de equilibrio estables deben satisfacer la desigualdad

$$\frac{d\mathcal{M}(\rho_c)}{d\rho_c} > 0, \tag{2.3.13}$$

siendo esta una condición necesaria, pero no suficiente, para la estabilidad [7].



(a) Relación entre la densidad central y la masa para estrellas de neutrones en el modelo de RG. (b) Relación entre la densidad central y el radio para estrellas de neutrones en el modelo de RG.



(c) Relación entre la densidad central y la densidad media para estrellas de neutrones en el modelo de RG. (d) Relación entre la densidad central y la compactidad para estrellas de neutrones en el modelo de RG.

Figura 2.3.4: Relación Masa, radio y densidad para estrellas de neutrones en Relatividad General.

Cada punto en los gráficos de 2.3.4 corresponde a una solución particular de las ecuaciones (2.3.7) y (2.3.8). En este caso existe más de un valor de radio asociado a cada masa dentro del intervalo aproximado $[0.36M_{\odot}, 0.71M_{\odot}]$, pero solo una de ellas es estable, por lo que en este intervalo las estrellas de mayor radio son más estables que las estrellas de menor radio dada una misma masa [1].

De los gráficos anteriores se destaca el límite superior de la masa para las estrellas de neutrones, cuyo valor aproximado es de $0.71M_{\odot}$ con radios en torno a los 9.12 km. Esta masa corresponde al *límite de Oppenheimer-Volkof* y es equivalente al límite de Chandrasekhar que se obtiene en el modelo newtoniano.

Capítulo 3

Equilibrio Estelar en Einsteinian Cubic Gravity

3.1. Motivación: Teorías de curvaturas altas

La teoría de Relatividad General ha superado con éxito casi todos los test observacionales realizados, no obstante quedan varios problemas importantes sin resolver. Un problema significativo es la distribución requerida de materia-energía normal versus materia-energía oscura en el Universo bajo el esquema gravitatorio actual. Localmente, otra pregunta abierta está relacionada con las velocidades de rotación de las estrellas en los brazos de una galaxia espiral, que requiere un halo de materia oscura para ser consistente con RG.

Además, intentando encontrar una descripción cuántica consistente de la gravedad, muchos han considerado que la teoría de la gravedad de Einstein es una teoría efectiva de baja energía de una teoría más fundamental, presumiblemente compatible con una descripción cuántica. En este sentido es natural considerar modificaciones en la acción de Einstein-Hilbert agregando términos de potencias mayores en la curvatura [26]. Además, términos con potencias más altas en la curvatura parecen ser necesarios para tener una teoría cuántica de la gravedad renormalizable [27]. Otra característica interesante de la inclusión de términos de curvatura de mayor grado es la posibilidad de resolver el problema de singularidad de curvatura [28]. Más recientemente, se ha demostrado que el estudio de las

teorías de gravedad de mayor curvatura abre nuevos caminos en los estudios de teorías cuánticas a través del uso de la dualidad AdS/CFT [29].

Un primer paso en esta dirección es considerar la adición de una contribución cuadrática en la acción. En $D = 4$, la acción más general sin derivadas de curvatura contiene los siguientes términos: el lagrangiano de Einstein-Hilbert, la constante cosmológica, un término cuadrático en el tensor de Ricci y el cuadrado del escalar de Ricci. Un término proporcional al cuadrado del tensor de Riemann puede ser ignorado debido a la invariancia topológica del término de Gauss-Bonnet en $4D$ [30].

A orden cúbico, uno de los modelos de gravedad que más destaca es la teoría **Einsteinian Cubic Gravity**. Esto debido a su construcción como una combinación lineal de términos de la curvatura y que satisface las siguientes propiedades [9] :

1. Comparte el espectro de la gravedad de Einstein (sólo se propaga un gravitón sin masa transversal en un espacio-tiempo máximamente simétrico).
2. Los coeficientes relativos de los invariantes de curvatura son los mismos en todas las dimensiones.
3. No es trivial ni topológica en dimensión 4.

Con anterioridad ya se han encontrado y estudiado soluciones de agujeros negros en ECG [10-12], particularmente en $D = 4$. Sin embargo, no existen estudios actuales sobre como esta formulación de la gravedad afecta a la estructura de otros cuerpos celestes, como las estrellas.

3.2. Ecuaciones de Campo

La acción más general de **ECG** para dimensión $D > 4$ es [9]

$$S_{\text{ECG}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{|g|} (R - 2\Lambda + 2\kappa\alpha\chi_4 + 2\kappa^2 [\beta\chi_6 + \lambda\mathcal{P}]) + S_{\text{matter}}, \quad (3.2.1)$$

donde χ_4 y χ_6 son las densidades de Euler en cuatro y seis dimensiones

respectivamente, λ es una constante de acoplamiento y \mathcal{P} es el término cúbico propio de **ECG** [11], definido por

$$\mathcal{P} = 12R_{\mu}^{\rho} R_{\nu}^{\sigma} R_{\rho}^{\alpha} R_{\sigma}^{\beta} R_{\alpha}^{\mu} R_{\beta}^{\nu} + R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} - 12R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\rho} R^{\nu\sigma} + 8R_{\mu}^{\nu} R_{\nu}^{\rho} R_{\rho}^{\mu}. \quad (3.2.2)$$

En $D = 4$ las densidades de Euler desaparecen ya que χ_4 es topológico y $\chi_6 = 0$, pero el término cúbico \mathcal{P} se conserva al no ser trivial ni topológico, por lo que la acción (3.2.1) se reduce a

$$S_{\text{ECG}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{|g|} (R - 2\Lambda + 2\kappa^2 \lambda \mathcal{P}) + S_{\text{matter}}. \quad (3.2.3)$$

De la acción (3.2.3) se obtiene la ecuación de Einstein modificada (ver B.2)

$$\varepsilon_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda + \lambda\bar{P}_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.2.4)$$

con

$$\bar{P}_{\mu\nu} = 2\kappa^2 \left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial R^{\mu}{}_{\rho\sigma\gamma}} R_{\nu\rho\sigma\gamma} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{P} - 2\nabla^{\rho}\nabla^{\sigma} \left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial R^{\mu\rho\sigma\nu}} \right) \right), \quad (3.2.5)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}} = 3 \left[12R_{\nu}{}^{ab}{}_{[\sigma} R_{\rho]b\nu a} + R_{\mu\nu}{}^{ab} R_{ab\rho\sigma} + 4g_{\mu[\rho} R_{\sigma]}{}^{ba}{}_{\nu} R_{ab} \right. \\ \left. - 4g_{\nu[\rho} R_{\sigma]}{}^{ab}{}_{\mu} R_{ab} - 4R_{\mu[\rho} R_{\sigma]\nu} + 4g_{\mu[\rho} R_{\sigma]}{}^a R_{a\nu} - 4g_{\nu[\rho} R_{\sigma]}{}^a R_{a\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Al trazar el tensor $\varepsilon_{\mu\nu}$ dado en (3.2.4) obtenemos

$$R = 4\Lambda + \lambda\bar{P} - \kappa T, \quad (3.2.7)$$

y al reemplazar en la ecuación (3.2.4) obtenemos una ecuación simplificada

$$\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \lambda\tilde{P}_{\mu\nu} - \kappa\tilde{T}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda = 0. \quad (3.2.8)$$

con

$$\tilde{P}_{\mu\nu} = \bar{P}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\bar{P}, \quad \tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T. \quad (3.2.9)$$

Para construir un modelo estático y esféricamente simétrico es necesario usar nuevamente el tensor de *energía-momentum* (2.0.3), pero ahora es más conveniente escribir la métrica como

$$ds^2 = -e^{\chi(r,\lambda)}f(r,\lambda)(cdt)^2 + \frac{1}{f(r,\lambda)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (3.2.10)$$

de la cual se obtienen las soluciones de Relatividad General cuando $\lambda = 0$.

Usando las combinaciones $\bar{R}_0^0 - \bar{R}_1^1 \mp \bar{R}_2^2$ del tensor (3.2.8), tal como se hizo en el capítulo 2, se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{2}{r}f' + \frac{2}{r^2}(f-1) + 2\kappa\rho c^2 + 2\Lambda \\ & - \frac{2\kappa^2\lambda}{r^5} \left[12r^2f(rf\chi' - rf' + 2f - 2)f''' + 48rf\left(\frac{1}{4}r^2ff'' + r^2f^2\chi'^2 + \frac{3}{8}rf(3rf' \right. \right. \\ & - 2f + 2)\chi' + \frac{1}{4}r^2f'^2 - \frac{1}{2}r(f-1)f' - \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f)\chi'' - 12r^3ff''^2 + 6rf\left(5r^2f\chi'^2 \right. \\ & + 4r(2rf' - f + 1)\chi' + 8rf' - 8f + 8)f'' + 6r^3f^3\chi'^4 + 3r^2f^2(19rf' - 2f + 2)\chi'^3 \\ & + 3rf\left(19r^2f'^2 - 2r(10f - 7)f' + 4f^2 - 4f\right)\chi'^2 + 12\left(r^3f'^3 - 2r^2(2f - 1)f'^2 \right. \\ & \left. \left. - 2rf(2f - 1)f' + 4f^3 - 4f^2\right)\chi' - 12\left(rf(4f - 1)f' - 4f^2 + 4f\right)f' \right], \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{2}{r}(f\chi' + f') - \frac{2}{r^2}(f-1) + 2\kappa P - 2\Lambda \\
& + \frac{2\kappa^2\lambda}{r^5} \left[12r^2 f^2 (rf\chi' - rf' + 2f - 2) \chi''' + 12r^2 f (rf\chi' - rf' + 2f - 2) f''' \right. \\
& + 12r^3 f^3 \chi''^2 + 12rf \left(3r^2 f^2 \chi'^2 + rf(5f' + 2f - 2) \chi' - 2(f' - f)(f' - 2f + 2) \right) \chi'' \\
& - 12r^3 f f''^2 + 12rf \left(3r^2 f \chi'^2 - r(f' - 6f + 4) \chi' + 4rf' - 4f + 4 \right) f'' + 15r^3 f^3 \chi'^4 \\
& + 6r^2 f^2 (10f' - 2f + 1) \chi'^3 + 3rf \left(15r^2 f'^2 - 2r(2f - 1)f' - 16f^2 + 4 \right) \chi'^2 \\
& \left. 12 \left(r^3 f'^3 + 2r^2 f'^2 - 4rf(3f - 2)f' + 4f^3 - 4f^2 \right) \chi' - 12 \left(r(4f - 1)f' - 4f^2 + 4f \right) f' \right], \tag{3.2.12}
\end{aligned}$$

que en conjunto con la ley de conservación $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, que implica

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} = fP' + \frac{1}{2}(\rho c^2 + P)f' + \frac{1}{2}f(\rho c^2 + P)\chi' = 0, \tag{3.2.13}$$

permiten despejar un sistema de ecuaciones más simple con el que trabajar. Para encontrar soluciones de este sistema es conveniente reescribir la función $f(r, \lambda)$ como

$$f(r, \lambda) := 1 - \frac{\kappa c^2 M(r, \lambda)}{4\pi r}, \tag{3.2.14}$$

donde la función $M(r, \lambda)$ determina el valor asintótico de la masa.

3.3. Expansión a primer orden en λ

Consideramos que en la acción el término $2\kappa^2\lambda\mathcal{P}$ es pequeño comparado con la curvatura R y la constante cosmológica Λ . Luego, proponemos una expansión en términos de λ para los valores de las variables que describen el sistema, de la forma

$$\chi(r, \lambda) = \chi_0(r) + \chi_1(r) + \mathcal{O}(\lambda^2), \tag{3.3.1}$$

$$P(r, \lambda) = P_0(r) + P_1(r) + \mathcal{O}(\lambda^2), \tag{3.3.2}$$

$$\rho(r, \lambda) = \rho_0(r) + \rho_1(r) + \mathcal{O}(\lambda^2), \tag{3.3.3}$$

$$M(r, \lambda) = M_0(r) + M_1(r) + \mathcal{O}(\lambda^2), \tag{3.3.4}$$

donde χ_1 , P_1 , ρ_1 y M_1 son las correspondientes perturbaciones de primer orden en λ . Substituyendo las expansiones (3.3.1)–(3.3.4) en las ecuaciones (3.2.11)–(3.2.13) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dM_0}{dr} = \frac{4\pi r^2 (\kappa c^2 \rho_0 + \Lambda)}{\kappa c^2}, \quad (3.3.5)$$

$$\frac{d\chi_0}{dr} = \frac{4\pi \kappa r^2 (\rho_0 c^2 + P_0)}{(4\pi r - \kappa c^2 M_0)}, \quad (3.3.6)$$

$$\frac{dP_0}{dr} = -\frac{\kappa (\rho_0 c^2 + P_0) (M_0 c^2 + 4\pi r^3 (P_0 - \Lambda/\kappa))}{2r (4\pi r - \kappa c^2 M_0)}, \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_1}{dr} = & \frac{4\pi \kappa^2 c^2 r^2 (\rho_0 c^2 + P_0) M_1}{(4\pi r - \kappa c^2 M_0)^2} + \frac{4\pi \kappa r^2 (\rho_1 c^2 + P_1)}{4\pi r - \kappa c^2 M_0} \\ & - \frac{3\kappa^3 \lambda}{2\pi r^3 (4\pi r - \kappa c^2 M_0)} \left[\left(\kappa c^2 M_0 + 4\pi r^3 (\kappa c^2 \rho_0 + 2\kappa P_0 - \Lambda) \right) \left(4\pi r^3 (2\kappa c^2 \rho_0 + \kappa P_0 + \Lambda) \right. \right. \\ & - 3\kappa c^2 M_0 \left. \right) P_0' + 2rc^2 (4\pi r - \kappa c^2 M_0) \left(3\kappa c^2 M_0 - 4\pi r^3 (\kappa c^2 \rho_0 + 2\kappa P_0 - \Lambda) \right) \rho_0'' \\ & - 16\pi \kappa c^4 r^4 (4\pi r - \kappa c^2 M_0) \rho_0'^2 + \left(3\kappa^2 c^4 M_0^2 + 8\pi \kappa c^2 r^3 (3\kappa \rho_0 + 5\kappa P_0 - 2\Lambda) M_0 \right. \\ & + 16\pi^2 r^6 \left(5\kappa^2 P_0^2 + 2\kappa (3\kappa c^2 \rho_0 - 2\Lambda) P_0 + 2\kappa^2 c^4 \rho_0^2 - 2\kappa c^2 \rho_0 \Lambda + \Lambda^2 \right) \\ & - 96\pi^2 \kappa r^4 (\rho_0 c^2 + P_0) \left. \right) \rho_0' c^2 + \frac{2(\rho_0 c^2 + P_0)}{r (4\pi r - \kappa c^2 M_0)} \left(11\kappa^3 c^6 M_0^3 - 2\pi \kappa^2 c^4 r \left((25\kappa c^2 \rho_0 \right. \right. \\ & + 21\kappa P_0 + 4\Lambda) r^2 + 23 \left. \right) M_0^2 - 8\pi^2 \kappa c^2 r^4 \left((22\kappa^2 P_0^2 + 11\kappa (\kappa c^2 \rho_0 - 3\Lambda) P_0 \right. \\ & - 3\kappa^2 c^4 \rho_0^2 - 17\kappa c^2 \rho_0 \Lambda + 8\Lambda^2) r^2 + 2(11\kappa c^2 \rho_0 + 2\kappa P_0 + 9\Lambda) \left. \right) M_0 \\ & + 32\pi^3 r^9 (\kappa P_0 - \Lambda) \left(\kappa^2 c^4 \rho_0^2 + 2\kappa c^2 \rho_0 \Lambda - 3\kappa^2 P_0^2 + 6\kappa P_0 \Lambda - 2\Lambda^2 \right) \\ & \left. \left. - 64\pi^3 r^7 \left(\kappa^2 c^4 \rho_0^2 - 2\kappa c^2 (2\kappa P_0 - 3\Lambda) \rho_0 - 4\kappa^2 P_0^2 + 4\kappa P_0 \Lambda + \Lambda^2 \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dM_1}{dr} = & 4\pi r^2 \rho_1 + \frac{3\kappa^2 \lambda}{4\pi^2 r^3} \left[\kappa^2 c^4 \chi'_0 M_0'^3 + \kappa c^2 \left(\frac{19}{4} (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) \chi_0'^2 \right. \right. \\
& - \frac{5}{r} (3\kappa c^2 M_0 - 8\pi r) \chi_0' + (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) \chi_0'' - \frac{2}{r^2} (11\kappa c^2 M_0 - 42\pi r) \left. \right) M_0'^2 \\
& + \left(\frac{19}{4} (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r)^2 \chi_0'^3 - \frac{13}{2r} (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) (3\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) \chi_0'^2 \right. \\
& + \left(4\kappa c^2 (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) M_0'' + \frac{9}{2} \kappa c^2 (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r)^2 \chi_0'' + \frac{1}{r^2} (33\kappa^2 c^4 M_0^2 \right. \\
& - 120\pi \kappa c^2 M_0 r + 64\pi^2 r^2) \left. \right) \chi_0' + \frac{11}{r} \kappa c^2 (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) M_0'' \\
& - \frac{2}{r} (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) (3\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) \chi_0'' - \kappa c^2 (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) M_0''' \\
& + \frac{4}{r^3} \kappa c^2 (17\kappa c^2 M_0 - 66\pi r) M_0 \left. \right) M_0' + \frac{1}{2\kappa c^2} (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r)^3 \chi_0'^4 \\
& - \frac{21}{4r} (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r)^2 \chi_0'^3 + \left(\frac{5}{2} (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r)^2 M_0'' + \frac{4}{\kappa c^2} (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r)^3 \chi_0'' \right. \\
& + \frac{3}{4r^2} (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) (21\kappa c^2 M_0 - 40\pi r) \left. \right) \chi_0'^2 + \left((\kappa c^2 M_0 - 4\pi r)^2 M_0''' \right. \\
& - \frac{3}{r} (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) (3\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) M_0'^2 - \frac{15}{2r} (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r)^2 \chi_0'' \\
& - \frac{3}{r^3} \kappa c^2 (5\kappa c^2 M_0 - 16\pi r) M_0^2 \left. \right) \chi_0' - \kappa c^2 (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) M_0''^2 \\
& + \left((\kappa c^2 M_0 - 4\pi r)^2 \chi_0'' - \frac{21}{r^2} \kappa c^2 M_0 (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r) \right) M_0'' \\
& + \frac{3}{r^2} \kappa c^2 M_0^2 (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r)^2 \chi_0'' + \frac{3}{r} \kappa c^2 M_0 (\kappa c^2 M_0 - 4\pi r)^2 \chi_0''' \\
& \left. - \frac{2}{r^4} \kappa c^2 M_0^2 (23\kappa c^2 M_0 - 90\pi r) \right],
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP_1}{dr} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa c^2}{4\pi r - \kappa c^2 M_0} \left(M_0' - \frac{M_0}{r} \right) + \chi_0' \right) (\rho_1 c^2 + P_1) \\
& + \frac{\kappa c^2}{4\pi r - \kappa c^2 M_0} \left(P_0' + \frac{1}{2} (\rho_0 c^2 + P_0) \left(\chi_0' - \frac{1}{r} \right) \right) M_1 \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{M_1'}{4\pi r - \kappa c^2 M_0} - \chi_1' \right) (\rho_0 c^2 + P_0) .
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

La suma de (3.3.7) con (3.3.10) determina la ecuación de **Tolman-Oppenheimer-**

Volkoff modificada

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dr} = & -\frac{\kappa(\rho_0 c^2 + P_0)(M_0 c^2 + 4\pi r^3(P_0 - \Lambda/\kappa))}{2r(4\pi r - \kappa c^2 M_0)} + \frac{1}{2} \left(\frac{M'_1}{4\pi r - \kappa c^2 M_0} - \chi'_1 \right) (\rho_0 c^2 + P_0) \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa c^2}{4\pi r - \kappa c^2 M_0} \left(M'_0 - \frac{M_0}{r} \right) + \chi'_0 \right) (\rho_1 c^2 + P_1) \\
& + \frac{\kappa c^2}{4\pi r - \kappa c^2 M_0} \left(P'_0 + \frac{1}{2} (\rho_0 c^2 + P_0) \left(\chi'_0 - \frac{1}{r} \right) \right) M_1.
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Substituyendo las ecuaciones (3.3.5)-(3.3.7) en (3.3.9) y (3.3.5)-(3.3.8) en (3.3.10) eliminamos la dependencia con respecto a χ_0 y χ_1 , obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{dM_1}{dr} = & 4\pi r^2 \rho_1 - 2\kappa^2 \lambda \left[\frac{6\kappa}{\pi r^2} (4\pi r - \kappa c^2 M_0) \left(\frac{3}{4} M_0 c^2 - \pi r^3 \left(2\rho_0 c^2 + P_0 + \frac{\Lambda}{\kappa} \right) \right) \frac{d^2 \rho_0}{dr^2} \right. \\
& - 12\kappa c^2 r (4\pi r - \kappa c^2 M_0) \left(\frac{d\rho_0}{dr} \right)^2 + 6 \left(4\pi r^3 \Lambda^2 - (7\kappa c^2 M_0 + 8\pi \kappa r^3 P_0 - 12\pi r) \Lambda \right. \\
& + 4\pi \kappa^2 r^3 (\rho_0^2 c^4 + 2P_0 \rho_0 c^2 + 2P_0^2) + 4\pi \kappa r (\rho_0 c^2 - 2P_0) - \kappa^2 (2\rho_0 c^2 - 5P_0) M_0 c^2 \\
& - \left. \frac{9\kappa M_0 c^2}{r^2} + \frac{3\kappa^2 M_0^2 c^4}{\pi r^3} \right) \frac{d\rho_0}{dr} - \frac{3}{\pi c^2 (4\pi r - \kappa c^2 M_0)} \left(16\pi^3 r^5 (\rho_0 c^2 + P_0) \Lambda^3 \right. \\
& - 16\pi^2 \left(\pi \kappa (\rho_0 c^2 + P_0) (2\rho_0 c^2 + 5P_0) r^5 + 2\pi (\rho_0 c^2 + P_0) r^3 + \frac{3}{4} \kappa (\rho_0 c^2 + P_0) r^2 M_0 c^2 \right. \\
& + \frac{10\pi r}{\kappa} - \frac{11}{2} \pi^2 M_0 c^2 + \frac{3\kappa}{4\pi r} M_0^2 c^4 \left. \right) \Lambda^2 + 8 \left(2\pi^3 \kappa^2 P_0 (\rho_0 c^2 + P_0) (4\rho_0 c^2 + 7P_0) r^5 \right. \\
& - 4\pi^3 \kappa (\rho_0 c^2 + P_0) (5\rho_0 c^2 + 3P_0) r^3 + \pi^2 \kappa^2 (\rho_0 c^2 + P_0) (7\rho_0 c^2 + 10P_0) r^2 M_0 c^2 \\
& - 40\pi^3 r \rho_0 c^2 + 2\pi^2 \kappa (14\rho_0 c^2 + 3P_0) M_0 c^2 - \frac{\pi \kappa^2}{8r} (29\rho_0 c^2 + 5P_0) M_0^2 c^4 + \frac{30\pi^2}{r^2} M_0 c^2 \\
& - \frac{31\pi \kappa}{2r^3} M_0^2 c^4 + \frac{2\kappa^2}{r^4} M_0^3 c^6 \left. \right) \Lambda - 16\pi^3 \kappa^3 P_0^2 (\rho_0 c^2 + P_0) (2\rho_0 c^2 + 3P_0) r^5 \\
& + 32\pi^3 \kappa^2 P_0 (\rho_0 c^2 + P_0) (5\rho_0 c^2 + 4P_0) r^3 - 4\pi^2 \kappa^3 P_0 (\rho_0 c^2 + P_0) (14\rho_0 c^2 + 17P_0) r^2 M_0 c^2 \\
& - 160\pi^3 \kappa r \rho_0^2 c^4 + 8\pi^2 \kappa^2 \rho_0 (17\rho_0 c^2 + 6P_0) M_0 c^4 - \frac{\pi \kappa^3}{r} \left(26\rho_0^2 c^4 + 23P_0 \rho_0 c^2 + 9P_0^2 \right) M_0^2 c^4 \\
& + \frac{240\pi^2 \kappa}{r^2} \rho_0 M_0 c^4 - \frac{2\pi \kappa^2}{r^3} (71\rho_0 c^2 + 9P_0) M_0^2 c^4 - \frac{\kappa^3}{4r^4} (79\rho_0 c^2 + 15P_0) M_0^3 c^6 - \frac{90\pi \kappa}{r^5} M_0^2 c^4 \\
& \left. + \frac{91\kappa^2}{2r^6} M_0^3 c^6 - \frac{23\kappa^3}{4\pi r^7} M_0^4 c^8 \right],
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP_1}{dr} = & -\frac{2\pi\kappa c^2(\rho_0 c^2 + P_0)}{(4\pi r - \kappa c^2 M_0)^2} (\kappa r^2 P_0 - r^2 \Lambda + 1) M_1 - \frac{2\pi\kappa c^2 r^2 (\rho_0 c^2 + P_0)}{4\pi r - \kappa c^2 M_0} \rho_1 \\
& - \frac{(\rho_1 c^2 + P_1)}{2r(4\pi r - \kappa c^2 M_0)} \left(\kappa c^2 M_0 + 4\pi r^3 (\kappa c^2 \rho_0 + 2\kappa P_0 - \Lambda) \right) \\
& - \frac{3\kappa^2 \lambda (\rho_0 c^2 + P_0)}{\pi^2 r^7 (4\pi r - \kappa c^2 M_0)^2} \left[2\pi\kappa c^2 r^4 (4\pi r - \kappa c^2 M_0) \left(21\kappa^2 c^4 M_0^2 - 8\pi\kappa c^2 r (5\kappa c^2 r^2 \rho_0 \right. \right. \\
& + 5r^2 \Lambda + 9) M_0 - 16\pi^2 r^4 \left(2\kappa c^2 (\kappa r^2 P_0 - r^2 \Lambda - 4) \rho_0 + \kappa^2 r^2 P_0^2 - r^2 \Lambda^2 - \kappa P_0 \right. \\
& \left. \left. - 3\Lambda \right) \frac{d\rho_0}{dr} - 46\kappa^4 c^8 M_0^4 + \pi\kappa^3 c^6 r \left(111\kappa c^2 r^2 \rho_0 - 17\kappa r^2 P_0 + 128r^2 \Lambda + 364 \right) M_0^3 \right. \\
& - 4\pi^2 \kappa 2c^4 r^2 \left(3\kappa^2 c^4 r^4 \rho_0^2 - \kappa c^2 r^2 (37\kappa r^2 P_0 - 43r^2 \Lambda - 228) \rho_0 - 16\kappa^2 r^4 P_0^2 \right. \\
& \left. - 5\kappa r^2 (r^2 \Lambda + 4) P_0 + 8r^4 \Lambda^2 + 248r^2 \Lambda + 60 \right) M_0^2 - 16\pi^3 \kappa c^2 r^5 \left(4\kappa^3 c^6 r^4 \rho_0^3 \right. \\
& + 6\kappa^2 c^4 r^2 (\kappa r^2 P_0 + r^2 \Lambda - 4) \rho_0^2 - \kappa c^2 \left(5\kappa^2 r^4 P_0^2 - 2\kappa r^2 (11r^2 \Lambda + 14) P_0 + 5r^4 \Lambda^2 \right. \\
& \left. + 76r^2 \Lambda + 120 \right) \rho_0 - 7\kappa^3 r^4 P_0^3 + 8\kappa^2 r^2 (2r^2 \Lambda + 1) P_0^2 + \kappa r^2 \Lambda (12 - 5r^2 \Lambda) P_0 \\
& \left. - 44r^2 \Lambda^2 - 120 \right) M_0 + 64\pi^4 r^8 \left(4\kappa^3 c^6 r^4 \rho_0^3 + \kappa^2 c^4 \left(\kappa^2 r^4 P_0^2 - 2\kappa r^2 (r^2 \Lambda - 4) P_0 \right. \right. \\
& \left. \left. + r^4 \Lambda^2 + 4r^2 \Lambda - 20 \right) \rho_0^2 + \kappa c^2 \left(3\kappa^3 r^4 P_0^3 - \kappa^2 r^2 (7r^2 \Lambda - 4) P_0^2 + \kappa r^2 \Lambda (5r^2 \Lambda + 8) P_0 \right. \right. \\
& \left. \left. - r^4 \Lambda^3 - 40\Lambda \right) \rho_0 + 2\kappa^4 r^4 P_0^4 - 5\kappa^3 r^4 \Lambda P_0^3 + 4\kappa^2 r^2 (r^2 \Lambda + 1) P_0^2 - \kappa r^4 \Lambda^3 P_0 - 20\Lambda^2 \right) \left. \right].
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

3.3.1. Radio de la estrella

Dado que las soluciones propuestas en (3.3.1)-(3.3.4) son una perturbación de las soluciones de Relatividad General, podríamos suponer que el radio de la estrella se comporta de manera similar, es decir, sea R el radio de una estrella en ECG tal que

$$R = R_{\text{GR}} + \Delta R(\lambda), \tag{3.3.14}$$

donde R_{GR} es el radio de la estrella en RG y ΔR es la variación del radio en **ECG** con respecto a RG. De esta manera se tiene que la presión en la superficie es

$$P(R) = P(R_{\text{GR}} + \Delta R) \stackrel{!}{=} 0. \tag{3.3.15}$$

Por otro lado, de (3.3.2) se tiene

$$P(R) = P_0(R_{\text{GR}} + \Delta R) + P_1(R_{\text{GR}} + \Delta R) + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (3.3.16)$$

lo cual al expandir en λ nuevamente queda como

$$P(R) = P(R_{\text{GR}} + \Delta R) = P_0(R_{\text{GR}}) + \lambda P'_0(R_{\text{GR}}) \left(\frac{d}{d\lambda} \Delta R \right)_{\lambda=0} + P_1(R_{\text{GR}}) + \mathcal{O}(\lambda^2) \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.3.17)$$

Dado que tanto P_0 como P'_0 son nulos en $r = R_{\text{GR}}$, esto significa que

$$P_1(R_{\text{GR}}) = 0.$$

Por lo tanto, si el radio R_{GR} es una raíz de la presión en RG entonces también lo es para ECG, a 1.^{er} orden en λ . Debido a que este resultado es independiente del signo de ΔR (R puede ser menor o mayor que R_{GR}), podría existir un radio $R = R_{\text{GR}} - |\Delta R| < R_{\text{GR}}$ que satisfaga (3.3.17). Dado que el radio de la estrella es la menor raíz de la presión (y densidad), entonces es posible concluir que a primer orden λ los radios de las estrellas en ECG pueden ser menor o igual a los de RG, es decir, $R_{\text{ECG}} \leq R_{\text{GR}}$, para un mismo valor de presión y densidad central.

3.3.2. Solución externa y comportamiento asintótico

Fuera de la estrella, es decir en regiones con $r > R$, la presión y densidad se anulan:

$$\begin{aligned} P_0(r) = P_1(r) &= 0, \quad r \geq R, \\ \rho_0(r) = \rho_1(r) &= 0. \end{aligned}$$

En esta región las ecuaciones (3.3.5) y (3.3.6) tienen solución constante

$$M_0(r > R) = \mathcal{M}_0 + \frac{4\pi r^3 \Lambda}{3\kappa c^2}, \quad r > R, \quad (3.3.18)$$

$$\chi_0(r > R) = \chi_0. \quad (3.3.19)$$

Para la masa M_1 , la ecuación (3.3.12) se reduce a

$$\frac{dM_1}{dr} = - \left(\frac{64\pi\kappa r^2 \Lambda^3}{9c^2} + \frac{42\kappa^3 c^2 \Lambda}{\pi r^4} \mathcal{M}_0^2 + \frac{3\kappa^3 c^2 (23\kappa c^2 \mathcal{M}_0 - 90\pi r)}{2\pi^2 r^7} \mathcal{M}_0^2 \right) \lambda, \quad (3.3.20)$$

cuya solución es

$$M_1(r) = \mathcal{M}_1 + \left(-\frac{64\pi\kappa r^3 \Lambda^3}{27c^2} + \frac{14\kappa^3 c^2 \Lambda}{\pi r^3} \mathcal{M}_0^2 - \frac{27\kappa^3 c^2}{\pi r^5} \mathcal{M}_0^2 + \frac{23\kappa^4 c^4}{4\pi^2 r^6} \mathcal{M}_0^3 \right) \lambda, \quad (3.3.21)$$

donde la constante \mathcal{M}_1 contribuye a la masa asintótica como

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1, \quad (3.3.22)$$

es la masa total de la estrella. Para obtener el valor de esta constante evaluamos (3.3.21) en la superficie $r = R$, lo que implica

$$\mathcal{M}_1 = M_1(R) + \left(\frac{64\pi\kappa R^3 \Lambda^3}{27c^2} - \frac{14\kappa^3 c^2 \Lambda}{\pi R^3} \mathcal{M}_0^2 + \frac{27\kappa^3 c^2}{\pi R^5} \mathcal{M}_0^2 - \frac{23\kappa^4 c^4}{4\pi^2 R^6} \mathcal{M}_0^3 \right) \lambda. \quad (3.3.23)$$

Reescribiendo (3.3.18) y (3.3.21) en términos de los radios asociados

$$r_0 = \frac{\kappa c^2 \mathcal{M}_0}{4\pi}, \quad r_1 = \frac{\kappa c^2 \mathcal{M}_1}{4\pi},$$

y reemplazando en (3.2.14), se obtiene

$$f(r, \lambda) = 1 - \frac{(r_0 + r_1)}{r} - \frac{r^2 \Lambda}{3} + \kappa^2 \lambda \left(\frac{16r^2 \Lambda^3}{27} - \frac{56r_0^2 \Lambda}{r^4} + \frac{108r_0^2}{r^6} - \frac{92r_0^3}{r^7} \right), \quad (3.3.24)$$

lo que coincide con la solución de agujero negro para $f(r, \lambda)$ obtenida en [10] a primer orden en λ .

Capítulo 4

Soluciones de la ecuación de TOV modificada para $\Lambda = 0$

4.1. Solución de gas ideal de Fermi

Consideramos a la estrella de neutrones como un gas de Fermi a temperatura cero, tal como se describe en el [Apéndice A](#). Proponiendo

$$t = t_0 + \epsilon t_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.1.1)$$

para el parámetro t , donde $\epsilon = \epsilon(\lambda)$ es una constante perturbativa adimensional con la que parametrizamos las desviaciones con respecto a Relatividad General, se puede expandir [\(A.1.15\)](#) y [\(A.1.16\)](#) en términos de λ

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n0} + P_{n1} + \mathcal{O}(\lambda^2), \\ \rho_n &= \rho_{n0} + \rho_{n1} + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Como consecuencia

$$P_{n0} = K\Sigma_0(x), \quad P_{n1} = Kt_1\Sigma_1(x)\epsilon, \quad (4.1.3)$$

$$\rho_{n0} = \frac{K}{c^2}\sigma_0(x), \quad \rho_{n1} = \frac{K}{c^2}t_1\sigma_1(x)\epsilon, \quad (4.1.4)$$

con

$$\Sigma_0(x) = \frac{1}{3} \left(\sinh(t_0) - 8 \sinh\left(\frac{t_0}{2}\right) + 3t_0 \right), \quad (4.1.5)$$

$$\Sigma_1(x) = \frac{2}{3} \left(\cosh\left(\frac{t_0}{2}\right) - 1 \right)^2, \quad (4.1.6)$$

$$\sigma_0(x) = \sinh(t_0) - t_0, \quad (4.1.7)$$

$$\sigma_1(x) = (\cosh(t_0) - 1). \quad (4.1.8)$$

Es posible simplificar el cálculo haciendo un cambio a la variable adimensional x y las funciones adimensionales m_0, m_1 por medio de

$$r = ax, \quad M_0(r) = b_0 m_0(x), \quad M_1(r) = b_1 m_1(x). \quad (4.1.9)$$

Para recuperar t'_0 y t'_1 hacemos uso de la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{dr} &= a^{-1} \frac{dP_0}{dt_0} \frac{dt_0}{dx} & \Rightarrow & \frac{dt_0}{dx} = a \frac{dP_0}{dr} \left(\frac{dP_0}{dt_0} \right)^{-1}, \\ \frac{dP_1}{dr} &= a^{-1} \left(\frac{\partial P_1}{\partial t_0} \frac{dt_0}{dx} + \frac{\partial P_1}{\partial t_1} \frac{dt_1}{dx} \right) & \Rightarrow & \frac{dt_1}{dx} = \left(a \frac{dP_1}{dr} - \frac{\partial P_1}{\partial t_0} \frac{dt_0}{dx} \right) \left(\frac{\partial P_1}{\partial t_1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Estas ecuaciones pueden ser simplificadas dándole un valor a las constantes a, b_0 y b_1 . Para obtener la notación usada por [5], [1] entre otros, es conveniente usar

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa K}}, \quad b_0 = b_1 = \frac{8\pi\sqrt{2}}{\kappa c^2 \sqrt{\kappa K}}. \quad (4.1.11)$$

Así, las ecuaciones (3.3.5), (3.3.7), (3.3.12) y (3.3.13) se reducen al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dm_0}{dx} = x^2 \sigma_0, \quad (4.1.12)$$

$$\frac{dt_0}{dx} = - \frac{(\sigma_0 + \Sigma_0)(m_0 + x^3 \Sigma_0)}{x(x - 2m_0)\Sigma_1}, \quad (4.1.13)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dm_1}{dx} = & x^2 t_1 \sigma_1 - \frac{6\sigma_1}{x^2} (x - 2m_0) \left(3m_0 - x^3 (\Sigma_0 + 2\sigma_0) \right) \left(\frac{d^2 t_0}{dx^2} \right) \\
& + \frac{6}{x^2} (x - 2m_0) \left(3m_0 (\sigma_0 + t_0) - x^3 (2\sigma_0^2 + (\Sigma_0 + 2t_0)\sigma_0 + t_0 \Sigma_0 + 2\sigma_1^2) \right) \left(\frac{dt_0}{dx} \right)^2 \\
& - \frac{24\sigma_1}{x^3} \left(6m_0^2 + \frac{x}{4} \left(2(5\Sigma_0 - 2\sigma_0)x^2 - 9 \right) m_0 + \frac{x^6}{2} \left(\sigma_0^2 + 2\Sigma_0 \sigma_0 + 2\Sigma_0^2 \right) \right. \\
& - \left. \frac{x^4}{4} (2\Sigma_0 - \sigma_0) \right) \left(\frac{dt_0}{dx} \right) + \frac{6}{x^7 (x - 2m_0)} \left[2\Sigma_0^2 (\sigma_0 + \Sigma_0) (3\Sigma_0 + 2\sigma_0) x^{12} \right. \\
& - 2\Sigma_0 (4\Sigma_0 + 5\sigma_0) (\sigma_0 + \Sigma_0) x^{10} + 2\Sigma_0 (\sigma_0 + \Sigma_0) (17\Sigma_0 + 14\sigma_0) m_0 x^9 + 5\sigma_0^2 x^8 \\
& - 2m_0 \sigma_0 (6\Sigma_0 + 17\sigma_0) x^7 + (18\Sigma_0^2 + 46\Sigma_0 \sigma_0 + 52\sigma_0^2) m_0^2 x^6 - 30\sigma_0 m_0 x^5 \\
& \left. + (18\Sigma_0 + 142\sigma_0) m_0^2 x^4 - (30\Sigma_0 + 158\sigma_0) m_0^3 x^3 + 45m_0^2 x^2 - 182m_0^3 x + 184m_0^4 \right],
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dt_1}{dx} = & - \frac{(\Sigma_0 + \sigma_0)(2x^2 \Sigma_0 + 1)m_1}{(x - 2m_0)^2 \Sigma_1} + \frac{t_1}{\Sigma_1} \left[\frac{1}{48} (\sigma_1 - 3\Sigma_1) (3\Sigma_0 - \sigma_0 - 4t_0) \left(\frac{dt_0}{dx} \right) \right. \\
& - \left. \frac{1}{x(x - 2m_0)} \left((m_0 + x^3(2\Sigma_0 + \sigma_0)) \Sigma_1 + (m_0 + x^3 \Sigma_0) \sigma_1 \right) \right] \\
& + \frac{6\epsilon \sigma_1 (\Sigma_0 + \sigma_0)}{x^3 (x - 2m_0) \Sigma_1} \left(\Sigma_0 (\Sigma_0 + 2\sigma_0) x^6 - (\Sigma_0 + 4\sigma_0) x^4 + 10\sigma_0 m_0 x^3 + 9m_0 x \right. \\
& - 21m_0^2 \left. \right) \left(\frac{dt_0}{dx} \right) + \frac{6(\Sigma_0 + \sigma_0)}{x^7 (x - 2m_0)^2 \Sigma_1} \left[2\Sigma_0 \sigma_0 (\sigma_0 + \Sigma_0) (2\Sigma_0 + \sigma_0) x^{12} \right. \\
& - 2\sigma_0 (\sigma_0 + \Sigma_0)^2 x^{10} - 2m_0 (\sigma_0 + \Sigma_0) (5\Sigma_0^2 - 3\Sigma_0 \sigma_0 - 3\sigma_0^2) x^9 + 5\sigma_0^2 x^8 \\
& + 2m_0 (2\Sigma_0^2 + 7\Sigma_0 \sigma_0 - 6\sigma_0^2) x^7 - 2m_0^2 (12\Sigma_0^2 + 23\Sigma_0 \sigma_0 - \sigma_0^2) x^6 - 30\sigma_0 m_0 x^5 \\
& \left. - 2m_0^2 (5\Sigma_0 - 57\sigma_0) x^4 + 2m_0^3 (7\Sigma_0 - 57\sigma_0) x^3 + 45m_0^2 x^2 - 182m_0^3 x + 184m_0^4 \right],
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

donde hemos definido $\epsilon = \lambda K^2 \kappa^4$ para simplificar las ecuaciones.

4.1.1. Comportamiento cercano al origen

Al expandir la ecuación (4.1.12) en torno a $x = 0$ se puede observar que $m_0(x)$ se comporta como una función cúbica de x , por lo que podemos reescribirla como

$$m_0(x) = \bar{m}_0 x^3 + \tilde{m}_0(x) x^3, \quad (4.1.16)$$

donde \bar{m}_0 es una constante y $\tilde{m}_0(x)$ una nueva función que satisface $\tilde{m}_0(0) = 0$. Reemplazando (4.1.16) en (4.1.12) y evaluando en $x = 0$ se obtiene

$$\bar{m}_0 = \frac{\sigma_0(0)}{3}, \quad \tilde{m}'_0(0) = \frac{\sigma'_0(0)}{4}. \quad (4.1.17)$$

Por su parte, si se expande (4.1.13) cerca del origen se obtiene

$$\frac{dt_0}{dx} = -\frac{(\Sigma_0(0) + \bar{m}_0(0))(\Sigma_0(0) + \sigma_0(0))}{\Sigma_1(0)} x + \mathcal{O}(x^2), \quad (4.1.18)$$

lo que da a entender que $t_0(x)$ tiene un comportamiento cuadrático cerca del origen. Similarmente, el comportamiento de $m_1(x)$ cercano al centro es dado por

$$\frac{dm_1}{dx} = 30(3\bar{m}_0 - \sigma_0(0))^2 \epsilon + 60(3\tilde{m}'_0(0) - \sigma'_0(0))(3\bar{m}_0 - \sigma_0(0))^2 \epsilon x + \mathcal{O}(x^2). \quad (4.1.19)$$

Del resultado anterior y la relación (4.1.17) se obtiene que la función $m_1(x)$ también se comporta como una función cúbica de x cercano al origen, por lo que podemos escribirla como

$$m_1(x) = \tilde{m}_1(x) x^2, \quad (4.1.20)$$

donde $\tilde{m}_1(x)$ es una nueva función que satisface $\tilde{m}_1(0) = 0$.

Asimismo, si se expande (4.1.15) teniendo en cuenta el comportamiento de m_0 y m_1 , se obtiene el siguiente resultado

$$\frac{dt_1}{dx} = \frac{30\epsilon(3\bar{m}_0 - \sigma_0(0))^2}{\Sigma_1(0)} x^{-1} + \mathcal{O}(x^0), \quad (4.1.21)$$

el cual es libre de divergencias cuando se toma en consideración (4.1.17), o de manera equivalente (4.1.16).

4.1.2. Solución numérica

Es posible obtener soluciones numéricas de las funciones $\tilde{m}_0(x)$, $\tilde{m}_1(x)$, $t_0(x)$ y $t_1(x)$ y de éstas $m_0(x)$, $m_1(x)$, los perfiles de presión y densidad junto con los correspondientes valores de masa y radio de la estrella. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que estas soluciones deben satisfacer los siguientes requisitos:

- La función de masa, presión y densidad deben ser positivas en todos los puntos dentro de la estrella.
- La masa encerrada en el centro de la estrella debe ser nula para evitar singularidades. Esto implica $m_0(x=0) = 0$, $m_1(x=0) = 0$, lo cual ya es tomado en cuenta por las ecuaciones (4.1.16) y (4.1.20).
- Las perturbaciones deben ser pequeñas comparadas con los términos de orden cero, es decir,

$$\begin{aligned} |\epsilon m_1(x)| &\leq |m_0(x)|, & |\epsilon t_1(x)| &\leq t_0(x), \\ |P_1(r(x))| &\leq |P_0(r(x))|, & |\rho_1(r(x))| &\leq |\rho_0(r(x))|, \quad x \leq x_R. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Dado que nos interesa estudiar cómo la configuración de la estrella de neutrones depende del modelo gravitacional, y en particular cómo cambian las soluciones al variar λ , fijamos el valor de t_1 en el centro de la estrella, denotado como t_{1i} , como cero tal que los modelos ECG y RG tengan los mismos valores de presión y densidad central al inicio de la integración numérica. Esto asegura que las desviaciones con respecto a RG son debidas a la teoría de ECG definida por una elección de λ .

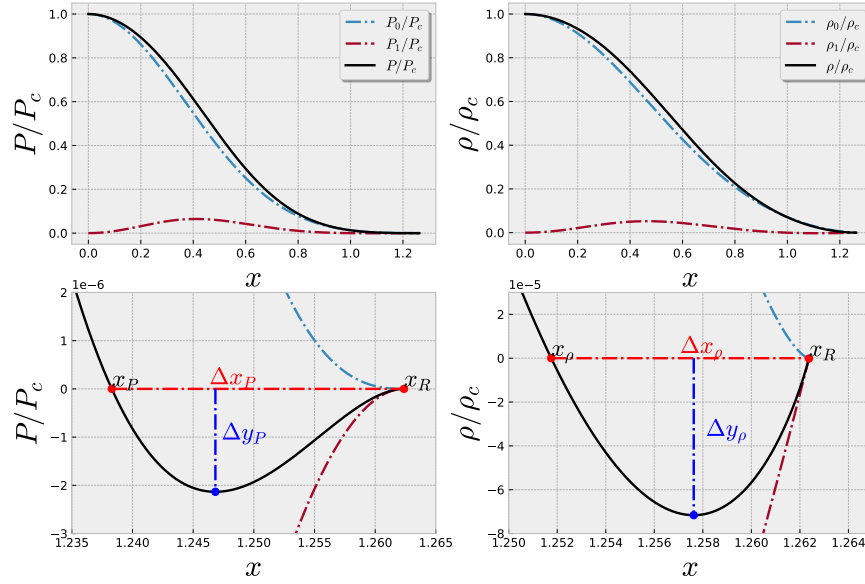


Figura 4.1.1: Ejemplo de perfiles de presión (izquierda) y densidad (derecha) para $t_{0i} = 1.35$ (equivalente a una densidad central de $2.6 \times 10^{14}[\text{g}/\text{cm}^3]$) y $\epsilon = 0.01\epsilon_c$. La primera fila muestra el comportamiento general de la presión y densidad truncada, mientras que la segunda fila muestra una vista detallada de las funciones cerca del final de la integración numérica. En este caso las dos funciones tienen dos raíces, siendo x_R (el cual corresponde a al radio adimensional para esta elección de t_{0i} en RG) compartido. En el límite $x_{P,\rho} \rightarrow x_R$ el sistema sólo tiene una raíz y tanto la presión como la densidad son siempre positivas. Este límite es equivalente a $\Delta x_{P,\rho} \rightarrow 0$, $\Delta y_{P,\rho} \rightarrow 0$, por lo que es posible considerar como soluciones confiables aquellas que no satisfacen la condición (4.1.22) siempre que estén dentro de estos límites.

En principio, el radio de la estrella es determinado por un valor x_R del radio adimensional para el cual $P(r(x))$ y $\rho(r(x))$ se anulan para todo $x \geq x_R$. Sin embargo, en los resultados de la integración numérica se observó que en ciertos casos la presión ($P \approx P_0 + P_1$) y densidad ($\rho \approx \rho_0 + \rho_1$) no se anulan en el mismo valor de x . Como consecuencia, se obtiene una pequeña región donde P y(o) ρ son negativos antes de aproximarse a cero en x_R , tal como se ve en la figura 4.1.1. Este comportamiento es una consecuencia de la truncación a primer orden de la expansión de la presión y densidad. Si la región donde la presión y(o) densidad es negativa es muy grande entonces la aproximación de primer orden para la expansión ya no es confiable. Esto supone un criterio adicional para determinar que soluciones de la integración numérica se pueden conservar. Se tomó por radio los valores x_R tales que las funciones truncadas se anulen simultáneamente y conservar los casos en que Δx_P , Δx_ρ no exceda el 5% de x_R y adicionalmente que

$\Delta x_P, \Delta x_\rho$ sean menor que 10^{-3} . Luego, de acuerdo con (4.1.9) y (4.1.11), el radio R de la estrella puede ser calculado como $R = ax_R$ y las funciones de masa evaluadas en la superficie $M_0(R) = \mathcal{M}_0 = bm_0(x_R)$, $M_1(R) = bm_1(x_R)$. Finalmente, la masa asintótica \mathcal{M} se determina usando (3.3.22) y (3.3.23).

Para esto usamos un código en el cual se ha separado las ecuaciones de \tilde{m}'_1, t'_1 en coeficientes de \tilde{m}_1, t_1 y x para facilitar la integración numérica:

```
# Solución Numérica
def Sol(t0_0):
    x = linspace(1.0e-30, 6., 10**6)
    y0 = [0., 0., t0_0, 0]          # Condiciones iniciales de mm0, mm1, t0, t1
    sigma0_0 = (sinh(t0_0) - t0_0)

    def dy(x, y):
        mm0 = y[0]
        mm1 = y[1]
        t0 = y[2]
        t1 = y[3]

        # Funciones Sigma
        sigma0 = sinh(t0) - t0
        Sigma0 = (sinh(t0) - 8*sinh(t0/2) + 3*t0)/3
        sigma1 = (cosh(t0) - 1)
        Sigma1 = 8/3 *sinh(t0/4)**4

        #ED0s
        # dmm0dx
        dmm0dx = (sigma0-sigma0_0-3*mm0)/x

        # dt0dx
        dt0dx = -x*(Sigma0 + sigma0)*(Sigma0 + (sigma0_0/3 + mm0))
        ↪ /((1-2*(sigma0_0/3 + mm0)*x**2)*Sigma1)

        # dmm1dx
        ...
        ...
        ...

        # dt1dx
        ...
        ...
        ...

    return(dmm0dx,dmm1dx, dt0dx, dt1dx)
```



```

dydx = [dmm0dx, dmm1dx, dt0dx, dt1dx]

    return dydx

x_span = [x[0], x[-1]]
sol = solve_ivp(dy, x_span, y0, method= 'RK45', t_eval = x,
               rtol = 10**-6, atol = 10**-12)

x1 = sol.t
mm0 = sol.y[0]
mm1 = sol.y[1]

m0 = (sigma00/3 + mm0)*x1**3
m1 = mm1*x1**2

t0 = sol.y[2]
t1 = sol.y[3]

# Funciones Sigma
sigma0 = sinh(t0) - t0

Sigma0 = (sinh(t0) - 8*sinh(t0/2) + 3*t0)/3

sigma1 = (cosh(t0) - 1)

Sigma1 = 2*(cosh(t0/2) - 1)**2 /3

#Presión
P0 = K*Sigma0
P1 = K*t1*Sigma1

#Densidad
rho0 = K*sigma0/c**2
rho1 = K*t1*sigma1/c**2

Datos_xmt = [x1, m0, m1, t0, t1]
Datos_PD = [P0, P1, rho0, rho1]
return Datos_xmt, Datos_PD

```

Se comprobó que las soluciones que satisfacen (4.1.22) también satisfacen otras condiciones físicas, tales como los límites para la velocidad del sonido en el interior de la

estrella [1]

$$0 < \frac{dP}{d\rho} < c^2. \quad (4.1.23)$$

Para la integración numérica consideramos nuevamente el intervalo $t_{0i} \in [0.1, 10]$ para las condiciones iniciales. Por otra parte, en las ecuaciones (4.1.14) y (4.1.15) se introdujo la constante adimensional ϵ , la cual debe satisfacer $|\epsilon| \ll 1$ para satisfacer la expansión. Se observo que para cada valor de ϵ las son confiables hasta cierto valor de t_{0i} . Por ejemplo, la solución para $\epsilon \approx 3.42 \times 10^{-4}$ es confiable sólo en el intervalo $0.239 \leq t_{0i} \leq 1.98$ (correspondiendo a densidades centrales de $1.3 \times 10^{12}[\text{g}/\text{cm}^3]$ y $9.0 \times 10^{14}[\text{g}/\text{cm}^3]$ respectivamente). Para la constante ϵ elegimos valores entre cero y un valor critico $\epsilon_c = \mathcal{M}_{\odot}^4 G^2 K^2 \kappa^4 \approx 0.342$. Valores de ϵ sobre ϵ_c no llevan a resultados confiables para suficientes valores de t_{0i} . Los correspondientes valores de λ están entre cero y $\lambda_{\max} = \mathcal{M}_{\odot}^4 G^2$, el cual es un valor muy pequeño comparado con el límite superior $\lambda < 4.57 \cdot 10^{22} \times \mathcal{M}_{\odot}^4 G^2$ encontrado por Hennigar, Jahani y Mann al estudiar el *efecto Shapiro* en el régimen de campo débil de nuestro sistema solar [12].

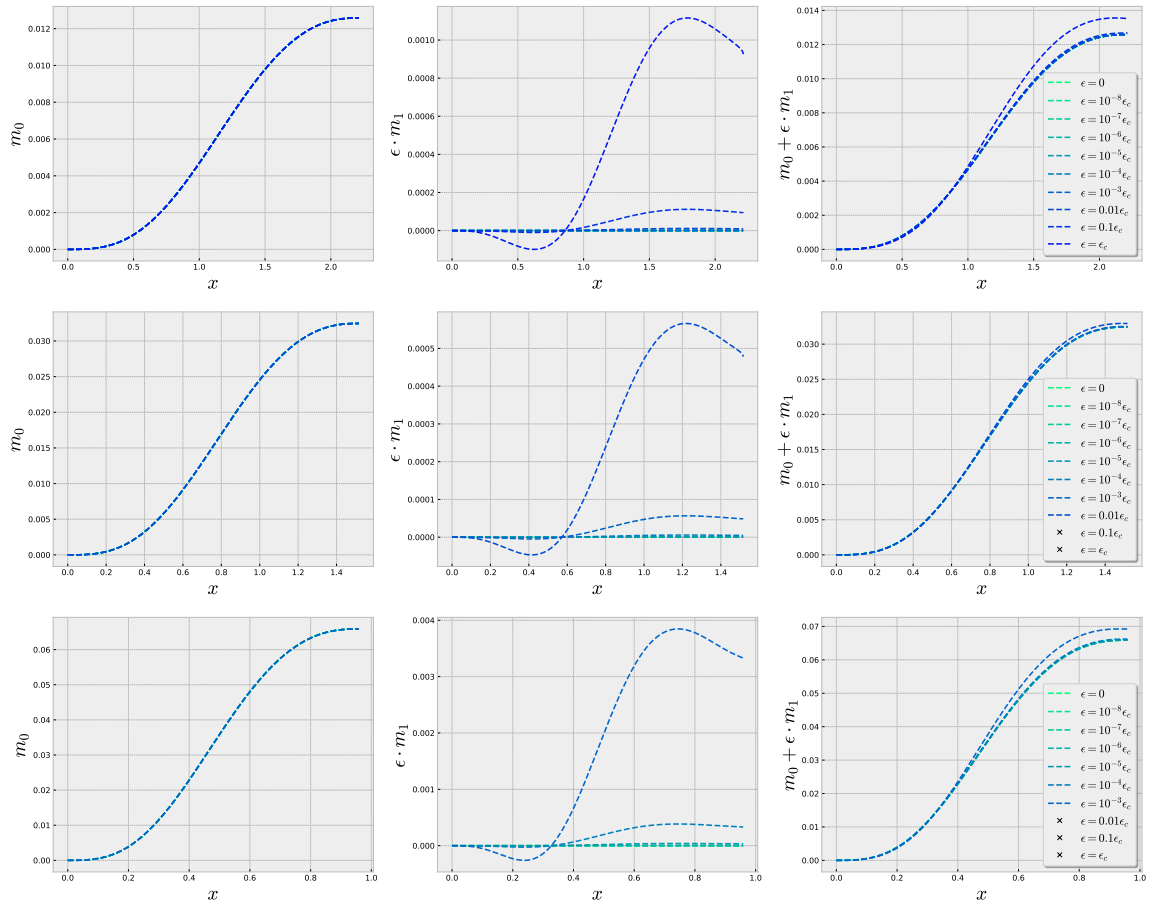


Figura 4.1.2: Perfiles de $m_{GR}(x)$, $m_1(x)$ y $m_0(x) + m_1(x)$ para $t_{0i} = 0.5, 1.5$ y 2.5 (equivalente a densidades centrales de $1.2 \times 10^{13}[\text{g}/\text{cm}^3]$, $3.6 \times 10^{14}[\text{g}/\text{cm}^3]$ y $2.0 \times 10^{15}[\text{g}/\text{cm}^3]$ respectivamente), donde $m_0(x) = m_{GR}$. Los valores de ϵ marcados con “x” corresponden a casos en que no se cumplió la condición (4.1.22).

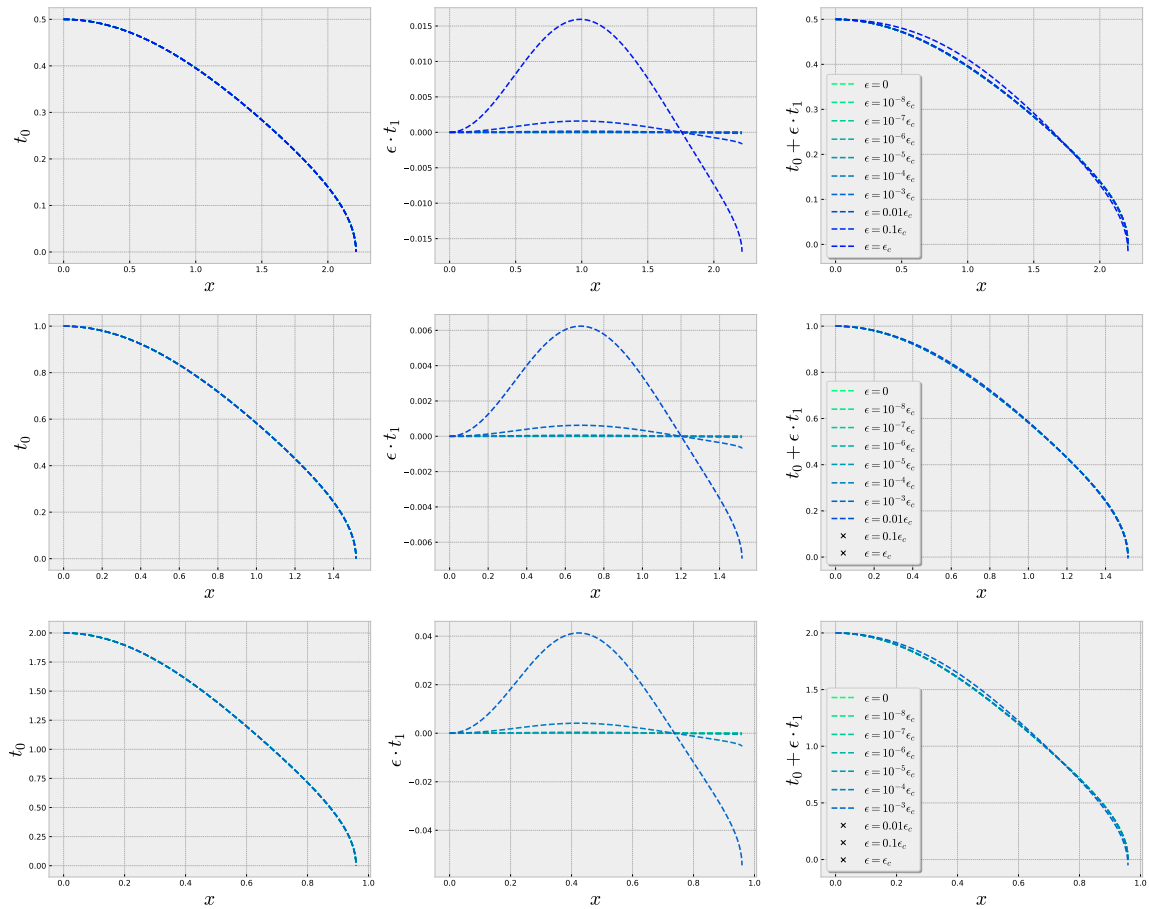


Figura 4.1.3: Perfiles de $t_{GR}(x)$, $t_1(x)$ y $t(x)$ para $t_{0i} = 0.5, 1.5$ y 2.5 (equivalente a densidades centrales de $1.2 \times 10^{13}[\text{g}/\text{cm}^3]$, $3.6 \times 10^{14}[\text{g}/\text{cm}^3]$ y $2.0 \times 10^{15}[\text{g}/\text{cm}^3]$ respectivamente).

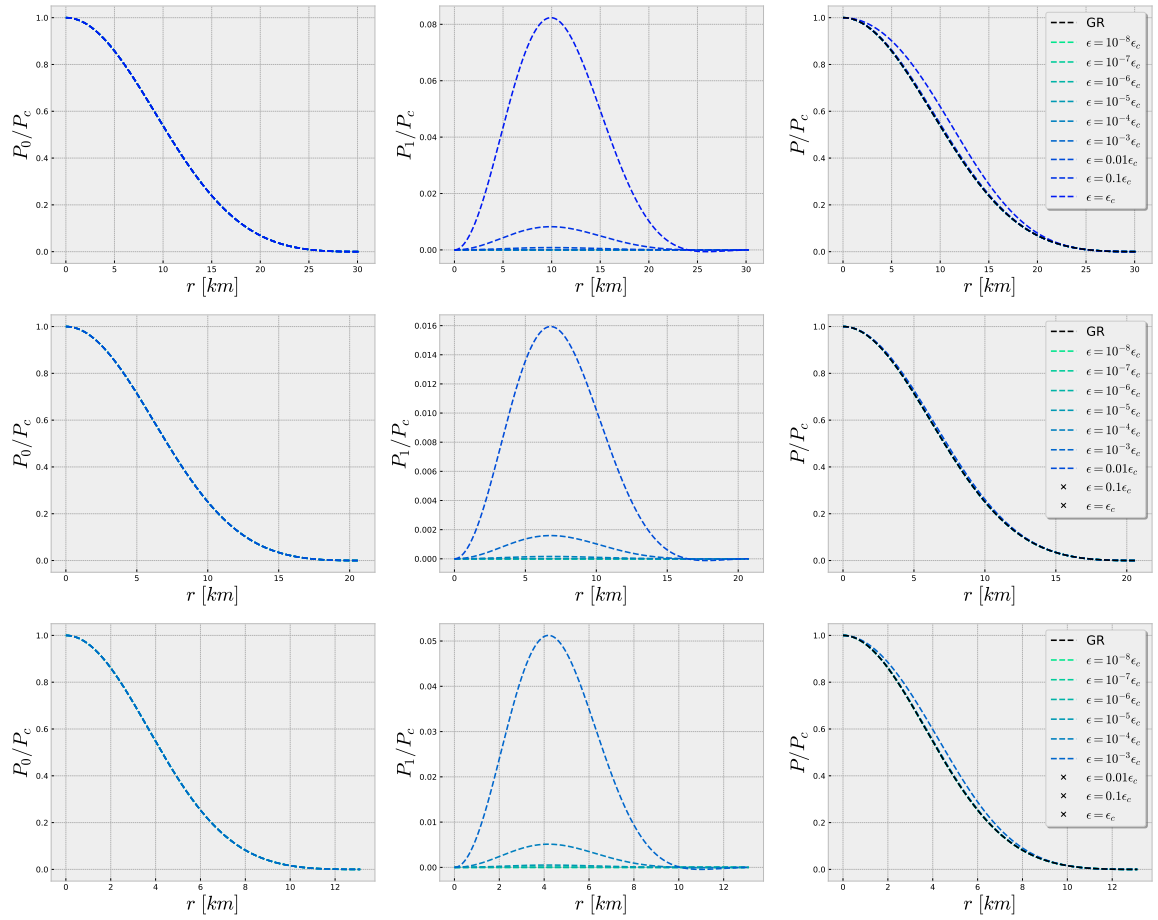


Figura 4.1.4: Perfiles de $P_{GR}(r)$, $P_1(r)$ y $P(r)$ para $t_{0i} = 0.5, 1.5$ y 2.5 (equivalente a densidades centrales de 1.2×10^{13} [g/cm³], 3.6×10^{14} [g/cm³] y 2.0×10^{15} [g/cm³] respectivamente).

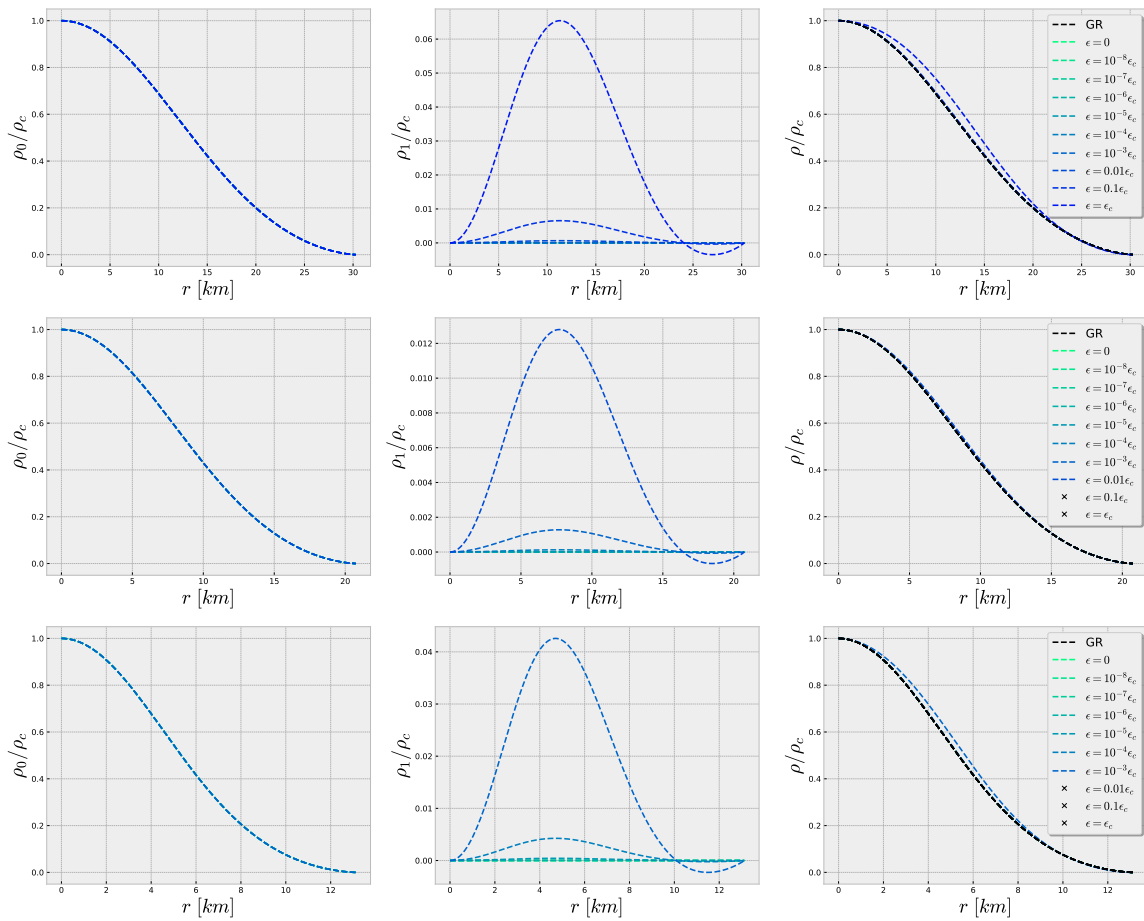


Figura 4.1.5: Perfiles de $\rho_{GR}(r)$, $\rho_1(r)$ y $\rho(r)$ para $t_{0i} = 0.5, 1.5$ y 2.5 (equivalente a densidades centrales de $1.2 \times 10^{13}[\text{g}/\text{cm}^3]$, $3.6 \times 10^{14}[\text{g}/\text{cm}^3]$ y $2.0 \times 10^{15}[\text{g}/\text{cm}^3]$ respectivamente).

Luego, mediante la función

```
def EE_ECG(xf, m0f, m1f, epsilon):
    #Radio

    R = a*xf*1e-3 #[Km]

    #Masa

    M0 = (b*m0f) #[Masa0/Masa_solar]

    M1 = epsilon*(b*m1f - 23*c**4 *M0**3 / (4*pi**2 *K**2 *(R*1e3)**6) +
    ↪ 27*epsilon *c**2 *M0**2 / (pi*kappa*K**2 *(R*1e3)**5) ) # [Masa]

    M = M0 + M1 #[Masa/Masa_solar]

    C = G*M/(a*xf*c**2) # Compacticidad

    return R, M, M0, M1, C
```

se obtienen los valores de radio, masa y compacticidad. En la figura (4.1.6) se pueden ver soluciones de la teoría ECG para t_{0i} dentro del intervalo $[0.1, 10]$, donde cada punto que conforma a las curvas corresponde a una solución del sistema de ecuaciones (4.1.12)-(4.1.15) para distintos valores de ϵ .

De la figura 4.1.6 se puede ver que las soluciones de ECG reproducen parcialmente las soluciones de RG, dada la misma condición inicial t_{0i} , la que relacionaremos de ahora en adelante con la densidad central ρ_c (ver ecuación (A.1.16)).

De la figura 4.1.7 se puede ver que las estrellas, dada la misma densidad central, tienden a tener los mismos radios en ECG como en RG, con nula variación para los distintos

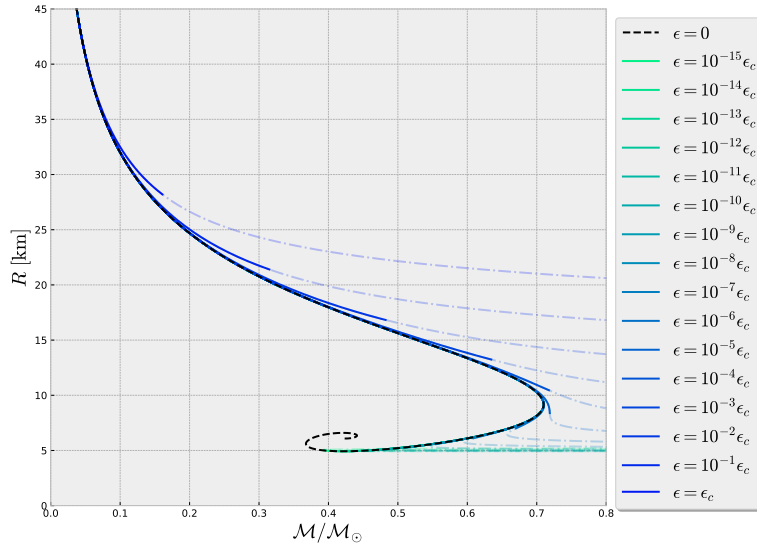


Figura 4.1.6: Ejemplo de soluciones de la teoría ECG. Cada punto que conforma a las curvas representa una estrella de neutrones de masa M y radio R para un valor particular de t_{0i} y cada curva está asociada a distintos valores constantes del parámetro ϵ . Las curvas se cortan en cuanto las soluciones ya no se pueden considerar como confiables.

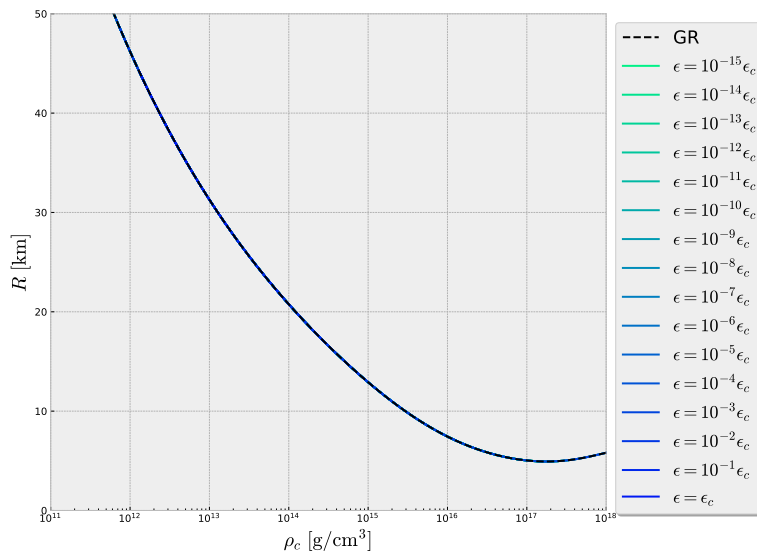


Figura 4.1.7: Radio de la estrella versus densidad central. Todas las soluciones para los distintos valores de $\epsilon \leq \epsilon_c$ ($\lambda \leq \mathcal{M}_{\odot}^4 G^2$) coinciden dentro de un margen pequeño (menos de 10^{-5} [km]).

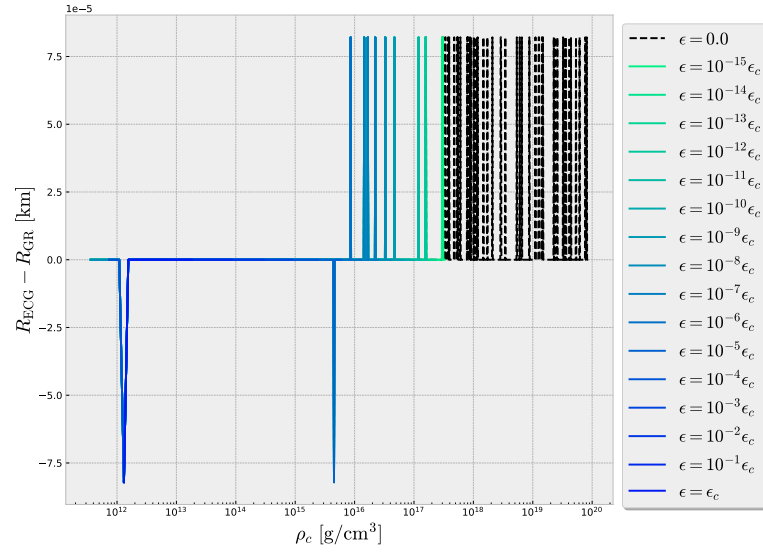


Figura 4.1.8: Perfiles de la diferencia entre los radios de estrellas de neutrones en ECG y RG dada la misma densidad central, donde los radios R_{GR} corresponden a los radios obtenidos en el capítulo 2. Tal como se ve en la figura 4.1.7, todas las soluciones para distintos valores de $\epsilon \leq \epsilon_c$ ($\lambda \leq M_{\odot}^4 G^2$) coinciden. La diferencia entre RG y $\epsilon = 0$, que se supone que son equivalentes, es no nula, pero si muy pequeña considerando la escala.

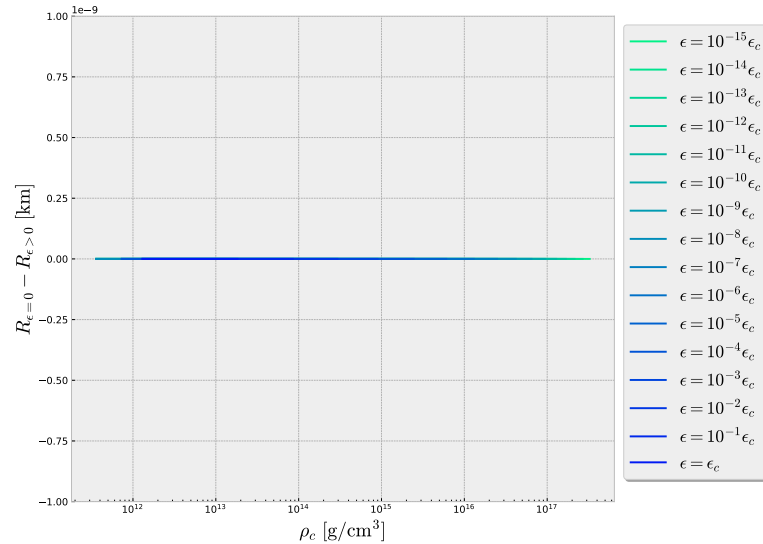


Figura 4.1.9: Perfiles de la diferencia entre los radios de $\epsilon = 0$ y los radios de ECG para $\epsilon \neq 0$, dada la misma densidad central. Todos los radios de las soluciones de ϵ entre cero y ϵ_c coinciden con los radios de $\epsilon = 0$, dentro de un margen de error.

valores de ϵ y densidad central, tal como muestra la figura 4.1.8. La diferencia de radios entre Relatividad General y ECG es muy pequeña considerando la escala (la diferencia no supera el orden de 10^{-5} [km] para ningún valor de ρ_c). Por tanto, obtenemos que dentro de una aproximación de primer orden los radios en ECG son independientes del valor de ϵ e iguales a los de RG, dada la misma densidad central.

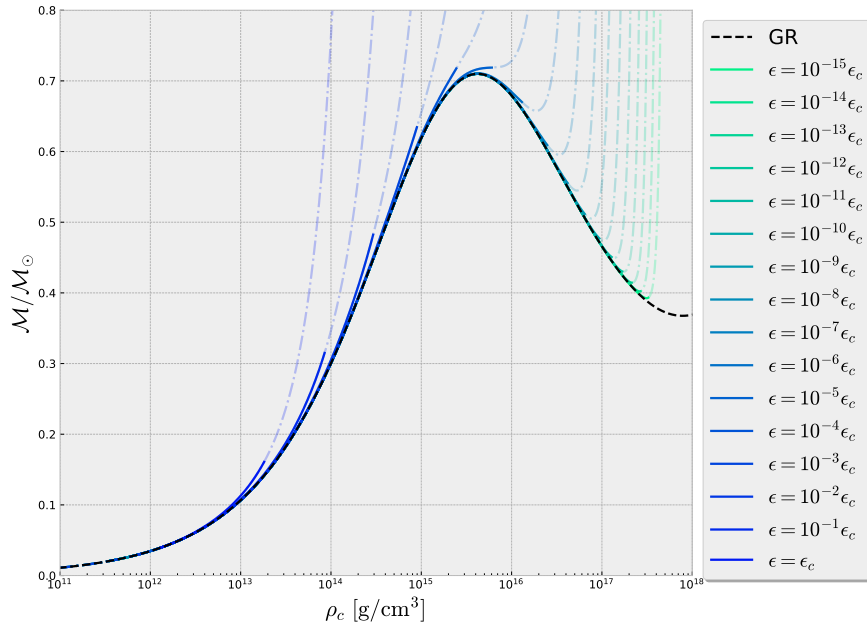


Figura 4.1.10: Masa versus densidad central para estrellas de neutrones en ECG. De la figura se puede ver que, dada la misma densidad central, la masa en ECG es igual o mayor que la masa de RG. Considerando la misma condición de estabilidad visto en el caso de RG (ver (2.3.12)-(2.3.13)), se tiene que todas las soluciones para $\epsilon \gtrsim 10^{-5}\epsilon_c$ ($\lambda \gtrsim 10^{-5}\mathcal{M}_\odot^4 G^2$) cumplen con la condición necesaria para la estabilidad, mientras que las soluciones para $\epsilon \lesssim 10^{-5}\epsilon_c$ ($\lambda \lesssim 10^{-5}\mathcal{M}_\odot^4 G^2$) pasan de una configuración estable a inestable, tal como ocurre en el caso de RG.

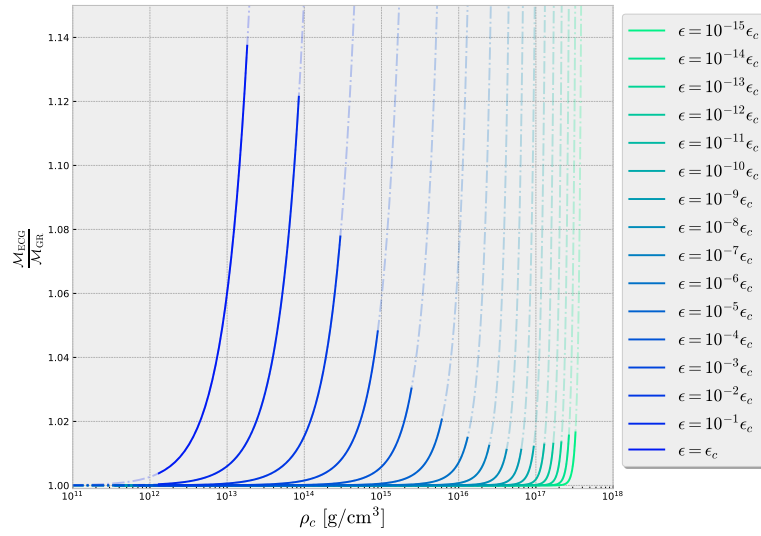


Figura 4.1.11: Cociente entre las masas en ECG (\mathcal{M}_{ECG}) y las masas en RG (\mathcal{M}_{RG}) versus densidad central. La masa de las estrellas en ECG es igual o mayor que la masa de las estrellas en RG, dado el mismo valor de densidad central.

Las masas de las estrellas de neutrones en ECG tienden a ser similares a las encontradas en RG hasta un valor de densidad central crítico, el cual decrece a medida que ϵ aumenta. Sobre este valor crítico las masas de ECG se vuelven más grandes que las masas RG a medida que se incrementa ρ_c , tal como muestra la figura 4.1.10. Por otra parte, el rango de densidades centrales de las estrellas de ECG es más acotado que el de RG, decreciendo el valor máximo que puede alcanzar a medida que aumenta ϵ , tal como muestran las figuras 4.1.7-4.1.13.

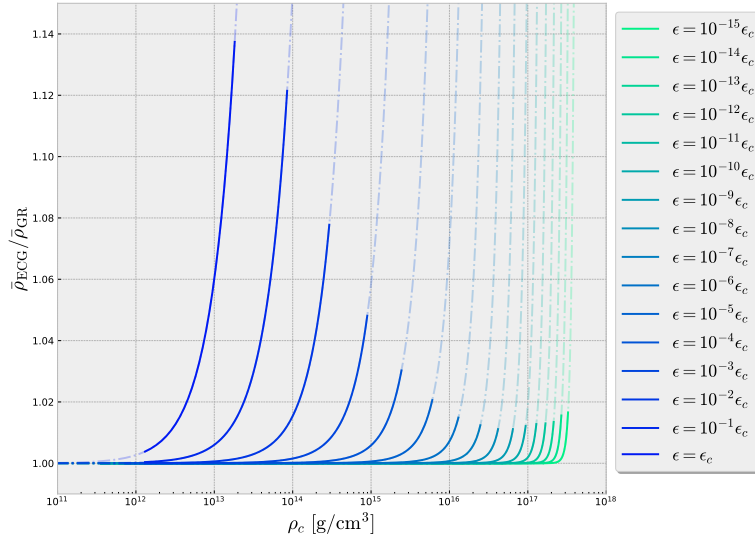


Figura 4.1.12: Cociente entre la densidad media ($\bar{\rho} = 3\mathcal{M}/4\pi R^3$) de las estrellas en ECG ($\bar{\rho}_{\text{ECG}}$) y las estrellas en RG ($\bar{\rho}_{\text{GR}}$) versus la densidad central. La densidad media de las estrellas en ECG es igual o mayor que el de las estrellas de RG, dado el mismo perfil de densidad central. El rango de densidades centrales para los cuales las estrellas en ECG satisfacen (4.1.22) disminuye a medida que aumenta ϵ .

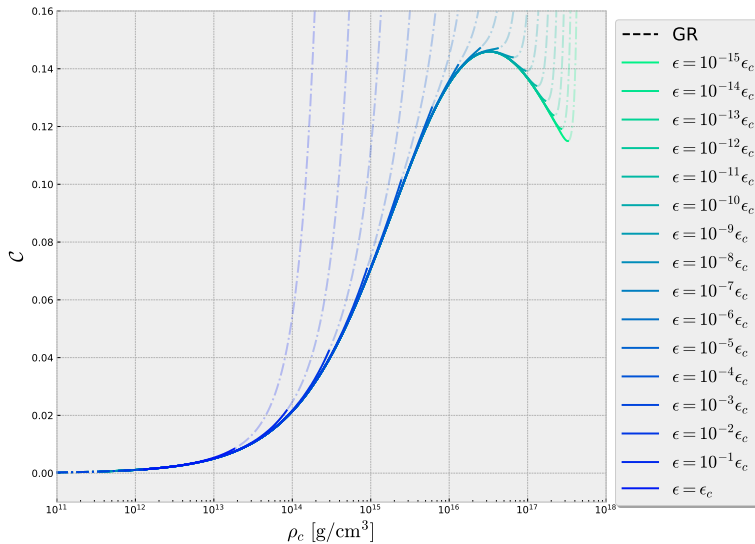


Figura 4.1.13: Compacticidad de las estrellas de neutrones versus densidad central. La compacticidad de las estrellas en ECG es igual o mayor que el de las estrellas de RG, dado el mismo perfil de densidad central.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones

En este trabajo se investigó las configuraciones de equilibrio estelar de estrellas de neutrones estáticas y simétricamente esféricas usando la ecuación de estado de un gas de ideal de Fermi a temperatura cero en la teoría de gravedad modificada Einsteinian Cubic Gravity (ECG), considerando una perturbación de primer orden de la teoría de Relatividad General (RG) en el parámetro λ de ECG. En el capítulo 2 se derivó las ecuaciones de estructura para el modelo de RG y se computaron soluciones numéricas para diferentes valores de densidad central. En el capítulo 3 se derivó las ecuaciones de estructura para el modelo de ECG perturbado y en el capítulo 4 se computaron soluciones numéricas sin constante cosmológica para las condiciones iniciales adecuadas y diferentes valores de densidad central y el parámetro de ECG λ . Las soluciones de ambos modelos fueron comparadas para ver las desviaciones de ECG con respecto a RG para distintos valores de del parámetro λ . El modelo resultante de ECG es libre de singularidades en el origen y la solución externa coincide con la solución perturbativa obtenida por Hennigar y Mann en [10] y Bueno y Cano en [11] para agujeros negros en $D = 4$, en el mismo esquema perturbativo. Se comprobó de forma numérica que las soluciones para las cuales la aproximación a primer orden se puede considerar confiable también satisfacen otras condiciones físicas, tal como el límite de velocidad dentro de la estrella.

Nuestro resultado muestra que las soluciones de estrellas de neutrones en ECG tienden a reproducir parcialmente las soluciones de estrellas de neutrones en Relatividad General, siendo en mayor medida para valores de λ por debajo de $10^{-5} \mathcal{M}_{\odot}^4 G^2$. Asimismo, dada la misma densidad central, los radios de las estrellas en ECG son independientes del valor de λ e indistinguibles de los de RG (Fig. 4.1.7, 4.1.8), siendo la máxima diferencia absoluta del orden 10^{-5} . Por otro lado, para un mismo valor de densidad central, la masa en ECG aumentan con el valor de λ (Fig. 4.1.11). El cociente $\mathcal{M}_{\text{ECG}}/\mathcal{M}_{\text{GR}}$ se empieza a desviar significativamente de 1 a menor densidad central a medida que aumenta el valor de λ . A modo de ejemplo, para $\rho_c \approx 1.8 \times 10^{13} [\text{g}/\text{cm}^3]$, los cocientes de masa para $\lambda = \mathcal{M}_{\odot}^4 G^2$ y $\lambda = 10^{-1} \mathcal{M}_{\odot}^4 G^2$ son de alrededor de 1.14 y 1.014 respectivamente. Esto significa que las estrellas en ECG son igual o más densas (Fig.4.1.12), y por tanto más compactas (Fig.4.1.13), que sus contra-partes en RG, dada la misma densidad central (como ejemplo, para $\lambda = \mathcal{M}_{\odot}^4 G^2$ la densidad media de la estrella de neutrones en ECG es alrededor de un 14% más densa que su contraparte en RG, dado el mismo valor de densidad central de $1.8 \times 10^{13} [\text{g}/\text{cm}^3]$). Para un valor fijo de λ , las densidades centrales para las cuales las soluciones de ECG son confiables se limitan hasta una densidad crítica, la cual decrece con a medida que λ aumenta (como ejemplo, para $\lambda = 10^{-2} \mathcal{M}_{\odot}^4 G^2$, $\lambda = 10^{-4} \mathcal{M}_{\odot}^4 G^2$ y $\lambda = 10^{-6} \mathcal{M}_{\odot}^4 G^2$ los valores de densidad critica son aproximadamente $2.9 \times 10^{14} [\text{g}/\text{cm}^3]$, $2.4 \times 10^{15} [\text{g}/\text{cm}^3]$ y $1.3 \times 10^{16} [\text{g}/\text{cm}^3]$, respectivamente). Más allá de este valor crítico, los términos perturbativos se vuelven dominantes, incluso para los casos que no son distinguibles de RG.

Se puede esperar a partir de estos resultados que la masa de las estrellas de neutrones en soluciones no-perturbativas sea mayor que sus contrapartes en RG, dado el mismo valor de densidad central. Respecto a cual sería la masa máxima que permitiría la teoría ECG, los resultados no pueden proporcionar una respuesta directa, ya que , aunque las masas calculadas aumentan en comparación a RG, para valores de λ sobre $10^{-5} \mathcal{M}_{\odot}^4 G^2$ no se observa un límite superior, y para valores de λ por debajo de este existe un máximo local (el cual coincide con la masa máxima obtenida por Oppenheimer y Volkoff [5]) pero no existe certeza de que este también sea el máximo global. Para predicciones realistas y comparación con observaciones, el siguiente paso sería considerar diferentes ecuaciones de estado, como Sly, FPS y AP4.

5.2. Objetivos a futuro

5.2.1. Soluciones rotantes

A partir de nuestros resultados contamos con las bases para estudiar casos más realistas, como la solución estacionaria, y de ésta en particular el caso “*slowly rotating*”, tal que se pueda comparar con resultados observacionales. Para esto también se tomará en cuenta otras ecuaciones de estado, como las mencionadas en el capítulo 1. Como parte de este objetivo esta encontrar las relaciones “*I-Love-Q*”.

5.2.2. Solución no perturbativa y de orden superior en λ

Dado que las ecuaciones (3.2.11) y (3.2.12) contienen derivadas de orden superior, las ecuaciones de estructura de la solución no perturbativa tienen el problema de contener funciones derivadas sin condiciones de borde conocidas (ejemplo: $P''(r)$). Existe la posibilidad de que esto se pueda sortear imponiendo sobre las funciones restricciones de origen externo a las ecuaciones de movimiento y mediante métodos numéricos.

Por otro lado, el extender el análisis a mayores ordenes en λ daría una mejor perspectiva respecto al comportamiento de las soluciones de ECG, pero se tiene que tomar en cuenta las dificultades que trae cada orden. por ejemplo:

- La presencia de terceras derivadas de los ordenes previos (e.d $dF_n/dr = dF_n/dr(d^3F_{n-1}/dr^3, \dots)$), provenientes del término cúbico \mathcal{P} en la acción.
- La implementación de límites a las soluciones numéricas tal que se satisfaga la perturbación ($|f_0| > |f_1| > |f_2| > \dots$).

Debido esto consideramos que trabajar más allá del segundo orden en λ no es una opción recomendable.

5.2.3. Aplicaciones en Holografía

El principio holográfico ha sido en las últimas décadas uno de los grandes paradigmas, derivado originalmente en el contexto de teoría de cuerdas [19], ha permitido acceder a resultados físicos en teorías cuánticas en el régimen de acoplamiento fuerte a través del estudio de teorías gravitacionales asintóticamente AdS definidas en una dimensión superior. Desde los primeros años de la conjetura se ha utilizado el estudio de los agujeros negros para conseguir resultados en teorías cuánticas duales [19-21], y de igual manera se han generado aplicaciones utilizando estrellas de neutrones asintóticamente AdS (AAdS).

El principio holográfico ya ha sido estudiado en estrellas de neutrones en RG (con constante cosmológica negativa) [16, 17] y en agujeros negros en ECG [18], pero hasta ahora nunca ha sido estudiado en estrellas de neutrones en ECG.

La construcción de modelos de equilibrio estelar en el contexto de la correspondencia AdS/CFT no sólo sería un excelente complemento para los estudios ya existentes de Holografía en ECG, sino que puede contribuir a un mayor entendimiento de ésta como una teoría alternativa de gravedad viable a nivel como modelo teórico para describir una teoría dual.

Apéndice A

Ecuaciones de estado de un gas ideal de Fermi

A.1. Definiciones estadísticas y función de distribución de Fermi

Los fermiones son partículas de espín semi-entero. De acuerdo al teorema de spin-estadística, se requiere que la función de onda del sistema sea anti-simétrica con respecto al cambio de posición de las partículas

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1), \quad (\text{A.1.1})$$

tal que la función de onda del sistema es nula si dos fermiones idénticos están en el mismo lugar, lo que, por la “regla de Born” [23], significa que la probabilidad de que dos fermiones estén en la misma posición es idénticamente cero. Esto es un reflejo del *principio de exclusión de Pauli*, el cual establece que dos o más partículas fermiónicas no pueden compartir el mismo estado [22]. A bajas energías la física de un gas de fermiones no interactuantes es completamente dominada por el principio de exclusión.

La densidad numérica de una especie de partícula es dada por [1]

$$n = \int \frac{d\mathcal{N}}{d^3x d^3p} d^3p = \frac{g}{h^3} \int f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p, \quad (\text{A.1.2})$$

donde \mathcal{N} es la densidad numérica en el espacio de fase $6 - D$, $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ es la función de distribución adimensional en el espacio de fase que da el número de ocupación promedio en una celda de dicho espacio, h^3 es el volumen de una celda en el espacio de fase y g es el peso estadístico dado por $g = 2S + 1$, con S el spin de la partícula. A partir de \mathcal{N} también es posible encontrar la densidad de energía

$$u = \int E \frac{d\mathcal{N}}{d^3x d^3p} d^3p = \frac{g}{h^3} \int (m^2 c^4 + p^2 c^2)^{\frac{1}{2}} f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p, \quad (\text{A.1.3})$$

donde E es la energía relativista de las partículas con masa m . Por otro lado, la presión para una distribución isotrópica de momenta es¹

$$P = \frac{1}{3} \int \rho v \frac{d\mathcal{N}}{d^3x d^3p} d^3p = \frac{g}{3h^3} \int p \frac{dE}{dp} f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p = \frac{g}{3h^3} \int \frac{p^2 c^2}{E} f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p. \quad (\text{A.1.4})$$

En términos de la energía, la función de distribución de un gas ideal de fermiones se rige por la *distribución de Fermi-Dirac*

$$f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}, \quad \beta = k_B T, \quad (\text{A.1.5})$$

donde μ es el potencial químico, T la temperatura y k_B la constante. A bajas temperaturas los fermiones se distribuyen en los niveles disponibles de más baja energía, siendo en el límite $T \rightarrow 0$ un gas de Fermi completamente degenerado. En este caso el potencial químico μ es igual a la energía del estado de la última partícula, denominada como *energía de Fermi* E_F , y la función distribución se reduce a

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E \leq E_F \\ 0 & \text{si } E > E_F. \end{cases} \quad (\text{A.1.6})$$

¹El factor $1/3$ viene de la isotropía considerada y el principio de equipartición.

El llenado de los estados de energía por parte de los fermiones es bastante directo, distribuyéndose primero en los estados más bajos posibles, pero con la particularidad de que estos estados están localizados en el espacio de los momentos, por lo que sucesivamente cada fermión se localiza en un estado con mayor momentum. El momentum del último fermión es denominado como *momentum de Fermi* p_F , el cual se relaciona con la energía de Fermi mediante

$$E_F = \sqrt{m^2 c^4 + p_F^2 c^2}. \quad (\text{A.1.7})$$

A.1.1. Caso particular: Neutrones

Usando la función de distribución para un gas completamente degenerado de neutrones, la densidad numérica de partículas es

$$n_n = \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3, \quad (\text{A.1.8})$$

donde $g = 2$ ya que los neutrones tienen spin $1/2$. La densidad de masa de un gas de neutrones es

$$\begin{aligned} \rho &= m_n n_n \\ &= \frac{8\pi}{3h^3} m_n p_F^3, \end{aligned} \quad (\text{A.1.9})$$

donde m_n es la masa de un neutrón. Definiendo el parámetro adimensional relativo

$$x := \frac{p}{m_n c}, \quad (\text{A.1.10})$$

la densidad numérica, la densidad de materia y la presión se reescriben como

$$n_n = \frac{8\pi}{3h^3} m_n^3 c^3 x_F^3, \quad (\text{A.1.11})$$

$$\rho = \frac{8\pi}{3h^3} m_n^4 c^3 x_F^3, \quad (\text{A.1.12})$$

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{8}{3h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^3 c^2}{\sqrt{m_n^2 c^4 + p^2 c^2}} dp \\
&= \frac{8}{3h^3} m_n^4 c^3 \int_0^{x_F} \frac{x'^4}{\sqrt{x'^2 + 1}} dx'. \tag{A.1.13}
\end{aligned}$$

Para calcular la densidad de energía útil es resolver la ecuación (A.1.4) por partes

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{8}{3h^3} \int_0^{p_F} p^3 \frac{dE}{dp} dp \\
&= \frac{8}{3h^3} \left(p^3 E \Big|_0^{p_F} - 3 \int_0^{p_F} p^2 E dp \right) \\
&= \frac{8}{3h^3} p_F^3 E_F - \rho c^2 \\
&= \frac{8}{3h^3} m_n^4 c^5 x_F^3 \sqrt{1 + x_F^2} - \rho c^2.
\end{aligned}$$

Reemplazando en (A.1.13) obtenemos que la densidad de energía es

$$\rho c^2 = \frac{8}{3h^3} m_n^4 c^5 x_F^3 \sqrt{1 + x_F^2} - P_n. \tag{A.1.14}$$

Bajo la secuencia de transformaciones $x = \sinh(\theta)$, $t = \theta_F/4$, podemos encontrar una solución para (A.1.13) y obtener las siguientes ecuaciones de estado

$$P_n = \frac{K}{3} \left(\sinh(t) - 8 \sinh\left(\frac{t}{2}\right) + 3t \right), \tag{A.1.15}$$

$$\rho_n = \frac{K}{c^2} (\sinh(t) - t), \tag{A.1.16}$$

con $K = \pi m_n^4 c^5 / 4h^3$.

Es posible demostrar que $t = 4\theta_F = 4 \ln \left| x_F + \sqrt{1 + x_F^2} \right|$ y $\sinh(t) = 2x_F + \sqrt{1 + x_F^2}(1 + 2x_F^2)$, por lo que podemos reescribir (A.1.15) y (A.1.16) de la forma

$$P_n = \frac{4}{3} K \left(2x_F + \sqrt{1 + x_F^2}(2x_F^2 - 3) + 3 \ln \left| x_F + \sqrt{1 + x_F^2} \right| \right), \tag{A.1.17}$$

$$\rho = \frac{4K}{c^2} \left(2x_F + \sqrt{1 + x_F^2}(2x_F^2 + 1) + 3 \ln \left| x_F + \sqrt{1 + x_F^2} \right| \right), \tag{A.1.18}$$

donde

$$x_F = \left(\frac{3h^3}{8\pi c^3 m_n^4} \rho_c \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{A.1.19})$$

Apéndice B

Ecuaciones generalizadas

B.1. Ecuaciones generalizadas

Consideremos la siguiente acción¹

$$S = \int d^n x \sqrt{-g} (\mathcal{L}(g_{ab}, R_{abcd}) + \mathcal{L}_M) , \quad (\text{B.1.1})$$

donde g es el determinante de la métrica, $\mathcal{L}(g_{ab}, R_{abcd})$ es una densidad langrangiana que depende de contracciones de la métrica y del tensor de Riemann y \mathcal{L}_M es una densidad langrangiana no gravitante. Al variar la acción tiene

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^n x \delta \left[\sqrt{-g} (\mathcal{L} + \mathcal{L}_M) \right] \\ &= \int d^n x \left[\delta (\mathcal{L} \sqrt{-g}) + \delta (\mathcal{L}_M \sqrt{-g}) \right] \\ &= \int d^n x \left[\sqrt{-g} \delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \delta \sqrt{-g} + \frac{\partial (\mathcal{L}_M \sqrt{-g})}{\partial g^{ab}} \delta g^{ab} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

Sabiendo que

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab} , \quad (\text{B.1.3})$$

$$\delta g_{ab} = -g_{a\alpha} g_{b\beta} \delta g^{\alpha\beta} , \quad (\text{B.1.4})$$

¹En esta sección se trabajará con los índices a, b, c, d .

y que por definición

$$\frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial g^{ab}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}\frac{1}{2}T_{ab}, \quad (\text{B.1.5})$$

donde T_{ab} es el tensor de energía-momentum, la ecuación (B.1.2) queda como

$$\delta S = \int d^n x \sqrt{-g} \left[\delta \mathcal{L} - \frac{1}{2}g_{ab}\mathcal{L}\delta g^{ab} - \frac{1}{2}T_{ab}\delta g^{ab} \right]. \quad (\text{B.1.6})$$

Debido a que \mathcal{L} es una función de la métrica y del tensor de Riemann, el término $\delta \mathcal{L}$ se expande como

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R^a{}_{bcd}} \right)_{g^{ab}} \delta R^a{}_{bcd} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{ab}} \right)_{R^a{}_{bcd}} \delta g^{ab} \\ &= P_a{}^{bcd} \delta R^a{}_{bcd} + P_{ab} \delta g^{ab}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.7})$$

donde se define $P_a{}^{bcd} = \partial \mathcal{L} / \partial R^a{}_{bcd}$ y $P_{ab} = \partial \mathcal{L} / \partial g^{ab}$ [25]. Por otro lado, la variación del tensor de Riemann se puede expandir como

$$\begin{aligned} \delta R^a{}_{bcd} &= \nabla_c(\delta \Gamma^a{}_{bd}) - \nabla_d(\delta \Gamma^a{}_{bc}) \\ &= \nabla_c \left(\frac{1}{2}g^{ae} \left[\nabla_b \delta g_{ed} + \nabla_d \delta g_{be} - \nabla_e \delta g_{bd} \right] \right) \\ &\quad - \nabla_d \left(\delta \Gamma^a{}_{bc} \frac{1}{2}g^{ae} \left[\nabla_b \delta g_{ec} + \nabla_c \delta g_{be} - \nabla_e \delta g_{bc} \right] \right) \\ &= \frac{1}{2}g^{ae} \nabla_c (\nabla_b \delta g_{ed} + \nabla_d \delta g_{be} - \nabla_e \delta g_{bd}) - \frac{1}{2}g^{ae} \nabla_d (\nabla_b \delta g_{ec} + \nabla_c \delta g_{be} - \nabla_e \delta g_{bc}), \end{aligned} \quad (\text{B.1.8})$$

por lo que $P_a{}^{bcd}\delta R^a{}_{bcd}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}
P_a{}^{bcd}\delta R^a{}_{bcd} &= \frac{1}{2}P_a{}^{bcd}g^{ae}\nabla_c(\nabla_b\delta g_{ed} + \nabla_d\delta g_{be} - \nabla_e\delta g_{bd}) \\
&\quad - \frac{1}{2}P_a{}^{bcd}g^{ae}\nabla_d(\nabla_b\delta g_{ec} + \nabla_c\delta g_{be} - \nabla_e\delta g_{bc}) \\
&= P^{abcd}\nabla_c(\nabla_b\delta g_{ed} + \nabla_d\delta g_{be} - \nabla_e\delta g_{bd}) \\
&= P^{abcd}\nabla_c(\nabla_b\delta g_{ed}) + P^{abcd}\nabla_c(\nabla_d\delta g_{be}) - P^{abcd}\nabla_c(\nabla_e\delta g_{bd}) \\
&= P^{abcd}\nabla_c(\nabla_b\delta g_{ed}) - P^{abcd}\nabla_c(\nabla_b\delta g_{ed}) \\
&= 2P^{abcd}\nabla_c(\nabla_b\delta g_{ad}). \tag{B.1.9}
\end{aligned}$$

La expresión (B.1.9) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
P_a{}^{bcd}\delta R^a{}_{bcd} &= 2P^{abcd}\nabla_c(\nabla_b\delta g_{ad}) \\
&= 2\nabla_c(P^{abcd}\nabla_b\delta g_{ad}) - 2\nabla_cP^{abcd}\nabla_b\delta g_{ad} \\
&= 2\nabla_c(P^{abcd}\nabla_b\delta g_{ad}) - 2\nabla_b(\nabla_cP^{abcd}\delta g_{ad}) + 2\nabla_b\nabla_cP^{abcd}\delta g_{ad} \\
&= 2\nabla_c(P^{abcd}\nabla_b\delta g_{ad}) - 2\nabla_b(\nabla_cP^{abcd}\delta g_{ad}) - 2\nabla_b\nabla_cP^{abcd}g_{a\alpha}g_{d\beta}\delta g^{\alpha\beta} \\
&= 2\nabla_c(P^{abcd}\nabla_b\delta g_{ad}) - 2\nabla_b(\nabla_cP^{abcd}\delta g_{ad}) - 2\nabla_c\nabla_dP_a{}^{cd}{}_b\delta g^{ab}, \tag{B.1.10}
\end{aligned}$$

donde $2\nabla_c(P^{abcd}\nabla_b\delta g_{ad})$, $-2\nabla_b(\nabla_cP^{abcd}\delta g_{ad})$ son términos de borde. Por otro lado, el Lagrangiano $\mathcal{L}(g_{ab}, R_{abcd})$ satisface las identidades [25]

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}}\right)_{R_{abcd}} = -R^\beta{}_{bcd}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{\alpha bcd}}\right)_{g^{\alpha\beta}}, \tag{B.1.11}$$

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}}\right)_{R_{abcd}} = -\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}}\right)_{R_{abcd}}, \tag{B.1.12}$$

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}}\right)_{R^a{}_{bcd}} = P_\alpha{}^{ijk}R_{\beta ijk}, \tag{B.1.13}$$

por lo que al reemplazar en (B.1.7) se obtiene que, sin contar los términos de

borde, la expresión

$$\delta\mathcal{L} = P_a{}^{cde}R_{bcde}\delta g^{ab} - 2\nabla_c\nabla_d P_a{}^{cd}{}_b\delta g^{ab}. \quad (\text{B.1.14})$$

Así, la acción se puede reescribir como

$$\delta S = \int d^n x \sqrt{-g} \left[P_a{}^{cde}R_{bcde} - 2\nabla_c\nabla_d P_{acdb} - \frac{1}{2}g_{ab}\mathcal{L} - \frac{1}{2}T_{ab} \right] \delta g^{ab}, \quad (\text{B.1.15})$$

y que, por el principio de mínima acción ($\delta S = 0$), se tiene que las ecuaciones de movimiento son

$$P_a{}^{cde}R_{bcde} - \frac{1}{2}g_{ab}\mathcal{L} - 2\nabla_c\nabla_d P_a{}^{cd}{}_b = \frac{1}{2}T_{ab}. \quad (\text{B.1.16})$$

B.2. Ecuaciones de ECG en $D = 4$

En dimensión 4 la acción de ECG es dada por

$$S_{\text{ECG}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4 x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + 2\kappa^2 \lambda \mathcal{P}), \quad (\text{B.2.1})$$

con

$$\mathcal{P} = 12R_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma}R_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma}{}^{\beta}R_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}{}^{\nu} + R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} - 12R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\rho}R^{\nu\sigma} + 8R_{\mu}{}^{\nu}R_{\nu}{}^{\rho}R_{\rho}{}^{\mu}. \quad (\text{B.2.2})$$

Usando las siguientes identidades

$$\frac{\partial R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\lambda}}{\partial R^a{}_{bcd}} = \frac{1}{2}\delta_a^{\alpha}\delta_{\beta}^b\left[\delta_{\gamma}^c\delta_{\lambda}^d - \delta_{\lambda}^c\delta_{\gamma}^d\right], \quad (\text{B.2.3})$$

$$\frac{\partial R_{\beta\lambda}}{\partial R^a{}_{bcd}} = \frac{1}{4}\left(\delta_{\beta}^b\delta_a^{[c}\delta_{\lambda}^{d]} + \delta_{\lambda}^b\delta_a^{[c}\delta_{\beta}^{d]}\right) - \frac{1}{4}\left(g_{a\beta}g^{b[c}\delta_{\lambda}^{d]} + g_{a\lambda}g^{b[c}\delta_{\beta}^{d]}\right), \quad (\text{B.2.4})$$

$$\frac{\partial R}{\partial R^a{}_{bcd}} = \delta_a^{[c}g^{d]b}, \quad (\text{B.2.5})$$

se tiene que el tensor $P_a{}^{bcd}$ se escribe como

$$\begin{aligned}
P_a{}^{bcd} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R^a{}_{bcd}} \\
&= \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial (R - 2\Lambda + 2\kappa^2 \lambda \mathcal{P})}{\partial R^a{}_{bcd}} \\
&= \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial R}{\partial R^a{}_{bcd}} + \kappa \lambda \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R^a{}_{bcd}} \\
&= \frac{1}{2\kappa} \delta_a^{[c} g^{d]b} + \kappa \lambda \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R^a{}_{bcd}},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R^a{}_{bcd}} &= 12 \frac{\partial}{\partial R^a{}_{bcd}} (R_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} R_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma}{}^{\beta} R_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}{}^{\nu}) + \frac{\partial}{\partial R^a{}_{bcd}} (R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}) \\
&\quad - 12 \frac{\partial}{\partial R^a{}_{bcd}} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\rho} R^{\nu\sigma}) + 8 \frac{\partial}{\partial R^a{}_{bcd}} (R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho}{}^{\sigma} R_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma}{}^{\nu}).
\end{aligned}$$

Evaluando cada derivada se obtienen la expresiones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial R^a{}_{bcd}} (R_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} R_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma}{}^{\beta} R_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}{}^{\nu}) &= R_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} R_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma}{}^{\beta} \frac{\partial R_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}{}^{\nu}}{\partial R^a{}_{bcd}} + R_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} R_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}{}^{\nu} \frac{\partial R_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma}{}^{\beta}}{\partial R^a{}_{bcd}} \\
&\quad + R_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma}{}^{\beta} R_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}{}^{\nu} \frac{\partial R_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma}}{\partial R^a{}_{bcd}} \\
&= 3 R_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}{}^{\sigma} R_{\rho}{}^{\alpha}{}_{\sigma}{}^{\beta} \frac{\partial R_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}{}^{\nu}}{\partial R^a{}_{bcd}} \\
&= 3 R^{\mu\rho\sigma\nu} R_{\rho\alpha\sigma}{}^{\beta} \frac{\partial R_{\mu\beta\nu}{}^{\alpha}}{\partial R^a{}_{bcd}} \\
&= 3 R^{\mu\rho\sigma\nu} R_{\rho\alpha\sigma}{}^{\beta} \delta_a^{\alpha} \delta_{\mu}^b \delta_{\beta}^c \delta_{\nu}^d \\
&= 3 R^{b\rho\sigma[d} R_{\rho a \sigma}{}^{c]} \\
&= \frac{3}{2} \left[R^{b\rho\sigma d} R_{\rho a \sigma}{}^c - R^{b\rho\sigma c} R_{\rho a \sigma}{}^d \right], \tag{B.2.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial R^a_{bcd}} (R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}) &= R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} \frac{\partial R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}}{\partial R^a_{bcd}} + R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} \frac{\partial R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta}}{\partial R^a_{bcd}} \\
&\quad R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} \frac{\partial R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}}{\partial R^a_{bcd}} \\
&= 3R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} \frac{\partial R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}}{\partial R^a_{bcd}} \\
&= 3R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\rho\sigma\alpha}{}^{\beta} \frac{\partial R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}}{\partial R^a_{bcd}} \\
&= 3R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\rho\sigma\alpha}{}^{\beta} \delta_a^\alpha \delta_\beta^b \delta_\mu^{[c} \delta_\nu^{d]} \\
&= 3R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\rho\sigma a}{}^b \delta_\mu^{[c} \delta_\nu^{d]} \\
&= \frac{3}{2} \left[R^{cd\rho\sigma} R_{\rho\sigma a}{}^b - R^{dc\rho\sigma} R_{\rho\sigma a}{}^b \right] \\
&= 3R^{cd\rho\sigma} R_{\rho\sigma a}{}^b, \tag{B.2.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial R^a_{bcd}} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\rho} R^{\nu\sigma}) &= R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\rho} \frac{\partial R^{\nu\sigma}}{\partial R^a_{bcd}} + R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\nu\sigma} \frac{\partial R^{\mu\rho}}{\partial R^a_{bcd}} + R^{\mu\rho} R^{\nu\sigma} \frac{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}{\partial R^a_{bcd}} \\
&= 2R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\rho} \frac{\partial R_{\nu\sigma}}{\partial R^a_{bcd}} + R_\mu{}^\rho R^{\nu\sigma} \frac{\partial R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}}{\partial R^a_{bcd}} \\
&= \frac{1}{2} R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\rho} \left[\delta_\nu^b \delta_a^{[c} \delta_\sigma^{d]} + \delta_\sigma^b \delta_a^{[c} \delta_\nu^{d]} - g_{a\nu} g^{b[c} \delta_\sigma^{d]} - g_{a\sigma} g^{b[c} \delta_\nu^{d]} \right] \\
&\quad + R_\mu{}^\rho R^{\nu\sigma} \delta_a^\mu \delta_\nu^b \delta_\rho^{[c} \delta_\sigma^{d]} \tag{B.2.8} \\
&= -\delta_a^{[c} R^{d]\rho\mu b} R_{\mu\rho} + g^{b[c} R^{d]\mu\rho} R_{\mu\rho} + R_a{}^\rho R^{b[d} \delta_\rho^{c]} \\
&= \frac{1}{2} \left[\delta_a^d R^{c\rho\mu b} R_{\mu\rho} - \delta_a^c R^{d\rho\mu b} R_{\mu\rho} + g^{bc} R^{d\mu\rho} R_{\mu\rho} - g^{bd} R^{c\mu\rho} R_{\mu\rho} \right. \\
&\quad \left. + R_a{}^c R^{bd} - R_a{}^d R^{bc} \right], \tag{B.2.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial R^a{}_{bcd}} (R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\rho R_\rho{}^\mu) &= R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\rho \frac{\partial R_\rho{}^\mu}{\partial R^a{}_{bcd}} + R_\mu{}^\nu R_\rho{}^\mu \frac{\partial R_\nu{}^\rho}{\partial R^a{}_{bcd}} + R_\nu{}^\rho R_\rho{}^\mu \frac{\partial R_\mu{}^\nu}{\partial R^a{}_{bcd}} \\
&= 3R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\rho \frac{\partial R_\rho{}^\mu}{\partial R^a{}_{bcd}} \\
&= 3R^{\mu\nu} R_\nu{}^\rho \frac{\partial R_{\rho\mu}}{\partial R^a{}_{bcd}} \\
&= \frac{3}{4} R^{\mu\nu} R_\nu{}^\rho \left[\delta_\rho^b \delta_a^c \delta_\mu^d + \delta_\mu^b \delta_a^c \delta_\rho^d - g_{a\rho} g^{b[c} \delta_\mu^{d]} - g_{a\mu} g^{b[c} \delta_\rho^{d]} \right] \\
&= \frac{3}{4} \left[\delta_a^{[c} R^{d]\nu} R_\nu{}^b + \delta_a^{[c} R^{d]\nu} R_\nu{}^b - g^{b[c} R^{d]\nu} R_{\nu a} - g^{b[c} R^{d]\nu} R_{\nu a} \right] \\
&= \frac{3}{2} \left[\delta_a^{[c} R^{d]\nu} R_\nu{}^b - g^{b[c} R^{d]\nu} R_{\nu a} \right] \\
&= \frac{3}{4} \left[\delta_a^c R^{d\nu} R_\nu{}^b - \delta_a^d R^{c\nu} R_\nu{}^b - g^{bc} R^{d\nu} R_{\nu a} + g^{bd} R^{c\nu} R_{\nu a} \right].
\end{aligned} \tag{B.2.10}$$

Luego, reemplazando en (B.2.6) se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R^a{}_{bcd}} &= 3 \left[12R^{b\rho\sigma[d} R_{\rho a\sigma}{}^{c]} + R^{cd\rho\sigma} R_{\rho\sigma a}{}^b + 4\delta_a^{[c} R^{d]\rho\mu b} R_{\mu\rho} - 4g^{b[c} R^{d]\mu\rho} R_{\mu\rho} \right. \\
&\quad \left. - 4R_a{}^{[c} R^{d]b} + 4\delta_a^{[c} R^{d]\nu} R_\nu{}^b - 4g^{b[c} R^{d]\nu} R_{\nu a} \right],
\end{aligned} \tag{B.2.11}$$

y por tanto, el tensor $P_a{}^{bcd}$ se escribe como

$$\begin{aligned}
P_a{}^{bcd} &= \frac{1}{2\kappa} \delta_a^{[c} g^{d]b} + 3\kappa\lambda \left[12R^{b\rho\sigma[d} R_{\rho a\sigma}{}^{c]} + R^{cd\rho\sigma} R_{\rho\sigma a}{}^b + 4\delta_a^{[c} R^{d]\rho\mu b} R_{\mu\rho} \right. \\
&\quad \left. - 4g^{b[c} R^{d]\mu\rho} R_{\mu\rho} - 4R_a{}^{[c} R^{d]b} + 4\delta_a^{[c} R^{d]\nu} R_\nu{}^b - 4g^{b[c} R^{d]\nu} R_{\nu a} \right],
\end{aligned} \tag{B.2.12}$$

o de forma alternativa

$$\begin{aligned}
P_{abcd} &= \frac{1}{2\kappa} g_a[c g_{d]b} + 3\kappa\lambda \left[12R_b{}^{\rho\sigma}{}_{[d} R_{c]\sigma a\rho} + R_{ab}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma cd} + 4g_{a[c} R_{d]}{}^{\rho\mu}{}_{ b} R_{\mu\rho} \right. \\
&\quad \left. - 4g_{b[c} R_{d]}{}^{\mu\rho}{}_{ a} R_{\mu\rho} - 4R_{a[c} R_{d]b} + 4g_{a[c} R_{d]}{}^\nu R_{\nu b} - 4g_{b[c} R_{d]}{}^\nu R_{\nu a} \right].
\end{aligned} \tag{B.2.13}$$

Reemplazando en (B.1.16) se tiene

$$\begin{aligned} P_a{}^{cde} R_{bcde} &= \left(\frac{1}{2\kappa} \delta_a^{[d} g^{e]c} + \kappa\lambda \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R^a{}_{cde}} \right) R_{bcde} \\ &= \frac{1}{2\kappa} R_{ab} + \kappa\lambda \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R^a{}_{cde}} R_{bcde}, \end{aligned} \quad (\text{B.2.14})$$

$$\begin{aligned} \nabla^c \nabla^d P_{acdb} &= \nabla^c \nabla^d \left(\frac{1}{2\kappa} \delta_{a[d} g_{b]c} + \kappa\lambda \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R^{acdb}} \right) \\ &= \kappa\lambda \nabla^c \nabla^d \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R^{acdb}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.2.15})$$

Así, las ecuaciones de movimiento para ECG en dimensión 4 quedan dadas por

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + g_{ab} \Lambda + \lambda \bar{P}_{ab} = \kappa T_{ab}, \quad (\text{B.2.16})$$

con

$$\bar{P}_{ab} = 2\kappa^2 \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R^a{}_{cde}} R_{bcde} - \frac{1}{2} g_{ab} \mathcal{P} - 2\nabla^c \nabla^d \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R^{acdb}} \right) \right). \quad (\text{B.2.17})$$

Bibliografía

- [1] S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky, *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. 1983, ISBN: 978-0-471-87316-7.
- [2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998, ISBN: 978-0-471-30932-1.
- [3] P. Perrot, *A to Z of Thermodynamics*. Oxford University Press, 1998, ISBN: 978-0-19-856552-9.
- [4] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics)*, ép. Course of theoretical physics / by L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 6. Butterworth-Heinemann, 1987, ISBN: 0750627670.
- [5] J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff, "On Massive Neutron Cores," *Phys. Rev.*, vol. 55, págs. 374-381, 4 1939. DOI: [10.1103/PhysRev.55.374](https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.374).
- [6] R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*. 1934, ISBN: 978-0-486-65383-9.
- [7] N. K. Glendenning, *Compact stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity*. Springer, 2000.
- [8] J. Kunz, "Neutron Stars," en. 2022. arXiv: [2204.12520 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/2204.12520).
- [9] P. Bueno y P. A. Cano, "Einsteinian cubic gravity," *Phys. Rev. D*, vol. 94, pág. 104005, 10 2016. DOI: [10.1103/PhysRevD.94.104005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.104005).
- [10] R. A. Hennigar y R. B. Mann, "Black holes in Einsteinian cubic gravity," *Phys. Rev. D*, vol. 95, pág. 064055, 6 2017. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.064055](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.064055).

- [11] P. Bueno y P. A. Cano, “Four-dimensional black holes in Einsteinian cubic gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 94, pág. 124 051, 12 2016. DOI: [10.1103/PhysRevD.94.124051](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.124051).
- [12] R. Hennigar, M. B. Jahani Poshteh y R. Mann, “Shadows, Signals, and Stability in Einsteinian Cubic Gravity,” *Physical review D: Particles and fields*, vol. 97, pág. 064 041, 2018. DOI: [10.1103/PhysRevD.97.064041](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.064041).
- [13] A. V. Astashenok, S. D. Odintsov y A. de la Cruz-Dombriz, “The realistic models of relativistic stars in $f(R) = R + \alpha R^2$ gravity,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 34, n.º 20, pág. 205 008, 2017. DOI: [10.1088/1361-6382/aa8971](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa8971). arXiv: [1704.08311 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1704.08311).
- [14] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. 1972, ISBN: 978-0-471-80007-1.
- [15] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley y Sons, 1972, ISBN: 978-0-471-92567-5.
- [16] J. de Boer, K. Papadodimas y E. Verlinde, “Holographic Neutron Stars,” *JHEP*, vol. 10, pág. 020, 2010. DOI: [10.1007/JHEP10\(2010\)020](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2010)020). arXiv: [0907.2695 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0907.2695).
- [17] T. Canavesi, O. Fierro, N. Grandi y P. Pisani, “Scalar correlators and normal modes in holographic neutron stars,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 40, n.º 2, pág. 025 001, 2023. DOI: [10.1088/1361-6382/aca866](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aca866). arXiv: [2111.10408 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2111.10408).
- [18] P. Bueno, P. A. Cano y A. Ruipérez, “Holographic studies of Einsteinian cubic gravity,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2018, n.º 3, 150, pág. 150, 2018. DOI: [10.1007/JHEP03\(2018\)150](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2018)150). arXiv: [1802.00018 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1802.00018).
- [19] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.*, vol. 2, págs. 231-252, 1998. DOI: [10.1023/A:1026654312961](https://doi.org/10.1023/A:1026654312961). arXiv: [hep-th/9711200](https://arxiv.org/abs/hep-th/9711200).
- [20] V. E. Hubeny, “The AdS/CFT Correspondence,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 32, n.º 12, pág. 124 010, 2015. DOI: [10.1088/0264-9381/32/12/124010](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/12/124010). arXiv: [1501.00007 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1501.00007).

- [21] E. Berti, V. Cardoso y A. O. Starinets, “Quasinormal modes of black holes and black branes,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 26, pág. 163 001, 2009. DOI: [10.1088/0264-9381/26/16/163001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/16/163001). arXiv: [0905.2975](https://arxiv.org/abs/0905.2975) [gr-qc].
- [22] D. Tong, *Lectures on Statistical Physics*. 2012. DOI: <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/statphys.html>.
- [23] —, *Lectures on Quantum Mechanics*. 2021. DOI: <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/quantum.html>.
- [24] N. A. M. Alarcón, *Soluciones Rotantes en Gravedad Cuasi-Topológica*, Master’s Thesis, 2021. DOI: <http://repositorio.udec.cl/jspui/handle/11594/6281>.
- [25] T. Padmanabhan, “Some aspects of field equations in generalized theories of gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 84, pág. 124 041, 12 2011. DOI: [10.1103/PhysRevD.84.124041](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.124041).
- [26] I. L. Shapiro, “Effective Action of Vacuum: Semiclassical Approach,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 25, pág. 103 001, 2008. DOI: [10.1088/0264-9381/25/10/103001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/10/103001). arXiv: [0801.0216](https://arxiv.org/abs/0801.0216) [gr-qc].
- [27] K. S. Stelle, “Renormalization of higher-derivative quantum gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 16, págs. 953-969, 4 1977. DOI: [10.1103/PhysRevD.16.953](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.16.953).
- [28] S. W. Hawking y R. Penrose, “The Singularities of gravitational collapse and cosmology,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 314, págs. 529-548, 1970. DOI: [10.1098/rspa.1970.0021](https://doi.org/10.1098/rspa.1970.0021).
- [29] A. Buchel, J. Escobedo, R. C. Myers, M. F. Paulos, A. Sinha y M. Smolkin, “Holographic GB gravity in arbitrary dimensions,” *JHEP*, vol. 03, pág. 111, 2010. DOI: [10.1007/JHEP03\(2010\)111](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2010)111). arXiv: [0911.4257](https://arxiv.org/abs/0911.4257) [hep-th].
- [30] P. G. S. Fernandes, P. Carrilho, T. Clifton y D. J. Mulryne, “The 4D Einstein–Gauss–Bonnet theory of gravity: a review,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 39, n.º 6, pág. 063 001, 2022. DOI: [10.1088/1361-6382/ac500a](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac500a). arXiv: [2202.13908](https://arxiv.org/abs/2202.13908) [gr-qc].