



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO INGENIERÍA MECÁNICA



**DESARROLLO DE MÉTODO PARA CÁLCULO DE FUERZAS EN
DESCANSOS DE SEGMENTOS BASCULANTES PARA SIMULACIONES EN
MODELOS DE ROTOR VERTICAL**

POR

Diego Alonso Mendoza Fernández

Memoria de Título presentada a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Concepción para
optar al título profesional de Ingeniero Civil Mecánico

Profesor Guía:
Dr. Cristian Gabriel Rodríguez Godoy

Marzo 2024
Concepción (Chile)

© 2024 Diego Alonso Mendoza Fernández
Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o
procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento

Agradecimientos

Agradezco a Dios por haberme brindado salud y por haberme dado la fortaleza necesaria en momentos de dificultad para llegar a este punto de mi carrera.

Agradezco a la empresa Thermal Engineering por su apoyo durante los últimos años de mi carrera, gracias a la beca Juan Pablo Bancalari. Esta oportunidad me brindó de una gran motivación para la finalización de mis estudios.

Quiero agradecer a mi familia por su inquebrantable apoyo a lo largo de estos años. Especialmente, quiero dedicarle esta memoria de título a mis padres por todo el cariño que me han brindado a lo largo de mi vida.

También agradecer a los amigos que forme en mi vida universitaria por su compañía y por haber sido parte fundamental en la consecución de este logro. Les deseo de todo corazón el mayor de los éxitos en su vida profesional. Asimismo, deseo expresar mi gratitud a mis amigos de infancia por estos años de amistad y por cada palabra de aliento que me han brindado a lo largo de este camino.

Mi sincero agradecimiento a los profesores del Departamento de Ingeniería Mecánica por la formación que me proporcionaron, la cual me ha preparado para enfrentar los desafíos de mi carrera con confianza y determinación. En especial, agradecer al profesor Cristian Rodríguez por el apoyo que me brindó a lo largo de esta memoria de título.

Resumen

Las unidades generadoras de centrales hidroeléctricas son turbomáquinas que convierten la energía mecánica del agua en trabajo mecánico y, posteriormente, en energía eléctrica a través de un generador. Estas máquinas son vitales para el funcionamiento de las redes de generación eléctrica, por lo que cualquier interrupción debido a una falla inesperada puede tener un impacto significativo tanto económico como en la seguridad del suministro. Por lo tanto, es crucial comprender su comportamiento dinámico, realizar un monitoreo de condiciones mediante el análisis de vibraciones y conocer el estado de la máquina para llevar a cabo las acciones de mantenimiento necesarias antes de que ocurra una falla.

En general, estas máquinas suelen estar montadas con un eje vertical, lo que dificulta su modelación dinámica. Esto se debe principalmente a que, a diferencia de la orientación horizontal, no existe una precarga radial debida al peso que mantenga el rotor en una posición estacionaria. Por este motivo, se diseñan con descansos hidrodinámicos de segmentos basculantes.

Para llevar a cabo una simulación dinámica, es crucial incorporar de forma precisa el comportamiento de los descansos. Para los descansos de segmentos basculantes (Tilting Pad) que son los comúnmente utilizados en estas unidades generadoras, no existe en la literatura un modelo preciso para determinar las fuerzas que produce el fluido lubricante sobre el eje. Debido a esto, el objetivo principal de este trabajo fue desarrollar una metodología para calcular las fuerzas hidrodinámicas en este tipo de descanso, para luego incorporarla a un modelo dinámico de rotor.

En este estudio, se han formulado expresiones para calcular la fuerza hidrodinámica en los descansos con segmentos basculantes basado en la geometría y el comportamiento del fluido. Para ello, se desarrolló una fórmula para determinar el espesor de la película de aceite, el cual permite resolver la ecuación de Reynolds con mayor precisión. Además, se planteó un algoritmo mediante el uso del software MATLAB para determinar el movimiento de un rotor vertical, con el propósito de validar la metodología empleada en la determinación de las fuerzas hidrodinámicas en los descansos de segmentos basculantes. Este enfoque permitió obtener resultados consistentes y congruentes con los modelos actualmente descritos en la literatura.

Como trabajos futuros, se contempla la inclusión y validación de esta metodología en una unidad generadora real. Este proceso implica la comparación entre la simulación y casos reales medidos en la industria, lo que permitirá evaluar la precisión y la aplicabilidad práctica de la metodología desarrollada.

Palabras Claves: Dinámica del rotor, Descansos tipo Tilting Pad, Unidades generadoras

Abstract

The generating units of hydroelectric power plants are turbomachines that convert the mechanical energy of water into mechanical work and, subsequently, into electrical energy through a generator. These machines are vital for the operation of electrical generation networks, so any interruption due to an unexpected failure can have a significant impact both economically and on supply security. Therefore, it is crucial to understand their dynamic behavior, carry out condition monitoring through vibration analysis, and know the machine's status to perform the necessary maintenance actions before a failure occurs.

Generally, these machines are often mounted with a vertical shaft, which complicates their dynamic modeling. This is mainly because, unlike horizontal orientation, there is no radial preload due to weight to keep the rotor in a stationary position. For this reason, they are designed with tilting pad hydrodynamic bearings.

To carry out accurate dynamic simulation, it is crucial to precisely incorporate the behavior of the bearings. For tilting pad bearings, which are commonly used in these generating units, there is no precise model in the literature to determine the forces exerted by the lubricating fluid on the shaft. Because of this, the main objective of this work was to develop a methodology to calculate the hydrodynamic forces in this type of bearing and then incorporate it into a rotor dynamic model.

In this study, expressions have been formulated to calculate the hydrodynamic force in tilting pad bearings based on geometry and fluid behavior. For this purpose, a formula was developed to determine the oil film thickness, which allows solving the Reynolds equation more accurately. Additionally, an algorithm was proposed using MATLAB software to determine the movement of a vertical rotor, with the purpose of validating the methodology used in determining the hydrodynamic forces in tilting pad bearings. This approach allowed obtaining consistent and congruent results with the models currently described in the literature.

As future work, the inclusion and validation of this methodology in a real generating unit are contemplated. This process involves comparing simulation results with real cases measured in the industry, which will allow evaluating the accuracy and practical applicability of the developed methodology.

Keywords: Rotor dynamics, Tilting Pad bearings, Generator units

Tabla de Contenidos

Tabla de Contenidos	iii
Lista de Tablas	iv
Lista de Figuras	v
1. CAPÍTULO 1: Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	1
1.2 Descripción de la propuesta de solución	2
1.3 Objetivo General	2
1.4 Objetivos Específicos	2
1.5 Hipótesis	3
1.6 Metodología	3
2. CAPÍTULO 2: Marco Teórico	5
2.1 Unidad Generadora	5
2.2 Descansos Hidrodinámicos	6
2.3 Ecuación de Reynolds en Condiciones No Estacionarias	9
2.4 Análisis de Órbitas	11
2.5 Método Order Tracking	12
3. CAPÍTULO 3: Estado del arte	15
3.1 Modelos de rotor vertical	15
3.2 Determinación de fuerzas en descansos de segmentos basculantes montados en rotor horizontal	17
4. CAPÍTULO 4: Determinación de Fuerzas Hidrodinámicas	20
4.1 Desarrollo de fórmula de espesor de película de aceite	20
4.2 Resolución ecuación de Reynolds	25
4.3 Condiciones de borde	27
4.4 Integración de fuerzas sobre el eje	28
5. CAPÍTULO 5: Dinámica del patín	30
5.1 Determinación de momentos sobre el patín.	30
5.2 Determinación de momentos producido por la fricción	33
5.3 Ecuaciones del movimiento del patín.	34
6. CAPÍTULO 6: Validación del modelo	35
6.1 Validación de fórmula de espesor de película de aceite	35
6.2 Simulación de Banco de Ensayos	39
6.2.1 Descripción de banco de ensayos	39
6.2.2 Planteamiento de ecuaciones del movimiento y descripción de algoritmo	41
6.2.3 Resultados de forma de órbita obtenidos mediante simulación	45
6.2.4 Resultados de espectros obtenidos mediante simulación	48
7. CAPÍTULO 7: Conclusiones	50
Referencias	51
Anexos	53

Lista de Tablas

Tabla 1: Datos para validación fórmula de espesor de película.	36
Tabla 2: Especificaciones de banco de ensayos de (Nässelqvist et al., 2014).	40

Lista de Figuras

Figura 1: Espesor de película de aceite en descanso de segmentos basculantes.	3
Figura 2: Esquema de una unidad generadora, Fuente: (G.Electric, s.f.).	5
Figura 3: Esquema de corte transversal de un descanso hidrodinámico. (Fuente: Pérez y Rodríguez, 2021).	6
Figura 4: Descanso Tipo Tilting Pad. (Fuente: BearingsPlus, 2020).	6
Figura 5: Dimensiones características de descanso Tilting Pad. (Fuente: Nicholas et al., 1994).	7
Figura 6: Precarga de descanso de segmentos basculantes. (Fuente: Dmochowski et al., 2013).	8
Figura 7: Representación del offset en un descanso Tilting Pad.	8
Figura 8: Pivotes del tipo rocker y esféricos. (Fuente: San Andrés, 2010).	9
Figura 9: Descanso con pivote tipo flexible. (Fuente: San Andrés, 2010).	9
Figura 10: Comparación distribución de presión al utilizar el método de diferencias finitas y la solución analítica. (Fuente: Pérez y Rodríguez, 2021).	10
Figura 11: Explicación de obtención de orbitas. (Fuente: Saavedra, s.f.).	11
Figura 12: Medición de vibración de sensor de desplazamiento sin contacto. (Fuente: Saavedra, s.f.).	12
Figura 13: Forma de onda y espectro cuando la máquina opera a una velocidad de rotación variable. (Fuente: Saavedra y Rodríguez, 2006).	12
Figura 14: Forma de onda y espectro cuando la máquina opera a una velocidad de rotación variable utilizando el método COT. (Fuente: Saavedra y Rodríguez, 2006).	13
Figura 15: Explicación del algoritmo COT. (Fuente: Saavedra y Rodríguez, 2006).	14
Figura 16: Forma de órbita en un rotor vertical con un descanso hidrodinámico de 4 patines. (Fuente: Synnegård et al., 2016).	15
Figura 17: Espectro de cascada obtenidas en la partida del rotor. (Fuente: Benti, 2021).	17
Figura 18: Determinación de espesor de película. (Santos y Russo, 1998).	18
Figura 19: Geometría para la determinación del espesor de película.	20
Figura 20: Grado de desviación del centro del pivote P'	21
Figura 21: Triángulos de interés para la determinación del espesor de película.	22
Figura 22: Triángulo GDP'.	22
Figura 23: Triángulo BGP'.	23
Figura 24: Triángulo BGD.	23
Figura 25: Geometría para determinar espesor de película.	24
Figura 26: Triángulo ABC.	24
Figura 27: Triángulo DEA.	25
Figura 28: Condiciones de borde utilizados comúnmente en la literatura. Adaptado de: (Pérez y Rodríguez, 2021).	28
Figura 29: Distribución de presiones en un descanso de segmentos basculantes y su fuerza equivalente. (Adaptado de: Pérez y Rodríguez, 2021).	28
Figura 30: Integración de fuerzas hidrodinámicas.	29
Figura 31: Geometría necesaria para determinar sumatoria de momento.	30
Figura 32: Medidas relevantes para la determinación de la sumatoria de momentos.	30
Figura 33: Triángulo GDP.	31
Figura 34: Triángulo DAP.	31

Figura 35: Proyección del diferencial de fuerza.	32
Figura 36: Momento producido por el roce del pivote. Fuente: (Kim et al., 2020).	33
Figura 37: Ecuaciones del movimiento del patín.	34
Figura 38: Descanso utilizado para validar forma de espesor de película.	35
Figura 39: Comparación del espesor de película considerando η y ψ positivos.	36
Figura 40: Comparación del espesor de película considerando η positivo y ψ negativo.	37
Figura 41: Comparación del espesor de película considerando η negativo y ψ positivo.	37
Figura 42: Comparación del espesor de película considerando η negativo y ψ negativo.	38
Figura 43: Comparación del espesor de película considerando que el rotor se encuentra en diferentes cuadrantes.	38
Figura 44: Banco de Ensayos de (Nässelqvist et al., 2014).	39
Figura 45: Ubicación de sensor de desplazamiento. Fuente: (Nässelqvist et al., 2014).	39
Figura 46: Excentricidad máxima a medida que aumenta velocidad de rotación. Fuente: (Benti, 2021).	40
Figura 47: Fuerzas que actúan sobre el eje.	41
Figura 48: Diagrama de flujo de la resolución las ecuaciones que describen el movimiento del rotor.	44
Figura 49: Órbita del rotor para velocidad de rotación entre [0-400] RPM.	45
Figura 50: Comparación entre las órbitas obtenidas en el modelo propuesto con el de (Benti, 2021) para un desbalanceamiento de $1.7e-3$ [kg m] y velocidad de rotación $\omega = 250$ RPM.	45
Figura 51: Comparación entre las órbitas obtenidas en el modelo propuesto con el de (Benti, 2021) para un desbalanceamiento de $1.7e-3$ [kg m] y velocidad de rotación $\omega = 320$ RPM.	46
Figura 52: Comparación entre las órbitas obtenidas en el modelo propuesto con el de (Benti, 2021) para un desbalanceamiento de $1.7e-3$ [kg m] y velocidad de rotación $\omega = 380$ RPM.	46
Figura 53: Comparación entre las órbitas obtenidas en el modelo propuesto con el de (Benti, 2021) para un desbalanceamiento de $3.8e-3$ [kg m] y velocidad de rotación $\omega = 230$ RPM.	47
Figura 54: Comparación entre las órbitas obtenidas en el modelo propuesto con el de (Benti, 2021) para un desbalanceamiento de $3.8e-3$ [kg m] y velocidad de rotación $\omega = 320$ RPM.	47
Figura 55: Comparación entre las órbitas obtenidas en el modelo propuesto con el de (Benti, 2021) para un desbalanceamiento de $3.8e-3$ [kg m] y velocidad de rotación $\omega = 380$ RPM.	48
Figura 56: Espectro utilizando el método COT.	49

Nomenclatura

A	: Amplitud, [m]
C	: Holgura radial, [m]
D	: Diámetro, [m]
F	: Fuerza, [N]
I	: Inercia rotacional, [$kg \cdot m^2$]
L	: Largo, [m]
M	: Masa, [kg]
M_f	: Momento producido por el roce, [$N \cdot m$]
M_p	: Momento producido por el fluido, [$N \cdot m$]
N	: Número de patines, [-]
O	: Centro de curvatura, [-]
P	: Presión, [Pa]
R	: Radio, [m]
T	: Espesor de patín, [m]
T	: Torque, [$N \cdot m$]
T_P	: Tiempo de partida del rotor, [s]
U	: Desbalanceamiento del rotor, [$kg \cdot m$]
U	: Velocidad tangencial, [m/s]
V	: Velocidad radial, [m/s]
W	: Fuerza normal, [N]
\bar{X}	: Vector de estado
a	: Espesor de patín, [m]
e	: Excentricidad, [m]
h	: Espesor de película, [m]
m	: Precarga del descanso, [-]
t	: Tiempo, [s]

z : Coordenada axial, [-]

Letras Griegas

α : Offset del descanso, [-]

β : Orientación del centro del eje con respecto al centro del descanso, [rad]

χ : Ángulo de arco, [-]

Δ : Diferencia

η : Desviación del pivote, [rad]

μ : Viscosidad del aceite, [$Pa \cdot s$]

μ_f : Coeficiente de fricción, [-]

ω : Velocidad de rotación, [rad/s]

ϕ : Ángulo de posición del patín con respecto al sistema de referencia fijo, [rad]

ψ : Rotación del patín, [rad]

θ : Coordenada radial, [-]

Subíndices

b : Descanso, [m]

D : Desbalanceamiento

f : Fricción

j : Eje

p : Patín

pivot : Pivote

Abreviaciones

COT : Computed order tracking

EDP : Ecuación diferencial parcial

FFT : Transformada rápida de Fourier

CAPÍTULO 1: Introducción

1.1 Planteamiento del problema

Las unidades generadoras de centrales hidroeléctricas son turbomáquinas que transforman la energía disponible de un caudal de agua en energía mecánica a través de una turbina y en energía eléctrica a través del movimiento de un generador. Este tipo de máquinas es crítica para el funcionamiento de una red de generación eléctrica, por lo que una detención producto de alguna falla inesperada podría significar una pérdida significativa desde el punto de vista económico y de la seguridad del suministro.

Con el propósito de prevenir esta problemática, es esencial comprender el comportamiento dinámico de estas máquinas. Esto implica desarrollar un modelo matemático que describa su respuesta ante diversas condiciones operativas. Mediante el monitoreo de condiciones a través del análisis de vibraciones, es posible evaluar el estado de la máquina y con ello realizar las acciones de mantenimiento necesarias antes de que la falla ocurra.

Este tipo de unidades generadoras generalmente se encuentra montadas con un eje vertical. La modelación dinámica de rotores orientados horizontalmente es ampliamente estudiada en la literatura. Sin embargo, existe una menor información para el caso vertical. Por ende, resulta de interés proponer un modelo dinámico que logre una descripción precisa del movimiento del rotor en esta orientación. La principal dificultad radica en que, a diferencia de la orientación horizontal, no hay una precarga radial del descanso debido al peso del rotor que mantenga a este en una posición estacionaria, lo cual complejiza la simulación numérica.

Comúnmente, los descansos utilizados en las unidades generadoras son del tipo segmentos basculantes. La ventaja principal de estos es que proporcionan una mayor estabilidad al rotor en situaciones en que exista una baja precarga. En dinámica de rotores, un modelo del descanso hidrodinámico es de importancia para predecir correctamente el comportamiento del sistema. Sin embargo, para el caso de este tipo de descansos no existe una técnica para determinar con exactitud las fuerzas hidrodinámicas. Esto debido a que no se ha desarrollado una manera de calcular la distribución de presión de manera analítica (Pérez y Rodríguez, 2021). En la actualidad, se emplean programas computacionales de rotor-dinámica para calcular los coeficientes de rigidez y amortiguamiento del descanso. Sin embargo, este método no permite capturar de manera precisa el comportamiento no lineal de las fuerzas del fluido lubricante, que son fundamentales para describir adecuadamente el movimiento en un rotor vertical. Es por ello que existe la necesidad de desarrollar una metodología para determinar estas fuerzas correctamente.

El principal objetivo de este estudio es desarrollar una metodología para calcular las fuerzas hidrodinámicas que actúan sobre un eje montado en un rotor vertical, el cual utiliza descansos de segmentos basculantes. Luego, se utilizará este modelo de fuerza para determinar el movimiento del rotor aplicando las ecuaciones de dinámica del rotor.

1.2 Descripción de la propuesta de solución

Para elaborar un modelo de descanso hidrodinámico tipo "segmentos basculantes", es fundamental determinar la distribución de presión del fluido lubricante sobre el eje, lo cual requiere resolver la ecuación de Reynolds. Para la resolución de esta ecuación diferencial se necesita calcular previamente el espesor de película de aceite. Por lo tanto, se realizará el desarrollo de una expresión que permita calcular dicho espesor en el caso de segmentos basculantes, utilizando relaciones geométricas. Se debe considerar las distintas variables que afectan a este, como la posición del eje y la rotación que poseen los patines del descanso.

Una vez obtenida la distribución de presiones, se procederá a derivar relaciones que permitan calcular tanto la fuerza que actúa sobre el eje como el momento que actúa sobre el patín, este último resulta de importancia para actualizar la posición angular en la que se encuentra el patín, ya que esto afecta el espesor de película de aceite. Junto a ello, se estudiarán los distintos factores adicionales que afectan al movimiento del patín para añadirlo al modelo.

Posteriormente, se realizará la validación de este modelo. Esto se llevará a cabo mediante la implementación de un algoritmo en MATLAB diseñado para simular el banco de ensayo de (Nässelqvist et al., 2014), que consiste en un rotor vertical, montados sobre dos descansos de cuatro segmentos basculantes cada uno. El objetivo es replicar las órbitas y espectros identificadas en dicho estudio.

1.3 Objetivo General

OG1: El objetivo general de este trabajo es desarrollar una metodología para calcular las fuerzas hidrodinámicas que actúan sobre un eje montado en un rotor vertical montado sobre descansos de segmentos basculantes.

1.4 Objetivos Específicos

OE1: Elaborar una expresión analítica que permita calcular el espesor de la película de aceite en un descanso de segmentos basculantes.

OE2: Derivar expresiones para calcular la fuerza del fluido que actúa sobre el eje.

OE3: Desarrollar las ecuaciones que describan el movimiento de los patines en el descanso de segmentos basculantes.

OE4: Crear un programa computacional que permita la representación del movimiento de un rotor vertical.

OE5: Validar el modelo desarrollado mediante la comparación con casos presentados en la literatura.

1.5 Hipótesis

La representación precisa del movimiento del rotor en configuración vertical puede lograrse mediante la adecuada incorporación del comportamiento de los descansos hidrodinámicos de segmentos basculantes.

1.6 Metodología

Para lograr los objetivos planteados, se desarrolla la siguiente metodología:

Para calcular el espesor de la película de aceite, se utilizarán relaciones geométricas que incorporan el movimiento basculante de los segmentos del descanso. La fórmula resultante deberá ser capaz de representar con precisión el espesor de la película de aceite, que es dependiente de la posición del eje y del patín. Para ello, se debe tener en cuenta las variaciones en la posición del eje sobre el descanso, el movimiento de los patines y las diferentes ubicaciones del pivote. En la Figura 1 se muestra el espesor de película de un descanso de segmentos basculantes.

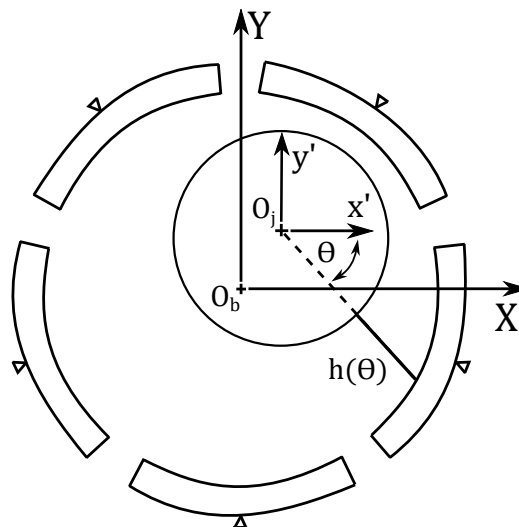


Figura 1: Espesor de película de aceite en descanso de segmentos basculantes.

Con el fin de verificar la precisión de la fórmula obtenida para el espesor de película, se utilizará el programa AutoCAD para dibujar un descanso y comparar los valores del espesor de película obtenidos mediante la fórmula con aquellos obtenidos con el modelo CAD.

Una vez que se haya determinado el espesor de película, se procederá a resolver la ecuación de Reynolds con el fin de obtener la distribución de presiones sobre el eje y sobre el patín. Se llevará a cabo un estudio de las diversas simplificaciones de esta ecuación para determinar cuál es aplicable a este tipo de descanso. Además, se evaluará si es necesario utilizar algún método numérico para su resolución.

Con la presión obtenida, se desarrollarán expresiones para la determinación de fuerzas sobre el eje, y fuerzas y momentos sobre el patín. Para este último, se deberán desarrollar relaciones trigonométricas para determinar el brazo de momento que realiza cada diferencial de fuerza sobre el patín.

Para determinar el movimiento del patín, se analizarán los diversos factores que influyen en su desplazamiento y se buscarán formas de cuantificarlos. Una vez identificados estos factores, se establecerán las ecuaciones del movimiento utilizando el método de Newton.

Finalmente, estas ecuaciones que permiten determinar las fuerzas sobre el eje, se aplicarán a un rotor de un banco de ensayos y se compararán los resultados obtenidos con el modelo y con lo experimental. La principal verificación se centrará en asegurar que las orbitas y espectros generados en el modelo coincidan con lo observado en la realidad. Para ello, se desarrollará un algoritmo en el programa MATLAB que permita resolver las ecuaciones propuestas en los pasos anteriores.

CAPÍTULO 2: Marco Teórico

El presente capítulo tiene como objetivo introducir los aspectos teóricos más relevantes para poder realizar la modelación dinámica del rotor. Para ello se realizará una explicación acerca de conceptos relacionados con las unidades generadoras y teoría hidrodinámica.

2.1 Unidad Generadora

En la Figura 2 se muestra los principales componentes que posee una unidad generadora.

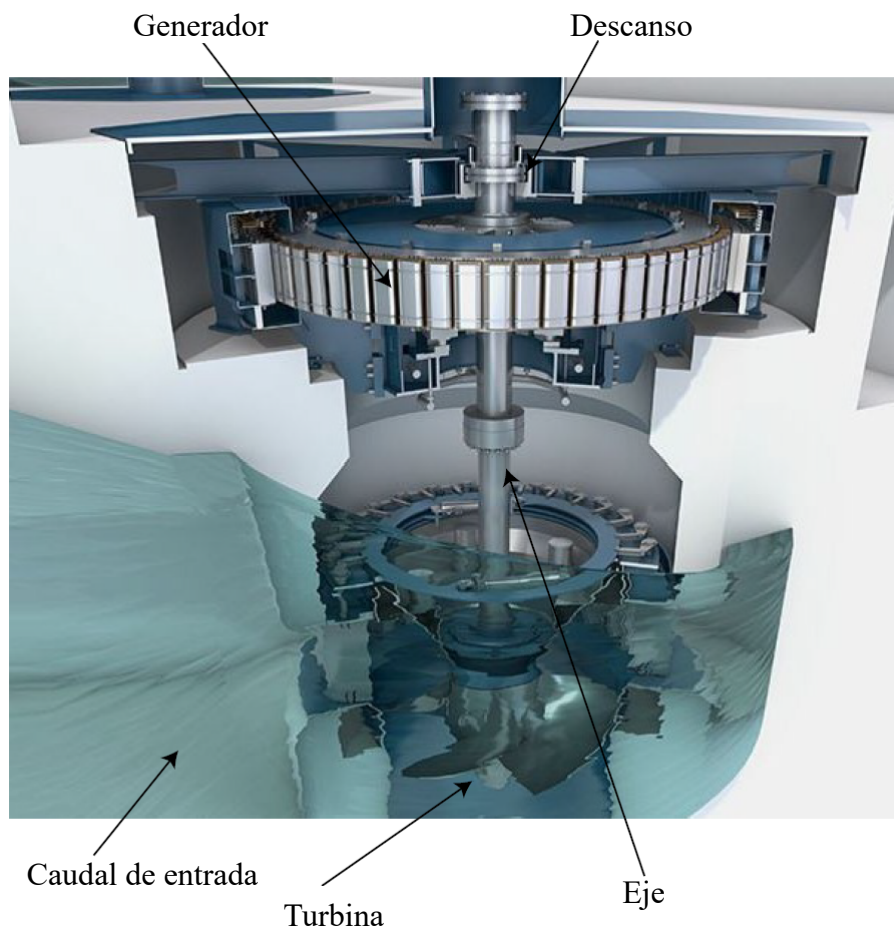


Figura 2: Esquema de una unidad generadora, Fuente: (G.Electric, s.f.).

La turbina tiene como función extraer la energía del agua para hacer rotar el eje, mientras que el generador tiene como función transformar la energía mecánica del eje rotatorio en energía eléctrica. En las unidades generadoras se utiliza un descanso que sea capaz de soportar las cargas axiales, mientras que los demás se encargan de soportar las cargas radiales. El descanso de empuje tiene que ser capaz de soportar la carga del peso de la unidad generadora, mientras que los descansos radiales deben soportar las cargas de desbalanceamiento del generador y de la turbina.

2.2 Descansos Hidrodinámicos

En la Figura 3 se muestra un descanso hidrodinámico, el cual consta del buje, el eje (muñón) y el lubricante. Estos elementos mecánicos están diseñados para proporcionar soporte a las cargas aplicadas sobre el eje. Debido a la película de lubricante, las superficies del eje y el buje no entran en contacto directo.

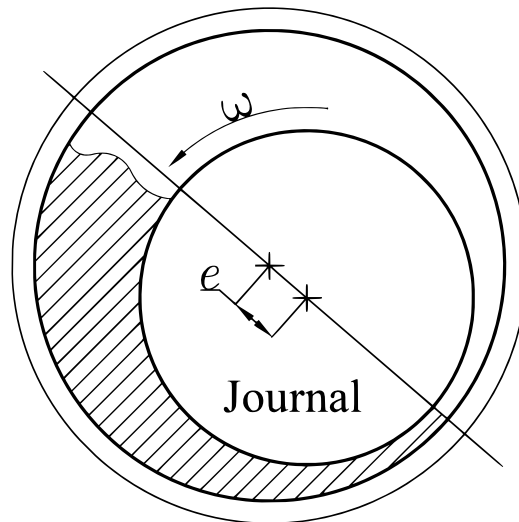


Figura 3: Esquema de corte transversal de un descanso hidrodinámico. (Fuente: Pérez y Rodríguez, 2021).

En este estudio se analizará especialmente el descanso de segmentos basculantes o también conocido como 'Tilting Pad', estos tipos de descansos son especialmente adecuados para operaciones con baja precarga. Cada uno de estos descansos está compuesto por patines que proporcionan una mayor estabilidad al sistema. Para ilustrar esto, se muestra un ejemplo de uno de estos descansos en la Figura 4.



Figura 4: Descanso Tipo Tilting Pad. (Fuente: BearingsPlus, 2020).

Los descansos de segmentos basculantes son ampliamente empleados en las unidades generadoras. Una de las principales complicaciones en la modelación matemática de estos descansos radica en la falta de una expresión analítica disponible en la literatura para la determinación de las fuerzas. Esto se debe en gran parte al hecho de que los patines basculan en relación al pivote, lo que conlleva a variaciones en el espesor de película de aceite y, por ende, en las fuerzas.

Con respecto al descanso Tilting Pad, se poseen los siguientes parámetros relevantes que se considerarán posteriormente en el estudio.

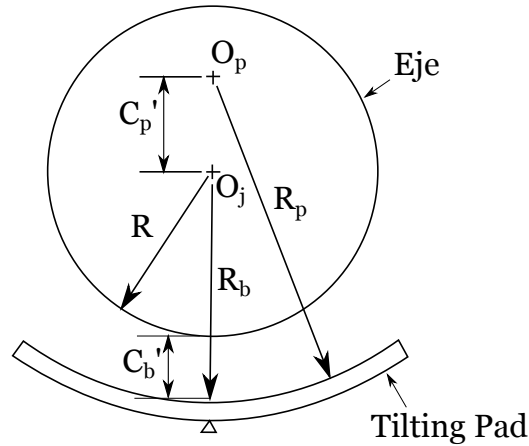


Figura 5: Dimensiones características de descanso Tilting Pad. (Fuente: Nicholas et al., 1994).

- O_p : Centro de curvatura del patín
- O_j : Centro del eje
- R_p : Radio del patín
- R_b : Radio del descanso.
- C_b : Holgura del descanso ($R_b - R$)
- C_p : Holgura del Patín ($R_p - R$)

Otro factor importante del estudio de los descansos de segmento basculante es la precarga, la cual está definido como se muestra en la ecuación (1).

$$m = 1 - \frac{C_p}{C_b} \quad (1)$$

La precarga puede ser mayores, menores o iguales a 0, tal como se muestra en la Figura 6. Las máquinas industriales usualmente poseen valores de precarga de entre 0.1 a 0.5 (Eisenmann, 2004). La principal ventaja de una precarga positiva es que, el patín generar fuerzas hidrodinámicas inclusive si la fuerza en el eje se acerca a 0 (Nicholas et al., 1994).

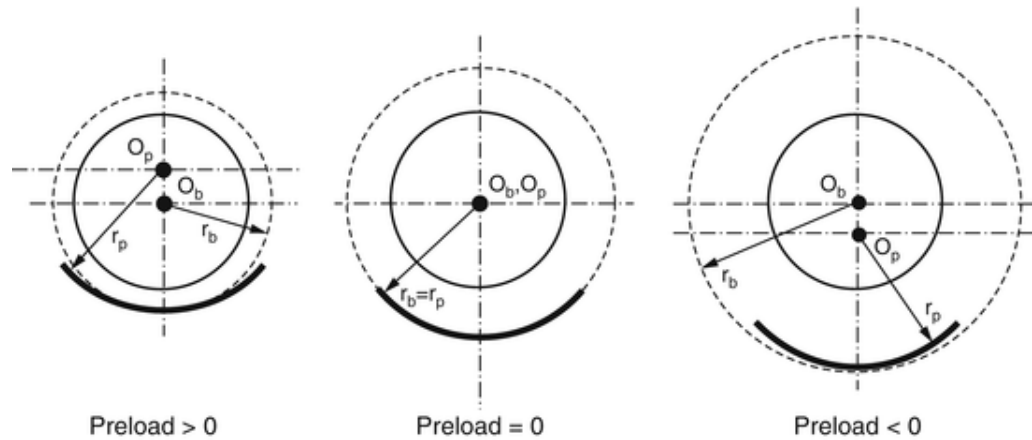


Figura 6: Precarga de descanso de segmentos basculantes. (Fuente: Dmochowski et al., 2013).

Además, otro parámetro importante es el 'offset' o 'pivot ratio', el cual se emplea para identificar la posición del patín. Se determina mediante la siguiente expresión:

$$\alpha = \chi / \chi_p \quad (2)$$

Donde χ corresponde al arco del patín y χ_p representa el arco en donde se encuentra el pivote del patín. Un esquema representativo de esto se muestra en la Figura 7.

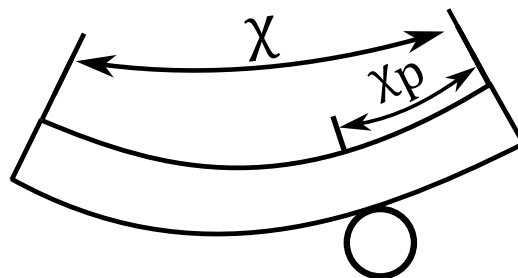


Figura 7: Representación del offset en un descanso Tilting Pad.

Usualmente, en este tipo de descanso se emplea un offset mayor a 0.5, ya que esto facilita el movimiento del patín para crear la cuña de aceite y, por ende, generar la fuerza hidrodinámica. Esta es la razón por la cual es necesario considerar este factor al plantear el modelo del descanso.

En los descansos de segmentos basculantes, se emplean principalmente tres variantes de pivotes, entre las cuales se incluyen los tipos rocker, esféricos y flexibles. Los dos primeros se ilustran en la Figura 8 y comparten la característica de posibilitar la rotación libre del patín. Por otro lado, en la Figura 9 se presenta el pivote tipo flexible, el cual permite no solo la rotación sino también el desplazamiento en direcciones radiales y transversales.

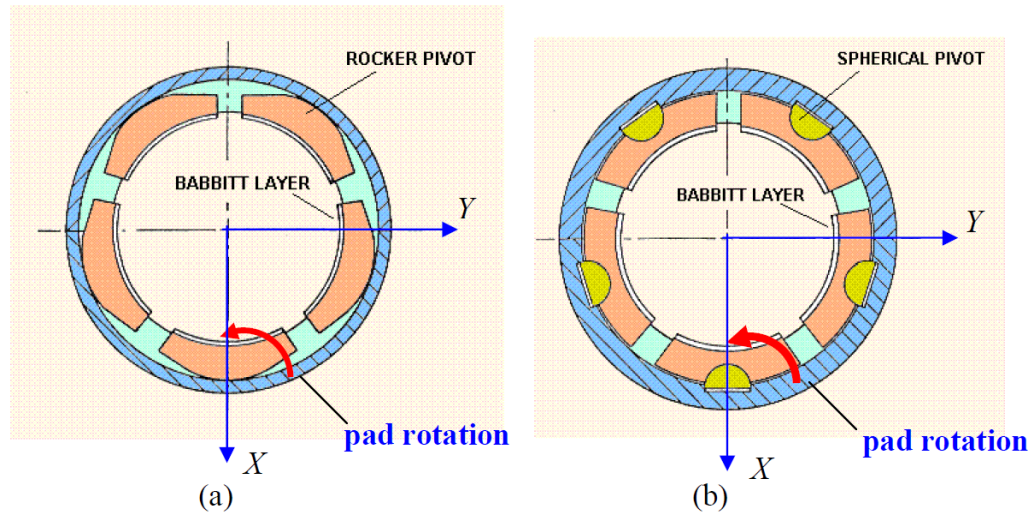


Figura 8: Pivotes del tipo rocker y esféricos. (Fuente: San Andrés, 2010).

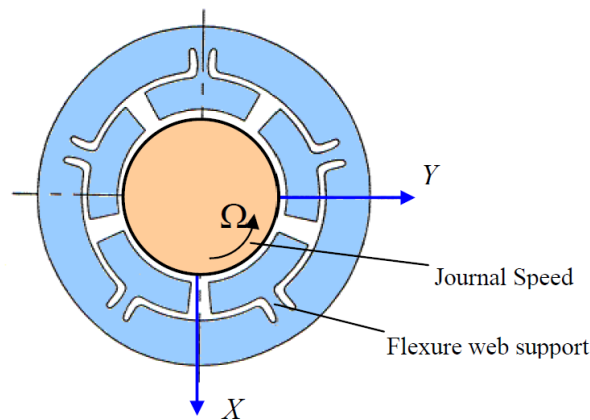


Figura 9: Descanso con pivote tipo flexible. (Fuente: San Andrés, 2010).

En este estudio, se analizarán los descansos con pivotes tipo esféricos, dado que son los comúnmente empleados en los modelos de rotor vertical documentados en la literatura.

2.3 Ecuación de Reynolds en Condiciones No Estacionarias

La ecuación de Reynolds es de suma importancia en la teoría hidrodinámica, ya que permite determinar la distribución de presión en un descanso hidrodinámico. La ecuación diferencial parcial (EDP) correspondiente se muestra en la ecuación (3).

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{6U}{R} \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12V \quad (3)$$

Donde R corresponde al radio del eje, μ corresponde a la viscosidad dinámica del fluido, P es la presión, h es el espesor de película del aceite, U y V corresponden a las velocidades tangencial y radial respectivamente de la superficie del eje.

La resolución de esta EDP presenta una dificultad adicional cuando se aplica al caso de un rotor montado con el eje vertical. A diferencia del caso horizontal, la ausencia de una precarga generada por el peso implica que el eje no se mantenga en una posición estacionaria.

Al resolver la ecuación de Reynolds, es importante tener en cuenta además que esta EDP no tiene una solución analítica, lo que requiere el uso de métodos numéricos para su resolución. El método de diferencias finitas es comúnmente utilizado para este propósito. Sin embargo, en ciertos casos, es posible realizar simplificaciones que permiten obtener una solución analítica.

Una de estas simplificaciones es la del descanso corto, la cual es válida cuando $L/D < 1$. En esta simplificación, las variaciones de presión con respecto a θ pueden ser despreciadas. La ecuación diferencial correspondiente para este caso se muestra en la Ecuación (4).

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{6U}{R} \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12V \quad (4)$$

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta al integrar dos veces con respecto a z y considerando como condiciones de borde que la presión en los extremos es igual a la presión atmosférica.

Según lo establecido por (Pérez y Rodríguez, 2021), en unidades generadoras es común que se cumpla la relación $L/D < 1$. En este estudio, se llevó a cabo una comparación entre el uso de diferencias finitas y la solución analítica para determinar la distribución de presión. El objetivo fue determinar cuál de las dos alternativas es más adecuada. Se realizaron comparaciones de resultados y tiempos de simulación para diferentes valores de L/D , y los resultados se presentan en la Figura 10.

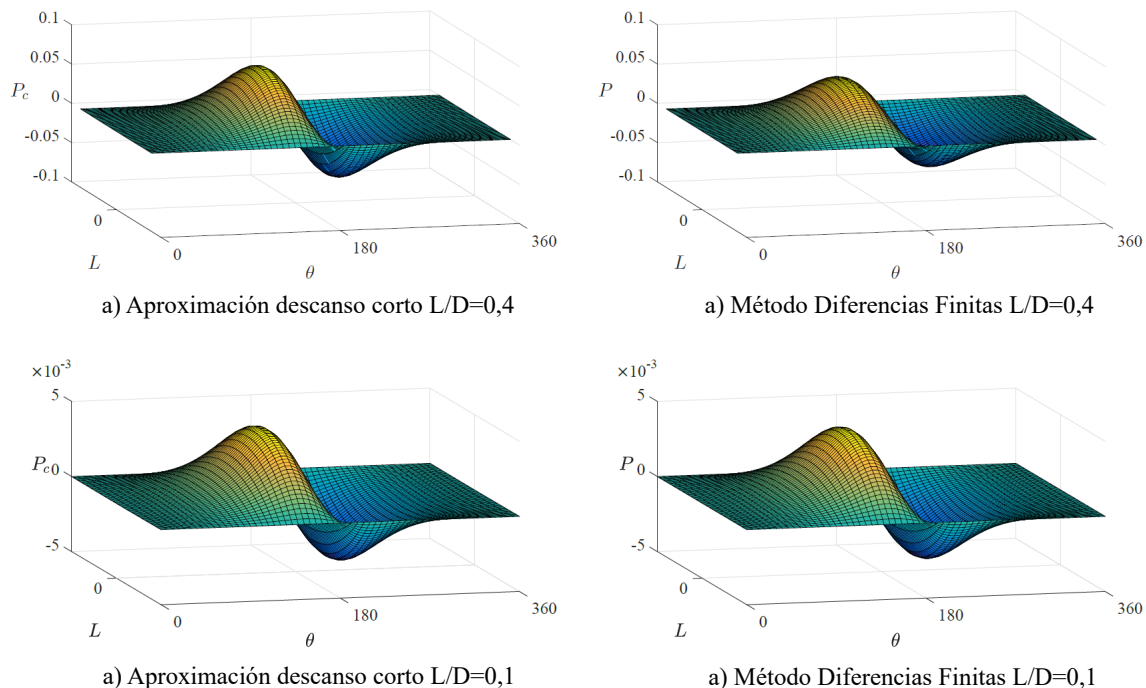


Figura 10: Comparación distribución de presión al utilizar el método de diferencias finitas y la solución analítica. (Fuente: Pérez y Rodríguez, 2021).

A partir de los resultados obtenidos, se llegó a la conclusión de que, para casos en los que $L/D < 0.6$, la diferencia entre la solución analítica y el método de diferencias finitas fue menor al 10%. Sin embargo, para el caso en el que $L/D > 0.6$, se observó una diferencia significativa entre los resultados obtenidos por ambos métodos. Además, se observó que el tiempo de simulación al utilizar la solución analítica fue aproximadamente 30 veces menor.

Por lo tanto, se puede afirmar que la solución analítica es una buena aproximación cuando $L/D < 0.6$. Esta consideración será considerada para la realización del modelo.

2.4 Análisis de Órbitas

Para validar el modelo, se realizará una comparación entre las órbitas obtenidas en un banco de ensayos y aquellas generadas en la simulación. En esta sección, se realizará una explicación acerca del concepto de órbita, cómo se obtiene experimentalmente y su relevancia en los análisis de la dinámica del rotor.

Una órbita es una representación gráfica del movimiento del centro del eje con respecto al cojinete a lo largo de una o múltiples vueltas. Esta representación resulta fundamental para diagnosticar diversos problemas que pueden surgir en máquinas rotativas, tales como desbalanceamiento, desalineamiento, inestabilidades del fluido, entre otros.

Para obtener las órbitas, se emplean dos sensores de desplazamiento dispuestos a 90° uno con respecto al otro. La órbita se genera al registrar el desplazamiento horizontal y vertical en cada instante de tiempo. Este proceso se visualiza en la Figura 11.

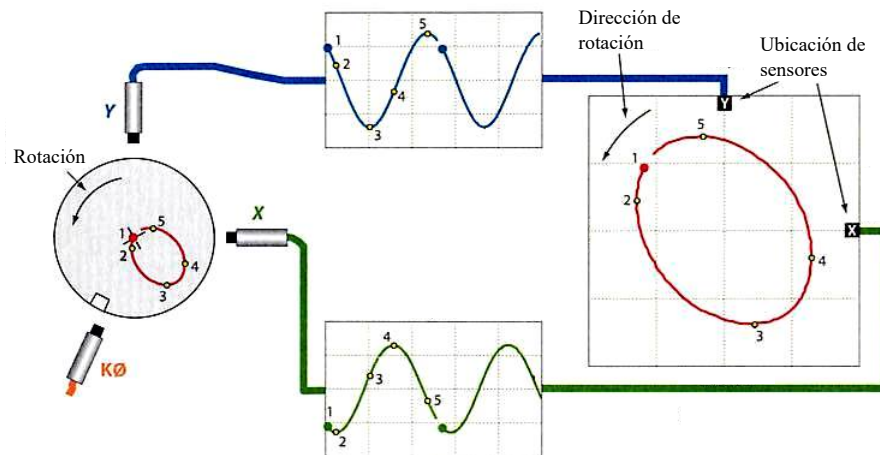


Figura 11: Explicación de obtención de órbitas. (Fuente: Saavedra, s.f.).

Con respecto a los tipos de sensores utilizados para medir el desplazamiento vibratorio. Para el caso de los descansos hidrodinámicos, son utilizados los del tipo sin contacto. Un esquema representativo se muestra en la Figura 12, los cuales miden el desplazamiento entre la punta del sensor y la distancia relativa de la superficie del eje.

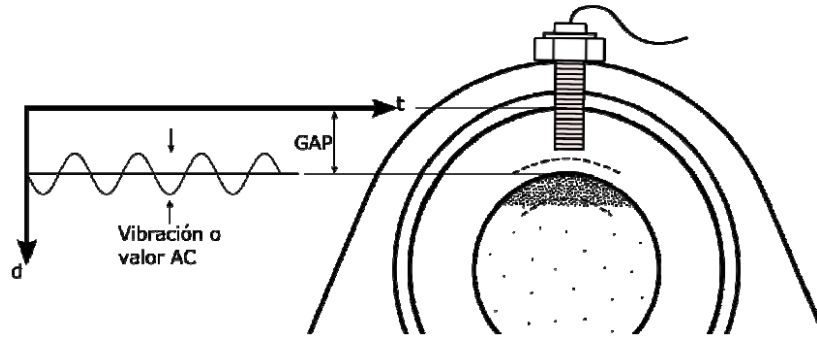


Figura 12: Medición de vibración de sensor de desplazamiento sin contacto. (Fuente: Saavedra, s.f.).

2.5 Método Order Tracking

Dentro de los aspectos que se considerarán para validar el modelo propuesto en este estudio se encuentra el análisis de espectros. En los datos disponibles en la literatura, se encuentran espectros obtenidos a velocidades de rotación variables. Esta variabilidad añade una dificultad adicional al problema, ya que el método de Transformada Rápida de Fourier (FFT) no puede ser utilizada para su análisis. Esto se debe a que dicho método no permite verificar los múltiplos de la velocidad de rotación. La Figura 13 muestra un espectro utilizando el método FFT para el caso en que el rotor se encuentra a una velocidad de rotación variable, donde se puede observar el aspecto mencionado anteriormente. Es por ello que en este informe se empleará el método Order Tracking (COT), propuesta por (Saavedra y Rodríguez, 2006), para realizar los espectros.

El método Computed Order Tracking (COT) es un algoritmo diseñado para identificar las componentes espectrales basándose en los múltiplos de la velocidad de rotación, conocidos como order. Para este fin, se emplea la transformada en el dominio de la posición angular θ - amplitud A_n en lugar del enfoque común en el dominio del tiempo t - amplitud A_n . En la Figura 14 se presenta el espectro utilizando el método COT. Se observa que este último permite visualizar las componentes correspondientes a los múltiplos de velocidad con mayor claridad.

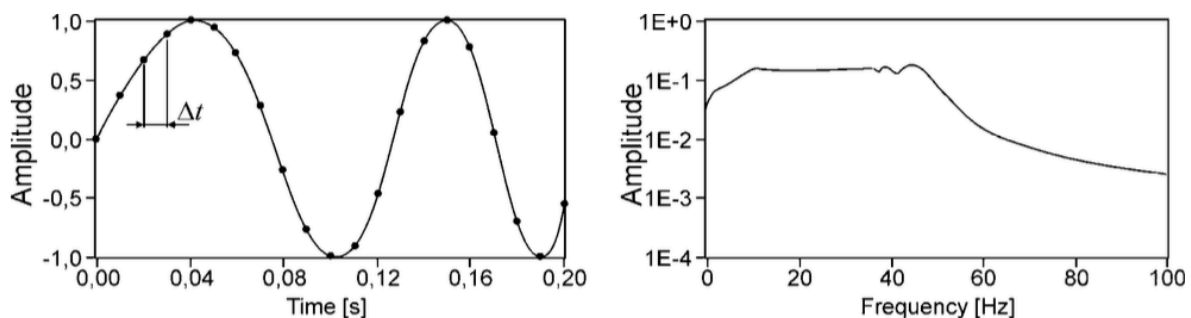


Figura 13: Forma de onda y espectro cuando la máquina opera a una velocidad de rotación variable. (Fuente: Saavedra y Rodríguez, 2006).

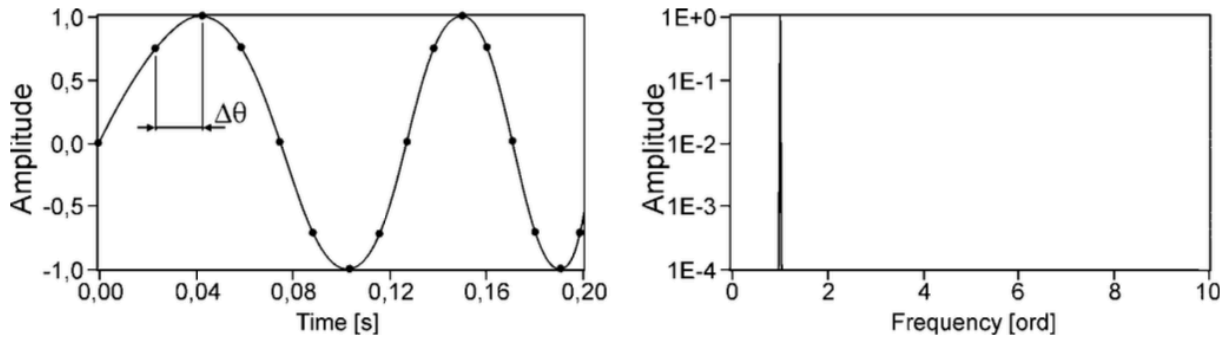


Figura 14: Forma de onda y espectro cuando la máquina opera a una velocidad de rotación variable utilizando el método COT. (Fuente: Saavedra y Rodríguez, 2006).

Para llevar a cabo la implementación del algoritmo Order Tracking, se deben seguir los siguientes pasos:

- Registrar los datos de la forma de onda y los momentos en los que el rotor completa una vuelta.
- Utilizar una función de interpolación para determinar la posición angular en función del tiempo.
- Resamplear los datos del dominio tiempo - amplitud (A_n) al dominio posición angular (θ) - amplitud (A_n).
- Recopilar los datos de amplitud (A_n) - posición angular (θ) con un intervalo de $\Delta\theta$ constante.
- Realizar el análisis espectral.

Para determinar la función de posición angular se asume que la aceleración angular es constante. Con esta suposición, la posición angular se puede expresar como se muestra en la ecuación (5).

$$\theta(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \quad (5)$$

Donde b_0 , b_1 y b_2 son constantes que se determinan utilizando tres tiempos en donde el rotor da una vuelta (t_1, t_2, t_3). De esta manera es posible plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\theta(t_1) = 0 \quad (6)$$

$$\theta(t_2) = \Delta\phi \quad (7)$$

$$\theta(t_3) = 2\Delta\phi \quad (8)$$

Donde $\Delta\phi = 2\pi$. Una vez determinada esta función, será posible determinar la posición angular para cada Δt , como se muestra en la ecuación (9).

$$\theta_n = b_0 + b_1 \Delta t + b_2 (\Delta t)^2 \quad (9)$$

Una vez completado este proceso, se obtiene el conjunto de puntos (A_n, θ_n). Posteriormente, se calculan las amplitudes A_n para cada incremento constante de $\Delta\theta$. Para ello, se emplea una función de interpolación aplicada al conjunto de puntos (A_n, θ_n), la cual puede ser una función lineal, una función piecewise cúbica o una spline cúbica. A medida que aumenta el orden del polinomio, se mejora la

precisión de los resultados. En este caso particular, se opta por utilizar el método de 'Piecewise cúbica'.

En la Figura 15 se muestra el procedimiento descrito anteriormente.

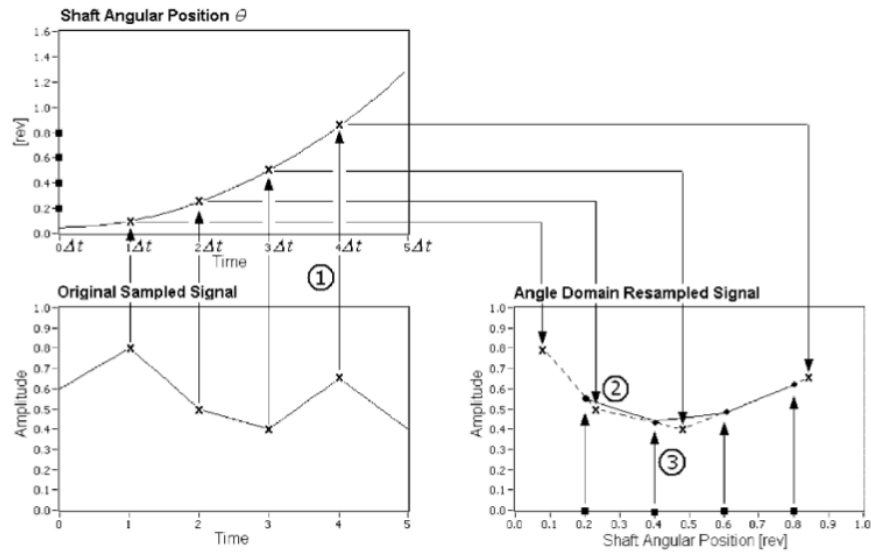


Figura 15: Explicación del algoritmo COT. (Fuente: Saavedra y Rodríguez, 2006).

Una vez determinado los datos en dominio posición angular - amplitud, se procede a utilizar el algoritmo FFT para determinar el espectro.

CAPÍTULO 3: Estado del Arte

En esta sección, se realizará una revisión de la literatura sobre la modelación dinámica de rotores verticales, y las metodologías utilizadas para la determinación de las fuerzas que producen los descansos de segmentos basculantes.

3.1 Modelos de rotor vertical

(Nässelqvist et al., 2014) propuso un modelo dinámico para rotores verticales que emplea descansos del tipo segmentos basculantes. Las fuerzas hidrodinámicas que actúan sobre el eje se determinan mediante coeficientes de rigidez y amortiguamiento, los cuales deben ser previamente obtenidos mediante un programa comercial de rotor-dinámica. Para la simulación, se utiliza una función polinómica que depende de la excentricidad y el ángulo de carga, lo que permite reducir significativamente el tiempo de simulación al evitar la resolución de la ecuación de Reynolds en cada paso de tiempo. Los resultados fueron validados con datos obtenidos de un banco de ensayo, el cual consta de un rotor con dos descansos de segmentos basculantes, los cuales poseen 4 patines, en el cual se somete al rotor una fuerza de desbalanceamiento. Los resultados mostraron una ligera desviación en comparación con los experimentales, como se muestra en la Figura 16. Dentro de las características de la órbita está su forma cuadrada, el cual se atribuye a la influencia de los cuatro patines del descanso.

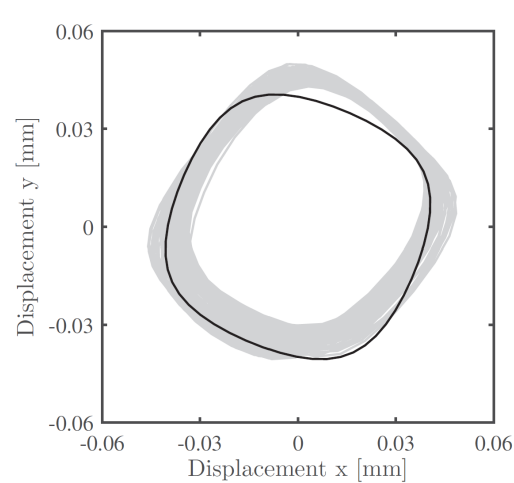


Figura 16: Forma de órbita en un rotor vertical con un descanso hidrodinámico de 4 patines. (Fuente: Synnegård et al., 2016).

Un enfoque similar al trabajo previo fue emprendido por (Xu et al., 2013). En su estudio, se llevó a cabo la simulación de una unidad generadora que incorporaba una turbina tipo Kaplan de 125 MW. Para lograr esto, desarrollaron un algoritmo para el cálculo de las fuerzas hidrodinámicas, el cual se caracterizó por su bajo costo computacional. Sin embargo, para emplear este algoritmo de manera efectiva, es necesario conocer previamente el comportamiento del descanso hidrodinámico bajo distintas condiciones de operación antes de la simulación. Estos datos pueden ser obtenidos mediante simulaciones o experimentalmente. Este enfoque culminó en la obtención de simulaciones con tiempos de cómputos menores.

(Cha y Glavatskih, 2015) propusieron un modelo dinámico para rotores horizontales y verticales. El propósito de su estudio fue analizar la influencia del material del patín del descanso de segmentos basculantes en la dinámica del rotor. Para la determinación de las fuerzas del fluido lubricante utilizaron una fórmula aproximada del espesor de película y resolvieron la ecuación de Reynolds utilizando el método de diferencias finitas.

Según (Brito et al., 2017), determinar con precisión los coeficientes de rigidez y amortiguamiento teóricamente en el caso de unidades generadoras representa una dificultad debido a los cambios significativos e impredecibles que pueden ocurrir en las condiciones de operación de los descansos de segmentos basculantes. Por esta razón, el autor desarrolló una metodología para estimar estos coeficientes experimentalmente mediante la medición de vibraciones. Para validar este enfoque, se elaboró un modelo matemático que describe la dinámica de la unidad, en el cual se compararon las órbitas del modelo con las de una unidad generadora, consiguiendo un error máximo del 3 %.

En el estudio realizado por (Dixit et al., 2020) se analizó el impacto del desbalanceamiento en un rotor flexible instalado en posición vertical. Para llevar a cabo esta investigación, se empleó una simulación basada en el método de elementos finitos. Las fuerzas hidrodinámicas se calcularon mediante la resolución de la ecuación de Reynolds para cada uno de los patines del cojinete.

(Pérez y Rodríguez, 2021) proponen un modelo dinámico para una unidad generadora que tiene en cuenta la configuración vertical del eje. En contraste con investigaciones previas, se desarrolla una expresión analítica para simular de manera práctica el comportamiento del descanso, la cual se determina multiplicando por una función armónica, la fuerza del fluido obtenida como si el descanso fuera circular. El modelo fue validado con datos de un banco de ensayos y de una unidad generadora, el cual fue capaz de predecir las órbitas, formas de onda y espectro para ambos casos.

(Benti, 2021) adoptó la metodología descrita por (Nässelqvist et al., 2014) para llevar a cabo la simulación del rotor, considerando velocidades de rotación variables. Esta aproximación implicó el cálculo de los coeficientes dinámicos de rigidez y amortiguamiento para diversas excentricidades y velocidades de rotación. Posteriormente, se utilizó una función de interpolación para obtener un polinomio que describiera la relación entre la velocidad de rotación, la excentricidad y los coeficientes necesarios en la simulación, con el fin de determinar las fuerzas del fluido. Los resultados de la simulación mostraron una concordancia cercana con los datos registrados en el banco de ensayos. Sin embargo, este método no fue aplicado en velocidades de rotación menores a 250 RPM debido al comportamiento no lineal de las fuerzas hidrodinámicas del descanso. Dentro de los resultados presentados en el estudio se realizó un análisis espectral para el banco de ensayos considerando la partida del rotor. Para ello utilizó un espectro de cascada, el cual es un tipo de análisis que permite observar los espectros recolectados en diferentes instantes. Esta gráfica se muestra en la Figura 47. El autor concluyó que se puede observar que existe una componente en 1ω , la cual está influenciada por el desbalanceamiento y las componentes 3ω y 5ω influenciadas por las fuerzas de los patines ($N - 1$, $N + 1$. Donde N corresponde al número de patines del descanso). Esta última se evidencia a velocidades elevadas de rotación.

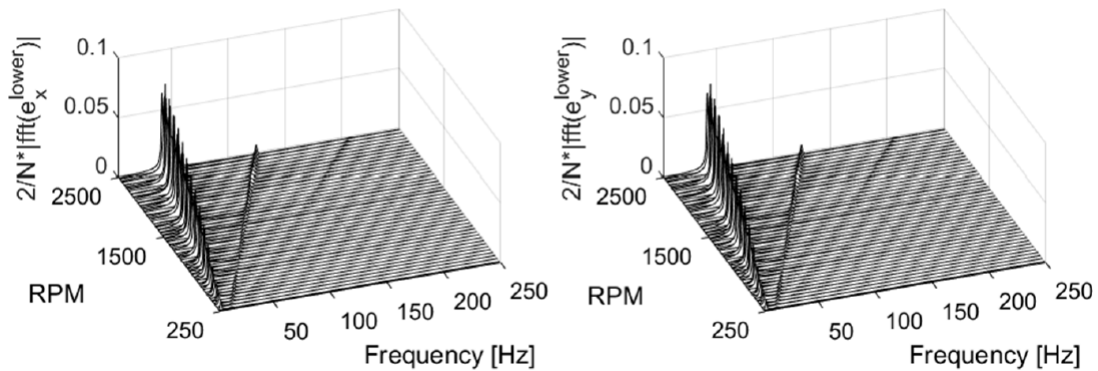


Figura 17: Espectro de cascada obtenidas en la partida del rotor. (Fuente: Benti, 2021).

En cuanto a la modelación dinámica de unidades generadoras, es crucial incorporar el efecto giroscópico en las ecuaciones del movimiento, ya que este tiene un impacto significativo en la dinámica del rotor. (Iskakov et al., 2021) llevó a cabo la modelación del efecto giroscópico en un rotor rígido vertical con el propósito de analizar su comportamiento frente a rigideces y amortiguamientos no lineales. El estudio se centró en investigar la reducción de la amplitud vibratoria producto de la no linealidad en la rigidez.

Al analizar los modelos dinámicos de rotor vertical disponibles en la literatura se concluye que en la mayoría de las simulaciones es necesario calcular previamente el comportamiento del descanso, ya sea a través de datos experimentales o del cálculo de coeficientes dinámicos, lo cual puede llevar a un gran trabajo previo para realizar la simulación. Por tanto, surge la necesidad de desarrollar un método que permita determinar estas fuerzas de manera más eficiente y precisa.

3.2 Determinación de fuerzas en descansos de segmentos basculantes montados en rotor horizontal

A continuación, se presenta un análisis de la literatura sobre los principales artículos que han desarrollado metodologías para determinar las fuerzas en los descansos de segmentos basculantes en el contexto de rotores montados horizontalmente. El objetivo es proporcionar contexto sobre las distintas formas que se han desarrollado para determinar estas fuerzas y destacar las áreas que requieren mayor investigación.

(Santos y Russo, 1998) llevaron a cabo un estudio con el objetivo de modelar teóricamente el comportamiento de un descanso hidrodinámico de segmentos basculantes, con el propósito de investigar el control activo mediante la inyección de aceite lubricante para la reducción de vibraciones en máquinas rotatorias. Para resolver la ecuación de Reynolds los autores primeramente desarrollaron una expresión analítica del espesor de película de aceite. Para ello, analizaron los diferentes movimientos tanto del eje como del patín, y mediante un análisis vectorial determinaron esta expresión. La Figura 18 ilustra un esquema de este análisis, en el cual los vectores rojos representan los distintos movimientos del eje y del patín. Posteriormente, utilizando el método de diferencias finitas, se determinó la distribución de presiones y emplearon métodos de integración numérica para calcular las fuerzas.

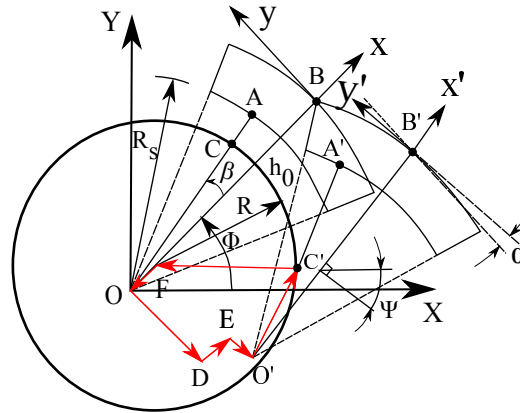


Figura 18: Determinación de espesor de película. (Santos y Russo, 1998).

(Okabe y Cavalca, 2009) analizaron el efecto del flujo turbulento del fluido lubricante en las características dinámicas del rotor con descansos de segmentos basculantes. Para esto, desarrollaron una expresión analítica de las fuerzas hidrodinámicas, en donde se utilizó una fórmula aproximada del espesor de película de aceite en el cual se considera la rotación del patín y el movimiento del eje. La resolución de la ecuación de Reynolds se realizó utilizando la simplificación de descanso corto. Se realizaron simulaciones considerando un rotor Jeffcot el cual utilizaba una turbina Laval. En las conclusiones se destaca que los factores que ejercen una mayor influencia en la dinámica del rotor son la precarga del patín, el número de segmentos, la holgura radial y la posición del patín, mientras que el momento de inercia solo mostraba una influencia mínima, de unos pocos micrómetros. En cuanto a la influencia del flujo turbulento, se llegó a la conclusión de que este incrementa considerablemente las fuerzas, afectando a la dinámica del rotor.

(Wang et al., 2015) propuso una metodología para calcular de manera analítica las fuerzas en los descansos de segmentos basculantes. Para llevar a cabo este cálculo, es crucial determinar tanto la posición del patín como un procedimiento para resolver la ecuación de Reynolds. La posición del patín se estimó a partir de una relación entre la excentricidad y la holgura, la cual se determinó experimentalmente. Para la resolución de la ecuación de Reynolds se emplea el método de separación de variables para obtener una expresión analítica de la presión. Para ello se simplificó el descanso como si fuera circular. Posteriormente, mediante integración, se determinan las fuerzas. Para considerar la fuerza en el descanso de segmento basculante, se considera que el movimiento del patín ocasiona un cambio en la dirección de la fuerza. Por lo tanto, a través de relaciones entre la posición del eje y del patín, se determinan las fuerzas en la dirección correcta.

El estudio realizado por (Kim et al., 2020) investigó el impacto del roce del pivote en el movimiento del rotor. Para ello, se desarrolló un modelo matemático que simula la dinámica del rotor, teniendo en cuenta este efecto. Para la resolución de la ecuación de Reynolds, se propuso una fórmula para el espesor de película y se aplicó el método de elementos finitos para resolver la ecuación diferencial. Entre los hallazgos obtenidos, se concluyó que el aumento del radio del pivote contribuía a la reducción de las inestabilidades generadas por la fricción.

En el estudio realizado por (Jin et al., 2023), se examinó el impacto de la rigidez del pivote en la dinámica del descanso de segmentos basculantes. Para ello, se desarrolló una fórmula aproximada del espesor de película de aceite teniendo en cuenta la deformación del pivote. En cuanto a la determina-

ción de las fuerzas hidrodinámicas, se empleó la metodología propuesta por (Wang et al., 2015). Los resultados de este trabajo indicaron que el incremento en la rigidez del pivote podría disminuir tanto la amplitud vibratoria del rotor como la máxima fuerza hidrodinámica del descanso.

Tras analizar los estudios mencionados previamente, se evidencia un interés en desarrollar una metodología para determinar las fuerzas en descansos de segmentos basculantes, con el propósito de comprender cómo diferentes parámetros impactan en la dinámica del rotor. Estos estudios se centran en resolver la ecuación de Reynolds mediante la formulación de una aproximación del espesor de película y su posterior solución mediante métodos numéricos. Sin embargo, en la mayoría de los casos, no se ofrece una demostración geométrica para la determinación de esta fórmula de espesor, y ninguno de ellos ha validado su precisión para diversas configuraciones del eje y del patín. Además, los resultados obtenidos en los modelos carecen de validación experimental.

Por consiguiente, resulta fundamental establecer un método para determinar las fuerzas hidrodinámicas en descansos de segmentos basculantes que incluya una explicación detallada de cómo se ha derivado la fórmula del espesor de película de aceite, el cual sea capaz de proporcionar valores precisos en cualquier configuración de rotación del patín, posición del pivote y posición del eje. Asimismo, es esencial validar experimentalmente el modelo propuesto, dado que esto sería crucial para mejorar el diseño de este tipo de descansos.

CAPÍTULO 4: Determinación de Fuerzas Hidrodinámicas

4.1 Desarrollo de fórmula de espesor de película de aceite

Como se ha mencionado previamente, para calcular las fuerzas generadas por un descanso hidrodinámico sobre el eje, es necesario resolver la ecuación de Reynolds. Al analizar la fórmula (3) se evidencia la necesidad de conocer el espesor de película de aceite para la resolución de esta ecuación. Actualmente, en la literatura no existe una expresión analítica que determine con exactitud este espesor en este tipo de descanso. La dificultad radica principalmente en la variabilidad del espesor conforme el patín experimenta movimientos. Es por ello la necesidad de desarrollar una fórmula analítica de espesor de película de aceite, ya que permitiría determinar con exactitud las fuerzas hidrodinámicas producidas por este. A continuación, se desarrollará una expresión analítica para el espesor para descansos de segmentos basculantes, el cual fue determinado a través de distintas relaciones geométricas.

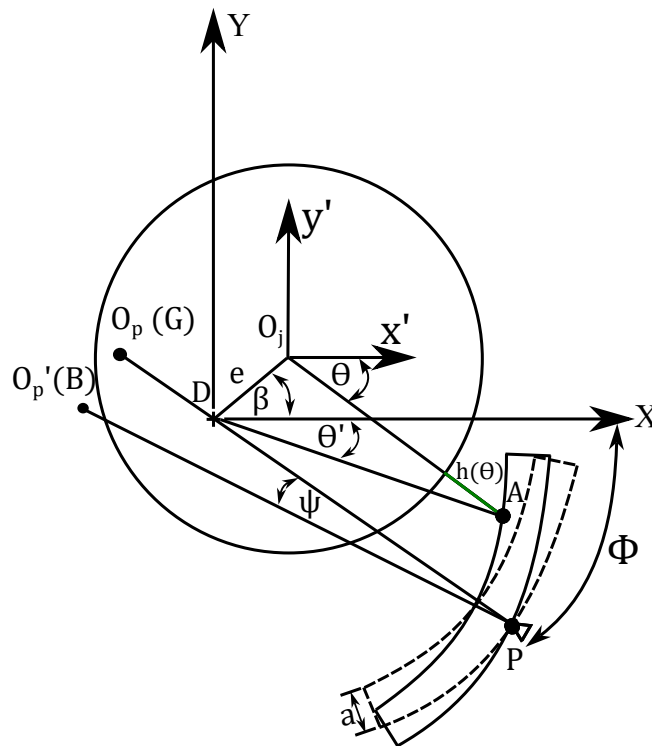


Figura 19: Geometría para la determinación del espesor de película.

En la Figura 19 se identifican los siguientes puntos relevantes para la determinación del espesor de película.

- D: Centro del descanso.
- O_j : Centro del Eje.
- G: Centro de curvatura del patín antes de rotación.
- B: Centro de curvatura del patín después de rotación.

- a : Espesor del patín.
- ϕ : Ángulo de posición del patín con respecto al sistema de referencia fijo XY .
- ψ : Ángulo de rotación del patín.
- e : Distancia del centro del eje con respecto al centro del descanso ($e = \sqrt{x^2 + y^2}$).
- β : Orientación del centro del eje con respecto al centro del descanso ($\beta = \arctan(y/x)$).
- θ : Ángulo medido desde el sistema de rotación móvil $x'y'$ en el cual se debe determinar el espesor de película.
- θ' : Ángulo medido desde el sistema de referencia fijo XY en el cual se debe determinar el espesor de película.
- $h(\theta)$: Espesor de película.

En la Figura 19 se puede observar que los centros de curvatura del patín G y del descanso D , junto con la ubicación del pivote P son colineales. Sin embargo, es común que esta disposición no se presente. Por consiguiente, para definir por completo la geometría del problema, es necesario determinar el grado de desviación del centro del pivote P' respecto a la línea que une los puntos G y D . Este parámetro se representará mediante la variable η , tal como se muestra en la Figura 20.

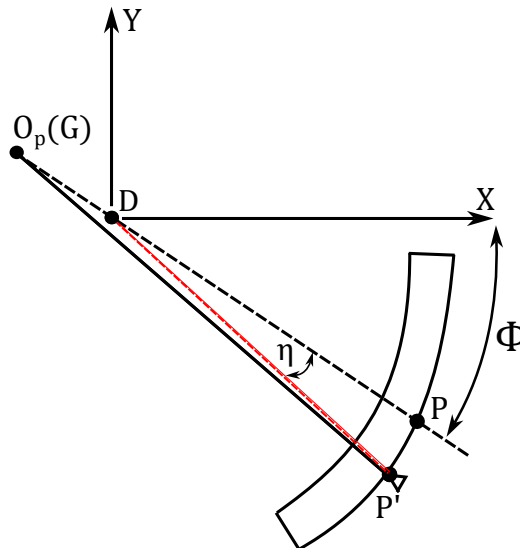


Figura 20: Grado de desviación del centro del pivote P' .

La geometría por analizar se representa en la Figura 21. Para determinar el espesor de película se necesitará obtener el lado w . A continuación, se realiza el análisis trigonométrico para obtener este parámetro.

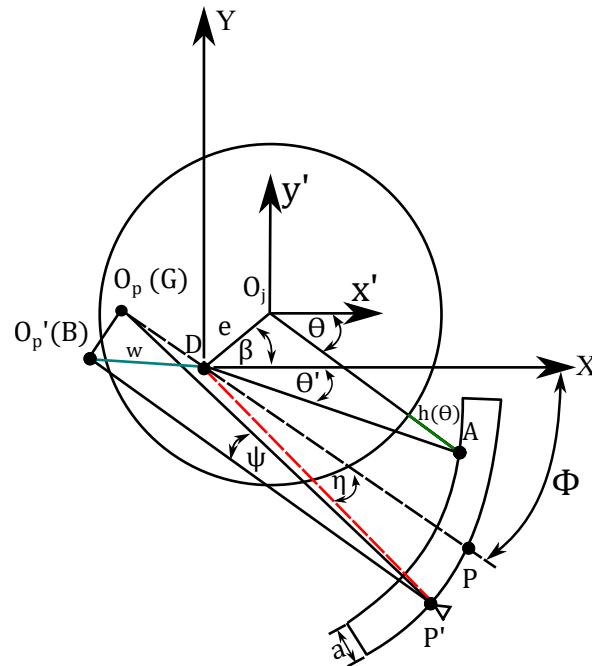


Figura 21: Triángulos de interés para la determinación del espesor de película.

Primeramente, se analiza el triángulo $\triangle GDP'$, el cual se muestra en la Figura 22.

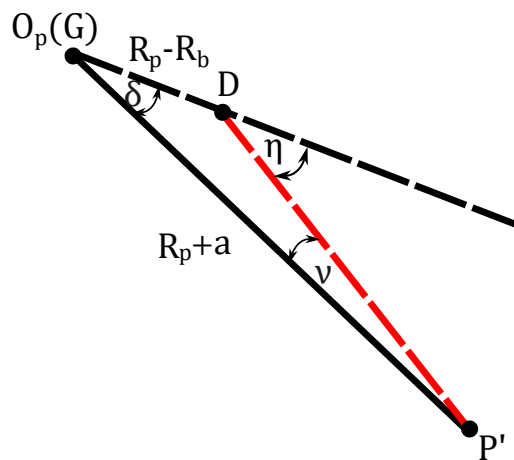


Figura 22: Triángulo GDP'.

La longitud del lado \overline{GD} corresponde a la diferencia entre el radio del patín (R_p) y la del descanso (R_b). Esto se puede observar al analizar la Figura 5. Se necesita determinar el ángulo δ previo a determinar el lado w . Para ello primero se calcula el ángulo v utilizando la ley del seno.

$$v = \sin^{-1}\left(\frac{(R_p - R_b) \sin(180^\circ - \eta)}{R_p + a}\right) \quad (10)$$

Luego, debido a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo debe dar 180° , se obtiene la ecuación (11) para determinar δ .

$$v + \delta + (180^\circ - \eta) = 180^\circ \quad (11)$$

$$\delta = v + \eta \quad (12)$$

A continuación, se analiza el triángulo $\triangle BGP'$, el cual se muestra en la Figura 23.

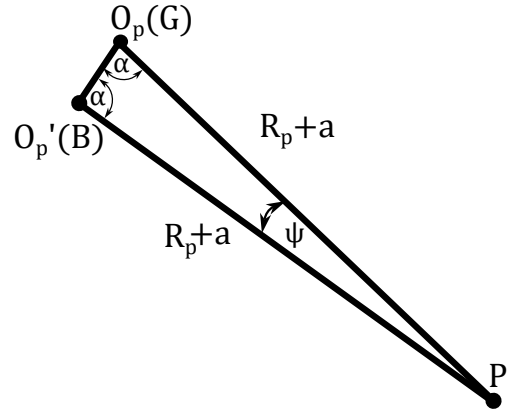


Figura 23: Triángulo BGP'.

El triángulo $\triangle BGP'$ representa el movimiento del centro de curvatura del patín antes y después de la rotación. Para determinar w se debe determinar el lado \bar{BG} y el ángulo α .

Tanto el lado \bar{GP}' como el lado \bar{BP}' son del mismo tamaño. Por lo tanto, el triángulo $\triangle BGP'$ es isósceles. El ángulo α se determina con la ecuación (13).

$$\psi + 2\alpha = 180^\circ \quad (13)$$

$$\alpha = \frac{180 - \psi}{2} \quad (14)$$

Además, el lado \bar{BG} se puede determinar utilizando la ley de senos, lo cual se muestra en las ecuaciones (15) y (16).

$$\frac{\bar{BG}}{\sin \psi} = \frac{R_p + a}{\sin \alpha} \quad (15)$$

$$\bar{BG} = \frac{(R_p + a) \sin \psi}{\sin \alpha} \quad (16)$$

Luego, se analiza el triángulo $\triangle BGD$, el cual se ilustra en la Figura 24.

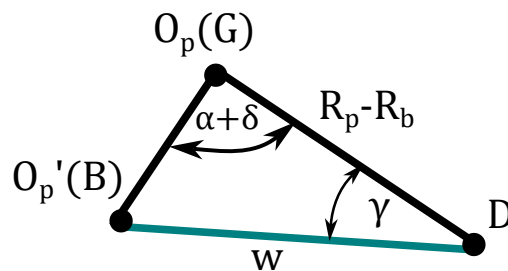


Figura 24: Triángulo BGD.

El lado w se determina utilizando la ley del coseno, tal como se muestra en la expresión (17).

$$w = \sqrt{(\bar{B}G)^2 + (R_p - R_b)^2 - 2(\bar{B}G)(R_p - R_b) \cos(\alpha + \delta)} \quad (17)$$

Considerando el lado $\bar{B}G$ utilizado en la expresión (15).

Para el análisis posterior, es necesario determinar el ángulo γ , el cual se obtiene a través de la ley del seno. Esto queda expresado en la ecuación (18).

$$\gamma = \sin^{-1}\left(\frac{\bar{B}G \sin(\alpha + \delta)}{w}\right) \quad (18)$$

Una vez determinado el lado w y el ángulo γ , se obtiene la expresión para determinar el espesor de película $h(\theta)$. El problema geométrico a resolver se muestra en la Figura 25.

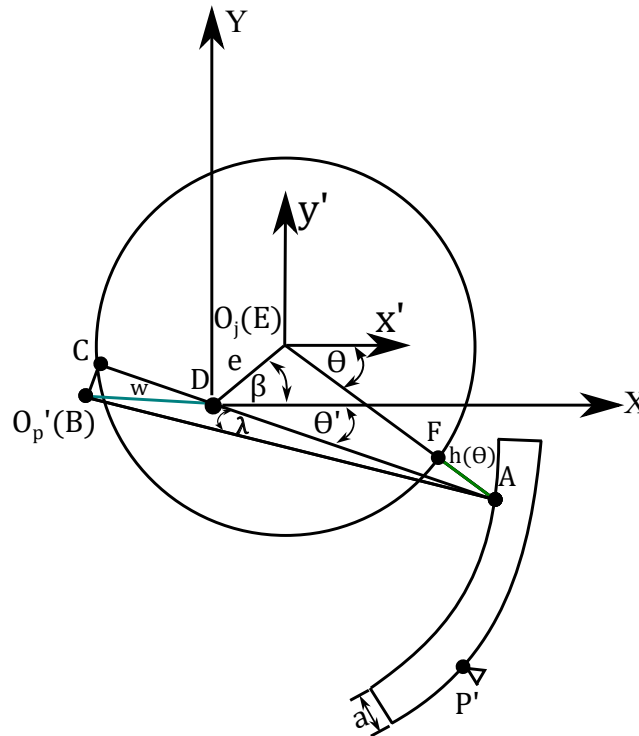


Figura 25: Geometría para determinar espesor de película.

Se analiza el triángulo $\triangle ABC$, esquematizado en la Figura 26.

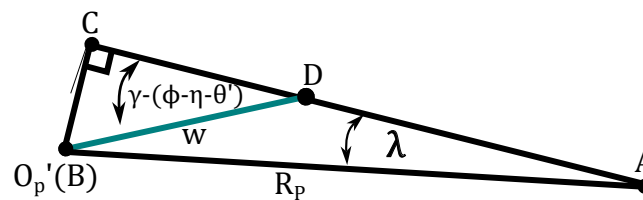


Figura 26: Triángulo ABC.

Se debe conocer el lado \bar{AC} , para ello se debe determinar el ángulo λ , el cual se determina a través de la ecuación (19).

$$\lambda = \sin^{-1}\left(\frac{w \sin(\gamma - (\phi - \eta - \theta'))}{R_p}\right) \quad (19)$$

Luego, es posible determinar el lado \bar{DA} al restar el lado \bar{CA} con la proyección del lado w , como se muestra en la ecuación (20).

$$\bar{DA} = R_p \cos(\lambda) - w \cos(\gamma - (\phi - \eta - \theta')) \quad (20)$$

Finalmente, se analiza el triángulo $\triangle DEA$ para determinar el espesor de película $h(\theta)$. El cual se muestra en la Figura 27.

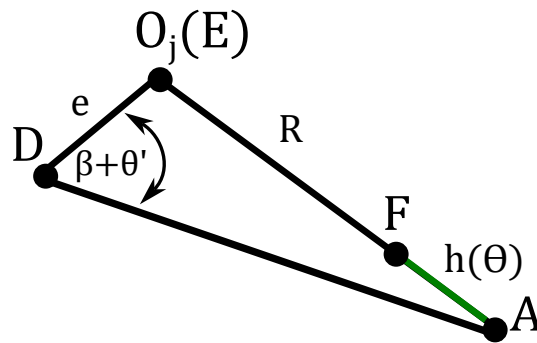


Figura 27: Triangulo DEA.

Se puede determinar el lado \bar{EA} usando la ley del coseno, como se muestra en la ecuación (21).

$$\bar{EA} = \sqrt{\bar{DA}^2 + e^2 - 2(\bar{DA})e \cos(\beta + \theta')} \quad (21)$$

El espesor de película corresponde a la expresión (22).

$$h(\theta) = \bar{EA} - R \quad (22)$$

Para calcular las fuerzas hidrodinámicas, es esencial disponer del valor de θ , el cual corresponde al ángulo del sistema de referencia móvil, como se muestra en la Figura 25. Esto debido a que con este ángulo se puede conocer de los límites de integración para integrar la presión que realiza el fluido lubricante sobre el eje. En este esquema se evidencia una discrepancia entre los ángulos de referencia del sistema inercial (θ') y móvil (θ), lo que obligaría a establecer una relación entre ambos. No obstante, al analizar la diferencia entre los ángulos θ y θ' en un descanso hidrodinámico real, se ha concluido que no existe una diferencia significativa entre ellos. Por lo tanto, estos pueden ser considerados como iguales para una aplicación real.

4.2 Resolución de ecuación de Reynolds

Una vez que se ha establecido el espesor de película, se procede a resolver la ecuación de Reynolds para determinar la distribución de presión generada por el fluido sobre el eje.

La ecuación de Reynolds está determinada por la ecuación (23):

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6 \left(\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{dh}{dt} \right) \quad (23)$$

Para encontrar una expresión más sencilla para los cálculos se utilizará la suposición de descanso corto, el cual considera que la variación de presión con respecto a θ es despreciable. La ecuación diferencial queda simplificada como se muestra en (24):

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6 \left(\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{dh}{dt} \right) \quad (24)$$

Para determinar la presión $P(z)$ se debe integrar dos veces con respecto a la variable z . El resultado de la integración se muestra en la ecuación (25).

$$\frac{h^3}{\mu} P(z) = \left[6 \left(\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{dh}{dt} \right) \right] \frac{z^2}{2} + Az + B \quad (25)$$

Donde A y B corresponde a constantes a determinar:

Al reordenar las expresiones se obtiene que:

$$P(z) = \frac{\mu}{h^3} \left(\left[6 \left(\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{dh}{dt} \right) \right] \frac{z^2}{2} + Az + B \right) \quad (26)$$

Para determinar las constantes A y B se consideran como condiciones de borde que la presión en los extremos del descanso es igual a la presión atmosférica.

$$P\left(z = -\frac{L}{2}\right) = 0 \quad (27)$$

$$P\left(z = \frac{L}{2}\right) = 0 \quad (28)$$

Al reemplazar las condiciones de borde se obtiene que:

$$A = 0 \quad (29)$$

$$B = - \left[6 \left(\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{dh}{dt} \right) \right] \frac{L^2}{8} \quad (30)$$

Finalmente, al reemplazar y reordenar, se obtiene la expresión de presión $P(z)$:

$$P(z) = \frac{3\mu}{h^3} \left(\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{dh}{dt} \right) \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \quad (31)$$

Al analizar la ecuación (31) para determinar la presión es necesario determinar las derivadas $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ y $\frac{dh}{dt}$. Debido a la expresión del espesor de película $h(\theta)$, existe una dificultad para determinar esta derivada de manera analítica. Es por ello que se utilizará de métodos numéricos para determinar estas expresiones.

Para determinar la derivada $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ se deberá calcular el espesor de película correspondiente a cada patín. Posterior a ello se calcula la derivada utilizando el método de diferencia finita hacia adelante, tal como se muestra en la ecuación (32).

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{h(\theta_{i+1}) - h(\theta_i)}{\Delta \theta} \quad (32)$$

Para realizar la derivada con respecto al tiempo $\frac{dh}{dt}$ se utilizará la regla de la cadena. Las variables que dependen del tiempo son la posición del patín ψ y la posición del eje x e y . Al derivar con respecto al tiempo, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial h}{\partial \psi} \dot{\psi} \quad (33)$$

Donde \dot{x} , \dot{y} y $\dot{\psi}$ son las velocidades de cada variable.

Para determinar las derivadas parciales con respecto a x , y y ψ se utiliza del método de diferencias finita hacia adelante, utilizando las expresiones (34), (35) y (36).

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h(x_{i+1} - x_i)}{\Delta x} \quad (34)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{h(y_{i+1} - y_i)}{\Delta y} \quad (35)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \psi} = \frac{h(\psi_{i+1} - \psi_i)}{\Delta \psi} \quad (36)$$

En el capítulo 6 se aborda cómo se determinan las velocidades \dot{x} , \dot{y} y $\dot{\psi}$ para el caso de realizar una simulación.

4.3 Condiciones de borde

Además de las condiciones de borde impuestas en la dirección axial z , se deben imponer las condiciones de borde en la dirección radial θ : En la literatura se trabaja comúnmente con 3 tipos de condiciones de borde:

- **Condición de Sommerfeld:** La condición de Sommerfeld no considera el fenómeno de cavitación, por ende, permite la existencia de presiones negativas en el fluido. Sin embargo, esta condición no es realista ya que un fluido no es capaz de soportar una presión negativa de importancia sin mostrar cambios físicos.
- **Condición de Gumbel:** En esta condición se anulan las presiones negativas.
- **Condición de Reynolds:** Esta condición de borde elimina la discontinuidad en π .

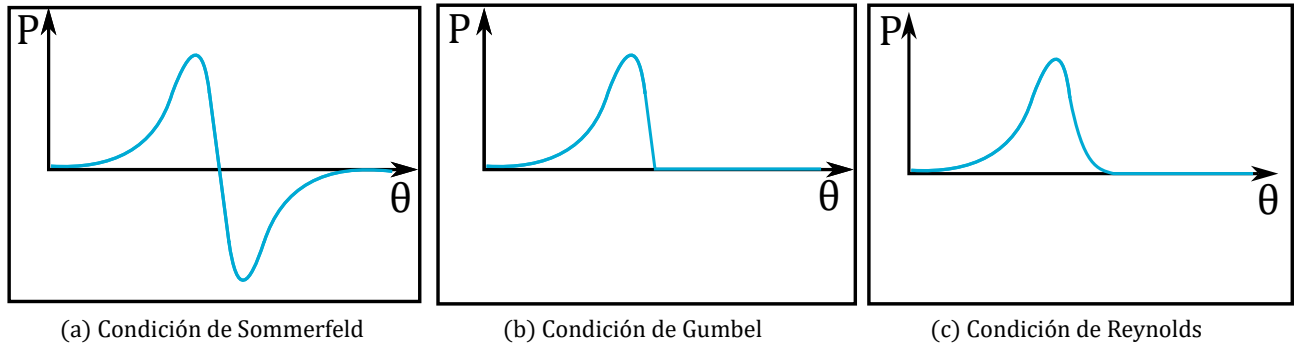


Figura 28: Condiciones de borde utilizados comúnmente en la literatura. Adaptado de: (Pérez y Rodríguez, 2021).

En este trabajo, se empleará la condición de borde de Gumbel, ya que representa de manera más precisa la física del problema y su implementación es más simple que la condición de Reynolds. Por consiguiente, cualquier presión negativa encontrada en el programa se considerará como 0.

4.4 Integración de fuerzas sobre el eje

El objetivo de esta sección es integrar las presiones generadas por las distintas secciones del descanso, con el fin de determinar la fuerza resultante en las direcciones x e y , lo cual simplificará la simulación numérica. Se proporciona una representación esquemática de este proceso en la Figura 29.

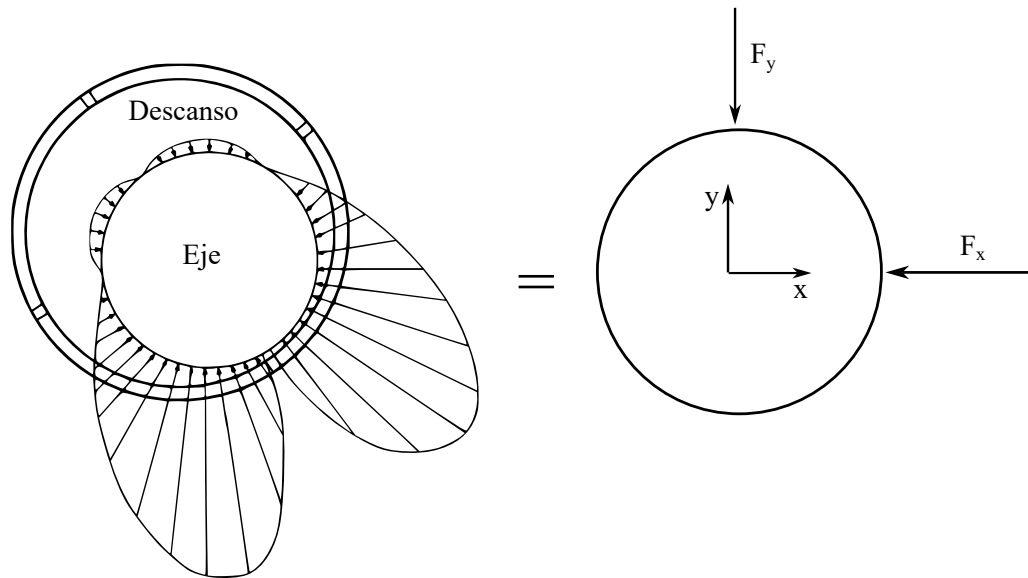


Figura 29: Distribución de presiones en un descanso de segmentos basculantes y su fuerza equivalente. (Adaptado de: Pérez y Rodríguez, 2021).

A continuación, se describirá el proceso para determinar la fuerza ejercida por un patín sobre el descanso. Para calcular las fuerzas hidrodinámicas, es necesario establecer el diferencial de fuerza dF :

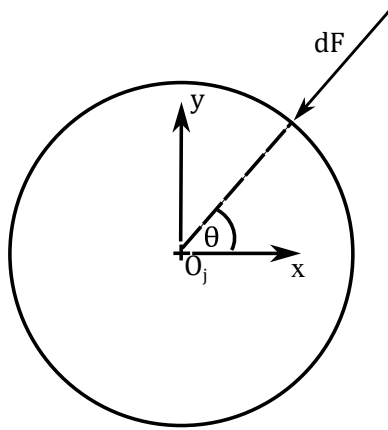


Figura 30: Integración de fuerzas hidrodinámicas.

El diferencial de fuerza está determinado por la expresión (37):

$$dF = P(z)R_b dzd\theta \quad (37)$$

Donde $P(z)$ corresponde a la presión, R_b es el radio del descanso y dz , $d\theta$ corresponde a los diferenciales en las direcciones axial y radial respectivamente.

Al descomponer el diferencial de fuerzas dF en las coordenadas x e y se obtienen las integrales (38) y (39) para determinar las componentes x e y de cada fuerza:

$$F_{x_i} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -P(z, \theta)R_b \cos(\theta) dzd\theta \quad (38)$$

$$F_{y_i} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -P(z, \theta)R_b \sin(\theta) dzd\theta \quad (39)$$

Donde θ_1 y θ_2 corresponde a los límites de integración.

Para la resolución de las integrales se utiliza de métodos de integración numérica, para ello se usan las sumatorias mostradas en las ecuaciones (40) y (41):

$$F_{x_i} = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{M+1} (-P_{i,j} \cos \theta R_b \Delta\theta \Delta z) \quad (40)$$

$$F_{y_i} = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{M+1} (-P_{i,j} \sin \theta R_b \Delta\theta \Delta z) \quad (41)$$

Este procedimiento debe llevarse a cabo considerando cada patín para luego sumar estas fuerzas. Por lo tanto, la fuerza equivalente resultante se determina utilizando las expresiones (42) y (43).

$$F_x = \sum_{i=1}^N F_{x_i} \quad (42)$$

$$F_y = \sum_{i=1}^N F_{y_i} \quad (43)$$

Donde N corresponde al número de patines.

CAPÍTULO 5: Dinámica del Patín

Es importante tener en cuenta el movimiento del patín, ya que este influye en el espesor de película del lubricante, lo cual, a su vez, afecta las fuerzas sobre el eje, y por ende en su movimiento. A continuación, se procederá a cuantificar los distintos factores que inciden en el movimiento del patín.

5.1 Determinación de momentos sobre el patín

Para determinar el momento sobre el patín se debe determinar la distancia desde el pivote hasta el diferencial de fuerza y la proyección perpendicular de este, como se muestra en la Figura 31.

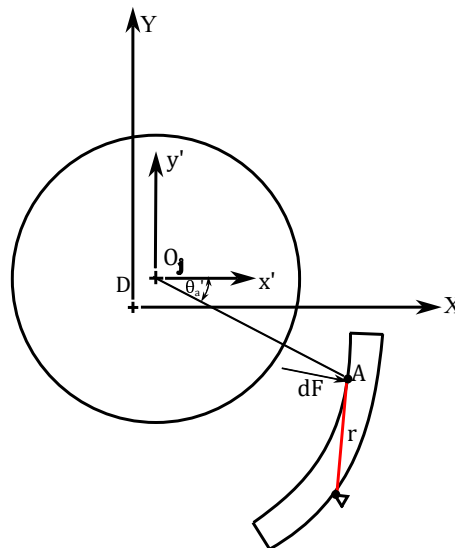


Figura 31: Geometría necesaria para determinar sumatoria de momento.

La geometría a analizar se muestra en la Figura 32.

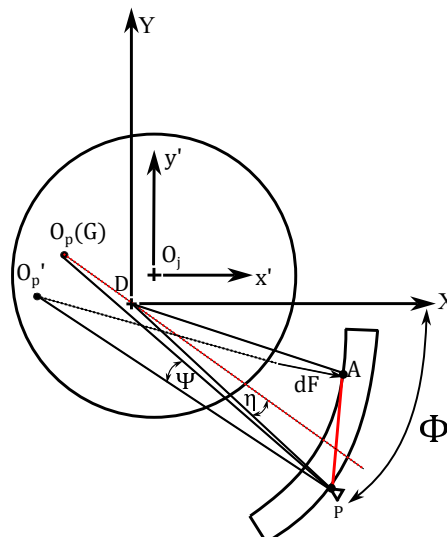


Figura 32: Medidas relevantes para la determinación de la sumatoria de momentos.

Se analiza primero el triángulo GDP, el cual se ilustra en la Figura 33.

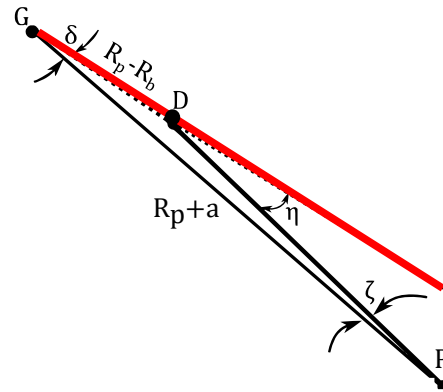


Figura 33: Triángulo GDP.

El ángulo ζ se determina con la expresión (44):

$$\zeta = a \sin\left(\frac{(R_p - R_b) \sin(180^\circ - \eta)}{(R_p + a)}\right) \quad (44)$$

Luego, por sumatoria de ángulos interiores de un triángulo, el ángulo δ se determina utilizando la expresión (45):

$$\delta = \eta - \zeta \quad (45)$$

Usando la ley del coseno, se calcula el lado $\bar{D}P$, como se muestra en la ecuación (46):

$$\bar{D}P = \sqrt{(R_p - R_b)^2 + (R_p + a)^2 - 2(R_p - R_b)(R_p + a)\cos(\delta)} \quad (46)$$

Con el lado $\bar{D}P$ se analiza el triángulo $\triangle DAP$, ilustrado en la Figura 34:

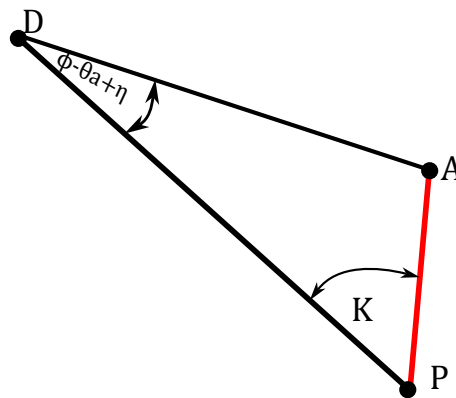


Figura 34: Triángulo DAP.

Por la fórmula determinada anteriormente $\bar{D}A$ se determina utilizando la ecuación (47).

$$\bar{D}A = R_p \cos(\lambda) - w \cos(\phi - \theta_a - \gamma) \quad (47)$$

Usando la ley del coseno, se tiene que:

$$\bar{P}A = \sqrt{\bar{D}A^2 + \bar{D}P^2 - 2\bar{D}A\bar{D}P \cos(\phi - \theta_a + \eta)} \quad (48)$$

Luego, el ángulo κ es:

$$\kappa = a \sin\left(\frac{\bar{D}A \sin(\phi - \theta_a + \eta)}{\bar{P}A}\right) \quad (49)$$

Con los lados y ángulos determinados anteriormente se puede determinar la sumatoria de momentos. En la Figura 35 se ilustra la geometría a analizar.

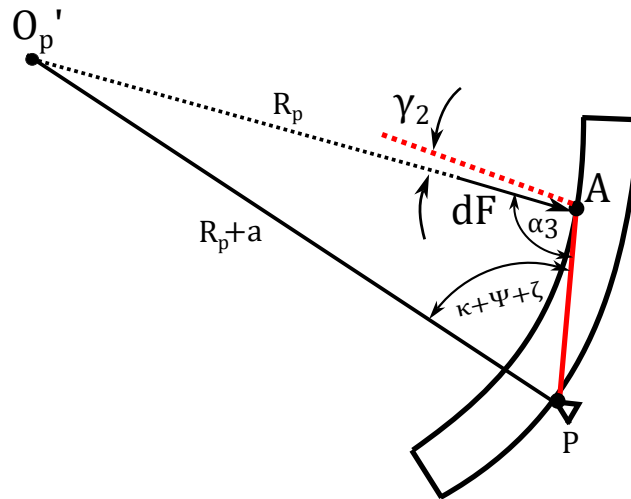


Figura 35: Proyección del diferencial de fuerza.

Se determina el ángulo α_3 usando la ley del seno:

$$\alpha_3 = a \sin\left(\frac{(R_p + a) \sin(\kappa + \psi + \zeta)}{R_p}\right) \quad (50)$$

Luego, el ángulo γ_2 es:

$$\gamma_2 = 90^\circ - \alpha_3 \quad (51)$$

El diferencial de momentos se determina con la siguiente expresión:

$$dT = dF \cos(\gamma_2) \bar{P}A \quad (52)$$

Donde $dF = PR_p d\theta dz$. Por lo tanto, el momento queda determinada por la siguiente integral:

$$T = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\theta_A}^{\theta_B} PR_p \cos(\gamma_2) \bar{P}A d\theta dz \quad (53)$$

Donde θ_A y θ_B corresponde a los límites de integración correspondiente al respectivo patín.

Esta integral se resolverá a través de métodos numéricos de la misma manera que se determinaron las fuerzas hidrodinámicas.

5.2 Determinación de momento producido por la fricción

Además del momento producido por el fluido, se considerará el momento producido por el roce que hay en el pivote del patín. Para ello se utilizará el enfoque propuesto por (Kim et al., 2020). El diagrama de cuerpo libre se ilustra en la Figura 36.

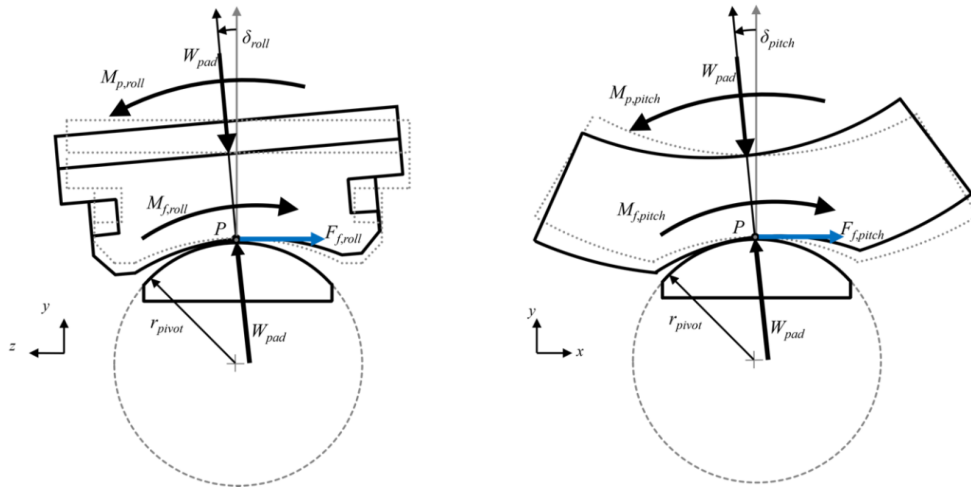


Figura 36: Momento producido por el roce del pivote. Fuente: (Kim et al., 2020).

La fuerza de fricción está determinada por la siguiente ecuación:

$$F_f = \mu_f W_p \quad (54)$$

Donde μ_f corresponde al coeficiente de roce entre el pivote y el patín y W_p es la fuerza normal que actúa sobre el patín. La fricción crea un momento M_f que se opone al momento producido por las fuerzas hidrodinámicas.

El momento de fricción queda determinada por las siguientes expresiones.

Si el momento producido por las fuerzas hidrodinámicas M_p es menor a $\mu_f R_{pivot} W_p$

$$M_f = -M_p \quad (55)$$

Si la condición anterior no se cumple

$$M_f = -\mu_f R_{pivot} W_p \quad (56)$$

5.3 Ecuaciones del movimiento del patín

En la Figura 37 se muestra el diagrama de cuerpo libre y de aceleración del patín.

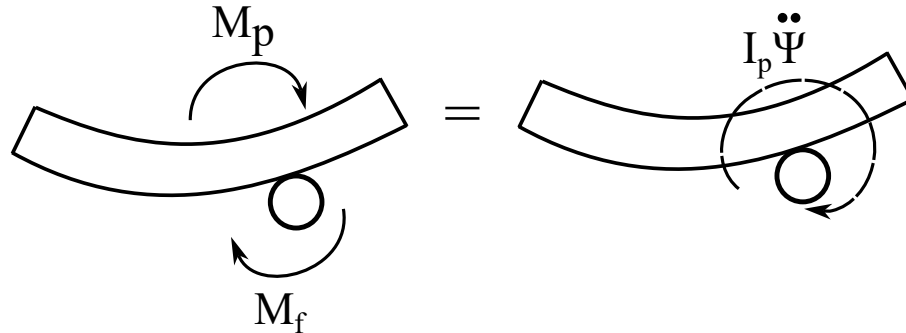


Figura 37: Ecuaciones del movimiento del patín.

Para determinar la posición de cada patín se debe resolver la siguiente ecuación diferencial mostrada en la ecuación (57):

$$\sum T = I_p \ddot{\psi} \quad (57)$$

Donde I_p corresponde a la inercia con respecto al pivote y T corresponde al torque.

La sumatoria de torque se determina considerando tanto el momento producido por el fluido como el momento del roce. Por lo tanto, la ecuación del movimiento del patín es:

$$M_p - M_f = I_p \ddot{\psi} \quad (58)$$

CAPÍTULO 6: Validación del modelo

6.1 Validación de fórmula de espesor de película de aceite

Previo a realizar la simulación numérica del rotor, es de importancia verificar que la fórmula desarrollada de espesor de película funciona correctamente, ya que de esta depende la correcta resolución de la ecuación de Reynolds.

Para validar la nueva fórmula desarrollada para determinar el espesor de película en descansos de segmentos basculantes, se creó un diseño de un descanso utilizando el programa AutoCAD. Posteriormente, se compararon las mediciones obtenidas del diseño con los cálculos generados a partir de la fórmula. El descanso utilizado se muestra en la Figura 38:

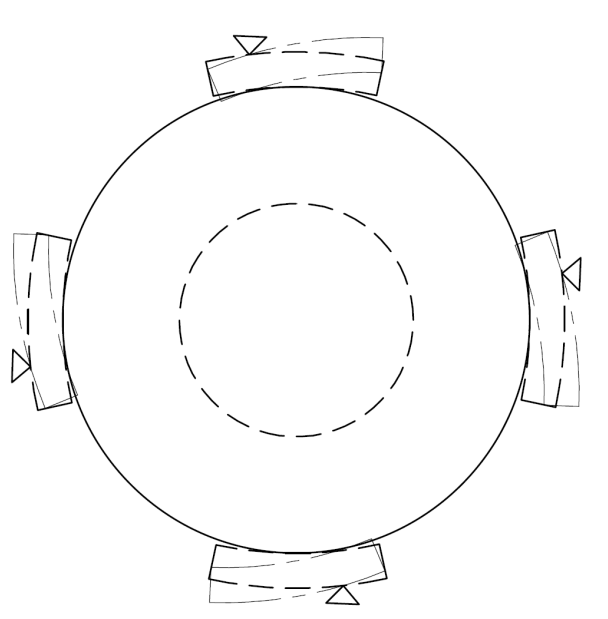


Figura 38: Descanso utilizado para validar forma de espesor de película.

Como se puede apreciar en la Figura, se ha exagerado el espesor de la película con el propósito de facilitar la verificación de la precisión de la fórmula desarrollada. Para validarla, se variará la posición del pivote, la ubicación del eje y el movimiento del patín.

Los datos del descanso se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Datos para validación fórmula de espesor de película.

Característica	Símbolo	Valor	Unidad
Radio del patín	R_p	165	mm
Radio del eje	R	50	mm
Radio del descanso	R_b	100	mm
Espesor del patín	a	15	mm
Ángulo del patín	χ_p	41	grados
Posición del pivote	(ϕ)	45,135,-135,-45	grados

En las siguientes gráficas se muestran la comparación entre el espesor de película obtenida con la fórmula desarrollada y con las mediciones del dibujo de AutoCad. Para ello, se considerará primeramente que el rotor se encuentra en una posición arbitraria en el primer cuadrante. En la Figura 39 se muestran el espesor considerando que el patín se mueve en sentido positivo y la desviación del pivote es positivo.

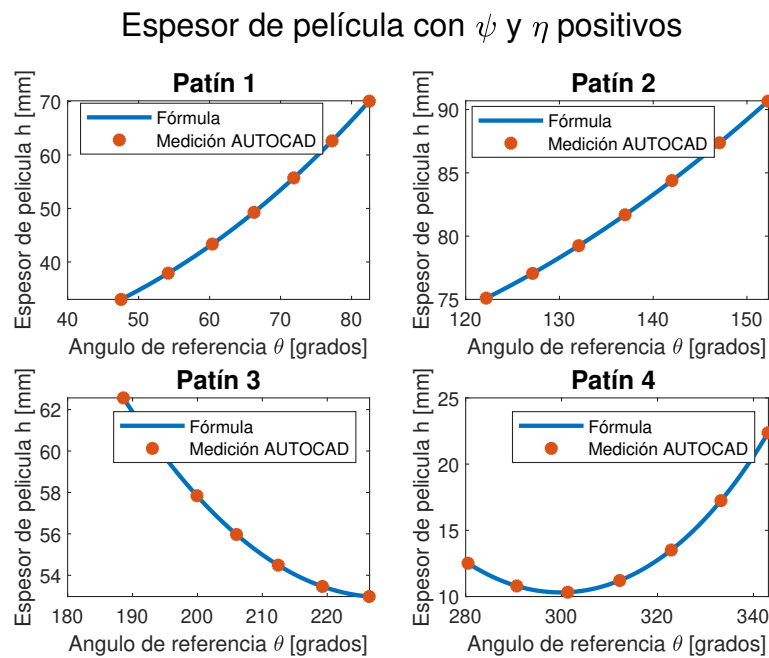


Figura 39: Comparación del espesor de película considerando η y ψ positivos.

En la Figura 40 se muestra la comparación de espesor de película considerando η positivo y ψ negativo.

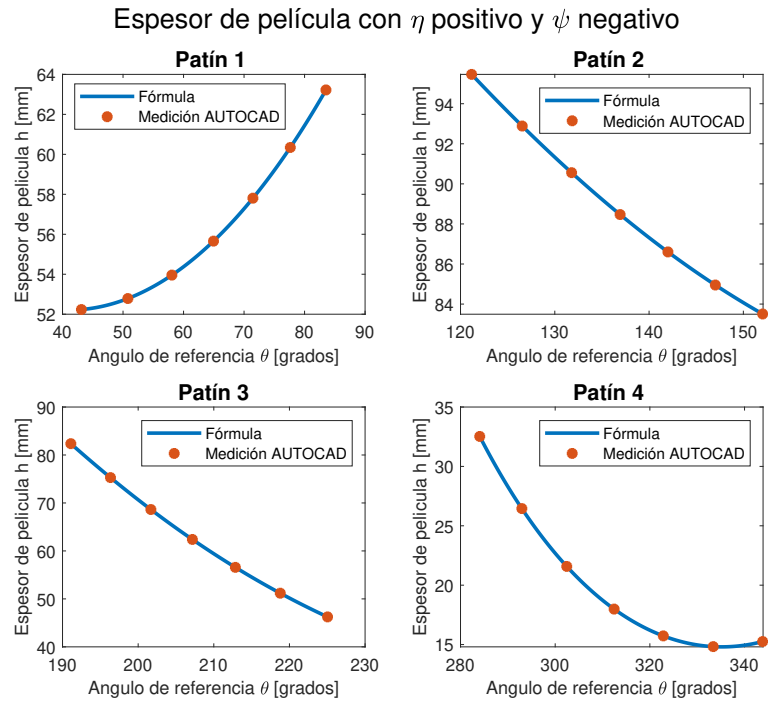


Figura 40: Comparación del espesor de película considerando η positivo y ψ negativo.

En la Figura 41 se muestra la comparación de espesor de película considerando η negativo y ψ positivo.

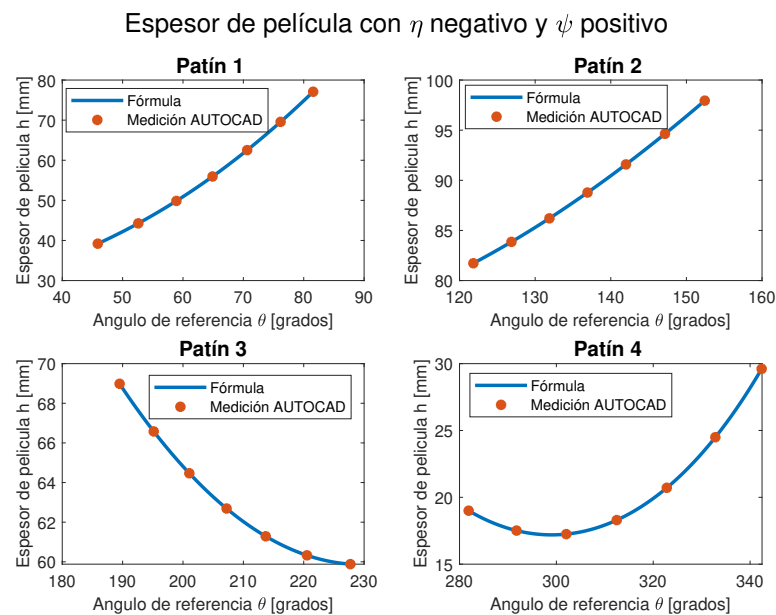


Figura 41: Comparación del espesor de película considerando η negativo y ψ positivo.

En la Figura 42 se muestra la comparación de espesor de película considerando η negativo y ψ negativo.

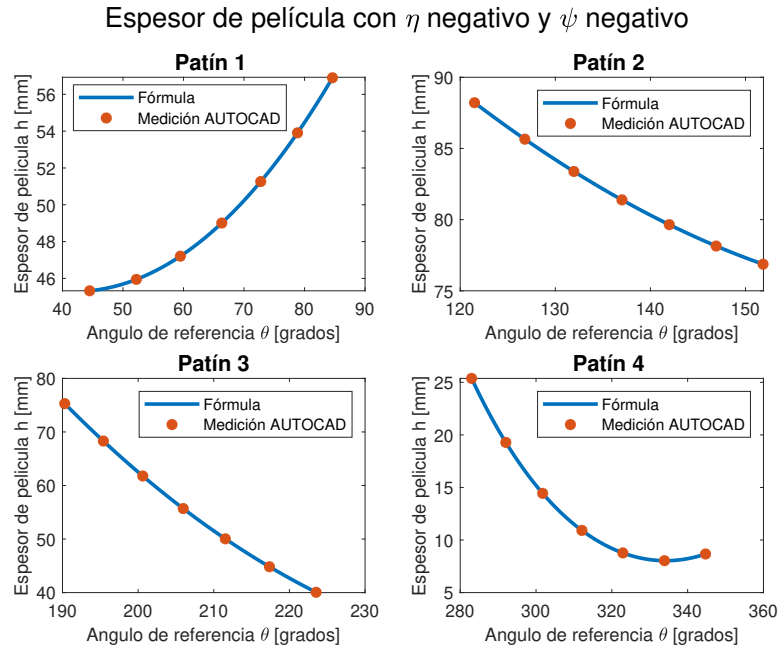


Figura 42: Comparación del espesor de película considerando η negativo y ψ negativo.

Finalmente, para verificar que no haya problemas al utilizar esta fórmula cuando el eje se encuentra en distintas posiciones, se examina en la Figura 43 el espesor de película en un patín cuando el rotor está posicionado en diferentes cuadrantes.

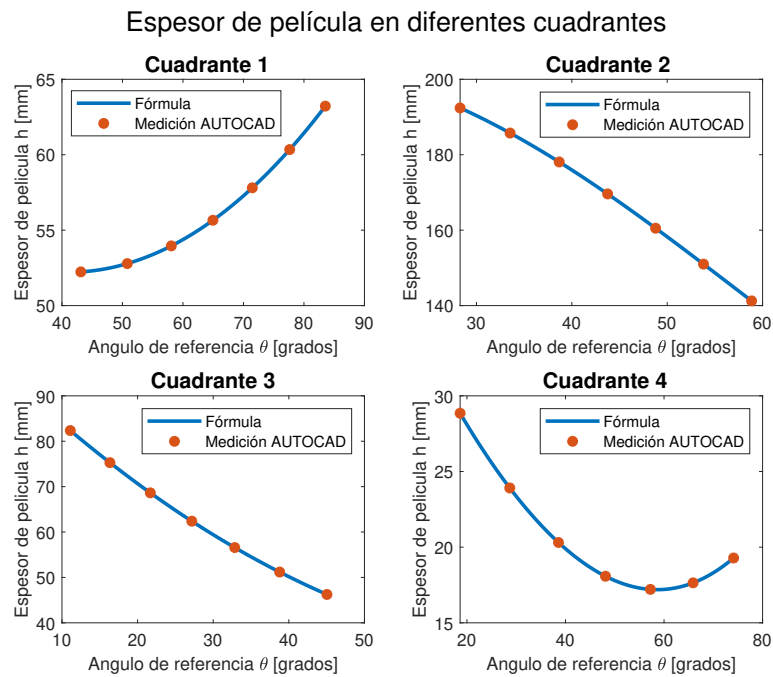


Figura 43: Comparación del espesor de película considerando que el rotor se encuentra en diferentes cuadrantes.

De las gráficas anteriores se puede concluir que la fórmula desarrollada es capaz de predecir correcta-

mente el espesor de película en los descansos de segmentos basculantes.

6.2 Simulación de Banco de Ensayos

6.2.1 Descripción de banco de ensayos

Para validar la metodología propuesta en este trabajo, se emplearán los resultados obtenidos en el banco de ensayos de (Nässelqvist et al., 2014) ilustrado en la Figura 44 (a), el cual consta de un rotor vertical montado con dos descansos de segmentos basculantes de 4 patines. Además, en el centro se sitúa una masa que induce el desbalanceamiento en el sistema. En la Figura 44 (b) se muestra un esquema que muestra las dimensiones del banco de ensayos en metros, donde se muestra la ubicación de los descansos en el rotor.

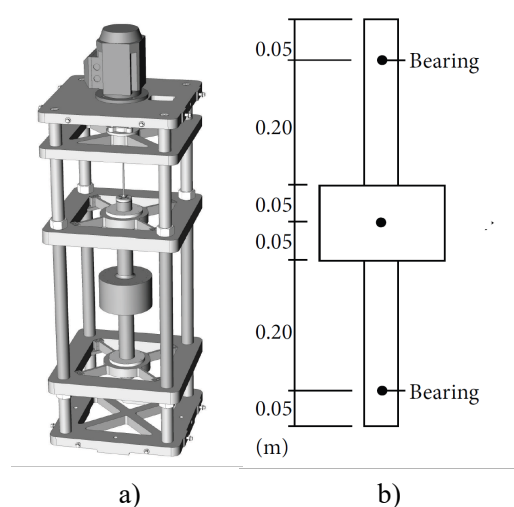


Figura 44: Banco de Ensayos de (Nässelqvist et al., 2014).

Con respecto a las consideraciones de diseño relevantes del banco de ensayos, este cuenta con sensores de desplazamientos sin contacto del tipo inductivo, los cuales se ubican en la carcasa del descanso, tal como se muestra en la Figura 45. Se utilizan dos por cada descanso y se ubican a 90 grados entre sí para obtener la órbita del rotor. La velocidad de rotación fue medida utilizando un fototacómetro con ± 1 [RPM] de precisión. Además, se señala que los descansos fueron seleccionados de tal forma que su número de Sommerfeld fuera similar a los utilizados en unidades generadoras.

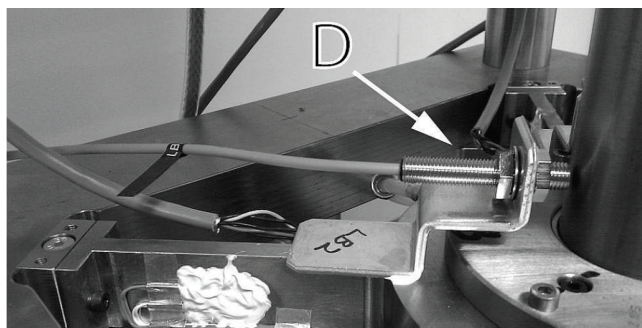


Figura 45: Ubicación de sensor de desplazamiento. Fuente: (Nässelqvist et al., 2014).

La Tabla 2 detalla las especificaciones del banco de ensayos.

Tabla 2: Especificaciones de banco de ensayos de (Nässelqvist et al., 2014).

Característica	Símbolo	Valor	Unidad
Huelgo radial	C	0,03	mm
Viscosidad del aceite	μ	0,027	Pa s
Diámetro del descanso	D	50,09	mm
Diámetro del eje	D_j	49,84	mm
Largo del descanso	L	20	mm
Número de patines	N	4	(—)
Velocidad de rotación	ω	2350	rpm
Espesor del patín	a	8	mm
Radio del patín	R_p	25,075	mm
Ángulo del patín	χ_p	72	grados
Desviación del pivote	η	-7.2	grados
Radio del pivote	r_p	34	mm

Dentro de los datos publicados en la literatura para este banco de ensayos, se encuentra las pruebas realizadas en la partida del rotor por (Benti, 2021). En la Figura 46 se muestra la gráfica de excentricidad máxima en función de la velocidad de rotación con los que se validará el modelo.

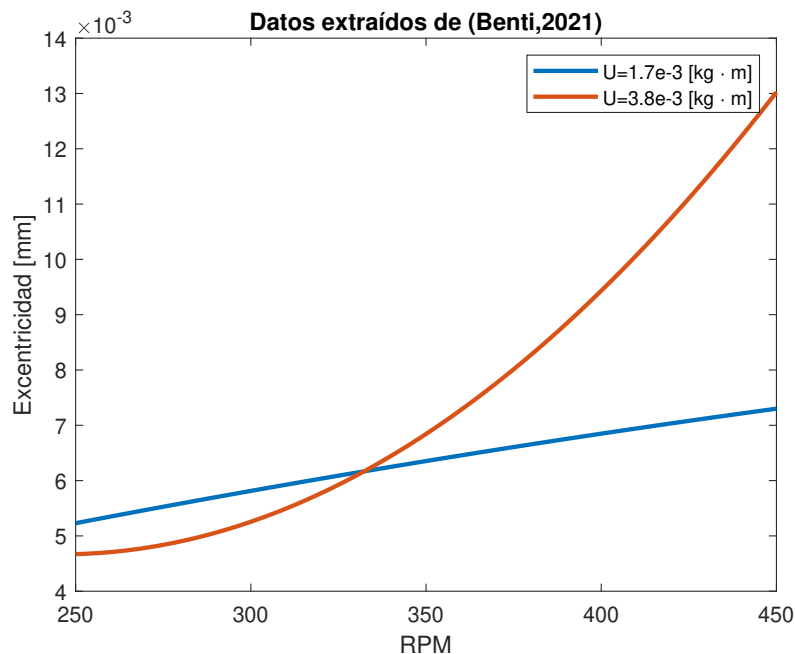


Figura 46: Excentricidad máxima a medida que aumenta velocidad de rotación. Fuente: (Benti, 2021).

6.2.2 Planteamiento de ecuaciones del movimiento y descripción de algoritmo

Para realizar la simulación, es necesario previamente determinar las ecuaciones del movimiento del sistema. La Figura 47 ilustra el diagrama de cuerpo libre del eje. En él se observa que actúan las fuerzas hidrodinámicas F_x y F_y y la fuerza producida por el desbalanceamiento F_D .

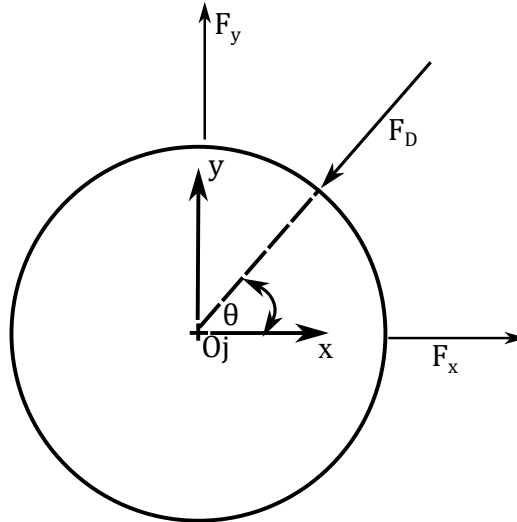


Figura 47: Fuerzas que actúan sobre el eje.

Al utilizar el método de Newton, se determinan las ecuaciones del movimiento, expresadas en las ecuaciones (59) y (60):

$$M_j \ddot{x} = F_x - F_D \cos \theta \quad (59)$$

$$M_j \ddot{y} = F_y - F_D \sin \theta \quad (60)$$

Donde M_j corresponden a la masa del eje.

Además, para determinar correctamente las fuerzas del fluido, es necesario determinar las posiciones de los cuatro patines debido a que estos afectan al espesor de película. Para ello se plantean las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$I_1 \ddot{\psi}_1 = T_1(t) \quad (61)$$

$$I_2 \ddot{\psi}_2 = T_2(t) \quad (62)$$

$$I_3 \ddot{\psi}_3 = T_3(t) \quad (63)$$

$$I_4 \ddot{\psi}_4 = T_4(t) \quad (64)$$

Donde I corresponde a las inercias de cada patín y T es el toque total que actúa sobre cada patín.

Junto con las ecuaciones previamente establecidas, es fundamental definir una fórmula que permita determinar la posición θ_D en la partida del rotor. En la ecuación (65) se muestra una expresión simplificada desarrollada por (Pérez y Rodríguez, 2021) para definir la velocidad angular $\omega(t)$.

$$\omega(t) = \begin{cases} \left(\frac{\Omega}{T_p}\right)t & \text{si } t < T_p, \\ \Omega & \text{si } t \geq T_p \end{cases} \quad (65)$$

La variable Ω representa la velocidad de rotación constante del eje, mientras que T_p denota el tiempo requerido para que el eje alcance esta velocidad angular.

Para el caso se presente una velocidad variable en el eje, la posición angular θ_D se debe determinar a través de la siguiente integración:

$$\theta_D = \int_0^t \omega(t)dt \quad (66)$$

Para el caso en que $t < T_p$, la posición θ_D se determina con la expresión (67).

$$\theta_D = \frac{\Omega \cdot t^2}{2 \cdot T_p} \quad (67)$$

Para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales planteadas, es necesario efectuar un cambio de variable que transforme el sistema en un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, este cambio de variable se muestra a continuación:

$$(\bar{X}) = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \\ \bar{X}_4 \\ \bar{X}_5 \\ \bar{X}_6 \\ \bar{X}_7 \\ \bar{X}_8 \\ \bar{X}_9 \\ \bar{X}_{10} \\ \bar{X}_{11} \\ \bar{X}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \psi_1 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Al aplicar el cambio de variable, el sistema queda representado con las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\dot{\bar{X}}_1 = \bar{X}_2 \quad (68)$$

$$\dot{\bar{X}}_2 = \frac{F_x - F_D \cos \theta}{m} \quad (69)$$

$$\dot{\bar{X}}_3 = \bar{X}_4 \quad (70)$$

$$\dot{\bar{X}}_4 = \frac{F_y - F_D \sin \theta}{m} \quad (71)$$

$$\dot{\bar{X}}_5 = \bar{X}_6 \quad (72)$$

$$\dot{\bar{X}}_6 = \frac{T_1(t)}{I_1} \quad (73)$$

$$\dot{\bar{X}}_7 = \bar{X}_8 \quad (74)$$

$$\dot{\bar{X}}_8 = \frac{T_2(t)}{I_2} \quad (75)$$

$$\dot{\bar{X}}_9 = \bar{X}_{10} \quad (76)$$

$$\dot{\bar{X}}_{10} = \frac{T_3(t)}{I_3} \quad (77)$$

$$\dot{\bar{X}}_{11} = \bar{X}_{12} \quad (78)$$

$$\dot{\bar{X}}_{12} = \frac{T_4(t)}{I_4} \quad (79)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones, se empleará el solver de MATLAB denominado ode15s. Este solver resuelve las ecuaciones diferenciales de manera implícita, lo que proporciona una mayor estabilidad durante la resolución. Además, con el fin de garantizar la convergencia precisa de la simulación, se ha establecido una tolerancia relativa de 10^{-8} .

Junto con las ecuaciones planteadas anteriormente, para determinar las fuerzas hidrodinámicas sobre el eje, es necesario calcular la derivada del espesor de película de aceite con respecto al tiempo $\frac{dh}{dt}$. Esta derivada se determina como se muestra en la expresión (80).

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial h}{\partial \psi} \dot{\psi} \quad (80)$$

Para que el algoritmo de MATLAB pueda determinar las derivadas en el tiempo, se utilizan las variables $\dot{\bar{X}}_1 = \dot{x}$, $\dot{\bar{X}}_3 = \dot{y}$, y dependiendo del patín en el que se calcula la fuerza hidrodinámica se utiliza $\dot{\bar{X}}_6 = \dot{\psi}_1$, $\dot{\bar{X}}_8 = \dot{\psi}_2$, $\dot{\bar{X}}_{10} = \dot{\psi}_3$ o $\dot{\bar{X}}_{12} = \dot{\psi}_4$ en la expresión (80) para que el programa determine esta expresión.

Se necesita considerar un aspecto adicional para determinar con precisión las fuerzas hidrodinámicas. Además de la derivada con respecto al tiempo, como se explicó anteriormente, es esencial calcular la expresión $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ para evaluar las fuerzas del lubricante. Al deducir la fórmula del espesor de película $h(\theta)$, se adoptó el sentido horario como positivo. Sin embargo, si el rotor gira en sentido antihorario, la derivada $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ se invertiría de signo cuando el rotor rota en sentido antihorario. Por consiguiente, conocer la dirección de rotación es fundamental para mejorar la precisión en la simulación. En el caso del rotor de (Nässelqvist et al., 2014), el rotor gira en sentido antihorario, por lo cual se debe multiplicar por -1 la derivada del espesor con respecto a θ .

La Figura 48 ilustra un diagrama de flujo que describe el proceso de resolución de las ecuaciones que modelan el movimiento del rotor. Los programas utilizados en MATLAB se encuentran detallados en los Anexos.

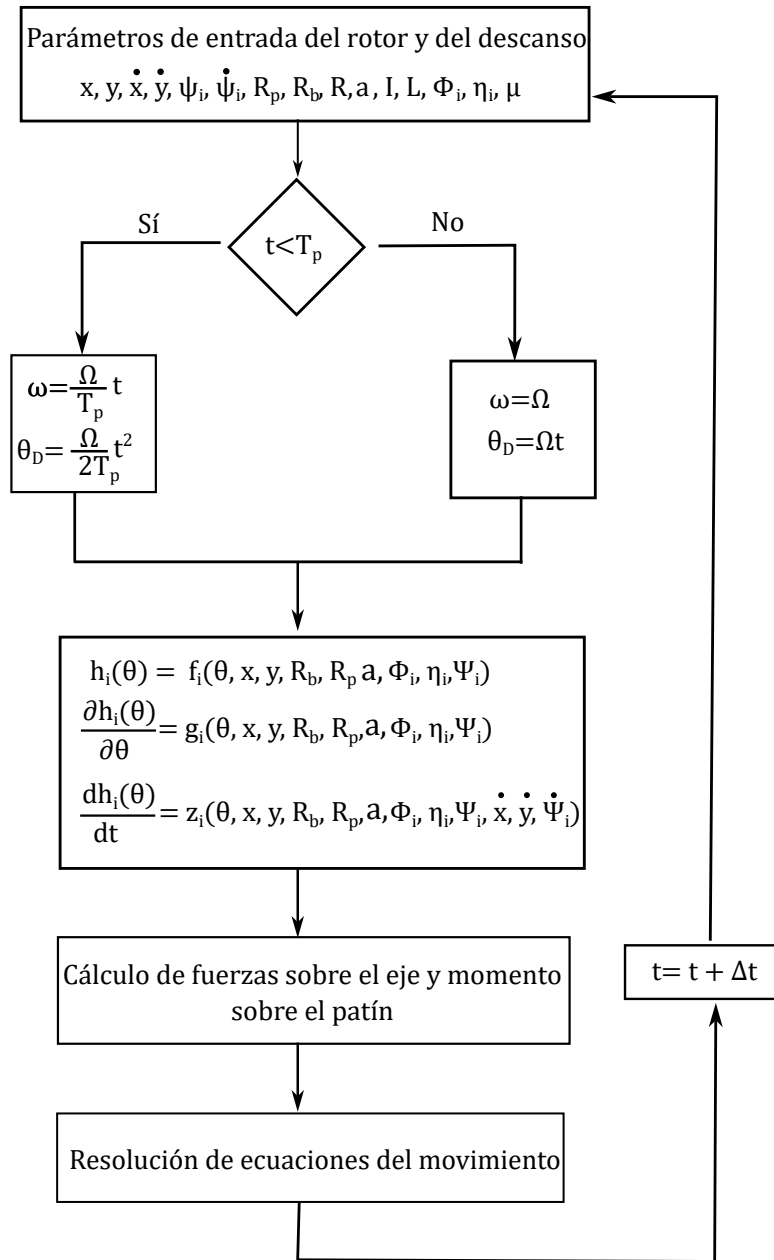


Figura 48: Diagrama de flujo de la resolución las ecuaciones que describen el movimiento del rotor.

6.2.3 Resultados de forma de órbita obtenidos mediante simulación

En la Figura 49 se muestra la órbita obtenida en la partida del rotor, de esta se puede observar que a medida que aumenta la velocidad de rotación del rotor, va aumentando la excentricidad de la órbita y además se observa la forma cuadrada, el cual se produce debido a la influencia de los 4 patines del descanso.

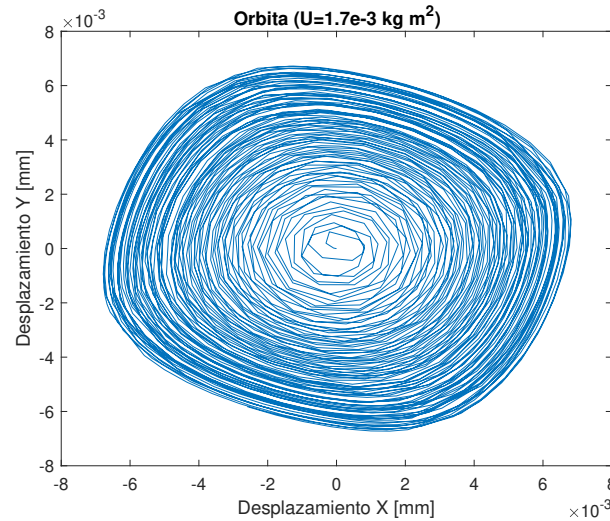


Figura 49: Órbita del rotor para velocidad de rotación entre [0-400] RPM.

Las órbitas obtenidas a diferentes velocidades de rotación y su comparación con los resultados de (Benti, 2021) para un desbalanceamiento de $1.7e - 3 [kg \cdot m]$, se muestran desde las Figuras 50 hasta la 52. Por otro lado, las Figuras 53 hasta la 55 presentan los resultados para un desbalanceamiento de $3.8e - 3 [kg \cdot m]$.

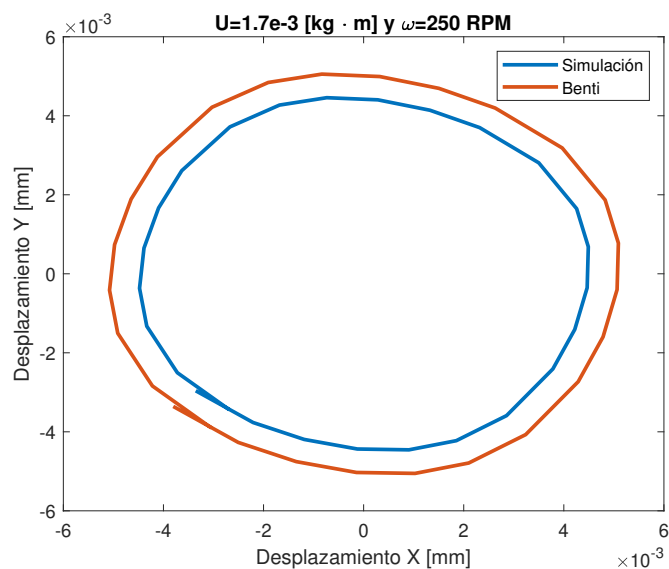


Figura 50: Comparación entre las órbitas obtenidas en el modelo propuesto con el de (Benti, 2021) para un desbalanceamiento de $1.7e-3 [kg \cdot m]$ y velocidad de rotación $\omega = 250$ RPM.

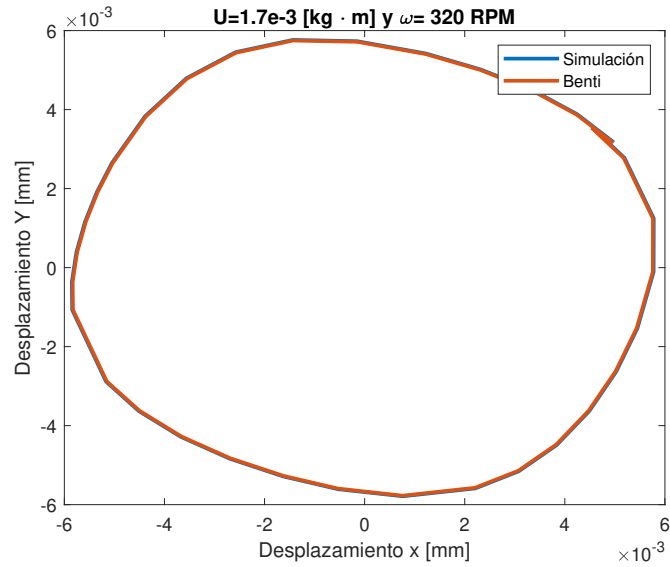


Figura 51: Comparación entre las órbitas obtenidas en el modelo propuesto con el de (Benti, 2021) para un desbalanceamiento de $1.7e-3$ [kg m] y velocidad de rotación $\omega = 320$ RPM.

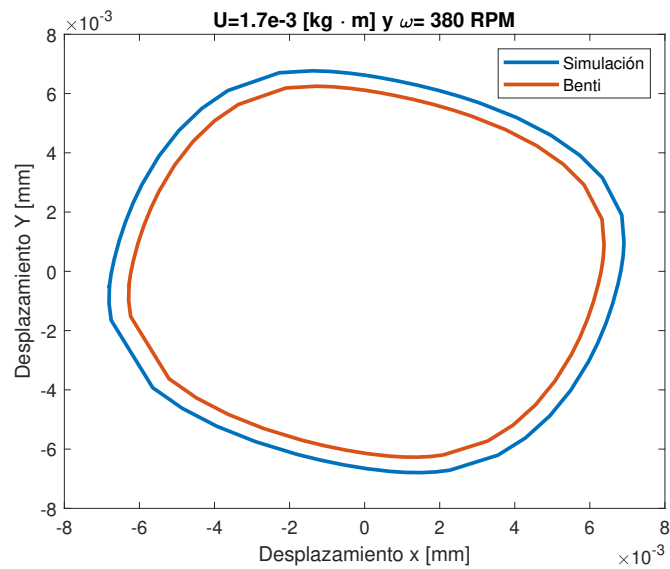


Figura 52: Comparación entre las órbitas obtenidas en el modelo propuesto con el de (Benti, 2021) para un desbalanceamiento de $1.7e-3$ [kg m] y velocidad de rotación $\omega = 380$ RPM.

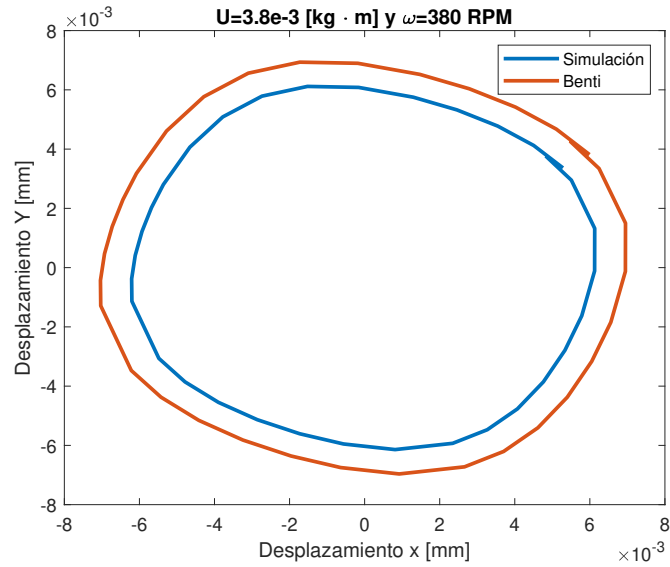


Figura 53: Comparación entre las órbitas obtenidas en el modelo propuesto con el de (Benti, 2021) para un desbalanceamiento de $3.8e-3$ [kg m] y velocidad de rotación $\omega = 230$ RPM.

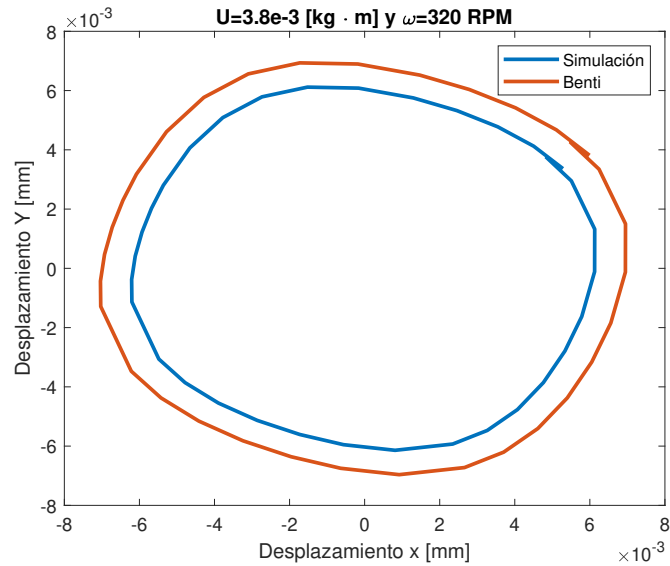


Figura 54: Comparación entre las órbitas obtenidas en el modelo propuesto con el de (Benti, 2021) para un desbalanceamiento de $3.8e-3$ [kg m] y velocidad de rotación $\omega = 320$ RPM.

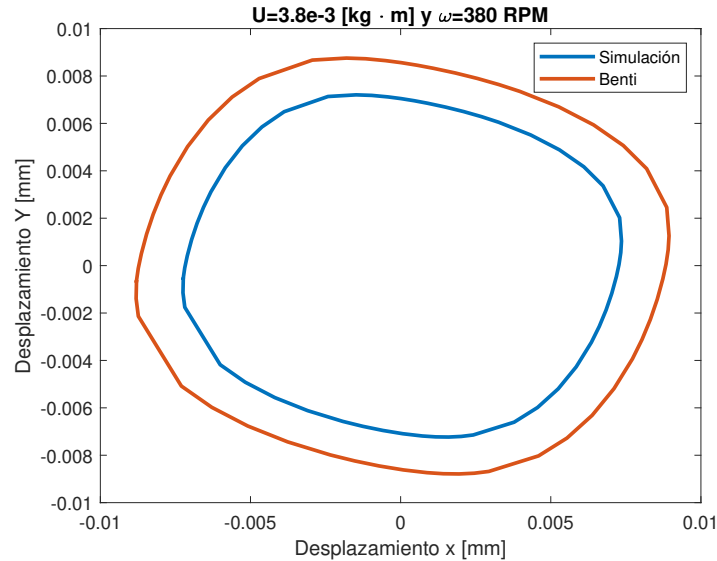


Figura 55: Comparación entre las órbitas obtenidas en el modelo propuesto con el de (Benti, 2021) para un desbalanceamiento de $3.8e-3$ [kg m] y velocidad de rotación $\omega = 380$ RPM.

Los resultados presentaron un error máximo del 12 % en la excentricidad. Entre las posibles causas que podrían explicar el error, se encuentra la falta de consideración en el modelo propuesto de factores externos que podrían afectar el espesor de la película de aceite. Por ejemplo, no se tienen en cuenta influencias como las deformaciones del patín, los efectos del cambio de temperatura en las propiedades del aceite, como la variación en su viscosidad, o el desgaste del descanso, entre otros posibles factores. Sin embargo, en todo momento se presenta la forma de órbita esperada para las características del descanso.

6.2.4 Resultados de espectros obtenidos mediante simulación

Con motivo de verificar que el modelo propuesto es capaz de representar las características dinámicas de un rotor vertical con descansos de segmentos basculantes, se realizará un análisis espectral. Para ello se compararán los resultados con los obtenidos por (Benti, 2021).

En la Figura 56 se presenta el espectro obtenido en la simulación. Se puede observar que la componente dominante corresponde a 1ω , la cual está influenciada por el desbalanceamiento. Además, se identifica la presencia del componente 3ω , el cual se atribuye a la influencia de los patines. Sin embargo, la componente 5ω no está presente en el espectro, lo cual se explica por el hecho de que la simulación se realizó considerando velocidades bajas de rotación y esta componente se empieza a visualizar más a altas RPM, como se puede observar en la Figura 17. Por lo tanto, el modelo reproduce el espectro esperado de manera adecuada.

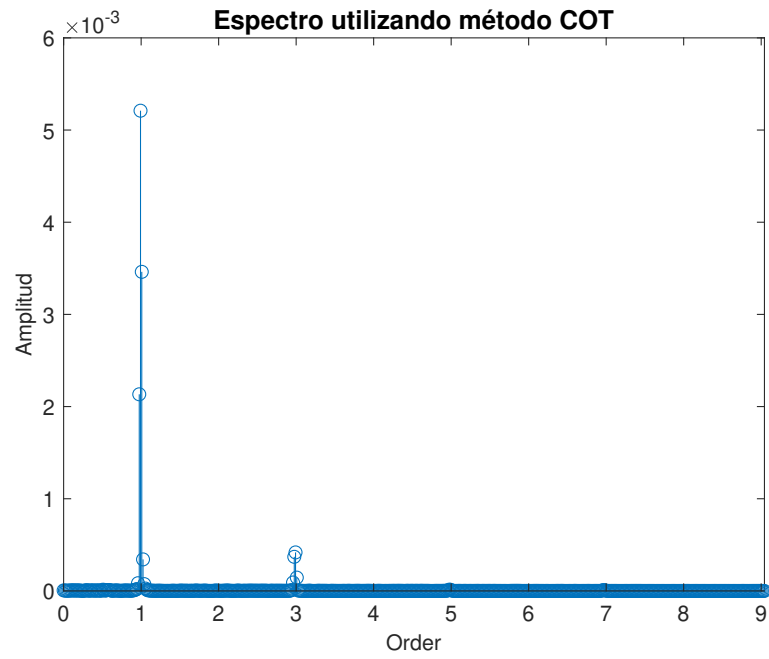


Figura 56: Espectro utilizando el método COT.

CAPÍTULO 7: Conclusiones

En el presente estudio se ha planteado una nueva metodología para la determinación de fuerzas en descansos de segmentos basculantes, la cual se aplicó en la simulación de un rotor vertical. A continuación, se presentan las principales conclusiones obtenidas en este trabajo:

- Se ha elaborado una nueva fórmula para determinar el espesor de película de aceite en descansos de segmentos basculantes, utilizando relaciones geométricas. Esta fórmula tiene la capacidad de determinar con precisión el espesor, considerando las diversas configuraciones de ubicación del pivote y rotación del patín que ocurre en la realidad.
- Para lograr una determinación precisa de las fuerzas hidrodinámicas, fue fundamental incorporar en el modelo la dinámica de movimiento de los patines del descanso hidrodinámico, ya que este tiene un impacto directo en la rotación del patín y a su vez en el espesor de la película de aceite. Para ello se debe considerar tanto el momento producido por el fluido hidrodinámico como el momento que genera la fricción del pivote.
- Al analizar los resultados de la simulación del banco de ensayos de (Nasselqvist et al., 2014), se concluye que el algoritmo puede representar de manera adecuada la forma de la órbita esperada en un rotor desbalanceado con 4 patines, con un error del 12 % en la excentricidad máxima. Este error podría atribuirse a diversos factores externos, como los efectos del cambio de temperatura o las deformaciones o desgastes presentes en el patín, que afectan el espesor de la película.
- Al analizar el espectro obtenido utilizando el método COT se puede concluir que el modelo propuesto logra representar los resultados experimentales de un banco de ensayos de rotor vertical con descanso de segmentos basculantes disponible en la literatura. Además de la componente 1ω se detectan componentes $(N - 1)\omega$ y $(N + 1)\omega$ (N : número de patines) debido a la influencia del descanso de segmentos basculantes.

Trabajos Futuros

- Como parte de las investigaciones futuras, se contempla la aplicación de esta metodología para la evaluación de las fuerzas hidrodinámicas en una unidad generadora. Para lograrlo, será necesario desarrollar un modelo dinámico que pueda representar con precisión el movimiento de dicha unidad. Este modelo deberá tener en cuenta las desviaciones de montaje típicas en la industria, como por ejemplo, la falta de perpendicularidad del eje del rotor respecto a la superficie de apoyo del collar de empuje en el descanso, la posible falta de alineación del eje en las uniones mediante acoplamientos, o la falta de horizontalidad del descanso de empuje, ya que estos pueden afectar a la dinámica de la unidad. Posteriormente, se llevará a cabo la validación del modelo utilizando datos obtenidos de una unidad generadora real.

Referencias

- BearingsPlus. (2020). Tilt Pad Journal Bearings. <https://www.bearingsplus.com/en/products/tilt-pad-bearings/tilt-pad-journal.html>
- Benti, G. (2021). *Nonlinear dynamic analysis of vertical rotors with tilting pad journal bearings* [Tesis doctoral, Luleå University of Technology].
- Brito, G. C., Machado, R. D., & Chaves Neto, A. (2017). Experimental estimation of journal bearing stiffness for damage detection in large hydrogenerators. *Shock and Vibration*, 2017, 1-17.
- Cha, M., & Glavatskih, S. (2015). Nonlinear dynamic behaviour of vertical and horizontal rotors in compliant liner tilting pad journal bearings: Some design considerations. *Tribology International*, 82, 142-152.
- Dixit, H. K., Singh, A., & Gupta, T. C. (2020). Effect of rotating unbalance on nonlinear dynamic response of flexible rotors supported on tilting pad journal bearing. *Engineering Research Express*, 2. <https://doi.org/10.1088/2631-8695/abbadf>
- Dmochowski, W. M., Dadouche, A., Fillon, M., & DeCamillo, S. M. (2013). Hydrodynamic Tilting-Pad Journal Bearings. En Q. J. Wang & Y.-W. Chung (Eds.), *Encyclopedia of Tribology* (pp. 1749-1757). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-92897-5_46
- Eisenmann, R. (2004). Tilt-Pad Bearing Preload.
- G.Electric. (s.f.). Kaplan Hydro Turbines. <https://www.gerenewableenergy.com/hydro-power/largehydropower-%20solutions/hydro-turbines/kaplan-turbine.html>
- Iskakov, Z., Bissembayev, K., Jamalov, N., & Abduraimov, A. (2021). Modeling the dynamics of a gyroscopic rigid rotor with linear and nonlinear damping and nonlinear stiffness of the elastic support. *Machines*, 9. <https://doi.org/10.3390/machines9110276>
- Jin, Y., Niu, Q., Qu, Y., & Yuan, X. (2023). Pivot stiffness effect on transient dynamic characteristic of tilting pad journal bearing-rotor system passing through critical speed. *Lubricants*, 11(3), 125.
- Kim, S., Byun, S., & Suh, J. (2020). Effects of tilting pad journal bearing design parameters on the pad-pivot friction and nonlinear rotordynamic bifurcations. *Applied Sciences*, 10(16), 5406.
- Nässelqvist, M., Gustavsson, R., & Aidanpää, J. O. (2014). Experimental and numerical simulation of unbalance response in vertical test rig with tilting-pad bearings. *International Journal of Rotating Machinery*, 2014. <https://doi.org/10.1155/2014/309767>
- Nicholas, J. C., et al. (1994). Tilting Pad Bearing Design. *Proceedings of the 23rd Turbomachinery Symposium*.
- Okabe, E. P., & Cavalca, K. L. (2009). Rotordynamic analysis of systems with a non-linear model of tilting pad bearings including turbulence effects. *Nonlinear Dynamics*, 57(4), 481-495.
- Pérez, N., & Rodríguez, C. (2021). Vertical rotor model with hydrodynamic journal bearings. *Engineering Failure Analysis*, 119.
- Saavedra, P. (s.f.). *Cap 10: Descansos Hidrodinámicos*. Universidad de Concepción.
- Saavedra, P., & Rodríguez, C. (2006). Accurate assessment of computed order tracking. *Shock and Vibration*, 13(1), 13-32.
- San Andrés, L. (2010). NOTES 16. STATIC AND DYNAMIC FORCED PERFORMANCE OF TILTING PAD BEARINGS: ANALYSIS INCLUDING PIVOT STIFFNESS.
- Santos, I. F., & Russo, F. (1998). Tilting-pad journal bearings with electronic radial oil injection.
- Synnegård, E., Gustavsson, R., & Aidanpää, J.-O. (2016). Influence of cross-coupling stiffness in tilting pad journal bearings for vertical machines. *International Journal of Mechanical Sciences*, 111, 43-54.

- Wang, Y., Gao, Y., Cui, Y., Liu, Z., et al. (2015). Establishment of approximate analytical model of oil film force for finite length tilting pad journal bearings. *International Journal of Rotating Machinery*, 2015.
- Xu, Y., Li, Z., & Lai, X. (2013). Dynamic model for hydro-turbine generator units based on a database method for guide bearings. *Shock and Vibration*, 20, 411-421. <https://doi.org/10.3233/SAV-120758>

Anexo A: Programa para la determinación del espesor de película de aceite

```

1 function [h] = Espesor_NF(x,y,psi,R_p,R,T,R_b,phi,theta_a,eta)
2 e= sqrt((x^2)+(y^2));
3 beta= atan2(y,x);
4 if beta<0
5     beta=beta+(2*pi);
6 end
7 alpha=(pi/2)-(psi/2);
8 BG=((R_p+T)*sin(psi))/(sin(alpha));
9 v=asin(((R_p-R_b)*sin(pi-eta))/(R_p+T));
10 delta=eta-v;
11 w=sqrt(((R_p-R_b)^2)+((BG)^2)-(2*(BG)*(R_p-R_b)*cos(alpha+delta)));
12 gamma=asin((BG*sin(alpha+delta))/w);
13 lambda=asin((w*sin(phi-theta_a-gamma))/R_p);
14 DA=((R_p)*cos(lambda))-(w*cos(phi-theta_a-gamma));
15 E=sqrt((DA^2)+(e^2)-(2*DA*e*cos(beta+theta_a)));
16 h=E-R;
17 end

```

Anexo B: Programa para determinar los valores geométricos para calcular la sumatoria de momentos

```

1 function [gamma2,PA] = Sumatoria_Momentos_geometria(psi,R_p,t,R_b,
2     phi_p,theta_ap,eta)
3 alpha=(pi/2)-(psi/2);%1
4 BG=((R_p+t)*sin(psi))/(sin(alpha));%2
5 dseta=asin(((R_p-R_b)*sin(pi-eta))/(R_p+t));%(1)
6 delta=eta-dseta;%2
7 DP=sqrt(((R_p-R_b)^2)+((R_p+t)^2)-(2*(R_p-R_b)*(R_p+t)*cos(delta)))
8     ;%3
9 w=sqrt(((R_p-R_b)^2)+((BG)^2)-(2*(BG)*(R_p-R_b)*cos(alpha+delta)));
10     %4
11 gamma=asin((BG*sin(alpha+delta))/w);%5
12 lambda=asin((w*sin(phi_p-theta_ap-gamma))/R_p);%6
13 DA=((R_p)*cos(lambda))-(w*cos(phi_p-theta_ap-gamma));%7
14 PA=sqrt(((DA)^2)+((DP)^2)-(2*(DA)*(DP)*cos(phi_p-theta_ap+eta)));%8
15 alpha_3=acos((((R_p+t)^2)-(R_p^2)-(PA^2))/(-2*R_p*PA));
16 gamma2=alpha_3-(pi/2);
17 return

```

Anexo C: Programa MATLAB para determinar la fuerzas hidrodinámica que realiza un patín con respecto al eje y el momento con respecto al patín

```

1 function [F_x,F_y,M_total] = FuerzayMomentoPad_Vroce(x,y,R_p,R,T,
    R_b,L,mu,w,phi,eta,psi,theta_a,theta_b,deltatheta,dh_dt,u)
2 global sentido
3 %Determinacion Fuerza y momento por patin
4 theta=[theta_a:deltatheta:theta_b];
5 N=length(theta);
6 %-----Determinación del espesor de película -----
7 for i=1:N
8 [h(i)] = Espesor_NF(x,y,psi,R_p,R,T,R_b,phi,theta(i),eta);
9 end
10 %-----Derivada dh/d0-----
11 dh_d0=sentido*diff(h)/deltatheta;
12 %-----Determinación de presion-----
13 N_h=length(h);
14 N_dh=length(dh_d0);
15 N_z=140;
16 z = linspace(-L/2, L/2, N_z);
17 P = zeros(N_z, N-1);
18 for i=1:N_z
19     for j=1:N-1
20         P(i,j)=((3*mu)./(h(j).^3))*((w*dh_d0(j))+(2*dh_dt(j)))*((z(
                i).^2)-((L^2)/4));
21         if P(i,j)<0
22             P(i,j)=0;
23         end
24     end
25 end
26 %-----Determinacion de fuerzas-----
27 F_x=0;
28 F_y=0;
29 dz=abs(z(2)-z(1));
30 for I=1:N_z
31     for J=1:N-1
32         F_x=F_x+P(I,J)*cos(theta(J))*(R_b/1000)*deltatheta*(dz/1000);
33         F_y=F_y+P(I,J)*sin(theta(J))*(R_b/1000)*deltatheta*(dz/1000);
34     end
35 end
36 F_x=-F_x;
37 F_y=-F_y;
38 %-----Determinacion Momentos-----%
39 M=0;
40 theta_AM=theta_a:deltatheta:phi;
41 N_AM=length(theta_AM);

```



```

42 theta_BM=phi:deltatheta:theta_b;
43 N_BM=length(theta_BM);
44 M_AM=0;
45 M_BM=0;
46 for I=1:N_z
47     for J=1:N_AM
48         [gamma2,PA] = Sumatoria_Momentos_geometria(psi,R_p,T,R_b,phi,
49             theta_AM(J),eta);
50         M_AM=M_AM+P(I,J)*(R_p/1000)*cos(gamma2)*(PA/1000)*deltatheta*(
51             dz/1000); %N*m
52         PA_graf_am(J)=PA;
53     end
54 end
55 for I=1:N_z
56     for J=1:N_BM
57         [gamma2,PA] = Sumatoria_Momentos_geometria(psi,R_p,T,R_b,phi,
58             theta_BM(J),eta);
59         M_BM=M_BM+P(I,J)*(R_p/1000)*cos(gamma2)*(PA/1000)*deltatheta*(
60             dz/1000); %N*m
61         PA_graf_bm(J)=PA;
62     end
63 end
64 M=-M_AM+M_BM;
65 r_pivot=34/1000; %m
66 F_normal=0;
67 for I=1:N_z
68     for J=1:N-1
69         F_normal=F_normal+P(I,J)*(R_p/1000)*deltatheta*(dz/1000);
70     end
71 end
72 M_friccion=u*r_pivot*F_normal;
73 if M_friccion>abs(M)
74     M_total=0;
75 else
76     if M>0
77         M_total=M-M_friccion;
78     else
79         M_total=M+M_friccion;
80     end
81 end
82 end
83 end

```

Anexo D: Programa para determinar la derivada del espesor de película con respecto al tiempo

```

1 function [dh_dt] = derivadah_tiemprov2(x,y,psi,R_p,R,t,R_b,phi,theta
    ,eta,x_dot,y_dot,psi_dot)
2 N=length(theta);
3 for i=1:N
4     h1=Espesor_NF(x,y,psi,R_p,R,t,R_b,phi,theta(i),eta);
5     deltax=0.0001;
6     deltay=0.0001;
7     deltapsi=0.0001*pi/180;
8     h_x2 = Espesor_NF(x+deltax,y,psi,R_p,R,t,R_b,phi,theta(i),eta);
9     h_y2 = Espesor_NF(x,y+deltay,psi,R_p,R,t,R_b,phi,theta(i),eta);
10    h_psi2=Espesor_NF(x,y,psi+deltapsi,R_p,R,t,R_b,phi,theta(i),eta);
11    dh_dx=(h_x2-h1)/deltax;
12    dh_dy=(h_y2-h1)/deltay;
13    dh_dpsi=(h_psi2-h1)/deltapsi;
14    dh_dt(i)=(dh_dx*x_dot)+(dh_dy*y_dot)+(dh_dpsi*psi_dot);
15 end
16 return

```

Anexo E: Programa para plantear el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a resolver

```

1 function [dx] = ODEecMovEje_partidav3_Vroce(t,x)
2 %-----Datos Geometricos del descanso-----
3 global U R_p R T R_b pad_angle L mu w m phi eta theta_a theta_b
    deltatheta
4 global theta N I sentido deltat theta1 theta2 theta3 theta4 T_P u1
    u2 u3 u4
5 %Resolucion ode despues de partida
6 omega=(w/T_P)*t;
7 f_d=U*omega^2;
8 theta_d=(w/(2*T_P))*t^2;
9 %Fuerza de desbalanceamiento del fluido en direccion radial y
    tangencial
10 %Fuerzas producidas por los patines
11 X=x(1)*1000;%mm
12 Y=x(3)*1000;%mm
13 psi1=x(5);
14 psi2=x(7);
15 psi3=x(9);
16 psi4=x(11);
17 %-----Nuevo calculo de derivada-----

```

```

18 [dh_dt1] = derivadah_tiemvov2(X,Y,psi1,R_p,R,T,R_b,phi(1),theta1,
    eta,x(2)*1000,x(4)*1000,x(6));
19 [dh_dt2] = derivadah_tiemvov2(X,Y,psi2,R_p,R,T,R_b,phi(2),theta2,
    eta,x(2)*1000,x(4)*1000,x(8));
20 [dh_dt3] = derivadah_tiemvov2(X,Y,psi3,R_p,R,T,R_b,phi(3),theta3,
    eta,x(2)*1000,x(4)*1000,x(10));
21 [dh_dt4] = derivadah_tiemvov2(X,Y,psi4,R_p,R,T,R_b,phi(4),theta4,
    eta,x(2)*1000,x(4)*1000,x(12));
22 %-----Determinacion de fuerzas-----
23 [F_x1,F_y1,M1] = FuerzayMomentoPad_Vroce(X,Y,R_p,R,T,R_b,L,mu,omega
    ,phi(1),eta,psi1,theta_a(1),theta_b(1),deltatheta,dh_dt1,u1);
24 [F_x2,F_y2,M2] = FuerzayMomentoPad_Vroce(X,Y,R_p,R,T,R_b,L,mu,omega
    ,phi(2),eta,psi2,theta_a(2),theta_b(2),deltatheta,dh_dt2,u2);
25 [F_x3,F_y3,M3] = FuerzayMomentoPad_Vroce(X,Y,R_p,R,T,R_b,L,mu,omega
    ,phi(3),eta,psi3,theta_a(3),theta_b(3),deltatheta,dh_dt3,u3);
26 [F_x4,F_y4,M4] = FuerzayMomentoPad_Vroce(X,Y,R_p,R,T,R_b,L,mu,omega
    ,phi(4),eta,psi4,theta_a(4),theta_b(4),deltatheta,dh_dt4,u4);
27 %Cambios de coordenadas a fuerzas radiales y tangenciales
28 F_x=F_x1+F_x2+F_x3+F_x4;
29 F_y=F_y1+F_y2+F_y3+F_y4;
30 % Sistema de ode
31 dx(1)=x(2);
32 dx(2)=(F_x-f_d*cos(theta_d))/m;
33 dx(3)=x(4);
34 dx(4)=(F_y-f_d*sin(theta_d))/m;
35 dx(5)=x(6);
36 dx(6)=M1/I;
37 dx(7)=x(8);
38 dx(8)=M2/I;
39 dx(9)=x(10);
40 dx(10)=M3/I;
41 dx(11)=x(12);
42 dx(12)=M4/I;
43 dx=[dx(1);dx(2);dx(3);dx(4);dx(5);dx(6);dx(7);dx(8);dx(9);dx(10);dx
    (11);dx(12)];
44 end

```

Anexo F: Programa para resolver sistema de ecuaciones diferenciales

```

1  clc
2  clearvars
3  close all
4  global U R_p R T R_b pad_angle L mu w m phi eta theta_a theta_b
   deltatheta
5  global theta N I u T_P sentido deltat theta1 theta2 theta3 theta4
6  %-----Datos Geometricos del descanso----
7  tic
8  I=1.775*(10^-6);%kg m2
9  R_p=50.15/2;%mm Radio del Patin
10 R=49.84/2;%mm Radio del eje
11 T=8;%mm Espesor de patin
12 R_b=50.09/2;%mm Radio del descanso
13 pad_angle=72*pi/180;% Angulo del patin
14 L=20;%mm
15 %Datos de lubricante
16 mu=0.027; %[Pa s]
17 %Velocidad de rotacion eje
18 w=1000;%RPM
19 w=w*(2*pi)/60;%HZ
20 m=0.8;%kg Masa del rotor
21 U=(1.7e-3)/2 %Desbalanceamiento
22 u=0.2;%Coeficiente de friccion
23 sentido=-1;
24 %-----Datos del patin-----
25 phi=[0,90,180,-90];%input('Ingresar ubicación del pivote alineado (
   phi): ');
26 phi=phi*(pi/180);% Ubicacion de pivote del patin
27 eta=-7.2;%input('Ingresar desviación del pivote(eta): ');
28 eta=eta*(pi/180);
29 T_P =100;
30 %-----Limites de integracion-----
31 theta_a=[-36.040,53.95967,144, -126.04033];
32 theta_a=theta_a*(pi/180);
33 theta_b=theta_a+pad_angle;
34 deltatheta=0.01;
35 theta1=[theta_a(1):deltatheta:theta_b(1)];
36 theta2=[theta_a(2):deltatheta:theta_b(2)];
37 theta3=[theta_a(3):deltatheta:theta_b(3)];
38 theta4=[theta_a(4):deltatheta:theta_b(4)];
39 N=length(theta1);
40 options = odeset('RelTol', 1e-8);
41 %-----Resolucion de ODE-----

```

```
42 X0=[0*10^-3,0,0*10^-3,0,0*pi/180,0,0*pi/180,0,0*pi/180,0,0*pi
    /180,0]
43 a=0;
44 b=T_P;
45 tspan=[a,b];
46 [t,y]=ode15s(@ODEecMovEje_partidav3,tspan,X0,options);
47 figure
48 plot(y(:,1)*1000,y(:,3)*1000);
49 title('Orbita en mm')
50 toc
```