UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCÍAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Teorías Chern-Simons y Born-Infeld de la Gravedad y Álgebras tipo Maxwell

Tesis para optar al grado académico
de Magíster en Ciencias
con mención en Física

por

Patrick Keissy Concha Aguilera

Director de Tesis : Dr. Patricio Salgado

Comisión : Dr. Jaime Araneda
: Dr. Fernando Izaurieta

Concepción, Chile
Octubre 2013

Dedicado a Evelyn
y a mis padres

Índice general

Agradecimientos

Deseo expresar un especial agradecimiento a mi novia Evelyn por toda la felicidad y amor que me ha entregado. Especialmente, por haberme acompañado tanto a nivel emocional como a nivel académico a lo largo de esta tesis. Además, este trabajo no hubiera sido posible sin sus inumerables aportes constructivos y acertados. Quisiera agradecer también a mis padres a quienes le debo toda mi educación y, pese a la distancia, siempre me han apoyado incondicionalmente.

Quisiera expresar mi gratitud a mi director de tesis, Dr. Patricio Salgado Arias, quien ha sido un pilar fundamental a lo largo de mi formación científica. En particular, quisiera agradecerle su paciencia, su tiempo y su preocupación conmigo. Deseo agradecer también a todos mis profesores de la Universidad de Concepción quienes han contribuido en mi formación académica durantes todos estos años.

Deseo expresar también mis agradecimientos a todos mis amigos y compañeros por los momentos compartidos a lo largo de mi vida. En particular deseo agradecer a Diego Molina con quien, junto a Evelyn Rodriguez, este trabajo ha sido posible permitiendo algunas publicaciones.

Quisiera agradecer además al personal del Departamento de Física de la Universidad de Concepción. En especial a sus secretarias por su buena disponibilidad en los diversos trámites a lo largo de mi formación.

Mi dedicación exclusiva al programa de Doctorado ha sido posible a través de un beca de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica CONICYT (2010-2014).

Resumen

Esta Tesis se propone la construcción de una teoría de Einstein-Lovelock de la Gravedad invariante bajo las álgebras tipo Maxwell $\mathcal{M}$, la cual contiene al Lagrangiano de Einstein-Hilbert tanto en dimensiones impares como en dimensiones pares.

Para llevar a cabo dicha construcción será necesario introducir ciertas herramientas matemáticas conocidas como S-expansión. Este mécanismo consiste básicamente en un método para obtener nuevas álgebras de Lie a partir de una dada mediante un semigrupo abeliano (Capítulo 2).

En el Capítulo 3 se estudiará Relatividad General en el formalismo de Cartan introduciendo la nociones de vielbein y conexión de spin. En especial, se estudiará la acción de Einstein-Hilbert y se analizará su invariancia bajo el grupo de Poincaré.

Posteriormente, se introducirá la teoría de Lanczos-Lovelock y se estudiará brevemente el problema de los coeficiente introduciendo así las teorías Chern-Simons y Born-Infeld de la Gravedad (Capítulo 4 y 5).

En el Capítulo 6 y 7 se hará uso del procedimiento de S-expansión para obtener álgebras tipo Maxwell $\mathcal{M}$ y sus respectivas subálgebras $\mathfrak{L}^{\mathcal{M}}$. Se estudiará bajo que condiciones, las teorías Chern-Simons y Born-Infeld de la Gravedad invariante bajo las diveras álgebras tipo Maxwell, conducen al Lagrangianos de Einstein-Hilbert.

Finalmente, en el Capítulo 8 se estudiará una acción de Einstein-Lovelock la cual conducen en dimensiones impares a la teoría de Einstein-Chern-Simons $\mathcal{M}$-valuada y en dimiensiones pares a la teoría de Einstein-Born-Infeld $\mathfrak{L}^{\mathcal{M}}$-valuada.

Capítulo 1

Introducción

Tanto la electrodinámica como las interacciones débil y fuerte son consistentemente descritas en el modelo estándar por medio de teorías de Yang-Mills. Estas tres interacciones han sido cuantizadas exitósamente y son conocidas como teorías renormalizables. No obstante Gravedad descrita por Relatividad General se resiste a la cuantización a pesar de la invariancia bajo transformacions generales de coordenadas. Sin embargo, la teoría de gauge convencional, al igual que la teoría de la relatividad especial tiene su fundamento en la existencia de una estructura métrica "background" no dinámica, mientras que en Relatividad General, la geométría es dinámicamente determinada. Por lo tanto, la construcción de una teoría de gauge para la gravedad requiere de una acción que no considere un espacio-tiempo background fijo, es decir que no considere una métrica background fija.

Sin embargo, existe una acción para gravedad en dimensiones impares independiente de la métrica la cual fue propuesta por Chamseddine [18, 19]. Como veremos a lo largo de la Tesis, la única posibilidad de tener una acción para gravedad es considerar una acción construida en términos de una conexión y que no considere un espacio-tiempo background-fijo. Dicha acción es conocida como acción de Chern-Simons y corresponde a un caso particular de la acción de Lanczos-Lovelock [1, 2, 3, 4].

La acción de Lanczos-Lovelock (LL) corresponde a la acción más general para gravedad en $D > 4$ dimensiones construido sobre los mismos principios que Relatividad General, a saber covariancia general y ecuaciones de segundo orden para la métrica. La teoría de Lanczos-

Lovelock se refiere de hecho a una familia parametrizada por un conjunto de coeficientes reales α_p, $p = 0, 1, \cdots, [D/2]$, los cuales no son fijados desde primeros principios. En la Ref. [16], se mostró que es posible fijar los coeficientes en términos de las constantes cosmológica y gravitacional. Así, en dimensiones impares, la acción es formulada como una teoría Chern-Simons para el grupo AdS. Por otro lado, bajo una elección particular de los coeficientes se obtiene en dimensiones pares el Lagrangiano de Born-Infeld, el cual solo es invariante bajo rotaciones locales de Lorentz del mismo modo que la acción de Einstein-Hilbert.

Si las teorías Chern-Simons y Born-Infeld son las apropiadas teorías en dimensiones impares y pares respectivamente para describir gravedad entonces ambas teorías deben satisfacer el principio de corespondencia, es decir, deben estar relacionadas con Relatividad General.

El propósito de la Tesis es mostrar que se puede obtener Relatividad General desde una teoría Chern-Simons para una cierta álgebra de Lie $\mathcal{M}$ en dimensiones impares y desde una teoría Born-Infeld para una cierta álgebra $\mathfrak{L}^{\mathcal{M}}$ en dimensiones pares [33, 35, 37]. Dichas álgebras conocidas como álgebas tipo Maxwell, son obtenidas mediante el procedimiento de S-expansión del álgebra AdS mediante una elección particular de un semigrupo.

Finalmente, construiremos una acción que llameremos acción de Einstein-Lovelock [38]. Dicho Lagrangiano, bajo una elección particular de ciertos coeficientes, conduce en dimensiones impares a la gravedad de Einstein-Chern-Simons y en dimensiones pares a la gravedad de Einstein-Born-Infeld.

Capítulo 2

Procedimiento de la S-expansión

2.1 Introducción

La obtención de nuevas álgebras de Lie a partir de otras es un problema de gran interés en matemática y física. Existen esencialmente cuatro maneras distintas de obtener nuevas álgebras mediante otras. Es de nuestro interés entender y hacer uso del mecanismo de expansión de álgebras no obstante es pertinente introducir los distintos métodos existentes para encontrar nuevas álgebras.

Uno de estos métodos consiste en el procedimiento de *contracción*. En especial, la contracción de Inönü-Wigner (IW) [5] $\mathfrak{g}_c$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es realizada con respecto a una subálgebra $\mathfrak{L}_0$ reescalando los generadores bases del coseto $\mathfrak{g}/\mathfrak{L}_0$ mediante un parámetro y luego considerando algún límite para dicho parámetro. Han habido varias discusiones y variaciones del procedimiento de contracción de IW sin embargo todos tienen en común de que $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_c$ tienen la misma dimensión.

Otro procedimiento es la *deformación* de álgebras y álgebras de Lie. De un punto de vista físico, dicho proceso es esencialmente lo opuesto al de contracción (ver [6]). No obstante, las dimensiones de las álgebras de lie originales y deformadas son nuevamente iguales. A modo de ejemplo, el álgebra de Poincaré es obtenida desde el álgebra de Galileo mediante un proceso de deformación. De este modo, el método de deformación es considerado físicamente como una herramienta para desarrollar una teoría física desde otra existente.

Un tercer procedimiento para obtener nuevas álgebras de Lie consiste en la *extensión* $\bar{\mathfrak{g}}$ de un álgebra $\mathfrak{g}$ por otra $\mathfrak{e}$ [7]. El álgebra extendida $\bar{\mathfrak{g}}$ contiene a $\mathfrak{e}$ como un ideal y $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{e} \approx \mathfrak{g}$, no obstante $\mathfrak{g}$ no es necesariamente una subálgebra de $\bar{\mathfrak{g}}$. Puesto que $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{e} \approx \mathfrak{g}$ para una extensión se tiene que $\dim \bar{\mathfrak{g}} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{e}$ de modo que la dimensión del álgebra resultante es igual al número total de generadores presente en las álgebras involucradas en obtener el álgebra extendida.

Ninguno de los procedimientos anteriormente citados nos permite obtener algebras de mayor dimensión a partir de una dada. Sin embargo, existe un mecanismo que nos permite obtener nuevas álgebras de mayor dimensión a partir de un álgebra dada $\mathfrak{g}$. La idea, introducida originalmente por Hatsuda y Sakaguchi en [8], consiste en considerar el álgebra $\mathfrak{g}$ descrita por las formas de Maurer-Cartan (MC) sobre la variedad de su grupo asociado G y, despues de reescalar algunos parámetros del grupo por un factor λ, en expandir las formas de MC como series en λ. Este procedimiento es conocido como el método de *expansión* en serie de potencias [9] y difiere de los tres anteriores ya que la dimensión del álgebra cambia en el proceso. las álgebras expandidas son en general de mayor dimensión que la original y no se pueden relacionar por ningun proceso de contracción o deformación. El uso de las formas de MC nos permite de un punto de vista físico obtener formas invariantes que son útiles para construir acciones. Un pequeño enfoque a este método es realizado en el **Apendice A.**

Sin embargo, existe otro enfoque al método de expansión el cual está basado completamente en operaciones realizadas directamente sobre los generadores del álgebra. En dicho caso, todos los casos de expansión encontrado en [9] pueden considerarse como proveniente de una elección particular de un semigrupo. Este último método, conocido como la S-expansión fue propuesto en [10] y consiste en obtener una nueva álgebra a partir del producto directo de una representación de un semigrupo dado y los generadores del álgebra de Lie. La álgebra así obtenida es conocida como álgebra S-expandida. Existe además una formulación dual del método de S-expansión [11] el cual permite estudiar el procedimiento de la S-expansión en el contexto de la variedad del grupo.

2.2 Conceptos básicos

Antes de estudiar el procedimiento de la S-expansión es necesario introducir ciertos conceptos y definiciones útiles para la comprensión de dicho método.

2.2.1 Semigrupo

Un semigrupo es un sistema algebraico dotado de una única ley de composición interna asociativa. Una definición más rigurosa es dada en la Ref. [10] y establece lo siguiente:

Definición 1 *Sea $S = \{\lambda_\alpha\}$ un semigrupo finito, y sean $\lambda_{\alpha_1}, \ldots, \lambda_{\alpha_n} \in S$ cuyo producto viene dado por*

$$\lambda_{\alpha_1} \cdots \lambda_{\alpha_n} = \lambda_{\gamma(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}. \tag{2.1}$$

Luego, el n-selector $K_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{}^{\rho}$ es definido como

$$K_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{}^{\rho} = \begin{cases} 1, & \text{cuando } \rho = \gamma\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Puesto que S es asociativo, el n-selector satisface la identidad

$$K_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{}^{\rho} = K_{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}}{}^{\sigma} K_{\sigma \alpha_n}{}^{\rho} = K_{\alpha_1 \sigma}{}^{\rho} K_{\alpha_2 \cdots \alpha_n}{}^{\sigma}. \tag{2.3}$$

Usando esta identidad, vemos que es siempre posible expresar el n-selector en términos de 2-selectores. Esto se puede interpretar más intuitivamente escribiendo el producto de dos elementos del semigrupo como

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = K_{\alpha\beta}{}^{\rho} \lambda_\rho. \tag{2.4}$$

Una importante propiedad de los selectores $K_{\alpha\beta}^{\rho}$ es encontrada haciendo uso de las propiedades de asociatividad y clausura del semigrupo. En efecto, la ley asociativa y clausura del producto es expresada como

$$\left(\lambda_\alpha \lambda_\beta\right) \lambda_\gamma = \lambda_\alpha \left(\lambda_\beta \lambda_\gamma\right) = \lambda_{\rho(\alpha,\beta,\gamma)} \tag{2.5}$$

lo cual, haciendo uso de la ec. (2.4) es equivalente a escribir

$$K_{\alpha\beta}{}^{\rho} K_{\rho\gamma}{}^{\sigma} = K_{\alpha\rho}{}^{\sigma} K_{\beta\gamma}{}^{\rho} = K_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma}. \tag{2.6}$$

Esto implica que los 2-selectores $K_{\alpha\beta}^{\ \ \rho}$ pueden proporcionar una representación matricial para el semigrupo, en forma análoga a como las constantes de estructura de un álgebra de Lie proporcionan la representación adjunta. En efecto, definiendo

$$[\lambda_\alpha]_\gamma^{\ \rho} = K_{\alpha\gamma}^{\ \ \rho} \tag{2.7}$$

tenemos

$$[\lambda_\alpha]_\mu^{\ \sigma} [\lambda_\beta]_\sigma^{\ \nu} = K_{\alpha\beta}{}^{\sigma} [\lambda_\sigma]_\mu^{\ \nu} = \left[\lambda_{\gamma(\alpha\beta)}\right]_\mu^{\ \nu}. \tag{2.8}$$

Nos restringiremos de ahora en adelante a semigrupos abelianos, lo cual implica que todo n-selector debe de ser completamente simétrico en sus índices bajos.

A continuación introduciremos de acuerdo a la Ref. [10] el concepto de subconjuntos de un semigrupo S.

Definición 2 *Sea S_p y S_q dos subconjuntos de S. El producto $S_p \cdot S_q$ está definido como*

$$S_p \cdot S_q = \left\{\lambda_\gamma \ \textit{tal que}\ \lambda_\gamma = \lambda_{\alpha_p}\lambda_{\alpha_q},\ \textit{con}\ \lambda_{\alpha_p} \in S_p \ \textit{y}\ \lambda_{\alpha_q} \in S_q\right\} \subset S. \tag{2.9}$$

Es decir, $S_p \cdot S_q \subset S$ es el conjunto que resulta del producto de cada elemento de S_p con cada elemento de S_q. Puesto que S es abeliano, $S_p \cdot S_q = S_q \cdot S_p$.

Este producto será útil en las definiciones de expansión mediante semigrupo. Es importante enfatizar además que los subconjuntos S_p y S_q no deben ser necesariamente semigrupos.

Algunos semigrupos poseen un elemento particular el cual será de gran utilidad a lo largo de la tesis.

Definición 3 *Si S es un semigrupo dotado de un elemento denotado por $0_S \in S$ que satisface la condición que $\forall \lambda_\alpha \in S$ se tiene*

$$0_S \lambda_\alpha = \lambda_\alpha 0_S = 0_S \tag{2.10}$$

entonces el elemento 0_S es llamado el elemento cero del semigrupo.

Un semigrupo dotado de un elemento 0_S no puede ser un grupo puesto que este elemento no tiene inverso. Dado además que dicho elemento es único cuando existe, se asignará para efectos efectos practicos el elemento λ_{N+1} del semigrupo $S = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha=0}^{N+1}$ al elemento 0_S ,

$$\lambda_{N+1} = 0_S. \tag{2.11}$$

2.2.2 Álgebras de Lie

Definición 4 *Un álgebra es definida como un par* $(\mathfrak{g}, \cdot)$ *donde* $\mathfrak{g}$ *es un espacio vectorial de dimensión finita y* $\cdot : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *es una regla de composición definida sobre el espacio vectorial.*

Definición 5 *Un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es definida por el par* $(\mathfrak{g}, [,])$*, donde* $\mathfrak{g}$ *es un espacio vectorial de dimensión finita, de base* $\{T_A\}_{A=1}^{\dim \mathfrak{g}}$*, definido sobre un campo* K*; y* $[,]$ *es una ley de composición* $(T_{A_1}, T_{A_2}) \to [T_{A_1}, T_{A_2}] \in \mathfrak{g}$ *que satisface los siguientes axiomas:*

- Linealidad

  $[\alpha T_{A_1} + \beta T_{A_2}, T_{A_3}] = \alpha [T_{A_1}, T_{A_3}] + \beta [T_{A_2}, T_{A_3}]$ para $\alpha, \beta \in K$.

- Antisimetría

  $[T_{A_1}, T_{A_2}] = -[T_{A_2}, T_{A_1}] \quad$ para todo $T_{A_1}, T_{A_2} \in G$.

- Identidad de Jacobi

  $[[T_{A_1}, T_{A_2}], T_{A_3}] + [[T_{A_2}, T_{A_3}], T_{A_1}] + [[T_{A_3}, T_{A_1}], T_{A_2}] = 0.$

La existencia de sub-álgebras o de ideales de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se verá reflejada sobre las constantes de estructuras. En efecto, sea $\{e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_n\}$ una base del espacio vectorial del álgebra $\mathfrak{g}$ y sea $\{e_1, \cdots, e_k\}$ una base de una sub-álgebra N de $\mathfrak{g}$, entonces las constantes de estructuras deben satisfacer las relaciones

$$C_{ij}{}^{s} = 0, \quad \text{para} \quad i, j \leq k \quad \text{y} \quad s > k. \tag{2.12}$$

Esto se debe al hecho que si N es una sub-álgebra $[N, N] \subset N$ entonces

$$[N_i, N_j] = C_{ij}{}^k N_k \tag{2.13}$$

de modo que para $k < s < n$ se tiene $C_{ij}{}^s = 0$. Por otro lado, si $\{e_1, \cdots, e_k\}$ es una base para un ideal entonces

$$C_{ij}{}^s = 0, \quad \text{para} \quad i \leq k, \; s > k, \quad \text{y} \quad j \quad \text{arbitrario.} \tag{2.14}$$

Esto proviene del hecho que si N es un ideal $[N, \mathfrak{g}] \subset N$ entonces

$$[N_i, \mathfrak{g}_j] = C_{ij}{}^s N_s; \quad i = 1, \ldots, k; \quad j = 1, \ldots, n$$

de modo que $[N, \mathfrak{g}] \subset N$ solo si $C_{ij}{}^s = 0$ para $k \leq s \leq n$.

2.2.3 Álgebras de Lie Reducidas

Dada un álgebra de Lie, es posible obtener álgebras más pequeñas a partir de ella por medio de un procedimiento que llamaremos "reducción". De la Ref [10], tenemos la siguiente definición,

Definición 6 *Consideremos una (super)álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de la forma $\mathfrak{g} = V_0 \oplus V_1$, con $\{T_{a_0}\}$ una base para V_0 y $\{T_{a_1}\}$ una base para V_1. Cuando $[V_0, V_1] \subset V_1$, es decir, cuando las relaciones de conmutación tienen la forma general*

$$\begin{aligned} [T_{a_0}, T_{b_0}] &= C_{a_0 b_0}{}^{c_0} T_{c_0} + C_{a_0 b_0}{}^{c_1} T_{c_1}, & (2.15)\\ [T_{a_0}, T_{b_1}] &= C_{a_0 b_1}{}^{c_1} T_{c_1}, & (2.16)\\ [T_{a_1}, T_{b_1}] &= C_{a_1 b_1}{}^{c_0} T_{c_0} + C_{a_1 b_1}{}^{c_1} T_{c_1}, & (2.17) \end{aligned}$$

entonces es directo mostrar que las constantes de estructuras $C_{a_0 b_0}{}^{c_0}$ satisfacen la identidad de Jacobi por sí mismas, y por lo tanto

$$[T_{a_0}, T_{b_0}] = C_{a_0 b_0}{}^{c_0} T_{c_0} \tag{2.18}$$

corresponde a un álgebra de Lie por sí misma. Esta álgebra, con constantes de estructura $C_{a_0 b_0}{}^{c_0}$, es llamada un álgebra reducida de $\mathfrak{g}$ y es simbolizada por $|V_0|$.

En efecto, considerando la componente válida en V_0 de la identidad de Jacobi

$$C_{a_0b_0}{}^{C}C_{Cd_0}{}^{e_0}+C_{d_0a_0}{}^{C}C_{Cb_0}{}^{e_0}+C_{b_0d_0}{}^{C}C_{Ca_0}{}^{e_0}=0$$

la cual es reescrita como

$$C_{a_0b_0}{}^{c_0}C_{c_0d_0}{}^{e_0}+C_{a_0b_0}{}^{c_1}C_{c_1d_0}{}^{e_0}+C_{d_0a_0}{}^{c_0}C_{c_0b_0}{}^{e_0}+C_{d_0a_0}{}^{c_1}C_{c_1b_0}{}^{e_0}+C_{b_0d_0}{}^{c_0}C_{c_0a_0}{}^{e_0}+C_{b_0d_0}{}^{c_1}C_{c_1a_0}{}^{e_0}=0$$

podemos ver que la constante de estructura $C_{a_0b_0}{}^{c_0}$ satisface la identidad de Jacobi por sí misma en dos situaciones:

- $C_{a_0b_0}{}^{c_1}=0$, es decir cuando V_0 es una subálgebra.
- $C_{a_0b_1}{}^{c_0}=0$, es decir cuando $[V_0,V_1]\subset V_1$ y por lo tanto $|V_0|$ es un álgebra reducida.

Es importante mencionar que en general $|V_0|$ no es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, sino que más bien corresponde a la "inversa" de un álgebra extendida, con la salvedad de que V_1 no requiera ser un ideal.

2.3 Método de S-expansión

2.3.1 S-expansión para un semigrupo arbitrario S

El procedimiento de expansión de álgebras de Lie consiste en un método para obtener nuevas álgebras de Lie a partir de una dada. En especial, el método de S-expansión descrito en la Ref. [10, 11, 12, 13, 14] consiste en hacer uso de semigrupos para expandir un álgebra original. El siguiente teorema describe la esensia primordial del método de S-expansión.

Teorema 1 *Sea $S=\{\lambda_\alpha\}$ un semigrupo abeliano con el 2-selector $K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ y $\mathfrak{g}$ una (super)álgebra de Lie con base $\{T_A\}$ y constantes de estructura $C_{AB}{}^{C}$. Denotemos un elemento de la base en el espacio del producto directo $S\otimes\mathfrak{g}$ por $T_{(A,\alpha)}=\lambda_\alpha T_A$ y consideremos el conmutador inducido $\left[T_{(A,\alpha)},T_{(B,\beta)}\right]\equiv\lambda_\alpha\lambda_\beta\left[T_A,T_B\right]$. Entonces, $S\otimes\mathfrak{g}$ es también una (super)álgebra de Lie, de constante de estructura*

$$C_{(A,\alpha)(B,\beta)}{}^{(C,\gamma)}=K_{\alpha\beta}{}^{\gamma}C_{AB}{}^{C} \tag{2.19}$$

Para probar en efecto que el álgebra obtenida consiste en un álgebra de Lie es necesario mostrar que se satisface la identidad de Jacobi haciendo uso de las propiedades de los selectores. El lector encontrará una demostración detallada de este teorema en las Refs. [10, 12].

El teorema anterior induce de forma natural la siguiente definición

Definición 7 *Sea S un semigrupo abeliano y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. El álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ definido por $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$ es llamada álgebra S-expandida de $\mathfrak{g}$.*

De esta forma, la S-expansión consiste en realizar una copia del álgebra $\mathfrak{g}$ para cada elemento del semigrupo. Además, existen por lo menos dos maneras de extraer álgebras más pequeñas de $S \otimes \mathfrak{g}$. La primera da lugar a "álgebras reducidas" mientras que la segunda produce una "subálgebra resonante". En las siguientes secciones se estudiará con más detalle estos casos particulares de la S-expansión.

2.3.2 Álgebra 0_S-reducida

Consideremos a continuación el caso en que el semigrupo S contiene un elemento $0_S \in S$, el cual juega un rol interesante en el álgebra S-expandida. Separando los elemento de S en $\lambda_{N+1} = 0_S$ y en elemento no nulos $\lambda_i, i = 0, \ldots, N$ se tiene que el 2-selector satisface

$$\begin{aligned} K_{i,N+1}{}^{j} &= K_{N+1,i}{}^{j} = 0, && (2.20)\\ K_{i,N+1}{}^{N+1} &= K_{N+1,i}{}^{N+1} = 1, && (2.21)\\ K_{N+1,N+1}{}^{j} &= 0, && (2.22)\\ K_{N+1,N+1}{}^{N+1} &= 1. && (2.23) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el álgebra S-expandida $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$ es descompuesta como

$$\begin{aligned} \left[T_{(A,i)}, T_{(B,j)}\right] &= K_{ij}{}^{k} C_{AB}{}^{C} T_{(C,k)} + K_{ij}{}^{N+1} C_{AB}{}^{C} T_{(C,N+1)}, && (2.24)\\ \left[T_{(A,N+1)}, T_{(B,j)}\right] &= C_{AB}{}^{C} T_{(C,N+1)}, && (2.25)\\ \left[T_{(A,N+1)}, T_{(B,N+1)}\right] &= C_{AB}{}^{C} T_{(C,N+1)}. && (2.26) \end{aligned}$$

Notemos que los generadores $T_{(A,N+1)}$ forman una subálgebra del álgebra S-expandida $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$, la cual es isomorfa a $\mathfrak{g}$. Además, comparando las ecs. $(2.24 - 2.26)$ con $(2.15 - 2.17)$ vemos que $\mathfrak{G}$ tiene la forma $\mathfrak{G} = V_0 \oplus V_1$, con $V_0 = \left\{T_{(A,i)}\right\}$, $V_1 = \left\{T_{(A,N+1)}\right\}$ y $[V_0, V_1] \subset V_1$. Así, la presencia de 0_S en el semigrupo implica la posibilidad de extraer un álgebra reducida del álgebra S-expandida $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$, la cual viene dada por

$$\left[T_{(A,i)}, T_{(B,j)}\right] = K_{ij}{}^{k} C_{AB}{}^{C} T_{(C,k)}. \tag{2.27}$$

El método de reducción en este caso es equivalente a eliminar la presencia del generador,

$$T_{(A,N+1)} = 0_S T_A = 0. \tag{2.28}$$

Por otro lado, el procedimiento de reducción abelianiza un sector del álgebra ya que para $\lambda_i \lambda_j = 0_S$ se tiene que los generadores $T_{(A,i)}$ y $T_{(B,j)}$ conmutan,

$$\left[T_{(A,i)}, T_{(B,j)}\right] = 0. \tag{2.29}$$

Una definición más formal es dada en la Ref. [10] y establece lo siguiente:

Definición 8 *Sea S un semigrupo abeliano provisto de un elemento cero $0_S \in S$, y sea $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$ un álgebra S-expandida. El álgebra obtenida imponiendo la condición $0_S T_A = 0$ sobre $\mathfrak{G}$ (o sobre una subálgebra de $\mathfrak{G}$) es llamada álgebra 0_S-reducida de $\mathfrak{G}$ (o de la subálgebra).*

2.3.3 Subálgebras resonantes

La busquedad de subálgebras desde un álgebra S-expandida $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$ no resulta ser un problema trivial. Como fue mencionado por los autores de la Ref. [10] es necesario tener cierta información de la estructura de subespacios del álgebra original $\mathfrak{g}$.

Sea $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in I} V_p$ una descomposición de $\mathfrak{g}$ en subespacios V_p, donde I es un conjunto de índices que rotulan a los elementos del conjunto de subespacios de $\mathfrak{g}$. Puesto que el álgebra $\mathfrak{g}$ es cerrada se tiene que para todo $p, q \in I$ es siempre posible definir $i_{(p,q)} \subset I$ tal que

$$[V_p, V_q] \subset \bigoplus_{r \in i_{(p,q)}} V_r, \tag{2.30}$$

donde la colección de subconjuntos$\left\{i_{(p,q)}\right\}_{p,q\in I}$ almacena la información de la estructura de subespacios de $\mathfrak{g}$.

Analogamente a la descomposición del álgebra $\mathfrak{g}$, es posible realizar una descomposición del semigrupo abeliano $S = \bigcup_{p\in I} S_p$, donde $S_p \subset S$ y donde I representa el mismo conjunto de índices que el caso anterior. A pesar que esta descomposición es completamente arbitraria, existe una elección particular de la descomposición que permite la construcción de una subálgebra con propiedades interesantes.

Definición 9 *Sea* $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in I} V_p$ *una descomposición de* $\mathfrak{g}$ *en subespacios, con una estructura descrita por los subconjuntos* $i_{(p,q)}$*, como en la ec.* (2.30). *Sea* $S = \bigcup_{p\in I} S_p$ *una descomposición en subconjuntos del semigrupo abeliano* S *tal que*

$$S_p \cdot S_q \subset \bigcap_{r\in i_{(p,q)}} S_r, \tag{2.31}$$

donde el producto de subconjunto $\cdot$ *es el producto definido en la ec.* (2.9). *Cuando dicha descomposición en subconjuntos* $S = \bigcup_{p\in I} S_p$ *existe, decimos que esta descomposición está en resonancia con la descomposición de* $\mathfrak{g}$ *en subespacios,* $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in I} V_p$.

La descomposición en subconjuntos resonante juega un rol importante en la extracción de subálgebras desde un álgebra S-expandida. En efecto, si definimos los subespacios de $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$ como

$$W_p = S_p \otimes V_p, \qquad p \in I, \tag{2.32}$$

entonces,

$$\mathfrak{G}_R = \bigoplus_{p\in I} W_p \tag{2.33}$$

es una subálgebra del álgebra S-expandida $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$.

Definición 10 *El álgebra* $\mathfrak{G}_R = \bigoplus_{p\in I} W_p$ *obtenida es llamada una subálgebra resonante del álgebra* S*-expandida* $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$.

De esta forma, el problema de encontrar subálgebras de $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$ se convierte en el problema de encontrar una partición resonante de S.

Es posible encontrar una expresión explicita para las constantes de estructura de la subálgebra resonante $\mathfrak{G}_R$ haciendo uso de la ec. (2.19) y de la partición resonante de S. Denotando la base de V_p por $\left\{T_{a_p}\right\}$, uno puede escribir

$$C_{(a_p,\alpha_p)\left(b_q,\beta_q\right)}^{\quad (c_r,\gamma_r)} = K_{\alpha_p\beta_q}^{\quad \gamma_r} C_{a_p b_q}^{\quad c_r} \tag{2.34}$$

con α_p, β_q, γ_r tal que $\lambda_{\alpha_p} \in S_p$, $\lambda_{\beta_q} \in S_q$, $\lambda_{\gamma_r} \in S_r$.

Notemos además que la expansión en serie de potencia de las formas de MC corresponde a alguna S-expansión resonante con algún tipo de reducción. Dicho procedimiento es estudiado con detalle en la siguiente sección.

2.3.4 Reducción resonante

A continuación, siguiendo a la Ref. [10], veremos que es posible combinar el concepto de subálgebras resonantes con la reducción tal como se muestra en el siguiente teorema,

Teorema 2 *Sea* $\mathfrak{G}_R = \bigoplus_{p\in I} S_p \otimes V_p$ *una subálgebra resonante de* $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$, *es decir, las ecs* (2.30) *y* (2.31) *son satisfechas simultáneamente. Sea además* $S_p = \hat{S}_p \cup \check{S}_p$ *una partición de los subconjuntos* $S_p \subset S$ *tal que*

$$\begin{aligned} \hat{S}_p \cap \check{S}_p &= \varnothing, && (2.35) \\ \check{S}_p \cdot \hat{S}_q &\subset \bigcap_{r\in i_{(p,q)}} \hat{S}_r. && (2.36) \end{aligned}$$

Las condiciones (2.35) *y* (2.36) *induce a su vez la descomposicón* $\mathfrak{G}_R = \check{\mathfrak{G}}_R \oplus \hat{\mathfrak{G}}_R$ *sobre la subálgebra resonante, donde*

$$\begin{aligned} \check{\mathfrak{G}}_R &= \bigoplus_{p\in I} \check{S}_p \otimes V_p, && (2.37) \\ \hat{\mathfrak{G}}_R &= \bigoplus_{p\in I} \hat{S}_p \otimes V_p. && (2.38) \end{aligned}$$

Cuando las condiciones (2.35)-(2.36) *se cumplen, entonces*

$$\left[\check{\mathfrak{G}}_R, \hat{\mathfrak{G}}_R\right] \subset \hat{\mathfrak{G}}_R, \tag{2.39}$$

y por lo tanto $\left|\check{\mathfrak{G}}_R\right|$ *corresponde a un álgebra reducida de* $\mathfrak{G}_R$.

Para la demostración del teorema es necesario considerar las descomposiciones $\check{W}_p = \check{S}_p \otimes V_p$ y $\hat{W}_p = \hat{S}_p \otimes V_p$ y hacer uso de la condición (2.36). De modo que es posible mostrar que

$$\left[\check{W}_p, \hat{W}_q\right] \subset \bigoplus_{r \in i_{(p,q)}} \hat{W}_r. \tag{2.40}$$

Luego, puesto que $\check{\mathfrak{G}}_R = \bigoplus_{p\in I} \check{W}_p$ y que $\hat{\mathfrak{G}}_R = \bigoplus_{p\in I} \hat{W}_p$, se encuentra

$$\left[\check{\mathfrak{G}}_R, \hat{\mathfrak{G}}_R\right] \subset \hat{\mathfrak{G}}_R,$$

por lo que, de acuerdo con la definición de álgebra reducida, tenemos que $\left|\check{\mathfrak{G}}_R\right|$ es un álgebra reducida de la subálgebra $\mathfrak{G}_R$.

Por otro lado, usando la ec. (2.34) es posible encontra una expresión explícita para las constantes de estructura para el álgebra reducida resonante $\left|\check{\mathfrak{G}}_R\right|$, la cual viene dada por

$$C_{(a_p,\alpha_p)(b_q,\beta_q)}^{\quad (c_r,\gamma_r)} = K_{\alpha_p\beta_q}^{\quad \gamma_r} C_{a_p b_q}^{\quad c_r}, \tag{2.41}$$

con $\alpha_p, \beta_q, \gamma_r$ tal que $\lambda_{\alpha_p} \in \check{S}_p$, $\lambda_{\beta_q} \in \check{S}_q$, $\lambda_{\gamma_r} \in \check{S}_r$.

Es importante mencionar además que la 0_S-reducción introducida anteriormente representa un caso particular del teorema, tal como se muestra en el siguiente corolario,

Corolario 1 *Sea S un semigrupo dotado de un elemento 0_S, y sea $\mathfrak{G}_R = \bigoplus_{p\in I} S_p \otimes V_p$ una subálgebra resonante de $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$, tal que para cada subconjunto S_p, $0_S \in S_p$. Entonces, la descomposición $S_p = \hat{S}_p \cup \check{S}_p$ con $\hat{S}_p = \{0_S\}$ y $\check{S}_p = S_p - \{0_S\}$ satisface las condiciones* (2.35)-(2.36) *y por lo tanto $\left|\check{\mathfrak{G}}_R\right|$ corresponde a un álgebra reducida de $\mathfrak{G}_R$, la cual será llamada álgebra 0_S-reducida de $\mathfrak{G}_R$.*

La demostración de dicho corolario es encontrada en la Ref. [12].

2.4 Tensores invariantes para álgebras S-expandida

Los tensores invariantes representan un ingrediente primordial en la construcción de teorías físicas. En efecto, dado un grupo de simetria es posible mediante los tensores invariantes, construir lagrangianos de gauge. Veremos más adelante, que dada un álgebra, las componentes no nulas de un tensor invariantes permitirán construir lagrangianos Chern-Simons, dando origines a diversas teorías.

Determinar las componentes no nulas de un tensor invariante para un álgebra dada permanece un problema no trivial. No obstante, una de las ventajas del procedimiento de la S-expansión es que nos entrega un tensor invariante para el álgebra S-expandida $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$ en términos de un tensor invariante para $\mathfrak{g}$. El siguiente teorema nos provee una poderosa herramienta para encontrar tensores invariantes,

Teorema 3 *Sea S un semigrupo abeliano, $\mathfrak{g}$ una (super)álgebra de Lie de base $\{T_A\}$, y sea $\langle T_{A_1} \ldots T_{A_n} \rangle$ un tensor invariante para $\mathfrak{g}$. Entonces, la expresión*

$$\left\langle T_{(A_1,\alpha_1)} \cdots T_{(A_n,\alpha_n)} \right\rangle = \alpha_\gamma K_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{}^{\gamma} \left\langle T_{A_1} \cdots T_{A_n} \right\rangle \tag{2.42}$$

donde los α_γ's son constantes arbitrarias y $K_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{}^{\gamma}$ es el n-selector para S, corresponde a un tensor invariante para el álgebra S-expandida $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$.

Es posible extraer un tensor invariante para cada subálgebra resonante $\mathfrak{G}_R$. En efecto, dado un tensor invariante para un álgebra, sus componentes valuadas sobre una subálgebra representan un tensor invariante para la subálgebra. Dado una descomposición resonante $S = \bigcup_{p \in I} S_p$, y denotando la base de V_p como $\left\{T_{A_p}\right\}$, las componentes $\mathfrak{G}_R$-valuada de (2.42) son dadas por

$$\left\langle T_{\left(A_{p_1},\alpha_{p_1}\right)} \cdots T_{(A_{p_n},\alpha_{p_n})} \right\rangle = \alpha_\gamma K_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{}^{\gamma} \left\langle T_{A_{p_1}} \cdots T_{A_{p_n}} \right\rangle \tag{2.43}$$

con $\lambda_{\alpha_p} \in S_p$. Estas componentes forman un tensor invariante para la subálgebra resonante $\mathfrak{G}_R = \bigoplus_{p \in I} S_p \otimes V_p$.

Por otro lado, el álgebra 0_S-reducida no es una subálgebra de modo que en general, las componentes valuadas sobre un álgebra 0_S-reducida no conducen a un tensor invariante. La solución a este problema es encontrada en la Ref. [10] y es dada por el siguiente teorema,

Teorema 4 *Sea S un semigrupo abeliano con elementos distintos a cero λ_i, $i = 0, \ldots, N$, y $\lambda_{N+1} = 0_S$. Sea $\mathfrak{g}$ una (super)álgebra de Lie de base $\{T_A\}$, y sea $\langle T_{A_1} \cdots T_{A_n} \rangle$ un tensor invariante para $\mathfrak{g}$. La expresión*

$$\left\langle T_{(A_1,i_1)} \cdots T_{(A_n,i_n)} \right\rangle = \alpha_j K_{i_1 \cdots i_n}{}^{j} \left\langle T_{A_1} \cdots T_{A_n} \right\rangle \tag{2.44}$$

donde los α_j's son constantes arbitrarias, corresponde a un tensor invariante para el álgebra 0_S-reducida obtenida de $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$.

Por último, es posible determinar las componentes de un tensor invariante valuadas sobre una subálgebra resonante 0_S-reducida de forma análoga a los casos anteriores. Para ello, consideremos un semigrupo abeliano S provisto de un elemento 0_S y $\left|\check{\mathfrak{G}}_R\right|$ un álgebra 0_S-reducida de la subálgebra resonante $\mathfrak{G}_R = \bigoplus_{p \in I} S_p \otimes V_p$. Sea además $\left\{T_{A_p}\right\}$ un generador de V_p y sea $\lambda_{i_p} \in \check{S}_p = S_p - \{0_S\}$. Luego, un tensor invariante para el álgebra 0_S-reducida de $\mathfrak{G}_R$ viene dado por

$$\left\langle T_{\left(A_{p_1},i_{p_1}\right)} \cdots T_{\left(A_{p_n},i_{p_n}\right)} \right\rangle = \alpha_j K_{i_{p_1} \cdots i_{p_n}}{}^{j} \left\langle T_{A_{p_1}} \cdots T_{A_{p_n}} \right\rangle . \tag{2.45}$$

2.5 Formulación dual del método de S-expansión

Existen notorias diferencias entre el método de expansión en serie de potencias y el procedimiento de S-expansión. El método de S-expansión está definida como la acción de un semigrupo S sobre los generadores T_A del álgebra mientras que la expansión en serie de potencias es realizada sobre las formas de Maurer-Cartan del álgebra original. Además, la S-expansión está definida sobre el álgebra $\mathfrak{g}$ sin referirse a la variedad del grupo a diferencia del método de expansión en serie de potencia el cual se basa en un reescalamiento de las coordenandas del grupo.

No obstante, es posible relacionar ambos mecanismo de expansión de álgebras mediante la formulación dual del método de S-expansión. Recordemos que para cada semigrupo abeliano S y álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, el producto $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$ es también un álgebra de Lie con el siguiente bracket de Lie

$$\left[T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)}\right] = K_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} C_{AB}^{\ \ \ C} T_{(C,\gamma)}. \tag{2.46}$$

Luego, siguiendo a la Ref. [11] es posible considerar el álgebra S-expandida $\mathfrak{G}$ desde el punto de vista dual de las formas de Maurer-Cartan.

Teorema 5 *Sea $S = \{\lambda_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, N\}$ un semigrupo finito abeliano y se ω^A las formas de MC para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Entonces, las formas de MC $\omega^{(A,\alpha)}$ asociadas con el álgebra de Lie S-expandida $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$ están relacionadas a ω^A por*

$$\omega^A = \lambda_\alpha \omega^{(A,\alpha)}. \tag{2.47}$$

Por definición, estas formas satisfacen las ecuaciones de MC

$$d\omega^{(C,\gamma)} + \frac{1}{2} K_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} C_{AB}^{\ \ \ C} \omega^{(A,\alpha)} \omega^{(B,\beta)} = 0. \tag{2.48}$$

La manera más simple de probar el teorema consiste en multiplicar la ec. (2.48) por λ_γ y luego hacer uso de la definición del 2-selector $K_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$.

Es posible además generalizar el teorema al caso particular de la 0_S-reducción, proceso que fue introducido en la sección anterior y que consiste en extraer un álgebra más pequeña desde un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. En efecto, consideremos $S = \{\lambda_i,\ i = 1, \ldots, N\} \cup \{\lambda_{N+1} = 0_S\}$ un semigrupo abeliano provisto de un elemento 0_S. Las formas de MC expandidas $\omega^{(A,\alpha)}$ vienen dadas por

$$\omega^A = \lambda_i \omega^{(A,i)} + 0_S \tilde{\omega}^A, \tag{2.49}$$

donde $\tilde{\omega}^A = \omega^{(A,N+1)}$. Se puede mostrar que las formas de MC $\omega^{(A,i)}$ corresponden a un álgebra de Lie 0_S-reducida, de modo que $K_{ij}^{\ \ k} C_{AB}^{\ \ \ C}$ son las constantes de estructuras para el álgebra S-expandida 0_S-reducida, la cual es generada por $T_{(A,i)}$,

$$\left[T_{(A,i)}, T_{(B,j)}\right] = K_{ij}^{\ \ k} C_{AB}^{\ \ \ C} T_{(C,k)}. \tag{2.50}$$

Teorema 6 *Sea* $S = \{\lambda_i,\ i = 1, \ldots, N\} \cup \{\lambda_{N+1} = 0_S\}$ *un semigrupo abeliano provisto de un elemento* 0_S *y sea* $\left\{\omega^{(A,i)},\ i = 1, \ldots, N\right\} \cup \left\{\omega^{(A,N+1)} = \tilde{\omega}^A\right\}$ *las formas de MC para el álgebra* S*-expandida* $\mathfrak{G} = S \otimes \mathfrak{g}$. *Entonces,* $\left\{\omega^{(A,i)},\ i = 1, \ldots, N\right\}$ *son las formas de MC para el álgebra* S*-expandida* 0_S*-reducida.*

La demostración del teorema es encontrada en las Refs. [11, 14], al igual que su generalización al caso de álgebras diferenciales libres gaugeadas.

Capítulo 3

La acción de Einstein-Hilbert

3.1 Introducción

Las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

son formuladas a partir de un principio variacional

$$S_g = \int \mathcal{L}\ d^4x = \int \sqrt{-g}L_g\ d^4x. \tag{3.2}$$

La determinación del escalar L_g es obtenida considerando el hecho que las ecuaciones de campo de Einstein contienen derivadas de la métrica solo hasta segundo orden. Debido a que estas deben ser obtenidas variando la acción S_g, se tiene que L_g debe contener solo la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus primeras derivadas a través de la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}$. No obstante, no es posible construir un escalar invariante mediante sólo las cantidades $g_{\mu\nu}$ y $\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}$.

El problema fue elegantemente solucionado en 1915 por D. Hilbert. Para ello, Hilbert considero L_g como un escalar invariante que además de contener a $g_{\mu\nu}$ y sus primeras derivadas, contiene segundas derivadas de la métrica. En efecto, si L_g es lineal en las segundas derivadas de la métrica entonces, haciendo uso del teorema de Gauss, es posible separar el invariante L_g en una integral de volumen que no contiene segundas derivadas de $g_{\mu\nu}$ y en una integral de superficie.

$$S_g = \int \sqrt{-g}L_g\ d^4x = \int \sqrt{-g}L_g'\ d^4x + \oint \sqrt{-g}W_g{}^{\mu}d\Sigma_{\mu}, \tag{3.3}$$

luego

$$\delta S_g = \delta \int \sqrt{-g} L_g \; d^4x = \delta \int \sqrt{-g} L'_g \; d^4x. \tag{3.4}$$

De este modo, L_g debe contener además de $g_{\mu\nu}$, sus primeras derivadas a través de $\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}$ y sus segundas derivadas en forma lineal a través del tensor de curvatura de Riemann $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho}$. En 4 dimensiones existen 14 escalares invariantes algebraicamente independientes que son construidos a partir de los coeficientes métricos, sus primeras y segundas derivadas. Sin embargo, de los 14 invariantes solo uno es lineal en la segunda derivada de los $g_{\mu\nu}$ y consiste en la curvatura escalar R. Luego, tenemos que

$$S_g = \int \sqrt{-g} L_g \; d^4x = \int \sqrt{-g} R \; d^4x. \tag{3.5}$$

Al variar la acción

$$\delta S_g = \delta \int \sqrt{-g} R \; d^4x = 0 \tag{3.6}$$

obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.7}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y satisface las propiedades:

- $G_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico: $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$,
- $G_{\mu\nu}$ depende de la métrica $g_{\mu\nu}$, de sus primeras derivadas y de sus segundas derivadas,
- $G_{\mu\nu}$ tiene divergencia nula: $G^{\mu\nu}{}_{//\nu} = 0$,
- $G_{\mu\nu}$ es lineal en las segundas derivadas de $g_{\mu\nu}$.

3.2 Relatividad General en el formalismo de Cartan

3.2.1 Vierbein y conexión de spin

Las formas diferenciales representan una herramienta de gran utilidad al momento de estudiar teorías de la gravedad en diversas dimensiones. Antes de estudiar la acción de

Einstein-Hilbert en dicho formalismo es necesario introducir ciertos conceptos útiles para el desarrollo de la tesis.

En el contexto del formalismo de Cartan, es conveniente describir Relatividad General en términos de un vierbein $e^a_{\ i}$ y de una conexión de spin $\omega^a_{\ bi}$. Para entender geométricamente estos objetos requerimos de una variedad diferenciable M de 4 dimensiones conocido como espacio-tiempo. En cada punto P de la variedad es posible definir un espacio tangente formado por todos los vectores tangentes definido en dicho punto. Consideremos un sistema coordenado x^μ definido sobre alguna región de la variedad M que contenga a P. Luego, una base para el espacio tangente en P vendrá dado por los vectores $\partial_i = \partial_\mu \left(P\right)$ que corresponden a las derivadas direccionales a lo largo de la curva de parámetro $x^i = x^\mu \left(P\right)$. Dicha base es conocida como base coordenanda.

No obstante, esta base no es, en general, ortonormal sino que más bien

$$\partial_i \cdot \partial_k = g_{ik} \tag{3.8}$$

donde $g_{ik} = g_{\mu\nu} \left(P\right)$ corresponde a las componentes del tensor métrico en la base coordenada en el punto P. Sin embargo, mediante un cambio de base

$$e_a = e_a^{\ i} \partial_i \tag{3.9}$$

es posible definir una base ortonormal tal que

$$e_a \cdot e_b = e_a^{\ i} e_b^{\ k} g_{ik} = \eta_{ab} \tag{3.10}$$

donde η_{ab} corresponde a la métrica de Minkowski.

Existe además la matriz de cambio de base inversa $e_i^{\ a}$ tal que

$$\partial_i = e_i^{\ a} e_a \tag{3.11}$$

la cual satisface

$$e^a_{\ i} e_b^{\ i} = \delta^a_b, \qquad e^a_{\ k} e_a^{\ i} = \delta^i_k. \tag{3.12}$$

Esta matriz a su vez permite relacionar la métrica de Minkowski con la métrica g_{ik},

$$g_{ik} = e^a_{\ i} e^b_{\ k} \eta_{ab}. \tag{3.13}$$

Esta ecuación nos dice que una vez conocidas las componentes de la matriz cambio de base $e^a_{\ i}$ resulta directo determinar la métrica del espacio-tiempo. Por lo tanto, esta matriz conocida como vierbein resulta ser una interesante alternativa para describir una teoría de la gravedad. No obstante, la afirmación recíproca no se cumple. En efecto, dado un tensor métrico g_{ik}, existen varios $e^a_{\ i}$'s que satisfacen (3.13), los cuales vienen dados por

$$e^a_{\ i} \rightarrow e^{\bar{a}}_{\ i} = \Lambda^{\bar{a}}_{\ b} e^b_{\ i}. \tag{3.14}$$

De esta forma, la ec. (3.13) viene dada por

$$e^{\bar{a}}_{\ i} e^{\bar{b}}_{\ k} \eta_{ab} = e^c_{\ i} e^d_{\ k} \left(\Lambda^{\bar{a}}_{\ c} \Lambda^{\bar{b}}_{\ d} \eta_{ab} \right), \tag{3.15}$$

donde vemos que la ec. (3.13) se satisface si se cumple la condición

$$\Lambda^{\bar{a}}_{\ c} \Lambda^{\bar{b}}_{\ d} \eta_{ab} = \eta_{cd}. \tag{3.16}$$

Luego, tenemos que si las matrices de rotación $\Lambda^a_{\ b}$ satisfacen la condición (3.16) entonces la métrica g_{ik} es invariante bajo las rotaciones (3.14).

Las matrices Λ que satisfacen (3.16) forman el grupo de Lorentz, el cual consiste en el grupo de rotaciones del espacio de Minkowski. Los elementos de dichos grupos son denominados transformaciones de Lorentz. Luego, de la ec. (3.14) podemos decir que el vierbein se comporta como un vector bajo transformaciones locales de Lorentz.

No obstante, la derivada exterior del vierbein de^a no transforma como tensor bajo transformaciones de Lorentz. Para resolver este problema es necesario introducir la derivada covariante exterior D tal que De^a transforme covariantemente bajo transformaciones locales de Lorentz, es decir

$$De^a \rightarrow De^{\bar{a}} = \Lambda^{\bar{a}}_{\ b} De^b. \tag{3.17}$$

De^a viene dado por

$$De^a \equiv de^a + \omega^a_{\ b} e^b, \tag{3.18}$$

donde ω^{ab} es conocida como la 1-forma conexión de spin. Notemos que es posible mostrar que, con el objetivo de satisfacer la ec. (3.17), la ley de transformación para la conexión ω^{ab} es dada por

$$\omega^{\bar{a}}_{\ \bar{b}} = \Lambda^d_{\ \bar{b}} \Lambda^{\bar{a}}_{\ c} \omega^c_{\ d} - \Lambda^c_{\ \bar{b}} d\Lambda^{\bar{a}}_{\ c}. \tag{3.19}$$

A diferencia de la derivada exterior d, es posible definir nuevamente la derivada covariante exterior sobre De^a,

$$DDe^a = d\left(De^a\right) + \omega^a{}_c De^c = \left(d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \omega^c{}_b\right) e^b. \tag{3.20}$$

Definiendo

$$T^a \equiv De^a, \tag{3.21}$$

$$R^a_{\ b} \equiv d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \omega^c{}_b, \tag{3.22}$$

es posible reescribir (3.20) como

$$DT^a = R^a_{\ b} e^b. \tag{3.23}$$

Las ecuaciones (3.21) - (3.22) son las llamadas ecuaciones de estructura debido a que ellas describen la estructura geométrica de la variedad. Las 2-formas T^a y R^{ab} son conocidas como la 2-forma torsión y la 2-forma curvatura respectivamente. Es trivial ver que dichas formas deben satisfacer la primera y segunda identidad de Bianchi,

$$DT^a = R^a_{\ b} e^b, \tag{3.24}$$

$$DR^a_{\ b} = 0. \tag{3.25}$$

La identificación de la torsión y de la curvatura no es aleatoria, sino que son relacionadas a los tensores de torsión y de curvatura de Riemmann mediante

$$T^a = \frac{1}{2} T^a_{\ ik} dx^i \wedge dx^k, \tag{3.26}$$

$$R^a_{\ b} = \frac{1}{2} R^a{}_{bik} dx^i \wedge dx^k, \tag{3.27}$$

donde

$$T^a_{\ ik} = \partial_i e^a{}_k - \partial_k e^a{}_i + \omega^a{}_{bi} e^b{}_k - \omega^a{}_{bk} e^b{}_i, \tag{3.28}$$

$$R^a{}_{bik} = \partial_i \omega^a{}_{bk} - \partial_k \omega^a{}_{bi} + \omega^a{}_{ci} \omega^c{}_{bk} - \omega^a{}_{ck} \omega^c{}_{bi}. \tag{3.29}$$

Luego la relación con los tensores de torsión y curvatura

$$T^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki}, \tag{3.30}$$

$$R^m{}_{nik} = \partial_i \Gamma^m_{kn} - \partial_k \Gamma^m_{in} + \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{kn} - \Gamma^m_{kl} \Gamma^l_{in}. \tag{3.31}$$

es posible haciendo

$$\Gamma^l_{ik} = e_a{}^l \left(\partial_i e^a{}_k + \omega^a{}_{bi} e^b{}_k\right). \tag{3.32}$$

3.2.2 Acción de Einstein-Hilbert con formas diferenciales

En el contexto del formalismo de Cartan, la acción de Einstein-Hilbert (EH) en 4 dimensiones es escrita en término del vierbein e^a y de la conexión de spin $\omega^a_{\ b}$ como

$$S_{EH}^{(4)} = \int \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d, \tag{3.33}$$

donde la conexión de spin aparece a través de la 2-forma curvatura R^{ab}.

Para comprobar que dicha acción corresponde efectivamente a la acción de Einstein-Hilbert escrita en lenguaje tensorial (3.5) es necesario escribir explícitamente las bases de formas diferenciales en el vierbein. Así, expandiendo primero R^{ab} en la base de 2-formas $\{e^i \wedge e^j\}$, se obtiene

$$\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d = \varepsilon_{abcd} R^{ab}{}_{ij} e^i e^j e^c e^d.$$

Luego, expandiendo ahora en la base $\{dx^\mu\}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d &= \varepsilon_{abcd} R^{ab}{}_{ij} e^i{}_\mu e^j{}_\nu e^c{}_\rho e^d{}_\sigma \; dx^\mu dx^\nu dx^\rho dx^\sigma \\
&= \varepsilon_{abcd} R^{ab}{}_{ij} e^i{}_\mu e^j{}_\nu e^c{}_\rho e^d{}_\sigma \; \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x,
\end{aligned}$$

donde hemos usado el conocido resultado

$$dx^\mu dx^\nu dx^\rho dx^\sigma = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x.$$

Por otro lado, notemos que

$$\varepsilon^{i_1 \cdots i_n} = e^{i_1}{}_{\mu_1} \cdots e^{i_n}{}_{\mu_n} \varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n} \left(\det \; e\right)^{-1},$$

de modo que

$$e^i{}_\mu e^j{}_\nu e^c{}_\rho e^d{}_\sigma \; \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{ijcd} \left(\det \; e\right).$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d &= \varepsilon_{abcd} R^{ab}{}_{ij} \varepsilon^{ijcd} \left(\det \; e\right) \; d^4x \\
&= \delta^{ijcd}_{abcd} R^{ab}{}_{ij} \left(\det \; e\right) \; d^4x \\
&= 2\delta^{ij}_{ab} R^{ab}{}_{ij} \left(\det \; e\right) \; d^4x \\
&= 4R^{ij}_{ij} \left(\det \; e\right) \; d^4x,
\end{aligned}$$

y puesto que $R_{ij}^{ij} = R$ y $\det e = \sqrt{-g}$ podemos finalmente escribir

$$\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d = 4\sqrt{-g} R \ d^4 x.$$

Es decir,

$$\int \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d = 4 \int \sqrt{-g} R \ d^4 x. \tag{3.34}$$

De esta manera, hemos mostrado la equivalencia entre la acción de Einstein-Hilbert escrita con formas diferenciales (3.33) y aquella escrita en el lenguaje tensorial (3.5).

A lo largo de la tesis solo haremos uso de las formas diferenciales ya que, además de facilitar los calculos, permitirá trabajar en dimensiones mayores que cuatro de forma abordable y comprensible.

3.2.3 Ecuaciones de movimiento en el formalismo de Cartan

Para obtener las ecuaciones de movimiento debemos realizar la variación de la acción asumiendo que δe^a y $\delta \omega^{ab}$ son variaciones infinitesimales, así se tiene que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \varepsilon_{abcd} \left(\delta R^{ab} e^c e^d + R^{ab} \delta e^c e^d + R^{ab} e^c \delta e^d \right) \\ &= \int \varepsilon_{abcd} \left(\delta R^{ab} e^c e^d + 2 R^{ab} e^c \delta e^d \right). \end{aligned} \tag{3.35}$$

donde hemos hecho uso de la propiedad antisimétrica del levi-civita $\varepsilon_{abcd} = -\varepsilon_{bacd}$. A continuación, requerimos expresar δR^{ab} en función de $\delta \omega^{ab}$. De la definición de la 2-forma curvatura podemos escribir

$$\begin{aligned} \delta R^{ab} &= d\delta\omega^{ab} + \delta\omega^{a}{}_{c}\omega^{cb} + \omega^{a}{}_{c}\delta\omega^{cb} \\ &= d\delta\omega^{ab} + \omega^{b}{}_{c}\delta\omega^{ac} + \omega^{a}{}_{c}\delta\omega^{cb} \\ &= D\left(\delta\omega^{ab}\right). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Luego reemplazando (3.36) en (3.35) encontramos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \varepsilon_{abcd} \left(D\left(\delta\omega^{ab}\right) e^c e^d + 2R^{ab} e^c \delta e^d \right), \\ &= \int \varepsilon_{abcd} \left(D\left(\delta\omega^{ab} e^c e^d\right) + \delta\omega^{ab} D e^c e^d - \delta\omega^{ab} e^c D e^d + 2R^{ab} e^c \delta e^d \right), \\ &= \int d\left(\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab} e^c e^d\right) + 2\int \varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab} T^c e^d + 2\int \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c \delta e^d. \end{aligned}$$

El primer término corresponde a un término de borde y puede depreciarse exigiendo que la variación de la conexión de spin ω^{ab} se anule en el borde del espacio-tiempo. Los dos otros términos son independientes y entregan las condiciones necesarias para la anulación de δS. Es decir, $\delta S = 0$ requiere que se satisfagan las siguientes ecuaciones de movimiento en el vacío:

$$\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^{c} = 0, \tag{3.37}$$

$$\varepsilon_{abcd} T^{c} e^{d} = 0. \tag{3.38}$$

La primera ecuación es en realidad equivalente a las ecuaciones de campo de Einstein, mientras que la segunda expresa la anulación de la torsión.

3.3 Invariancia de la acción de Einstein-Hilbert

3.3.1 Grupo de Poincaré

Uno de los ejemplos más simple de una teoría de gauge para la gravedad es obtenida considerando al grupo de Poincaré. Los generadores de dicho grupo vienen dados por

$$T_A = (P_a, J_{ab})$$

donde P_a corresponde a los generadores de traslaciones y $J_{ab} = -J_{ba}$ son los generadores de las rotaciones de Lorentz. Los generadores del grupo de Poincaré satisfacen el álgebra de Lie:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{ca} J_{bd} + \eta_{db} J_{ca} - \eta_{da} J_{cb}, \tag{3.39}$$

$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b, \tag{3.40}$$

$$[P_a, P_b] = 0. \tag{3.41}$$

En este caso, la teoría tiene dos campos de gauge, la conexión de spin ω^{ab} y el vielbein e^a. La observación fundamental es que $\left\{ e^a, \omega^{ab} \right\}$, considerado como una entidad, constituye un multiplete en la representación adjunta del grupo de Poincaré. Esta observación es clave ya que nos permite escribir la 1-forma conexión como

$$A = A^A T_A = \frac{1}{l} e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab}. \tag{3.42}$$

La introducción del parámetro de longitud l es necesaria con el fin de interpretar el vielbein como el campo de gauge asociado al generador de traslación P_a. En efecto, uno siempre puede elejir los generadores de un álgebra de Lie T_A adimensionales de modo que la 1-forma conexión A también debe ser adimensional. Sin embargo, el vielbein $e^a = e^a_{\ i} dx^i$ debe tener dimensión de longitud al ser relacionado con la métrica del espacio tiempo g_{ik} a través de la ecuación $g_{ik} = e^a_{\ i} e^b_{\ k} \eta_{ab}$. De modo que el "verdadero" campo de gauge debe ser de la forma e^a/l, donde l es un parámetro de longitud.

Análogamente es posible escribir la 2-forma intensidad de campo asociada a la 1-forma conexión A como

$$F \equiv dA + A^2, \tag{3.43}$$

$$F = F^A T_A = \frac{1}{l} T^a P_a + \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab}. \tag{3.44}$$

Es importante notar que en este contexto, la torsión es interpretado como la intensidad de campo relacionada a las traslaciones y que la curvatura está relacionada con la intensidad de campo de las rotaciones de Lorentz. Notemos además que las expresiones explicitas para la torsión y la curvatura dadas en términos de los potenciales de gauge son obtenidas como una consecuencia directa de las relaciones de conmutación del álgebra de Poincaré. Este formalismo muestra explicitamente, la estrecha relación existente entre la estructura geométrica de la variedad y la estructura algebraica del grupo de simetría fundamental.

A continuación, si deseamos saber como transforma la 1-forma conexión A bajo el grupo de Poincaré, es necesario recordar que la ley de transformación depende de como sea exponenciado el grupo. Sea la exponenciación

$$U = e^{-\lambda} = e^{-\lambda^A T_A}. \tag{3.45}$$

Sabemos que la invariancia de la teoría pasa por definir una derivada covariante dada por

$$D = d + A$$

donde A transforma bajo el grupo como

$$A \to A' = UAU^{-1} + UdU^{-1} \tag{3.46}$$

Luego haciendo uso de la ec. (3.45) es posible mostrar que

$$A' = A + d\lambda + [A, \lambda],$$

de modo que la 1-forma conexión transforma como

$$\delta A = D\lambda. \tag{3.47}$$

Consideremos ahora el parámetro de la transformación, el cual se puede escribir como

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda^A T_A &= \frac{1}{l}\lambda^a P_a + \frac{1}{2}\lambda^{ab} J_{ab} \\ &\equiv \frac{1}{l}\rho^a P_a + \frac{1}{2}\kappa^{ab} J_{ab}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Luego, si introducimos (3.48) en (3.47) encontramos

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{1}{l}\left(d\rho^a + \omega^a_{\ b}\rho^b + e_c\kappa^{ca}\right) P_a + \frac{1}{2}\left(d\kappa^{ab} + \omega^{ac}\kappa_c^{\ b} + \omega^{bc}\kappa^a_{\ c}\right) J_{ab} \\ &= \frac{1}{l}\left(D\rho^a + e_c\kappa^{ca}\right) P_a + \frac{1}{2} D\kappa^{ab} J_{ab}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Puesto que

$$\delta A = \frac{1}{l}\delta e^a P_a + \frac{1}{2}\delta\omega^{ab} J_{ab},$$

tenemos que las componentes e^a y ω^{ab} de la conexión tienen las siguientes leyes de transformación

$$\delta e^a = D\rho^a + e_c\kappa^{ca}, \tag{3.50}$$

$$\delta\omega^{ab} = d\kappa^{ab} + \omega^{ac}\kappa_c^{\ b} + \omega^{bc}\kappa^a_{\ c}. \tag{3.51}$$

De manera que bajo traslaciones locales de Poincaré se tiene que

$$\delta e^a = D\rho^a, \tag{3.52}$$

$$\delta\omega^{ab} = 0, \tag{3.53}$$

y bajo rotaciones de Lorentz

$$\begin{aligned}
\delta e^{a} &= e^{c}\kappa_{c}^{\ a}, & (3.54)\\
\delta\omega^{ab} &= D\kappa^{ab}. & (3.55)
\end{aligned}$$

El paso siguiente consiste en estudiar la invariancia de la acción de Einstein-Hilbert bajo las leyes de transformación encontradas para el grupo de Poincaré. La invariancia de una acción gravitacional bajo algún grupo de simetría permitiría describir gravedad como una teoría de gauge. No obstante, veremos a continuación que la acción de EH 4-dimensional no es invariante bajo traslaciones locales de Poincaré.

3.3.2 Invariancia de la acción de EH bajo el grupo de Poincaré

La acción de Einstein-Hilbert en $D = 4$ dimensiones

$$S = \int \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^{e} e^{d} \tag{3.56}$$

es, por contrucción, invariante bajo transformaciones generales de coordenadas y bajo rotaciones de Lorentz. Sin embargo, mostraremos a continuación que esta acción no es invariante bajo traslaciones locales de Poincaré. Consideremos en efecto la variación de la acción,

$$\begin{aligned}
\delta_{tlp} S &= \delta \int \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^{c} e^{d}\\
&= \int d\left(\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab} e^{c} e^{d}\right) + 2\int \varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab} T^{c} e^{d} + 2\int \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^{c}\delta e^{d}.
\end{aligned}$$

Luego, puesto que bajo traslaciones locales de poincaré, el vierbein y la conexión de spin transforman como

$$\begin{aligned}
\delta e^{a} &= D\rho^{a},\\
\delta\omega^{ab} &= 0,
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta_{tlp} S &= 2\int \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^{c} D\rho^{d}\\
&= -2\int d\left(\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^{c}\rho^{d}\right) + 2\int \varepsilon_{abcd} R^{ab} T^{c}\rho^{d},
\end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la identidad de bianchi $DR^{ab} = 0$. Luego, salvo términos de borde, tenemos que

$$\delta_{tlp}S = 2\int \varepsilon_{abcd}R^{ab}T^{c}\rho^{d} \neq 0. \tag{3.57}$$

De modo que la acción de EH será invariante bajo el grupo de Poincaré solo si imponemos la anulación de la torsión. No obstante, el constraint $T^a = 0$ no es invariante bajo traslaciones locales de Poincaré. En efecto es posible mostrar que

$$\begin{aligned}
\delta T^a &= \delta\left(De^a\right) = D\left(\delta e^a\right) = DD\rho^a \\
&= R^{ab}\rho_b \neq 0.
\end{aligned}$$

La no invariancia de la acción de EH 4-dimensional parece extraña debido a que usualmente se cree que una traslación es una transformación de coordenadas. En realidad, una transformación de coordenadas corresponde a una derivada de Lie de modo que las traslaciones de gauge son completamente distintas de las transformaciones generales de coordenadas. No obstante, en el contexto del formalismo de segundo orden, si imponemos la condición $T^a = 0$, entonces la traslación de gauge es tratada como una transformación general de coordenadas. En dicho caso, la componente ω^{ab} de la conexión es ahora un campo dependiente.

Por último, es interesante mencionar que, al considerar la acción de Einstein-Hilbert en $D = 3$ dimensiones, la situación es radicalmente distinta. En efecto, bajo traslaciones locales de Poincaré, se tiene que

$$\begin{aligned}
\delta_{tlp}S_{EH}^{(3)} &= \delta\int \varepsilon_{abc}R^{ab}e^{c}, \\
&= \int \varepsilon_{abc}\left(\delta R^{ab}\right)e^{c} + \int \varepsilon_{abc}R^{ab}\delta e^{c}, \\
&= \int \varepsilon_{abc}d\left(\delta\omega^{ab}e^{c}\right) - \int \varepsilon_{abc}\delta\omega^{ab}De^{c} + \int \varepsilon_{abc}R^{ab}\delta e^{c} \\
&= \int \varepsilon_{abc}R^{ab}D\rho^{c}
\end{aligned}$$

lo cual se puede rescribir como

$$\delta_{tlp}S_{EH}^{(3)} = \int \varepsilon_{abc}d\left(R^{ab}\rho^{c}\right) + \int \varepsilon_{abc}DR^{ab}\rho^{c}.$$

Luego, salvo un término de borde y haciendo uso de la identidad de Bianchi, se muestra finalmente la invariancia de la acción 3-dimensional bajo traslaciones locales de Poincaré,

$$\delta_{tlp} S_{EH}^{(3)} = 0.$$

Puesto que dicha acción es, por construcción, invariante bajo rotaciones de Lorentz se tiene que en 3 dimensiones es posible escribir una acción para Gravedad invariante bajo el grupo de Poincaré. Es importante mencionar además que dicha invariancia se reproduce en todas las dimensiones impares, las cuales serán estudiadas más adelante dentro del contexto de las teorías Chern-Simons de la Gravedad.

Capítulo 4

Teoría de Lanczos-Lovelock

4.1 Introducción

Nuestra percepción de la "realidad" nos ha hecho pensar durante mucho tiempo que el espacio está provisto de tres dimensiones. Todos nuestros sentidos nos limitan a definir movimientos en algunas de estas tres dimensiones. No obstante, a lo largo de la historia varios científicos comenzaron a cuestionar la real dimensionalidad del espacio. Con el surgimiento de la Relatividad Especial y la genialidad de Minkowski nace el espacio-tiempo como una entidad única de cuatro dimensiones que hoy conocemos como Espacio-tiempo de Minkowski.

A principio del siglo XX, Kaluza y Klein propusieron un espacio-tiempo de cinco dimensiones con el fin de unificar gravedad con electromagnetismo. En la actualidad, la posibilidad que el espacio-tiempo posea más de cuatro dimensiones es una suposición aceptada en física de altas energías. En efecto, las actuales teorías de unificación contemplan espacio-tiempo de dimensión mucho más alta para describir las cuatros interacciones en una única teoría. En especial, la teoría de supergravedad contempla un espacio-tiempo de 11 dimensiones el cual consiste en una teoría de campo que combina elegantemente supersimetría y Relatividad General [15].

Es necesario entonces estudiar la generalización de Relatividad General a dimensiones más altas. Una de las vías posibles fue propuesta a través de la acción de Lanczos-Lovelock

[1, 2, 3, 4] la cual describe la dinámica de la gravitación en términos de los mismos grados de libertad que la teoría de Einstein.

4.2 Lagrangiano de Lanczos-Lovelock

El lagragiano más general para gravedad en D dimensiones construido sobre los mismos principios que Relatividad General, a saber covariancia general y ecuaciones de segundo orden para la métrica, es dado por un polinomio de grado $[D/2]$ en la curvatura conocido como lagrangiano de Lanczos-Lovelock. La teoría de Lanczos-Lovelock (LL) se refiere de hecho a una familia parametrizada por un conjunto de coeficientes reales α_p, $p = 0, 1, \cdots, [D/2]$, los cuales no son fijados desde primeros principios. La acción de LL es escrita en términos de la curvatura de Riemann $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^{a}{}_{c}\omega^{cb}$ y del vielbein e^a [1, 2, 3, 4] como

$$S = \int \sum_{p=0}^{[D/2]} \alpha_p L^{(p)}, \tag{4.1}$$

donde $L^{(p)}$ es dado por

$$L^{(p)} = \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \cdots e^{a_D}. \tag{4.2}$$

Los dos primeros términos en (4.1) corresponden a la acción de Einstein-Hilbert. A pesar que Relatividad General está contenida en la acción de Lanczos-Lovelock como un caso particular, las teorías de mayor potencia en la curvatura son dinámicamente muy distinta de Einstein-Hilbert, cuya soluciones clásicas no están relacionadas pertuvativamente a aquellas de la teoría de Einstein. La grán cantidad de constantes α_p en la acción de LL contrasta con las constantes de la teoría General de la Relatividad.

Una vía alternativa para obtener el lagrangiano de LL es exigir que el lagrangiano sea la D-forma más general invariante bajo rotaciones locales de Lorentz construida a partir del vielbein, la conexión de spin y sus derivadas exteriores sin hacer uso del dual de Hodge. Estas condiciones asegurán la invariancia bao transformaciones generales de coordenadas y permiten elegir libremente la base ortonormal local en el espacio tangente. Además, la ausencia del dual de Hodge garantiza que los campos ω^{ab} y e^a que extremizan la acción obedecen ecuaciones de primer orden.

4.3 El problema de los coeficientes

Siguiendo a R. Troncoso y J. Zanelli en la Ref. [16] es posible fijar los α_p's de acuerdo al criterio que las condiciones de integrabilidad para las ecuaciones de campo no deberían imponer constraints algebraicos adicionales sobre los tensores curvatura y torsión. De este modo, los campos alcanzan el número máximo de grados de libertad permitido por la dimensión del espacio-tiempo.

Las correspondientes ecuaciones de campo obtenidas variando con respecto a los campos expandidos e^a y ω^{ab} vienen dados por:

$$\varepsilon_a = \sum_{p=0}^{[(D-1)/2]} \alpha_p \left(D-2p\right) \varepsilon_a^p = 0 \tag{4.3}$$

$$\varepsilon_{ab} = \sum_{p=1}^{[(D-1)/2]} \alpha_p p \left(D-2p\right) \varepsilon_{ab}^p = 0 \tag{4.4}$$

donde

$$\varepsilon_a^p : = \varepsilon_{ab_1\cdots b_{D-1}} R^{b_1b_2} \cdots R^{b_{2p-1}b_{2p}} e^{b_{2p+1}} \cdots e^{b_{D-1}} \tag{4.5}$$

$$\varepsilon_{ab}^p : = \varepsilon_{aba_3\cdots a_D} R^{a_3a_4} \cdots R^{a_{2p-1}a_{2p}} T^{a_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \cdots e^{a_D}. \tag{4.6}$$

Aqui $T^a = De^a$ es la 2-forma torsión. Notemos que si existiera una relación algebraica entre las formas ε_a y ε_{ab} entonces las ecuaciones no serían independientes y tendríamos que los campos e^a y ω^{ab} estarían relacionados. Esto implicaría que algunas de las componentes de la torsión se anularán, congelando así algunos de los grados de libertad de la teoría.

Por otro lado, usando la identidad de Bianchi, a saber $DR^{ab} = 0$, se tiene que

$$D\varepsilon_a^p = \left(D-1-2p\right) \varepsilon_{ab_1\cdots b_{D-1}} R^{b_1b_2} \cdots R^{b_{2p-1}b_{2p}} T^{b_{2p+1}} e^{b_{2p+2}} \cdots e^{a_{D-1}}. \tag{4.7}$$

Por otro lado podemos escribir

$$e^b \varepsilon_{ba}^p = \varepsilon_{aa_1 \cdots a_{D-2}} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2p-3} a_{2p-2}} T^{a_{2p-1}} e^{a_{2p}} \cdots e^{a_{D-2}}. \tag{4.8}$$

de donde

$$e^b \varepsilon_{ba}^{p+1} = \varepsilon_{aa_1 \cdots a_{D-1}} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2p-1} a_{2p}} T^{a_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \cdots e^{a_{D-1}}. \tag{4.9}$$

Luego, comparando las ecuaciones (4.7) y (4.9) se tiene

$$D\varepsilon_a^p = (D - 1 - 2p)\, e^b \varepsilon_{ba}^{p+1}$$

para $0 \leq p \leq [(D-1)/2]$. Esto significa que

$$D\varepsilon_a = \sum_{p=0}^{[(D-1)/2]} \alpha_p (D - 2p)(D - 1 - 2p)\, e^b \varepsilon_{ba}^{p+1}. \tag{4.10}$$

llamando $p' = p + 1$ se tiene que

$$D\varepsilon_a = \sum_{p'=0}^{[(D+1)/2]} \alpha_{p'-1} (D - 2p' + 2)(D - 2p' + 1)\, e^b \varepsilon_{ba}^{p'} \tag{4.11}$$

lo cual se puede rescribir como

$$D\varepsilon_a = \sum_{p=1}^{[(D+1)/2]} \alpha_{p-1} (D - 2p + 2)(D - 2p + 1)\, e^b \varepsilon_{ba}^{p}. \tag{4.12}$$

Dicha ecuación debe ser nula por consistencia con la ecuación $\varepsilon_a = 0$. Además multiplicando ε_{ba} con e^b encontramos

$$e^b \varepsilon_{ba} = \sum_{p=1}^{[(D-1)/2]} \alpha_p p (D - 2p)\, e^b \varepsilon_{ba}^p \tag{4.13}$$

la cual se anula por consistencia con la ecuación $\varepsilon_{ab} = 0$.

En general existen diferentes maneras de escoger los coeficientes α_p's los cuales en general corresponden a diferente teorías con diferente número de grados de libertad. Es posible elejir los α_p's de tal manera que ε_ay ε_{ab} sean independientes, o que estos tengan el máximo número de componentes independientes.

Veremos a continuación que existe una elección muy especial de los coeficientes α_p's que ocurre sólo en dimensiones impares y para el cual no hay constraints adicionales. En dimensiones pares existe un tratamiento distinto debido a que las ecuaciones (4.12) y (4.13) poseen un número diferente de términos.

4.3.1 Dimensiones impares

En dimensiones impares, las ecuaciones (4.12) y (4.13) tienen el mismo número. Esto se debe a que el último término de la ec. (4.12) se anula para $p = (D+1)/2 = n$. Luego para $D = 2n-1$, la ec. (4.12) toma la forma

$$D\varepsilon_a = \sum_{p=1}^{[(D-1)/2]} \alpha_{p-1}\,(D-2p+2)\,(D-2p+1)\,e^b\varepsilon_{ba}^p. \tag{4.14}$$

De modo que estas ecuaciones no imponen ningún constraint algebraico adicional sobre R^{ab} y T^a. De modo que las dos series $D\varepsilon_a$ y $e^b\varepsilon_{ba}$ deben ser proporcionales término a término:

$$\alpha_p p\,(D-2p)\,e^b\varepsilon_{ba}^p = \gamma\alpha_{p-1}\,(D-2p+2)\,(D-2p+1)\,e^b\varepsilon_{ba}^p$$

de donde

$$\gamma\frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p} = \frac{p\,(D-2p)}{(D-2p+2)\,(D-2p+1)} \tag{4.15}$$

donde $1 \leq p \leq n$ y γ es una constante arbitraria de dimensión $[longitud]^2$. La solución a esta ecuación viene dada por

$$\alpha_p = \alpha_0\frac{D\,(2\gamma)^p}{(2n-2p-1)}\binom{n-1}{p}, \tag{4.16}$$

donde las constantes α_0 y γ están relacionadas a la constante gravitacional y a la constante cosmológica respectivamente en la forma

$$\alpha_0 = \frac{\kappa}{(l^{D-1}D)}; \qquad \gamma = -sgn\,(\Lambda)\,\frac{l^2}{2}, \tag{4.17}$$

y donde para cualquier dimensión, l es un parámetro de longitud relacional a la constante cosmológica por

$$\Lambda = \pm\frac{(D-1)\,(D-2)}{2l^2} \tag{4.18}$$

Con estos coeficientes, el vielbein y la conexión de spin son acomodados dentro de una conexión para el álgebra AdS, permitiendo que el lagrangeano se convierta en la forma Chern-Simons (CS). La $(2n-1)$-forma CS dada por

$$L_{CS}^{(2n-1)} = \kappa\sum_{k=0}^{n-1}\frac{l^{-(2n-1-2k)}}{(2n-1-2k)}\binom{n-1}{k}\varepsilon_{a_1\cdots\alpha_{2n-1}}R^{a_1a_2}\ldots R^{a_{2p-1}a_{2p}}e^{a_{2p+1}}\ldots e^{a_{2n-1}}. \tag{4.19}$$

no solo es invariante bajo rotaciones locales de Lorentz $\delta e^a = e^b \kappa_b{}^a$, $\delta\omega^{ab} = D\kappa^{ab}$, sino que también bajo boost local AdS,

$$\begin{aligned} \delta e^a &= D\rho^a, \\ \delta\omega^{ab} &= \frac{1}{l^2}\left(e^a\rho^b - e^b\rho^a\right). \end{aligned} \tag{4.20}$$

De modo que la elección particular de los coeficientes α_p's para la acción de Lanczos-Lovelock nos permite describir una teoría de gauge para la Gravedad mediante las formas Chern-Simons. En la siguiente sección se realizará un estudio más detallado de la Gravedad CS.

4.3.2 Dimensiones pares

Considerando nuevamente las expresiones (4.12) y (4.13) es posible ver que la ec. (4.12) tiene un término adicional a (4.13). Por lo tanto, es necesario seguir un camino distinto al caso impar. Consideremos primero la variación del lagrangeano con respecto a R^{ab},

$$\delta L = \sum_{p=1}^{[D/2]} \alpha_p \delta L^{(p)},$$

$$\delta L^{(p)} = p\varepsilon_{a_1 a_2 \cdots a_D}\left(\delta R^{a_1 a_2}\right) R^{a_3 a_4} \cdots R^{a_{2p-1}a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \cdots e^{a_D},$$

lo cual es escrito como

$$\frac{\delta L}{\delta R^{ab}} = \sum_{p=1}^{[D/2]} \alpha_p p \varepsilon_{aba_3\cdots a_D} R^{a_3 a_4} \cdots R^{a_{2p-1}a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \cdots e^{a_D}. \tag{4.21}$$

Luego, llamando

$$\mathcal{T}_{ab} = \frac{\delta L}{\delta R^{ab}} = \sum_{p=1}^{[D/2]} \alpha_p p \mathcal{T}^p_{ab}, \tag{4.22}$$

con

$$\mathcal{T}^p_{ab} = \varepsilon_{aba_3\cdots a_D} R^{a_3 a_4} \cdots R^{a_{2p-1}a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \cdots e^{a_D}. \tag{4.23}$$

Haciendo uso nuevamente de la identidad de Bianchi es posible escribir

$$D\mathcal{T}^p_{ab} = (D-2p)\,\varepsilon_{aba_3\cdots a_D} R^{a_3 a_4} \cdots R^{a_{2p-1}a_{2p}} \left(De^{a_{2p+1}}\right) e^{a_{2p+2}} \cdots e^{a_D}$$

lo cual permite escribir

$$D\mathcal{T}_{ab}=\sum_{p=1}^{[D/2]}\alpha_p p\,(D-2p)\,\varepsilon_{aba_3\cdots a_D}R^{a_3a_4}\cdots R^{a_{2p-1}a_{2p}}T^{a_{2p+1}}e^{a_{2p+2}}\cdots e^{a_D}. \tag{4.24}$$

Comparando con las ecuaciones (4.4) y (4.6) vemos que

$$\varepsilon_{ab}=D\mathcal{T}_{ab} \tag{4.25}$$

de manera que

$$D\mathcal{T}_{ab}^{p}=(D-2p)\,\varepsilon_{ab}^{p} \tag{4.26}$$

para $1\leq p\leq\left[\frac{D-1}{2}\right]$.

Por otro lado, es posible relacionar $\mathcal{T}_{ab}^{p}$ con ε_{a}^{p} puesto que

$$\varepsilon_{a}^{p-1}=\varepsilon_{ab_1\cdots b_{D-2}}R^{b_1b_2}\cdots R^{b_{2p-3}b_{2p-2}}e^{b_{2p-1}}\cdots e^{b_{D-2}}$$

de modo que es posible escribir

$$e^{b}\mathcal{T}_{ab}^{p}=\varepsilon_{a}^{p-1} \tag{4.27}$$

para $1\leq p\leq\left[\frac{D-1}{2}\right]$. Luego tenemos que

$$D\varepsilon_{a}^{p-1}=T^{b}\mathcal{T}_{ab}^{p}-(D-2p)\,e^{b}\varepsilon_{ab}^{p} \tag{4.28}$$

Definiendo ahora $p'=p+1$ y considerando $1\leq p\leq\left[\frac{D-1}{2}\right]$ se tiene

$$D\varepsilon_{a}=\sum_{p'=2}^{[(D+1)/2]}\alpha_{p'-1}\,(D-2p'+2)\,D\varepsilon_{a}^{p'-1}$$

de modo que

$$\begin{aligned}D\varepsilon_{a} &= \sum_{p=2}^{[(D+1)/2]}\alpha_{p-1}\,(D-2p+2)\,D\varepsilon_{a}^{p-1}\\ &= \sum_{p=2}^{[(D+1)/2]}\alpha_{p-1}\,(D-2p+2)\left[T^{b}\mathcal{T}_{ab}^{p}-(D-2p)\,e^{b}\varepsilon_{ab}^{p}\right]\end{aligned}$$

Así, para $D=2n$, tenemos

$$D\varepsilon_{a}=T^{b}\sum_{p=1}^{n-1}2\alpha_{p-1}\,(n-p+1)\,\mathcal{T}_{ab}^{p}-\sum_{p=1}^{n-1}4\alpha_{p-1}\,(n-p+1)\,(n-p)\,e^{b}\varepsilon_{ab}^{p}. \tag{4.29}$$

Se puede comparar dicha ecuación con la identidad (4.13)

$$e^b \varepsilon_{ba} = \sum_{p=1}^{n-1} 2\alpha_p p \left(n-p\right) e^b \varepsilon_{ba}{}^{p} \tag{4.30}$$

Tanto la ecuación (4.25) : $\varepsilon_{ab} = D\mathcal{T}_{ab}$ como (4.30) se pueden hacer nulas si $T^a = 0$ o $\mathcal{T}_{ab} = 0$. No obstante, esto representan condiciones muy fuertes para (4.29). En realidad es suficiente con imponer la condición más debil a saber $T^a \mathcal{T}_{ab} = 0$ y exigir simultaneamente que el segundo término en (4.29) sea proporcional a la serie (4.30). De este modo, ambas series poseen el mismo número de términos de modo que la solución que permite el número maximo de grados de libertad se encuentra al igualar las dos series término a término salvo un factor global.

De este modo

$$\gamma 4\alpha_{p-1} \left(n-p+1\right) \left(n-p\right) e^b \varepsilon_{ab}^{p} = 2\alpha_p p \left(n-p\right) e^b \varepsilon_{ba}{}^{p},$$

encontrando así

$$\alpha_p = \alpha_0 \left(2\gamma\right)^p \binom{n}{p}.$$

Con estos coeficientes el lagrangeano de Lanczos-Lovelock toma la forma

$$L_{BI}^{(2n)} = \frac{\kappa}{2n} \varepsilon_{a_1 \cdots a_{2n}} \left(R^{a_1 a_2} + \frac{1}{l^2} e^{a_1 a_2} \right) \cdots \left(R^{a_{2n-1} a_{2n}} + \frac{1}{l^2} e^{a_{2n-1} a_{2n}} \right), \tag{4.31}$$

el cual corresponde al Pfaffiano de la 2-forma $\bar{R}^{ab} = R^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b$ y uede ser formalmente escrita como la forma Born-Infeld (BI) [16]. La acción tipo Born-Infeld, a diferencia de la acción Chern-Simons, es invariante solo bajo rotaciones locales de Lorentz.

Capítulo 5

Gravedad Chern-Simons

5.1 Introducción

Tanto la electrodinámica como las interacciones débil y fuerte son consistentemente descritas en el modelo estándar por medio de teorías de Yang-Mills. La teoría de gauge convencional, al igual que la teoría de la relatividad especial tiene su fundamento en la existencia de una estructura métrica "background" no dinámica. Asi para la construcción de una acción correspondiente a la de una teoría de Yang-Mills

$$S_{YM} = -\frac{1}{4g^2}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4g^2}\int d^4x \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} \tag{5.1}$$

se requiere la existencia de una métrica background fija en el espacio sobre el cual están definidos los campos de gauge, que es dada por la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = diag\,(-1, 1, 1, 1)$.

Sin embargo, gravedad descrita por Relatividad General, no ha podido ser expresada como una teoría de gauge a pesar de varias decadas de investigación en esta dirección. En la teoría de la Relatividad General, el espacio-tiempo y el campo gravitacional son la misma entidad. El espacio-tiempo es un objeto dinámico que tiene grados de libertad independientes, y es gobernado por ecuaciones dinámicas dadas por las ecuaciones de campo de Einstein. Esto significa que en Relatividad General, la geométría es dinámicamente determinada. Por lo tanto, la construcción de una teoría de gauge para la gravedad requiere de una acción que no considere un espacio-tiempo background fijo, es decir que no considere una métrica background fija.

En el formalismo de primer orden, el vielbein e^a y la conexión de espín ω^{ab} son considerados como campos independientes. Estos campos son interpretados como componentes de una conexión para el álgebra de Poincaré o el álgebra (Anti) De Sitter. No obstante, no es posible formular Relatividad General como una teoría de gauge bajo este formalismo debido a que la acción de Einstein-Hilbert no es invariante bajo traslaciones locales de Poincaré o boost AdS.

Sin embargo, existe una acción para gravedad en dimensiones impares independiente de la métrica la cual fue propuesta por Chamseddine [18, 19]. En el formalismo de primer orden, el lagrangiano es escrito como

$$L^{(2n+1)} = \kappa\varepsilon_{a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{l^{2(n-k)+1}} R^{a_1 a_2} \ldots R^{a_{2k-1} a_{2k}} e^{a_{2k+1}} \ldots e^{a_{2n+1}}, \tag{5.2}$$

donde κ es una constente sin dimensión, l es un parámetro de longitud, e^a corresponde a la 1-forma vielbein y $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb}$ a la curvatura de Riemann. Para valores particulares de los coeficientes c_k dados por

$$c_k = \frac{1}{2(n+k)+1} \binom{n}{k}, \tag{5.3}$$

obtenemos un caso particular del lagrangiano de Lanczos-Lovelock [1, 2, 3, 4].

El lagrangiano (5.2) con la forma particular de los coeficientes c_k dados por (5.3) es conocido como una forma Chern-Simons para el álgebra AdS. Notemos que la ausencia de una métrica background en la definición de la forma Chern-Simons nos permite construir una teoría de gauge para la gravedad. Es posible encontrar diversos ejemplos de gravedad Chern-Simons en las Refs. [16, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35]

5.2 Formas de Chern-Simons

Sea T_A una base para el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo G. Sea además $P^{(2n+2)}(F)$ una $2n+2$-forma invariante construída con la 2-forma curvatura $F = dA + \frac{1}{2}[A, A] = F^A T_A$, donde A es la 1-forma conexión de gauge valuada en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

$$A = A^A T_A. \tag{5.4}$$

Luego, si existe una $2n+1$ forma $\mathcal{Q}^{(2n+1)}$, que depende de A y dA, tal que

$$d\mathcal{Q}^{(2n+1)} = P^{(2n+2)}, \tag{5.5}$$

entonces tenemos que bajo una transformación de gauge, $\mathcal{Q}^{(2n+1)}$ cambia por una derivada total (forma exacta)

$$\delta\mathcal{Q}^{(2n+1)} = d\,(\text{algo})\,. \tag{5.6}$$

La $2n+1$-forma $\mathcal{Q}^{(2n+1)}$ es conocida como la forma de Chern-Simons (**CS**), y debido a que cambia por una forma exacta, es usada como un lagrangiano para una teoría de gauge para la conexión A. Explícitamente,

$$\mathcal{Q}_{CS}^{(2n+1)} = (n+1)\int_0^1 dt\left\langle A\left(tdA + t^2A^2\right)^n\right\rangle, \tag{5.7}$$

donde $\langle\cdots\rangle$ denota un tensor simétrico invariante bajo $\mathfrak{g}$ de rango $n+1$. El lagrangiano de CS $\mathcal{Q}_{CS}^{(2n+1)}$ es así una $(2n+1)$-forma cuya derivada exterior satisface

$$d\mathcal{Q}^{(2n+1)} = \langle F\wedge\cdots\wedge F\rangle = \left\langle F^{n+1}\right\rangle. \tag{5.8}$$

Es importante señalar que $\mathcal{Q}_{CS}^{(2n+1)}$ define un lagrangiano no trivial que no es invariante bajo transformaciones de gauge, sino que su variación entrega una función que sólo depende de los campos en el borde. De este modo la forma de Chern-Simons es cuasi-invariante de gauge, es decir, bajo transformaciones infinitesimales de la forma

$$\delta A = d\lambda + [A,\lambda]\,, \tag{5.9}$$

la forma de CS es invariante de gauge módulo términos de borde. Esto es suficiente para definir un lagrangiano físico ya que siempre es posible fijar condiciones de borde apropiadas sobre los campos de tal manera que $\delta\mathcal{Q}_{CS}^{(2n+1)} = 0$.

Por otro lado, es posible obtener las ecuaciones de movimiento al variar la acción con respecto a la conexión

$$\delta S = \delta\int_M \mathcal{Q}_{CS}^{(2n+1)} = \delta\int_{\partial M} d\mathcal{Q}_{CS}^{(2n+1)} = n\int_{\partial M}\langle\delta F\wedge F^n\rangle\,, \tag{5.10}$$

pero haciendo uso del hecho de que $\delta F = \nabla(\delta A)$ y de la identidad de Bianchi $\nabla F = 0$, tenemos

$$\delta S = n\int_{\partial M}\langle\nabla(\delta A)\;\; F^n\rangle = n\int_{\partial M} d\,\langle\delta A\;\; F^n\rangle\,. \tag{5.11}$$

Luego, haciendo uso del teorema de Stokes, obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\delta S = n\int_{\partial M} \delta A^A \langle T_A F^n \rangle = 0 \tag{5.12}$$

$$\Rightarrow \langle F^n T_A \rangle = 0. \tag{5.13}$$

Debe ser enfatizado además que esta construcción no está solamente restringida a un solo tipo de invariante, generalmente conocido como clase característica. Por ejemplo, algunas clases características conocidas son las clases de Euler, de Chern y de Pontryagin cada una con sus correspondientes formas de Chern-Simons. Así, en 3 dimensiones, tenemos las siguientes formas de CS que definen lagrangianos con sus respectivos invariantes topológicos,

Tabla 1

$D=3$ Lagrangianos Chern-Simons	Invariante topológico	Grupo
$L_3^{(A)ds} = \varepsilon_{abc}(R^{ab} \pm \frac{e^a e^b}{3l^2})e^c$	$E_4 = \varepsilon_{abc}(R^{ab} \pm \frac{1}{l^2}e^a e^b)T^c$	$SO(2,2)$
$L_3^{Lorentz} = \omega^a_{\ b} d\omega^b_{\ a} + \frac{2}{3}\omega^a_{\ b}\omega^b_{\ c}\omega^c_{\ a}$	$P_4 = R^a_{\ b} R^b_{\ a}$	$SO(2,1)$
$L_3^{Torsion} = e^a T_a$	$N_4 = T^a T_a - e^a e^b R_{ab}$	$SO(2,1)$

(5.14)

donde R^{ab} corresponde a la curvatura de Lorentz, ω_{ab} la respectiva conexión y T^a la torsión. E_4 y P_4 son las densidades de Euler y Pontryagin mientras que N_4 es el invariante Nieh-Yan [16, 25]. Estos lagrangianos son localmente invariante bajo los correspondientes grupos de gauge.

Esta teoría de gauge difiere de la teoría de Yang-Mills en varios aspectos. La principal diferencia entre formas CS y lagrangianos de YM radica en que las formas CS son escritas explicitamente como funciones de un conexión A y sus derivadas exteriores, pero no se pueden escribir como funciones locales que involucran solo la curvatura F. Además, a diferencia del lagrangiano de YM, el lagrangiano CS sólo existe en dimensiones impares.

5.3 Gravitación y Chern-Simons

Para describir una teoría Chern-Simons de la gravedad en $D = 2n + 1$ consideraremos el álgebra Anti De Sitter, $\mathfrak{so}(2n, 2)$. Los generadores P_a y J_{ab} de esta álgebra satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{db}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb}, && (5.15) \\ [J_{ab}, P_c] &= \eta_{cb}P_a - \eta_{ca}P_b, && (5.16) \\ [P_a, P_b] &= J_{ab}, && (5.17) \end{aligned}$$

donde η_{ab} es la métrica de Minkowski. La 1-forma conexión de gauge valuada en el álgebra toma la forma

$$A = A^A T_A = \frac{1}{l}e^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab}, \tag{5.18}$$

donde los campos de gauge asociados a P_a y J_{ab} son interpretados como el vielbein e^a y la conexión de spin ω^{ab} respectivamente. La 2-forma curvatura asociado a la conexión (5.18) es

$$F = F^A T_A = \frac{1}{l}T^a P_a + \frac{1}{2}\left(R^{ab} + \frac{1}{l^2}e^a e^b\right) J_{ab}, \tag{5.19}$$

donde R^{ab} y T^a corresponden a la curvatura de Lorentz y a la torsión respectivamente, las cuales vienen dadas por

$$\begin{aligned} R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a{}_c\omega^{cb}, && (5.20) \\ T^a &= De^a = de^a + \omega^a{}_b e^b. && (5.21) \end{aligned}$$

Por otro lado, para poder escribir el lagrangiano CS para el álgebra AdS requerimos de un tensor simétrico invariante de rango $n+1$ para dicha álgebra. Un tensor invariante de rango $n+1$ para el álgebra AdS es dado por el tensor de Levi-Cevita

$$\left\langle J_{a_1a_2}\cdots J_{a_{2n-1}a_{2n}}P_{a_{2n+1}}\right\rangle = \frac{2^n}{n+1}\varepsilon_{a_1\cdots a_{2n+1}}, \tag{5.22}$$

con todas las demás componentes iguales a cero.

Luego, considerando el álgebra AdS (5.15)-(5.17) y el tensor invariante (5.22) en la forma general del lagrangiano de Chern-Simons (5.7), obtenemos el lagrangiano propuesto originalmente por Chanseddine (5.2), a saber

$$L_{CS}^{(2n+1)} = \kappa\varepsilon_{a_1\cdots a_{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{l^{2(n-k)+1}}\frac{1}{2(n+k)+1}\binom{n}{k}R^{a_1a_2}\ldots R^{a_{2k-1}a_{2k}}e^{a_{2k+1}}\ldots e^{a_{2n+1}}. \tag{5.23}$$

Es importante enfatizar que en general, obtener la forma de CS a partir de la definición (5.7) usando las componentes no nulas de un tensor invariante no es un proceso trivial. Además, como consecuencia de la estructura del tensor invariante (5.22) se tiene que la torsión está ausente en el lagrangiano. No obstante, existen ciertas componentes no nulas del tensor invariante para el álgebra AdS que permiten obtener términos torsionales en el lagrangiano, los cuales serán estudiados más adelante.

Por otro lado, de la definición de la forma de CS sabemos que satisface

$$dL_{CS}^{(2n+1)} = P^{(2n+2)} \tag{5.24}$$

donde $P^{(2n+2)}$ es la $(2n+2)$-forma invariante y viene dada por

$$\begin{aligned} P &= \langle F \wedge \cdots \wedge F \rangle \\ &= \left\langle F^{n+1} \right\rangle . \end{aligned} \tag{5.25}$$

Luego, haciendo uso de la 2-forma curvatura (5.19) y de la componente no nula del tensor invariante para el álgebra AdS (5.22) se obtiene

$$P = E^{2n+2} = \frac{\kappa}{l}\varepsilon_{a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}} \left(R^{a_1 a_2} + \frac{1}{l^2} e^{a_1} e^{a_2} \right) \cdots \left(R^{a_{2n-1} a_{2n}} + \frac{1}{l^2} e^{a_{2n-1} a_{2n}} \right) T^{a_{2n+1}} \tag{5.26}$$

que corresponde a la densidad de Euler $2n+2$-dimensional.

5.4 Gravedad con torsión

5.4.1 ¿ Por qué Torsión ?

Sabemos que la acción de Lovelock corresponde a la acción mas general para una teoría métrica de la gravedad en D dimensiones y viene dada por

$$S_d = \int \sum_{p=0}^{\left[\frac{D}{2}\right]} \alpha_p L_D^{(p)} \tag{5.27}$$

con

$$L_D^{(p)} = \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \cdots e^{a_D}. \tag{5.28}$$

Hemos mostrado que al variar la acción con respecto al vielbein se obtiene la siguiente ecuación de Lovelock

$$\sum_{p=0}^{\left[\frac{D}{2}\right]} \alpha_p \left(D-2p\right) \varepsilon_{b_1 \cdots b_{D-1}} R^{b_1 b_2} \cdots R^{b_{2p-1} b_{2p}} e^{b_{2p+1}} \cdots e^{b_{D-1}} = 0. \tag{5.29}$$

En cambio, al variar la acción con respecto a la conexión de spin se obtiene

$$\sum_{p=0}^{\left[\frac{D}{2}\right]} \alpha_p p \left(D-2p\right) \varepsilon_{aba_3 \cdots a_D} R^{a_3 a_4} \cdots R^{a_{2p-1} a_{2p}} T^{a_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \cdots e^{a_D} = 0. \tag{5.30}$$

Si uno asume que la torsión se anule identicamente,

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b e^b = 0, \tag{5.31}$$

entonces la ecuación (5.30) es automaticamente satisfecha. Sin embargo, resolver (5.31) requiere introducir restricciones adicionales a la conexión de spin ω^{ab} [16]. Luego, el lagrangiano se convierte en una función complicada del vielbein e^a. Además en $D \leq 4$, la ecuación (5.30) es equivalente a (5.31) de modo que no es necesario imponer la condición libre de torsión. Por otro lado, en dimensiones mayores, la ecuación (5.30) no implica que la torsión sea nula por lo tanto hacer que la torsión sea igual a cero consiste en una restricción injustificada.

Además, si el vielbein y la conexión de spin son combinados en una 1-forma conexión para el grupo de Lorentz entonces la curvatura y la torsión son las distintas componentes de una 2-forma curvatura del grupo de gauge. De modo que parece arbitrario hacer que la torsión sea igual a cero y no hacer lo mismo con la curvatura.

Agregar explicitamente la torsión en el lagrangiano es obtenido asumiendo que el lagrangiano es la D-forma más general construida mediante el vielbein y la conexión de spin e invariante bajo transformaciones locales de Lorentz. Existe un algoritmo constructivo para reproducir todos los posibles invariantes locales de Lorentz a partir de e^a, R^{ab} y T^a [22]. La lista detallada de estos invariantes es encontrada en el **Apendice B**.

5.4.2 Lagrangiano torsional

Siguiendo a R. Troncoso y J. Zanelli en la Ref. [16], agregar explicitamente términos torsionales al lagrangiano conlleva un número de coeficientes arbitrarios β_k analogo a los $\alpha_p' s$ de los lagrangianos de Lanczos-Lovelock. No obstante, es posible elegir los $\beta' s$ en ciertas dimensiones con el fin de extender la invariancia local de Lorentz a simetría de gauge AdS $\mathfrak{so}\left(D-1,2\right)$.

Por otro lado, en dimensiones pares tenemos que las únicas D-formas invariantes AdS son, a parte de la densidad de Euler, combinaciones lineales de productos del tipo

$$P_{n_1 \cdots n_s} = C_{n_1} \cdots C_{n_s}, \tag{5.32}$$

con $2\left(n_1 + n_2 + \cdots + n_s\right) = D$ y donde

$$C_n = Tr\left(F\right)^n, \tag{5.33}$$

define el n-esimo caracter de Chern de $SO\left(N\right)$. Sin embargo, debido a que la 2-formas curvatura F es antisimétrica en los indices del grupo en su representación vectorial tenemos que las potencias n_j en (5.33) son necesariamente pares. De modo que (5.32) se anula a menos que D sea un multiplo de cuatro. Así, tenemos los siguientes lemas:

Lema 1 *: Para $D = 4k$, las únicas D-formas impares construidas a partir de e^a, R^{ab} y T^a, invariante bajo el grupo AdS, son los caracteres de Chern para $SO\left(D-1,2\right)$.*

Lema 2 *: Para $D = 4k+2$, no existen D-formas impares $SO\left(D-1,2\right)$-invariantes a partir de e^a, R^{ab} y T^a.*

Recordemos que podemos escribir localmente la forma invariante $P_{n_1 \cdots n_s}$ como la derivada exterior de la $(4k-1)$-forma

$$P_{n_1 \cdots n_s} = dL_{T\ \ 4k-1}^{AdS} \tag{5.34}$$

donde el subíndice T indica que el lagrangiano involucra términos torsionales. Esto significa que para cada colección $\{n_1, \cdots n_s\}$, el lagrangiano torsional $L_{T\ \ 4k-1}^{AdS}$ es un buen candidato a lagrangiano para el álgebra AdS en $4k-1$ dimensiones. Podemos clasificar ahora los lagrangianos en 2 familias mediante el siguiente teorema [16]:

Teorema 7 : *En espacio tiempo de dimensión impar, existen dos familias de lagrangianos gravitacionales de primer orden $L(e,\omega)$, invariantes bajo transformaciones locales AdS:*

$\mathfrak{a}$: *La forma Euler-Chern-Simons $L_{E\ (2n-1)}^{AdS}$, en $D=2n-1$. Su derivada exterior es la densidad de Euler en $2n$ dimensiones y no involucra torsión explicitamente.*

$\mathfrak{b}$: *Las formas Pontryagin-Chern-Simons $L_{T\ 4k-1}^{AdS}$, en $D=4k-1$. Sus derivadas exteriores son los caracteres de Chern en $4k$ dimensiones e involucran torsión explicitamente.*

El ejemplo más simple en donde las 2 familias de lagrangianos invariante bajo AdS aparecen es para $k=1$, es decir en 3 dimensiones. En la familia $\mathfrak{a}$ tenemos el lagrangiano de Einstein-Hilbert con con constante cosmológica, a saber

$$L_{E\ (3)}^{AdS}=\frac{1}{l}\varepsilon_{abc}\left(R^{ab}e^{c}+\frac{1}{3l^{2}}e^{a}e^{b}e^{c}\right). \tag{5.35}$$

Por otro lado, en la familia $\mathfrak{b}$ tenemos el lagrangiano exotico [20]

$$L_{(3)}^{exotico}=L_{T\ (3)}^{AdS}=L_{(3)}^{Lorentz}\pm\frac{2}{l^{2}}L_{(3)}^{Torsión}, \tag{5.36}$$

donde

$$L_{(3)}^{Lorentz}=\omega^{a}{}_{b}d\omega^{b}{}_{a}+\frac{2}{3}\omega^{a}{}_{b}\omega^{b}{}_{c}\omega^{c}{}_{a} \tag{5.37}$$

y

$$L_{(3)}^{Torsión}=e^{a}T_{a}. \tag{5.38}$$

Los lagrangianos (5.35), (5.36) y (5.37) son las formas Chern-Simons de Euler, Pontryagin y Lorentz respectivamente. Es interesante analizar la derivada exterior del lagrangiano exótico la cual viene dada por

$$\begin{aligned} dL_{T\ (3)}^{AdS} &= dL_{(3)}^{Lor}\pm\frac{2}{l^{2}}dL_{(3)}^{Tor} \\ &= R_{b}^{a}R_{a}^{b}\pm\frac{2}{l^{2}}\left(T^{a}T_{a}-e^{a}e^{b}R_{ab}\right) \\ &= P_{4}\pm\frac{2}{l^{2}}N_{4}=F_{B}^{A}F_{A}^{B} \end{aligned} \tag{5.39}$$

donde renocemos las densidades 4-dimensionales de Pontryagin P_4 y de Nieh-Yan N_4 (ver tabla 1 5.14).

Para construir la acción más general para gravitación en $D = 3$ dimensiones, el cual es invariante bajo el grupo $AdS\ SO(2,2)$, se requiere de las dos familias. Así, el lagrangiano más general viene dado por una combinación lineal de los dos tipos de lagrangianos, a saber

$$\begin{aligned} L^{AdS}_{CS\ (3)} &= \kappa L^{AdS}_{E\ (3)} + \beta L^{AdS}_{T\ (3)}. \\ &= \kappa \frac{1}{l} \varepsilon_{abc} \left(R^{ab} e^c + \frac{1}{3l^2} e^a e^b e^c \right) + \beta \left(\omega^a{}_b d\omega^b{}_a + \frac{2}{3} \omega^a{}_b \omega^b{}_c \omega^c{}_a \pm \frac{2}{l^2} e^a T_a \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

A medida que la dimensión sea mayor podemos ver que la familia de lagrangianos CS torsional (la familia $\mathfrak{b}$) va creciendo. Por ejemplo, en 7 dimensiones tenemos 3 términos CS torsional dados en la siguiente tabla:

Tabla 2

$D = 7$ Lagrangianos Chern-Simons Torsional	$\mathcal{P}$
$L^{Lorents}_{(7)} = \omega (d\omega)^3 + \frac{8}{5}\omega^3 (d\omega)^2 + \frac{4}{5}\omega\,(d\omega)\,\omega^2\,(d\omega) + 2\omega^5(d\omega) + \frac{4}{7}\omega^7$	$P_8 = R^a_b R^b_c R^c_d R^d_a$
$L^A_{(7)} = (L^{Lorentz}_3) R^d_c R^c_d = (\omega^a_b d\omega^b_a + \frac{2}{3}\omega^a_b \omega^b_c \omega^c_a) R^d_c R^c_d$	$(P_4)^2 = (R^a_b R^b_a)^2$
$L^B_{(7)} = (L^{Torsion}_3) R^d_c R^c_d = (e^a T_a) R^d_c R^c_d$	$(T^a T_a - e^a e^b R_{ab}) R^d_c R^c_d$

Luego, el lagrangiano más general para gravedad en $D = 7$ dimensiones invariante bajo el grupo $AdS\ SO(6,2)$ viene dado por una combinación lineal de tres tipos de lagrangianos, a saber

$$L^{AdS}_{CS\ (7)} = \kappa L^{AdS}_{E\ (7)} + \beta_{2,2} L^{AdS}_{T\ \{2,2\}\ (7)} + \beta_4 L^{AdS}_{T\ \{4\}\ (7)}$$

$$\begin{aligned} L^{AdS}_{CS\,(7)} = \; & \kappa \left[\varepsilon_{abcdefg} \left(\frac{1}{l} R^{ab} R^{cd} R^{ef} e^g + \frac{1}{l^3} R^{ab} R^{cd} e^e e^f e^g + \frac{3}{5l^5} R^{ab} e^c e^d e^e e^f e^g + \frac{1}{7l^7} e^a e^b e^c e^d e^e e^f e^g \right) \right] \\ & + \beta_{2,2} \left[R^a_b R^b_a + \frac{2}{l^2} \left(T^a T_a - R^{ab} e_a e_b \right) \right] \left(\omega^c{}_d d\omega^d{}_c + \frac{2}{3} \omega^c{}_f\, \omega^f{}_g \omega^g{}_c + \frac{2}{l^2} e_c T^c \right) \\ & + \beta_4 \left[\left(\omega^a{}_b d\omega^b{}_c d\omega^c{}_d d\omega^d{}_a + \frac{8}{5} \omega^a{}_b \omega^b{}_c \omega^c{}_d d\omega^d{}_e d\omega^e{}_a + \frac{4}{5} \omega^a{}_b d\omega^b{}_c \omega^c{}_d \omega^d{}_e d\omega^e{}_a \right. \right. \\ & \left. + 2\omega^a{}_b \omega^b{}_c \omega^c{}_d \omega^d{}_e \omega^e{}_f d\omega^f{}_a + \frac{4}{7} \omega^a{}_b \omega^b{}_c \omega^c{}_d \omega^d{}_e \omega^e{}_f \omega^f{}_g \omega^g{}_a \right) \\ & \left. + \frac{1}{l^2} 4 T_a R^a_b R^b_c e^c + \frac{1}{l^4} \left[2 \left(R^{ab} e_a e_b + T^a T_a \right) T^c e_c \right] \right]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Se puede generalizar este procedimiento para $D = 4k - 1$ en el cual el lagrangiano más general invariante bajo el grupo $AdS\ SO\left(4k-2,2\right)$ toma la siguiente forma

$$L_{CS\ (4k-1)}^{AdS} = \kappa L_{(4k-1)}^{AdS} + \beta_{\{n_j\}} L_{T\ \{n_j\}\ (4k-1)}^{AdS} \tag{5.42}$$

donde $dL_{T\ \{n_j\}\ (4k-1)}^{AdS} = P_{n_1 \cdots n_s}$, con $\sum_j n_j = 4k$. Además, es importante señalar que los coeficientes κ y $\beta_{\{n_j\}}$ son arbitrarios y adimensionales.

La generalización de dicho procedimiento a álgebras más grandes, las cuales serán utiles para el desarrollo de la tesis, es estudiada con detalle en el capítulo 8.

Capítulo 6

Relatividad General desde Gravedad Chern-Simons

6.1 Introducción

Las formas Chern-Simons representan buenos candidatos para describir Gravedad en dimensiones impares puesto que nos entregan una acción cuasi-invariante de gauge. No obstante si queremos que las teorías CS sean las apropiadas para la interacción gravitacional entonces estas teorías deben satisfacer el principio de correspondencia, es decir, deben estar relacionadas con Relatividad General.

En el formalismo de primer orden tenemos que el lagrangiano CS AdS para gravedad en $D = 2n+1$ dimensiones viene dado por [18, 19]

$$L_{CS\ (2n+1)}^{AdS} = \kappa\varepsilon_{a_1\cdots a_{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{l^{2(n-k)+1}} \frac{1}{2(n+k)+1} \binom{n}{k} R^{a_1 a_2} \ldots R^{a_{2k-1}a_{2k}} e^{a_{2k+1}} \ldots e^{a_{2n+1}}, \tag{6.1}$$

donde e^a corresponde a la 1-forma vielbein y $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c\omega^{cb}$ a la 2-forma curvatura de Riemann. Dicho lagrangiano es invariante off-shell bajo el álgebra AdS $\mathfrak{so}(2n,2)$, cuyos generadores $\tilde{J}_{ab}$ y $\tilde{P}_a$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\left[\tilde{J}_{ab}, \tilde{J}_{cd}\right] = \eta_{cb}\tilde{J}_{ad} - \eta_{ca}\tilde{J}_{bd} + \eta_{db}\tilde{J}_{ca} - \eta_{da}\tilde{J}_{cb}, \tag{6.2}$$

$$\left[\tilde{J}_{ab}, \tilde{P}_{c}\right] = \eta_{bc}\tilde{P}_{a} - \eta_{ac}\tilde{P}_{b}, \tag{6.3}$$

$$\left[\tilde{P}_{a}, \tilde{P}_{b}\right] = \tilde{J}_{ab}. \tag{6.4}$$

donde $\tilde{J}_{ab}$ y $\tilde{P}_a$ son los generadores de transformaciones de Lorentz y de boosts AdS respectivamente.

La acción CS AdS-invariante es construida a partir de la 1-forma conexión

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}\tilde{J}_{ab} + \frac{1}{l}e^{a}\tilde{P}_{a} \tag{6.5}$$

y de la componente no-nula del tensor invariante simétrico de rango $r = n + 1$,

$$\left\langle \tilde{J}_{a_1 a_2} \cdots \tilde{J}_{a_{2n.-1} a_{2n}} \tilde{P}_{a_{2n+1}} \right\rangle = \frac{2^n}{n+1}\varepsilon_{a_1 \cdots a_{2n+1}}. \tag{6.6}$$

Como lo señalan bien los autores de la Ref. [33], con el fin de interpretar el campo de gauge asociado con un generador de traslación $\tilde{P}_a$ como el vielbein, uno está forzado a introducir un parámetro de longitud l en la teoría. En efecto, dado que la derivada exterior $d = dx^{\mu}\partial_{\mu}$ es adimensional y que siempre es posible elegir los generadores de un álgebra de Lie T_A adimensionales, se tiene que la 1-forma conexión $A^A = A^A_{\mu}dx^{\mu}$ debe también ser adimensional. No obstante, el vielbein $e^a = e^a{}_{\mu}dx^{\mu}$ debe tener dimensión de longitud si este está relacionado con la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ a través de la ecuación $g_{\mu\nu} = e^a{}_{\mu}e^b{}_{\nu}\eta_{ab}$. Esto significa que el "verdadero" campo de gauge debe ser de la forma e^a/l, donde l es un parámetro de longitud.

Notemos que una vez que el parámetro l es introducido en la teoría tenemos que el lagrangiano CS se descompone en varios sectores, cada uno proporcional a distintas potencias de l en la ec. (6.1). No obtante, a pesar que gravedad CS es una teoría de gauge bien definida, no existe ningún límite en l que permita recuperar la dinámica de Relatividad General. De hecho, la presencia de potencias altas de la curvatura en el lagrangiano hace que la dinámica sea muy diferente a la de Einstein-Hilbert.

Sin embargo, en las Refs. [33, 37], se ha mostrado que Relatividad general $(2n+1)$-dimensional es embebida en una teoría CS para una cierta álgebra de Lie $\mathfrak{B}_m$.

Recientemente, en la Ref. [39] se ha encontrado que la llamada álgebra de Lie $\mathfrak{B}_m$ corresponde a las álgebras tipo Maxwell $\mathcal{M}_m$. Dichas álgebras, conocidas también como álgebras de Poincaré Generalizadas $\mathcal{P}$, son obtenidas mediante un procedimiento de S-expansión del álgebra AdS.

El propósito de este capítulo es mostrar que Relatividad General en dimensiones impares, surge como un límite de la constante de acoplamiento l de un lagrangiano Chern-Simons $D \leq (2p+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}_{2p+1}$. Se mostrará además que esto no es posible para lagrangianos CS $D \geq (2p+3)$-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}_{2p+1}$ [37].

6.2 Álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_{2n+1}$

Siguiendo las definiciones de la Ref. [10] (ver sección 2.3), consideremos la S-expansión del álgebra de Lie $\mathfrak{so}\,(2n, 2)$ usando el semigrupo abeliano $S_E^{(2n-1)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_{2n}\}$ definido por el producto

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta}, & \text{cuando } \alpha+\beta \leq 2n \\ \lambda_{2n}, & \text{cuando } \alpha+\beta > 2n \end{cases} \tag{6.7}$$

Los elementos λ_α son adimensionales y son representados por el conjunto de matrices $2n \times 2n$ $\left[\lambda_\alpha\right]^i{}_j = \delta^i{}_{j+\alpha}$, donde $i, j = 1, \cdots, 2n-1$, $\alpha = 0, \cdots, 2n$, y δ la delta de Kronecker.

Despues de extraer una subálgebra resonante y realizando su $0_S\,(=\lambda_{2n})$-reducción, uno encuentra una nueva álgebra de Lie conocida como álgebra tipo Maxwell[1] $\mathcal{M}_{2n+1}$ la cual en la Ref. [33] fue llamada álgebra $\mathfrak{B}_{2n+1}$ y cuyos generadores vienen definidos como

$$J_{(ab,2k)} = \lambda_{2k} \otimes \tilde{J}_{ab}, \tag{6.8}$$

$$P_{(a,2k+1)} = \lambda_{2k+1} \otimes \tilde{P}_a, \tag{6.9}$$

[1] También llamadas álgebras de Poincaré Generalizadas $\mathcal{P}_{2n+1}$

con $k = 0, \cdots, n-1$ y donde $\tilde{J}_{ab}$ y $\tilde{P}_a$ corresponde a los generadores originales el álgebra $\mathfrak{so}(2n,2)$. Estos nuevos generadores satisfacen las relaciones de conmutación [33]

$$
\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= Z_{ab}^{(1)}, \qquad [J_{ab}, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b && (6.10)\\
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{ca} J_{bd} + \eta_{db} J_{ca} - \eta_{da} J_{cb} && (6.11)\\
\left[J_{ab}, Z_c^{(i)}\right] &= \eta_{bc} Z_a^{(i)} - \eta_{ac} Z_b^{(i)}, && (6.12)\\
\left[Z_{ab}^{(i)}, P_c\right] &= \eta_{bc} Z_a^{(i)} - \eta_{ac} Z_b^{(i)}, && (6.13)\\
\left[Z_{ab}^{(i)}, Z_c^{(j)}\right] &= \eta_{bc} Z_a^{(i+j)} - \eta_{ac} Z_b^{(i+j)} && (6.14)\\
\left[J_{ab}, Z_{cd}^{(i)}\right] &= \eta_{cb} Z_{ad}^{(i)} - \eta_{ca} Z_{bd}^{(i)} + \eta_{db} Z_{ca}^{(i)} - \eta_{da} Z_{cb}^{(i)} && (6.15)\\
\left[Z_{ab}^{(i)}, Z_{cd}^{(j)}\right] &= \eta_{cb} Z_{ad}^{(i+j)} - \eta_{ca} Z_{bd}^{(i+j)} + \eta_{db} Z_{ca}^{(i+j)} - \eta_{da} Z_{cb}^{(i+j)} && (6.16)\\
\left[P_a, Z_c^{(i)}\right] &= Z_{ab}^{(i+1)}, \qquad \left[Z_a^{(i)}, Z_c^{(j)}\right] = Z_{ab}^{(i+j+1)}, && (6.17)
\end{aligned}
$$

donde hemos definido $J_{ab} = \lambda_0 \tilde{J}_{ab}$, $Z_{ab}^{(i)} = \lambda_{2i} \tilde{J}_{ab}$, $P_a = \lambda_1 \tilde{P}_a$ y $Z_a^{(i)} = \lambda_{2i+1} \tilde{P}_a$ con $i = 1, \cdots, n-1$.

Notemos que las relaciones de conmutación (6.11), (6.15) y (6.16) forman una subálgebra del álgebra $\mathcal{M}_{2n+1}$ la cual será denotada como $\mathfrak{L}^{\mathcal{M}_{2n+1}}$. Dicha subálgebra será de particular interés en las teorías Born-infeld de Gravedad y será introducida con más detalle en el siguiente capítulo.

Un estudio detallado del álgebra tipo Maxwell es realizado en la Ref. [39] mostrando efectivamente que la llamada álgebra de Lie $\mathfrak{B}_m$ corresponde a un álgebra $\mathcal{M}_m$. Un pequeño enfoque en esta dirección es realizado en el **Apendice C**.

6.3 Relatividad General desde lagrangiano CS $(2n+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}_{2n+1}$

En la Ref. [33] se ha mostrado que la dinámica de Relatividad General en dimensiones impares es obtenida desde Gravedad Chern-Simons para una cierta álgebra de Lie $\mathcal{M}_{2n+1}$.

El lagrangiano CS es construido a partir de una 1-forma conexión A $\mathcal{M}_{2n+1}$-valuada,

$$A=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\omega^{(ab,2k)}J_{(ab,2k)}+\frac{1}{l}e^{(a,2k+1)}P_{(a,2k+1)}\right], \tag{6.18}$$

El contenido inducido por $\mathcal{M}_{2n+1}$ incluye el vielbein e^{a}, la conexión de spin ω^{ab} y campos bósonicos adicionales $h^{a(i)}=e^{(a,2i+1)}$ y $k^{ab(i)}=\omega^{(ab,2i)}$. La 2-forma curvatura asociada $F=dA+A^{2}$ viene dada por

$$F=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2}F^{(ab,2k)}J_{(ab,2k)}+\frac{1}{l}F^{(a,2k+1)}P_{(a,2k+1)}\right], \tag{6.19}$$

donde

$$\begin{aligned} F^{(ab,2k)} &= d\omega^{(ab,2k)}+\eta_{cd}\omega^{(ac,2i)}\omega^{(db,2j)}\delta_{i+j}^{k}+\frac{1}{l^{2}}e^{(a,2i+1)}e^{(b,2j+1)}\delta_{i+j+1}^{k}, && (6.20)\\ F^{(a,2k+1)} &= de^{(a,2k+1)}+\eta_{bc}\omega^{(ab,2i)}e^{(c,2j)}\delta_{i+j}^{k}. && (6.21)\end{aligned}$$

Por consistencia con el procedimiento dual de la S-expansión en términos de las formas de Maurer-Cartan [11] se requiere que los campos $h^{a(i)}$ hereden unidades de longitud desde el vielbein. De este modo, es necesario introducir nuevamente el parámetro l acompañando ahora a los campos $h^{a(i)}$.

El lagrangiano CS invariante bajo el álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_{2n+1}$ es así dado por [33]

$$\begin{aligned} L_{CS}^{(2n+1)} &= \sum_{k=1}^{n} l^{2k-2}c_{k}\alpha_{j}\delta_{i_{1}+\cdots+i_{n+1}}^{j}\delta_{p_{1}+q_{1}}^{i_{k+1}}\cdots\delta_{p_{n-k}+q_{n-k}}^{i_{n}}\varepsilon_{a_{1}\cdots a_{2n+1}}\\ &\times R^{(a_{1}a_{2},i_{1})}\cdots R^{(a_{2k-1}a_{2k},i_{k})}e^{(a_{2k+1},p_{1})}e^{(a_{2k+2},q_{1})}\cdots\\ &\cdots e^{(a_{2n-1},p_{n-k})}e^{(a_{2n},q_{n-k})}e^{(a_{2n+1},i_{n+1})}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

donde

$$c_{k}=\frac{1}{2(n-k)+1}\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}$$

En el límite $l\rightarrow 0$, el único término no nulo en (6.22) corresponde al caso $k=1$, cuya única componente occure para $p=q_{1}=\cdots=q_{2n-1}=0$ y es proporcional al lagrangiano de Einstein-Hilbert en dimensiones impares [33]

$$\left.L_{CS}^{(2n+1)}\right|_{l=0}=\frac{n\alpha_{2n-1}}{2n-1}\varepsilon_{a_{1}\cdots a_{2n+1}}R^{a_{1}a_{2}}e^{a_{3}}\cdots e^{a_{2n+1}} \tag{6.23}$$

6.4 Lagrangiano Chern-Simons invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}$

En esta sección, siguiendo a Ref. [37], mostraremos que la dinámica de Einstein-Hilbert para dimensiones impares es obtenida desde un lagrangiano Chern-Simons en $D \leq (2p+1)$ dimensiones invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}_{(2p+1)}$. Sin embargo, esto ya no es posible para Lagrangianos CS en dimensiones $D \geq (2p+3)$ invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}_{(2p+1)}$ puesto que el término de EH desaparece.

6.4.1 Lagrangiano CS $(2+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}_7$

Antes de considerar el lagrangiano Chern-Simons $(2n+1)$-dimensional y el álgebra $\mathcal{M}_{(2p+1)}$, estudiaremos el lagrangiano CS $(2+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_7$. Dicha álgebra es obtenida mediante una S-expansión del álgebra AdS utilizando $S_E^{(5)}$ como el semigrupo abeliano finito. De hecho, despues de extraer una subálgebra resonante y de realizar una 0_S-reducción, se encuentra el álgebra de Lie $\mathcal{M}_7$. La nueva álgebra es generadad por $\left\{J_{ab}, P_a, Z_{ab}^{(1)}, Z_a^{(1)}, Z_{ab}^{(2)}, Z_a^{(2)}\right\}$, cuyos nuevos generadores pueden ser escritos como

$$\lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ab} = J_{ab}, \quad \lambda_2 \otimes \tilde{J}_{ab} = Z_{ab}^{(1)}, \quad \lambda_4 \otimes \tilde{J}_{ab} = Z_{ab}^{(2)}, \tag{6.24}$$

$$\lambda_1 \otimes \tilde{P}_a = P_a, \quad \lambda_3 \otimes \tilde{P}_a = Z_a^{(1)}, \quad \lambda_5 \otimes \tilde{P}_a = Z_a^{(2)}, \tag{6.25}$$

donde $\tilde{J}_{ab}$ y $\tilde{P}_a$ corresponden a los generadores del álgebra original $\mathfrak{so}(2,2)$ y λ_α pertenecen al semigrupo abeliano finito $S_E^{(5)}$. Los nuevos generadores del álgebra $\mathcal{M}_7$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= Z_{ab}^{(1)}, \qquad [J_{ab}, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b && (6.26)\\
[J_{ab,} J_{cd}] &= \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{ca} J_{bd} + \eta_{db} J_{ca} - \eta_{da} J_{cb} && (6.27)\\
\left[J_{ab}, Z_c^{(1)}\right] &= \eta_{bc} Z_a^{(1)} - \eta_{ac} Z_b^{(1)}, \qquad \left[J_{ab}, Z_c^{(2)}\right] = \eta_{bc} Z_a^{(2)} - \eta_{ac} Z_b^{(2)} && (6.28)\\
\left[Z_{ab}^{(1)}, P_c\right] &= \eta_{bc} Z_a^{(1)} - \eta_{ac} Z_b^{(1)}, \qquad \left[Z_{ab}^{(2)}, P_c\right] = \eta_{bc} Z_a^{(2)} - \eta_{ac} Z_b^{(2)} && (6.29)\\
\left[Z_{ab}^{(1)}, Z_c^{(1)}\right] &= \eta_{bc} Z_a^{(2)} - \eta_{ac} Z_b^{(2)}, \qquad \left[P_a, Z_c^{(1)}\right] = Z_{ab}^{(2)}. && (6.30)\\
\left[J_{ab,} Z_{cd}^{(1)}\right] &= \eta_{cb} Z_{ad}^{(1)} - \eta_{ca} Z_{bd}^{(1)} + \eta_{db} Z_{ca}^{(1)} - \eta_{da} Z_{cb}^{(1)} && (6.31)\\
\left[J_{ab,} Z_{cd}^{(2)}\right] &= \eta_{cb} Z_{ad}^{(2)} - \eta_{ca} Z_{bd}^{(2)} + \eta_{db} Z_{ca}^{(2)} - \eta_{da} Z_{cb}^{(2)} && (6.32)\\
\left[Z_{ab,}^{(1)} Z_{cd}^{(1)}\right] &= \eta_{cb} Z_{ad}^{(2)} - \eta_{ca} Z_{bd}^{(2)} + \eta_{db} Z_{ca}^{(2)} - \eta_{da} Z_{cb}^{(2)} && (6.33)\\
\left[Z_{ab}^{(2)}, Z_c^{(1)}\right] &= \left[Z_{ab}^{(2)}, Z_c^{(2)}\right] = \left[Z_{ab}^{(1)}, Z_c^{(2)}\right] = 0, && (6.34)\\
\left[Z_{ab,}^{(2)} Z_{cd}^{(2)}\right] &= \left[Z_{ab,}^{(1)} Z_{cd}^{(2)}\right] = \left[P_a, Z_c^{(2)}\right] = 0, && (6.35)\\
\left[Z_a^{(1)}, Z_c^{(1)}\right] &= \left[Z_a^{(1)}, Z_c^{(2)}\right] = \left[Z_a^{(2)}, Z_c^{(2)}\right] = 0. && (6.36)
\end{aligned}$$

Luego, siguiendo la Ref. [37] y haciendo uso del Teorema VII.2 de la Ref. [10] (ver sección 2.4), es posible mostrar que para $D = 2+1$, las únicas componentes no nulas de un tensor invariante para el álgebra $\mathcal{M}_7$ vienen dados por

$$\langle J_{ab} J_{cd} \rangle_{\mathcal{M}_7} = \alpha_0 \left(\eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}\right), \tag{6.37}$$

$$\left\langle J_{ab} Z_{cd}^{(1)} \right\rangle_{\mathcal{M}_7} = \alpha_2 \left(\eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}\right), \tag{6.38}$$

$$\left\langle Z_{ab}^{(1)} Z_{cd}^{(1)} \right\rangle_{\mathcal{M}_7} = \left\langle J_{ab} Z_{cd}^{(2)} \right\rangle_{\mathcal{M}_7} = \alpha_4 \left(\eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}\right), \tag{6.39}$$

$$\langle P_a P_c \rangle_{\mathcal{M}_7} = \alpha_2 \eta_{ac}, \tag{6.40}$$

$$\left\langle P_a Z_c^{(1)} \right\rangle_{\mathcal{M}_7} = \alpha_4 \eta_{ac}, \tag{6.41}$$

$$\langle J_{ab} P_c \rangle_{\mathcal{M}_7} = \alpha_1 \epsilon_{abc}, \tag{6.42}$$

$$\left\langle Z_{ab}^{(1)} P_c \right\rangle_{\mathcal{M}_7} = \left\langle J_{ab} Z_c^{(1)} \right\rangle_{\mathcal{M}_7} = \alpha_3 \epsilon_{abc}, \tag{6.43}$$

$$\left\langle Z_{ab}^{(2)} P_c \right\rangle_{\mathcal{M}_7} = \left\langle Z_{ab}^{(1)} Z_c^{(1)} \right\rangle_{\mathcal{M}_7} = \left\langle J_{ab} Z_c^{(2)} \right\rangle_{\mathcal{M}_7} = \alpha_5 \epsilon_{abc}. \tag{6.44}$$

donde α_0, α_1, α_2, α_3y α_5 son constantes arbitrarias independientes y sin dimensión. Con el fin de escribir un lagrangiano CS para el álgebra $\mathcal{M}_7$, consideramos la 1-forma conexión de gauge A $\mathcal{M}_7$-valuada, la cual es dada por

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}e^a P_a + \frac{1}{2}k^{(ab,1)}Z_{ab}^{(1)} + \frac{1}{l}h^{(a,1)}Z_a^{(1)} + \frac{1}{2}k^{(ab,2)}Z_{ab}^{(2)} + \frac{1}{l}h^{(a,2)}Z_a^{(2)}, \tag{6.45}$$

y la respectiva 2-forma curvatura

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}R^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}T^a P_a + \frac{1}{2}\left(D_\omega k^{(ab,1)} + \frac{1}{l^2}e^a e^b\right) Z_{ab}^{(1)} + \frac{1}{l}\left(D_\omega h^{(a,1)} + k^{a\ (1)}_{\ b} e^b\right) Z_a^{(1)} \\ &+\frac{1}{2}\left(D_\omega k^{(ab,2)} + k^{a\ (1)}_{\ c} k^{cb(1)} + \frac{1}{l^2}\left[e^a h^{(b,1)} + h^{(a,1)}e^b\right]\right) Z_{ab}^{(2)} \\ &+\frac{1}{l}\left(D_\omega h^{(a,2)} + k^{a\ (2)}_{\ c}\ e^c + k^{a\ (1)}_{\ c}\ h^{(c,1)}\right) Z_a^{(2)}. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Luego, usando el procedimiento dual de la S-expansión, encontramos que el lagrangiano Chern-Simons $(2+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}_7$ es dado por

$$\begin{aligned} L_{CS\ (2+1)}^{\mathcal{M}_7} &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{l}\varepsilon_{abc}\left(R^{ab}e^c - d\left(\frac{1}{2}\omega^{ab}e^c\right)\right) \\ &+\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{l}\varepsilon_{abc}\left(R^{ab}h^{(c,1)} + \mathfrak{R}^{(ab,1)}e^c + \frac{1}{3l^2}e^a e^b e^c - \frac{d}{2}\left(\omega^{ab}h^{(c,1)} + k^{(ab,1)}e^c\right)\right) \\ &+\frac{\boldsymbol{\alpha}_5}{l}\varepsilon_{abc}\left(R^{ab}h^{(c,2)} + \mathfrak{R}^{(ab,1)}h^{(c,1)} + \mathfrak{R}^{(ab,2)}e^c + \frac{1}{l^2}e^a e^b h^{(c,1)}\right. \\ &\left.-\frac{d}{2}\left(\omega^{ab}h^{(c,2)} + k^{(ab,1)}h^{(c,1)} + k^{(ab,2)}e^c\right)\right) + \frac{\boldsymbol{\alpha}_0}{2}\left(\omega^a_{\ b}d\omega^b_{\ a} + \frac{2}{3}\omega^a_{\ b}\omega^b_{\ c}\omega^c_{\ a}\right) \\ &+\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{2}\left(\omega^a_{\ b}dk^{b\ (1)}_{\ a} + k^{a\ (1)}_{\ b}d\omega^b_{\ a} + 2\omega^a_{\ b}\omega^b_{\ c}k^{c\ (1)}_{\ a} + \frac{2}{l^2}e_a T^a\right) \\ &+\frac{\boldsymbol{\alpha}_4}{2}\left(\omega^a_{\ b}dk^{b\ (2)}_{\ a} + k^{a\ (2)}_{\ b}d\omega^b_{\ a} + 2\omega^a_{\ b}\omega^b_{\ c}k^{c\ (2)}_{\ a} + k^{a\ (1)}_{\ b}dk^{b\ (1)}_{\ a}\right. \\ &\left.+2\omega^a_{\ b}k^{b\ (1)}_{\ c}k^{c\ (1)}_{\ a} + \frac{2}{l^2}e_a\mathfrak{T}^{(a,1)} + \frac{2}{l^2}h^{\ (1)}_{a}T^a\right). \end{aligned} \tag{6.47}$$

donde hemos redefinido

$$\mathfrak{R}^{(ab,1)} = D_\omega k^{(ab,1)}, \tag{6.48}$$

$$\mathfrak{R}^{(ab,2)} = D_\omega k^{(ab,2)} + k^{a\ (1)}_{\ c}k^{cb(1)} \tag{6.49}$$

$$\mathfrak{T}^{(a,1)} = D_\omega h^{(a,1)} + k^{a\ (1)}_{\ c}\ e^c, \tag{6.50}$$

El lagrangiano (6.47) es dividido en seis piezas independientes cada una proporcional a $\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_5,\ \alpha_0,\ \alpha_2,\ \alpha_4$ respectivamente. El término proporcional a α_1 corresponde al lagrangiano CS para el grupo de Poincaré $ISO\,(2,1)$ el cual además contiene al término de Eintein-Hilbert $\varepsilon_{abc}R^{ab}e^c$.

Al considerar la variación del lagrangiano (6.47) tenemos módulo término de borde

$$\begin{aligned}
\delta L^{\mathcal{M}_7}_{CS\ (2+1)} = & \frac{1}{l}\varepsilon_{abc}\left(\alpha_1 R^{ab} + \frac{\alpha_3}{l^2}e^a e^b + \alpha_3\mathfrak{R}^{(ab,1)} + \mathfrak{R}^{(ab,2)}\right)\delta e^c \\
& + \frac{1}{l}\varepsilon_{abc}\left(\alpha_3 R^{ab} + \alpha_5\mathfrak{R}^{(ab,1)} + \frac{\alpha_5}{l^2}e^a e^b\right)\delta h^{(c,1)} \\
& + \frac{1}{l}\varepsilon_{abc}\left(\alpha_5 R^{ab}\right)\delta h^{(c,2)} + \frac{1}{l}\varepsilon_{abc}\delta\omega^{ab}\left(\alpha_1 T^c + \alpha_3 D_\omega h^{(c,1)} + \alpha_5 D_\omega h^{(c,2)}\right) \\
& + \frac{1}{l}\varepsilon_{acd}\delta\omega^{ab}\left(\alpha_3 e_b k^{(cd,1)} + \alpha_5 h_b^{\ ,(1)} k^{(cd,1)} + \alpha_5 e_b k^{(cd,2)}\right) \\
& + \frac{1}{l}\varepsilon_{abc}\delta k^{(ab,1)}\left(\alpha_3 T^c + \alpha_5 D_\omega h^{(c,1)}\right) + \frac{1}{l}\varepsilon_{acd}\delta k^{(ab,1)}\left(2\alpha_5 k_b^{\ c,(1)} e^d\right) \\
& + \frac{1}{l}\varepsilon_{abc}\delta k^{(ab,2)}\left(\alpha_5 T^c\right) + \frac{\alpha_0}{2}\left(\delta L_3^{Lorentz}\right) + \frac{\alpha_2}{2}\left(\delta L_3^{Lorentz}\left(k^{(1)}\right)\right) \\
& + \frac{\alpha_4}{2}\left(\delta L_3^{Lorentz}\left(k^{(2)}\right)\right) + \frac{\alpha_4}{2}\left(\delta L_3^{Lorentz}\left(k^{(1)}k^{(1)}\right)\right) \\
& + \delta e_a\left(\frac{\alpha_4}{l^2}\mathfrak{T}^{(a,1)} + \frac{2\alpha_2}{l^2}T^a\right) + \delta\omega^{ab}\left(\frac{\alpha_2}{l^2}e_a e_b + \frac{\alpha_4}{l^2}e_b h_a^{\ (1)}\right) \\
& + \delta h_a^{\ ,(1)}\left(\frac{2\alpha_4}{l^2}T^a\right) + \delta k^{(ab,1)}\left(\frac{\alpha_4}{l^2}e_b e_a\right).
\end{aligned}$$

donde $L_3^{Lorentz} = \omega^a_{\ b}d\omega^b_{\ a} + \frac{2}{3}\omega^a_{\ b}\omega^b_{\ c}\omega^c_{\ a}$ corresponde al lagrangiano invariante bajo $\mathfrak{so}\,(2,1)$. Al considerar una solución sin materia $\left(k^{(ab,1)} = 0,\ k^{(ab,2)} = 0,\ h^{(a,1)} = 0,\ h^{(a,2)} = 0\right)$ con la condición $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_4 = 0$ y sin necesidad de imponer torsión nula, obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta L^{\mathcal{M}_7}_{CS\ (2+1)} &= \frac{\alpha_0}{2}\left(\delta L_3^{Lorentz}\right) + \frac{\alpha_2}{l^2}\delta\omega^{ab}\left(e_a e_b\right) + \frac{2\alpha_2}{l^2}\delta e^a\left(T_a\right) \\
&= \alpha_0\delta\omega^{ab}\left(R_{ab}\right) + \frac{\alpha_2}{l^2}\delta\omega^{ab}\left(e_a e_b\right) + \frac{2\alpha_2}{l^2}\delta e^a\left(T_a\right)
\end{aligned}$$

Puesto que los α's son arbitrarios podemos elegir $\alpha_0 = \alpha_2$ de tal modo que $\delta L^{\mathcal{M}_7}_{CS\ (2+1)} = 0$ conduce a las siguientes ecuaciones de moviemiento [37]

$$R^{ab} + \frac{1}{l^2}e^a e^b = 0, \tag{6.51}$$

$$T_a = 0. \tag{6.52}$$

las cuales corresponden a las ecuaciones de Relatividad General con constante cosmológica en $(2+1)$ dimensiones. Es interesante notar que el caso $\alpha_4 = \alpha_0 = \alpha_2$ conduce a las ecuaciones triviales

$$\begin{aligned} R^{ab} &= 0, && (6.53) \\ T_a &= 0, && (6.54) \\ e^a e^b &= 0. && (6.55) \end{aligned}$$

6.4.2 Lagrangiano CS $(4+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}_7$

Estudiemos a continuación el caso del lagrangiano $(4+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}_7$. Para su construcción, haremos uso de las componentes no nulas del tensor invariante para el álgebra deseada las cuales son obtenidas mediante una $S_E^{(5)}$-expansión resonante y reducida del álgebra $\mathfrak{so}(2,2)$. De este modo,para $D=5$, las únicas componentes no nulas del tensor invariante simétrico están dadas por [37]

$$\langle J_{ab} J_{cd} P_f \rangle_{\mathcal{M}_7} = \frac{4}{3} l^3 \alpha_1 \epsilon_{abcdf}. \tag{6.56}$$

$$\left\langle J_{ab} J_{cd} Z_f^{(1)} \right\rangle_{\mathcal{M}_7} = \frac{4}{3} l^3 \alpha_3 \epsilon_{abcdf}. \tag{6.57}$$

$$\left\langle J_{ab} Z_{cd}^{(1)} P_f \right\rangle_{\mathcal{M}_7} = \frac{4}{3} l^3 \alpha_3 \epsilon_{abcdf}. \tag{6.58}$$

$$\left\langle J_{ab} J_{cd} Z_f^{(2)} \right\rangle_{\mathcal{M}_7} = \frac{4}{3} l^3 \alpha_5 \epsilon_{abcdf}. \tag{6.59}$$

$$\left\langle J_{ab} Z_{cd}^{(1)} Z_f^{(1)} \right\rangle_{\mathcal{M}_7} = \frac{4}{3} l^3 \alpha_5 \epsilon_{abcdf}. \tag{6.60}$$

donde α_1, α_3 y α_5 son constantes independientes arbitrarias y de dimensión $[longitud]^{-3}$. Usando el procedimiento dual de la S-expansión, encontramos que el lagrangiano Chern-

Simons en $(4+1)$ dimensiones invariante bajo el álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_7$ es dado por

$$
\begin{aligned}
L_{(4+1)}^{\mathcal{M}_7} \;=\;& \boldsymbol{\alpha}_1 \varepsilon_{abcdf} \left(l^2 R^{ab} R^{cd} e^f \right) \\
& \boldsymbol{\alpha}_3 \varepsilon_{abcdf} \left(l^2 R^{ab} R^{cd} h^{(f,1)} + 2 l^2 R^{ab} \mathfrak{R}^{(cd,1)} e^f + \frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^f \right) \\
& \boldsymbol{\alpha}_5 \varepsilon_{abcdf} \left(l^2 R^{ab} R^{cd} h^{(f,2)} + 2 l^2 R^{ab} \mathfrak{R}^{(cd,1)} h^{(f,1)} + 2 l^2 R^{ab} \mathfrak{R}^{(cd,2)} e^f \right. \\
& \left. + l^2 \mathfrak{R}^{(ab,1)} \mathfrak{R}^{(cd,1)} e^f + 2 R^{ab} e^c e^d h^{(f,1)} + \frac{2}{3} \mathfrak{R}^{(ab,1)} e^c e^d e^f + \frac{1}{5 l^2} e^a e^b e^c e^d e^f \right)
\end{aligned}
$$

Luego, al variar el lagrangiano, tenemos modulo término de borde

$$
\begin{aligned}
\delta L_{(4+1)}^{\mathcal{M}_7} \;=\;& \varepsilon_{abcdf} \left(\boldsymbol{\alpha}_1 l^2 R^{ab} R^{cd} + 2 \boldsymbol{\alpha}_3 l^2 R^{ab} \mathfrak{R}^{(cd,1)} + 2 \boldsymbol{\alpha}_3 R^{ab} e^c e^d + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 l^2 R^{ab} \mathfrak{R}^{(cd,2)} \right. \\
& \left. + \boldsymbol{\alpha}_5 l^2 \mathfrak{R}^{(ab,1)} \mathfrak{R}^{(cd,1)} + 4 \boldsymbol{\alpha}_5 R^{ab} e^c h^{(d,1)} + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 \mathfrak{R}^{(ab,1)} e^c e^d + \frac{1}{l^2} \boldsymbol{\alpha}_5 e^a e^b e^c e^d \right) \delta e^f \\
& + \varepsilon_{abcdf} \left(\boldsymbol{\alpha}_3 l^2 R^{ab} R^{cd} + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 l^2 R^{ab} \mathfrak{R}^{(cd,1)} + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 R^{ab} e^c e^d \right) \delta h^{(f,1)} \\
& + \varepsilon_{abcdf} \boldsymbol{\alpha}_5 l^2 R^{ab} R^{cd} \delta h^{(f,2)} + 2 \varepsilon_{abcdf} \boldsymbol{\alpha}_5 l^2 \delta k^{(ab,2)} R^{cd} T^f \\
& + \varepsilon_{abcdf} \delta k^{(ab,1)} (2 \boldsymbol{\alpha}_3 l^2 R^{cd} T^f + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 l^2 R^{cd} D_\omega h^{(f,1)} + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 e^c e^d T^f \\
& + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 l^2 D_\omega k^{(cd,1)} T^f) + \varepsilon_{acdfg} \delta k^{(ab,1)} \left(4 \alpha_5 l^2 k_b^{\ c,(1)} R^{df} e^g + 2 \alpha_5 l^2 R_b^{\ c} k^{(df,1)} T^g \right) \\
& + \varepsilon_{abcdf} \delta \omega^{ab} \left[2 \boldsymbol{\alpha}_1 l^2 R^{cd} T^f + 2 \boldsymbol{\alpha}_3 l^2 R^{cd} D_\omega h^{(f,1)} + 2 \boldsymbol{\alpha}_3 l^2 \mathfrak{R}^{(cd,1)} T^f \right. \\
& - 2 \alpha_3 l^2 k^{(cd,1)} R^{fg} e_g + 2 \boldsymbol{\alpha}_3 e^c e^d T^f + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 l^2 R^{cd} D_\omega h^{(f,2)} + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 l^2 \mathfrak{R}^{(cd,1)} D_\omega h^{(f,1)} \\
& - 2 \alpha_5 l^2 k^{(cd,1)} R^{fg} h_g^{\ ,(1)} + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 l^2 D_\omega k^{(cd,2)} T^f - 2 \alpha_5 l^2 k^{(cd,2)} R^{fg} e_g \\
& \left. + 4 \alpha_5 l^2 \mathfrak{R}^{c\ ,(1)}_{\ g} k^{(gd,1)} e^f + 2 \alpha_5 l^2 k^{c\ ,(1)}_{\ g} k^{(gd,1)} T^f + 4 \boldsymbol{\alpha}_5 e^c T^d h^{(f,1)} + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 e^c e^d D_\omega h^{(f,1)} \right] \\
& + \varepsilon_{acdfg} \delta \omega^{ab} \left(2 \alpha_3 l^2 e_b R^{cd} k^{(fg,1)} + 2 \alpha_5 l^2 h_b^{\ ,(1)} R^{cd} k^{(fg,1)} + 2 \alpha_5 l^2 e_b R^{cd} k^{(fg,2)} \right. \\
& \left. - 2 \alpha_5 l^2 \mathfrak{R}_b^{\ c,(1)} k^{(df,1)} e^g + 2 \alpha_5 k_b^{\ c,(1)} \mathfrak{R}^{(df,1)} e^g + e_b k^{(cd,1)} \mathfrak{R}^{(fg,1)} + 2 \alpha_5 e_b k^{(cd,1)} e^f e^g \right)
\end{aligned}
$$

Imponiendo una solución sin materia ($k^{(ab,1)} = 0,\ k^{(ab,2)} = 0,\ h^{(a,1)} = 0,\ h^{(a,2)} = 0$), encontramos que

$$
\begin{aligned}
\delta L_{(4+1)}^{\mathcal{M}_7} \;=\;& \varepsilon_{abcdf} \left[\left(\boldsymbol{\alpha}_1 l^2 R^{ab} R^{cd} + 2 \boldsymbol{\alpha}_3 R^{ab} e^c e^d + \frac{1}{l^2} \boldsymbol{\alpha}_5 e^a e^b e^c e^d \right) \delta e^f \right. \\
& + \left(\boldsymbol{\alpha}_3 l^2 R^{ab} R^{cd} + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 R^{ab} e^c e^d \right) \delta h^{(f,1)} + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 l^2 \delta k^{(ab,2)} R^{cd} T^f + \boldsymbol{\alpha}_5 l^2 R^{ab} R^{cd} \delta h^{(f,2)} \\
& \left. + \delta k^{(ab,1)} \left(2 \boldsymbol{\alpha}_3 l^2 R^{cd} T^f + 2 \boldsymbol{\alpha}_5 e^c e^d T^f \right) + \delta \omega^{ab} \left(2 \boldsymbol{\alpha}_1 l^2 R^{cd} T^f + 2 \boldsymbol{\alpha}_3 e^c e^d T^f \right) \right]
\end{aligned}
$$

Luego, cuando α_1 y α_5 se anulan, obtenemos finalmente [37]

$$\begin{aligned}\delta L_{(4+1)}^{\mathcal{M}_7} &= \varepsilon_{abcdf}\left(2\boldsymbol{\alpha}_3 R^{ab}e^c e^d\right)\delta e^f + \varepsilon_{abcdf}\left(\boldsymbol{\alpha}_3 l^2 R^{ab}R^{cd}\right)\delta h^{(f,1)} \\ &\quad +\varepsilon_{abcdf}\delta k^{(ab,1)}\left(2\boldsymbol{\alpha}_3 l^2 R^{cd}T^f\right) + \delta\omega^{ab}\left(2\boldsymbol{\alpha}_3 e^c e^d T^f\right)\end{aligned} \tag{6.61}$$

Así, si imponemos torsión nula, vemos que en $D = 5$, el Lagrangeano $\mathcal{M}_7$-valuado desemboca en las mismas ecuaciones de movimiento que el el lagrangiano $\mathcal{M}_5$-valuado [33]. De este modo, al igual que en la Ref. [34], además de satisfacer las ecuaciones de Einstein también se deben satisfacer ecuación tipo "Gauss-Bonet". Esto representa una restricción severa en la geometría y no simplemente una correción a Relatividad General. Al igual que en la Ref. [33], la presencia del paramétro l hace la diferencia. En efecto, en el límite cuando $l \to 0$, la restricción geométrica se anula y $\delta L_{CS\,(4+1)}^{\mathcal{M}_7} = 0$ conduce a la dinamica de Einstein-Hilbert en el vacio,

$$\delta L_{CS\,(4+1)}^{\mathcal{M}_7} = \varepsilon_{abcdf}\left(2\boldsymbol{\alpha}_3 R^{ab}e^c e^d\right)\delta e^f + \varepsilon_{abcdf}\delta\omega^{ab}\left(2\boldsymbol{\alpha}_3 e^c e^d T^f\right). \tag{6.62}$$

Del mismo modo, considerando una solución libre de materia y despreciando la constante cosmológica, el límite $l \to 0$ nos conduce sólo al término de Einstein Hilbert en el lagrangiano

$$L_{CS\,(4+1)}^{\mathcal{M}_7} = \frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_3 \varepsilon_{abcdf} R^{ab}e^c e^d e^f. \tag{6.63}$$

6.4.3 Lagrangiano CS $(6+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}_5$

Consideremos a continuación el lagrangiano Chern-Simons $(6+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}_5$. Dicha álgebra es obtenida mediante una $S_E^{(3)}$-expansión resonante reducida del álgebra $\mathfrak{so}(6,2)$. Los generadores del álgebra de Lie $\mathcal{M}_5$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$
\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= Z_{ab}, \qquad [J_{ab}, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b && (6.64)\\
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{ca} J_{bd} + \eta_{db} J_{ca} - \eta_{da} J_{cb} && (6.65)\\
[J_{ab}, Z_c] &= \eta_{bc} Z_a - \eta_{ac} Z_b, && (6.66)\\
[Z_{ab}, P_c] &= \eta_{bc} Z_a - \eta_{ac} Z_b, && (6.67)\\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{cb} Z_{ad} - \eta_{ca} Z_{bd} + \eta_{db} Z_{ca} - \eta_{da} Z_{cb} && (6.68)\\
[Z_{ab}, Z_c] &= [P_a, Z_c] = [Z_a, Z_c] = [Z_{ab}, Z_{cd}] = 0. && (6.69)
\end{aligned}
$$

donde los nuevos generadores pueden escribirse como el producto directo [33]

$$
\begin{aligned}
J_{ab} &= \lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ab}, \qquad Z_{ab} = \lambda_2 \otimes \tilde{J}_{ab}, && (6.70)\\
P_a &= \lambda_1 \otimes \tilde{P}_a, \qquad Z_a = \lambda_3 \otimes \tilde{P}_a. && (6.71)
\end{aligned}
$$

La 1-forma conexión de gauge A $\mathcal{M}_5$-valuada es dada por

$$
A = \frac{1}{2}\omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} e^a P_a + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{l} h^a Z_a, \tag{6.72}
$$

y la 2-forma curvatura asociada

$$
F = \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} T^a P_a + \frac{1}{2}\left(D_\omega k^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b \right) Z_{ab} + \frac{1}{l}\left(D_\omega h^a + k^a{}_b e^b \right) Z_a. \tag{6.73}
$$

Usando el procedimiento dual de la S-expansión, es posible mostrar que el Lagrangiano Chern-Simons $(6+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_5$ es dada por [37]

$$
\begin{aligned}
L_{CS\,(6+1)}^{\mathcal{M}_5} &= \frac{\alpha_1}{l} \varepsilon_{abcdefg} \left(R^{ab} R^{cd} R^{ef} e^g \right) && (6.74)\\
&\quad + \frac{\alpha_3}{l} \varepsilon_{abcdefg} \left(R^{ab} R^{cd} R^{ef} h^g + 3 R^{ab} R^{cd} D_\omega k^{ef} e^g + \frac{1}{l^2} R^{ab} R^{cd} e^e e^f e^g \right).
\end{aligned}
$$

Debido a la estructura del semigrupo, la $S_E^{(3)}$-expansión resonante reducida del álgebra AdS tiene como consecuencia que el término de Einstein-Hilbert desaparece del lagrangiano $(6+1)$-dimensional. Del mismo modo, es trivial notar que la variación de dicho lagrangiano no desemboca en las ecuaciones de Relatividad General y que ningún límite sobre l permite recobrar la dinámica de Einstein-Hilbert. En efecto, la variación del lagrangiano modulo término de borde viene dada por

$$\begin{aligned}
\delta L_{(6+1)}^{\mathcal{M}_5} &= \frac{\mathbf{1}}{l}\varepsilon_{abcdefg}\left(\alpha_1 R^{ab}R^{cd}R^{ef} + 3\alpha_3 R^{ab}R^{cd}D_\omega k^{ef} + \frac{3}{l^2}\alpha_3 R^{ab}R^{cd}e^e e^f\right)\delta e^g \\
&+\frac{\mathbf{1}}{l}\varepsilon_{abcdefg}\left(\alpha_3 R^{ab}R^{cd}R^{ef}\right)\delta h^g \\
&+\frac{\mathbf{1}}{l}\varepsilon_{abcdefg}\delta\omega^{ab}\left(3\alpha_1 R^{cd}R^{ef}T^g + 3\alpha_3 R^{cd}R^{ef}\ D_\omega h^g + 6\alpha_3 R^{cd}D_\omega k^{ef}T^g\right. \\
&\left.+\frac{6}{l^2}\alpha_3 R^{cd}e^e e^f T^g\right) + \frac{\mathbf{1}}{l}\varepsilon_{acdefgh}\delta\omega^{ab}\left(3e_b R^{cd}R^{ef}k^{gh}\right) \\
&+\frac{\mathbf{1}}{l}\varepsilon_{abcdefg}\delta k^{ab}\left(3\alpha_3 R^{cd}R^{ef}T^g\right).
\end{aligned} \tag{6.75}$$

Luego, imponiendo la condición libre de torsión y considerando el caso donde $k^{ab} = 0$, $h^a = 0$ con $\alpha_1 = 0$ encontramos

$$\delta L_{(6+1)}^{\mathcal{M}_5} = \frac{\alpha_3}{l^2}\varepsilon_{abcdefg}R^{ab}R^{cd}e^e e^f\delta e^g + \frac{\alpha_3}{l}\varepsilon_{abcdefg}R^{ab}R^{cd}R^{ef}\delta h^g, \tag{6.76}$$

lo cual obviamente no corresponde a la dinámica de Relatividad General.

6.4.4 Relatividad General en dimensiones impares

Hemos visto que las acciones Chern-Simons $(2p+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra de Lie $\mathcal{M}_{2m+1}$ no siempre desembocan en la dinámica de Relatividad General. En efecto, a pesar que todos estos lagrangianos conducen a ecuaciones tipo Lovelock existen ciertos valores de m para el cual es imposible obtener el término de Einstein-Hilbert en el lagrangiano CS $(2p+1)$-dimensional $\mathcal{M}_{2m+1}$-invariante. Esto se debe a que la presencia del término de Einstein-Hilbert requiere de la presencia de la componente $\left\langle \mathbf{J}_{a_1a_2}\mathbf{Z}_{a_3a_4}\cdots\mathbf{Z}_{a_{2p-1}a_{2p}}\mathbf{P}_{a_{2p+1}}\right\rangle$ del tensor invariante, la cual viene dada por

$$\left\langle \mathbf{J}_{a_1a_2}\mathbf{Z}_{a_3a_4}\cdots\mathbf{Z}_{a_{2p-1}a_{2p}}\mathbf{P}_{a_{2p+1}}\right\rangle_{\mathcal{M}_{2m+1}} = \begin{cases} l^{2p-1}\alpha_{2p-1}\left\langle J_{a_1a_2}\cdots J_{a_{2p-1}a_{2p}}P_{a_{2p+1}}\right\rangle_{AdS}, & \text{si } m \geq p \\ 0, & \text{si } m < p. \end{cases} \tag{6.77}$$

Esta observación permite establecer el siguiente teorema [37]:

Teorema 8 *Si $\mathcal{M}_{2m+1}$ es el álgebra tipo Maxwell, la cual es obtenida del álgebra AdS mediante una $S_E^{(2m-1)}$-expansión resonante reducida y si $L_{CS\ (2p+1)}^{\mathcal{M}_{2m+1}}$ es un lagrangiano Chern-Simons $(2p+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}_{2m+1}$. Entonces, el lagrangiano Chern-Simons $(2p+1)$-dimensional conducirá al lagrangiano de Einstein-Hilbert en un cierto límite de la constante de acoplamiento l, si y solo si $m \geq p$.*

El **Teorema 8** nos permite alistar en la siguiente tabla el conjunto de Lagrangianos Chern-Simons $L_{CS\ (2p-1)}^{\mathcal{M}_{2m+1}}$ invariante bajo el álgebra de Lie $\mathcal{M}_{2m+1}$, que desemboca en la dinámica de Relatividad General en un cierto límite de la constante de acoplamiento l:

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{M}_3 \\
\mathcal{M}_5 \\
\mathcal{M}_7 \\
\vdots \\
\vdots \\
\mathcal{M}_{2n-1} \\
\mathcal{M}_{2n+1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllllll}
L_{CS\ (3)}^{\mathcal{M}_3} & & & & & & \\
L_{CS\ (3)}^{\mathcal{M}_5} & L_{CS\ (5)}^{\mathcal{M}_5} & & & & & \\
L_{CS\ (3)}^{\mathcal{M}_7} & L_{CS\ (5)}^{\mathcal{M}_7} & L_{CS\ (7)}^{\mathcal{M}_7} & & & & \\
 & \vdots & & & & & \\
 & \vdots & & & & & \\
L_{CS\ (3)}^{\mathcal{M}_{2n-1}} & L_{CS\ (5)}^{\mathcal{M}_{2n-1}} & L_{CS\ (7)}^{\mathcal{M}_{2n-1}} & \cdots & \cdots & L_{CS\ (2n-1)}^{\mathcal{M}_{2n-1}} & \\
L_{CS\ (3)}^{\mathcal{M}_{2n+1}} & L_{CS\ (5)}^{\mathcal{M}_{2n+1}} & L_{CS\ (7)}^{\mathcal{M}_{2n+1}} & \cdots & \cdots & L_{CS\ (2n-1)}^{\mathcal{M}_{2n+1}} & L_{CS\ (2n+1)}^{\mathcal{M}_{2n+1}}
\end{array}
\tag{6.78}
$$

Es interesante notar que para cada dimensión D del espacio-tiempo, tenemos que el Lagrangiano $L_{CS\ (D)}$ invariante bajo el álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_{2n+1}$ contiene a todos los otros lagrangianos D-dimensional evaluados en un álgebra $\mathcal{M}_{2m+1}$ con $m < n$. De modo que siempre es posible obtener algún acción de un álgebra menor apagando los campos correspondientes.

Capítulo 7

Relatividad General desde Gravedad Born-Infeld

7.1 Introducción

Un acción Born-Infeld para Gravedad en $D = 2n$ dimensiones es dado por [16, 25]

$$S = \int \sum_{p=0}^{n} \frac{\kappa}{2n} \binom{n}{p} l^{2p-2n} \varepsilon_{a_1 \cdots a_{2n}} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \cdots e^{a_{2n}}, \tag{7.1}$$

donde e^a corresponde a la 1-forma vielbein, y $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb}$ a la 2-forma curvatura en el formalismo de primer orden.

La acción (7.1) es invariante off-shell bajo el álgebra de Lie de Lorentz $\mathfrak{so}(2n-1,1)$, cuyos generadores $\tilde{J}_{ab}$ de las transformaciones de Lorentz satisfacen las relaciones de conmutación

$$\left[\tilde{J}_{ab}, \tilde{J}_{cd}\right] = \eta_{cb} \tilde{J}_{ad} - \eta_{ca} \tilde{J}_{bd} + \eta_{db} \tilde{J}_{ca} - \eta_{da} \tilde{J}_{cb}. \tag{7.2}$$

El símbolo Levi-Civita $\varepsilon_{a_1 \cdots a_{2n}}$ en (7.1) debería ser considerado como la única componente no nula del tensor invariante simétrico $\mathfrak{so}(2n-1,1)$ de rango n, es decir

$$\left\langle \tilde{J}_{a_1 a_2} \cdots \tilde{J}_{a_{2n-1} a_{2n}} \right\rangle = \frac{2^{n-1}}{n} \epsilon_{a_1 \cdots a_{2n}}. \tag{7.3}$$

Nuevamente, con el fin de interpretar el campo de gauge como el vielbein, uno esta forzado a introducir un parámetro de longitud l en la teoría. Esto tiene su origen en los siguientes argumentos: Dado que (i) el operador derivada exterior $d = dx^{\mu}\partial_{\mu}$ es adimensional, y que (ii) uno elije siempre los generadores T_A adimensionales tal que el campo 1-forma conexión $A = A_{\mu}^{A} T_A dx^{\mu}$ debe ser adimensional. No obstante, el vielbein $e^a = e^a{}_{\mu} dx^{\mu}$ debe tener dimensión de longitud si está se relaciona a la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ a través de la ecuación usual $g_{\mu\nu} = e^a{}_{\mu} e^b{}_{\nu} \eta_{ab}$. Esto significa que el "verdadero" campo de gauge debe ser de la forma e^a/l, con l un parámetro de longitud.

Es importante señalar que el lagrangiano Born-Infeld se decompone en varios sectores cada uno proporcionales a diferentes potencias de l, como podemos ver directamente en la ecuación (7.1). Sin embargo, ni el límite $l \to \infty$ ni el límite $l \to 0$ conduce al término de Einstein-Hilbert.

Si se desea construir un teoria de Lovelock que conduce bajo cierto limite a Relatividad General, es necesario que tanto la familia Chern-Simons como la familia Born-Infeld sean capaces de desembocar en las ecuaciones de Einstein. No obstante puesto que la acción BI es solo invariante bajo rotaciones locales de Lorentz y no bajo boost AdS, no es posible construir un lagrangiano BI invariante bajo el álgebra $\mathcal{M}_{2n+1}$, la cual se obtiene como una S-expansión del algebra AdS.

Por otro lado sabemos que el álgebra de Lorentz es una subálgebra del álgebra AdS. De forma analoga existe una subálgebra del álgebra $\mathcal{M}_{2n+1}$ que posee una esctrura similar al álgebra de Lorentz y que denotaremos por $\mathfrak{L}_{2n+1}^{\mathcal{M}}$. En la Ref. [35] se ha mostrado que Relatividad general $2n$-dimensional es embebida en una teoría BI para una cierta álgebra de Lie $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$. El proposito de este capítulo es mostrar que Relatividad General en dimensiones pares surge como un límite de la constante de acoplamiento l de un lagrangiano Born-Infeld $D \leq 2p$-dimensional invariante bajo el álgebra de Lie $\mathfrak{L}_{2p}^{\mathcal{M}}$. Se mostrará que esto no es posible para lagrangianos BI $D \geq (2p+2)$-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}_{2p}^{\mathcal{M}}$ [37].

7.2 Álgebra de Maxwell tipo Lorentz $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$

Siguiendo las definiciones de la Ref. [10] (ver sección 2.3), consideremos la S-expansión del álgebra de Lie $\mathfrak{so}\,(2n-1,1)$ usando el semigrupo abeliano $S_E^{(2n-2)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_{2n-1}\}$ definido por el producto

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta}, & \text{cuando } \alpha+\beta \leq 2n \\ \lambda_{2n}, & \text{cuando } \alpha+\beta > 2n \end{cases} \tag{7.4}$$

Los elementos λ_α son adimensionales y son representados por el conjunto de matrices $2n \times 2n$ $[\lambda_\alpha]^i{}_j = \delta^i{}_{j+\alpha}$, donde $i, j = 1, \cdots, 2n-1$, $\alpha = 0, \cdots, 2n$, y δ la delta de Kronecker.

Luego, usando un subsemigrupo $S_0^{(2n-2)} = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_{4,} \cdots, \lambda_{2n-2}, \lambda_{2n-1}\}$ del semigrupo $S_E^{(2n-2)}$ y realizando una 0_S-reducción, uno encuentra una nueva álgebra de Lie[2], llamada $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$ la cual corresponde a una subálgebra del álgebra $\mathcal{M}_{2n}$ y cuyos generadores $J_{ab} = \lambda_0 \tilde{J}_{ab}$, $Z_{ab}^{(i)} = \lambda_{2i} \tilde{J}_{ab}$ con $i = 1, \cdots, n-1$satisfacen las relaciones de conmutación [35]

$$[J_{ab,} J_{cd}] = \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{ca} J_{bd} + \eta_{db} J_{ca} - \eta_{da} J_{cb} \tag{7.5}$$

$$\left[J_{ab,} Z_{cd}^{(i)}\right] = \eta_{cb} Z_{ad}^{(i)} - \eta_{ca} Z_{bd}^{(i)} + \eta_{db} Z_{ca}^{(i)} - \eta_{da} Z_{cb}^{(i)} \tag{7.6}$$

$$\left[Z_{ab,}^{(i)} Z_{cd}^{(j)}\right] = \eta_{cb} Z_{ad}^{(i+j)} - \eta_{ca} Z_{bd}^{(i+j)} + \eta_{db} Z_{ca}^{(i+j)} - \eta_{da} Z_{cb}^{(i+j)} \tag{7.7}$$

Como fue bien mencionado en la Ref. [37], el álgebra $\mathfrak{L}_{2n+1}^{\mathcal{M}}$ posee la propiedad de ser identica al álgebra $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$. Sin embargo, poseen origenes distintos, en efecto, $\mathfrak{L}_{2n+1}^{\mathcal{M}}$ proviene directamente del álgebra de Lie $\mathcal{M}_{2n+1}$ mientras que $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$ proviene del álgebra $\mathcal{M}_{2n}$. Si bien en la Ref. [35] se utilizó como notación $\mathfrak{L}_{2n+1}^{\mathcal{M}}$, para efectos practicos y para no confundir al lector, se utilizará a lo largo de este capítulo la notación $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$.

7.3 Relatividad General desde Lagrangiano BI $2n$-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$

En esta sección mostraremos como obtener Relatividad General en dimensiones pares desde gravedad Born-Infeld $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$-valuada. Antes de escribir el lagrangiano de Einstein-Born-

[2] También denotada como $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathfrak{B}}$ o $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{P}}$

Infeld $2n$-dimensional estudiaremos con más detalle el caso $D = 4$ dimensiones.

7.3.1 Lagrangiano BI en $D = 4$ invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}$

Siguiendo las definiciones de la Ref. [10] (ver sección 2.3), consideremos la S-expansión del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3,1)$ usando como semigrupo el subsemigrupo $S_0^{(2)} = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3\}$ del semigrupo $S_E^{(2)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Despues de realizar una 0_S-reducción, uno encuentra una nueva álgebra de Lie que denotaremos $\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}$ la cual corresponde a una subálgebra del álgebra de Maxwell $\mathcal{M}_4$. La nueva álgebra es generadad por $\{J_{ab}, Z_{ab}\}$ cuyos nuevos generadores pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ab} &= J_{ab}, & (7.8)\\ \lambda_2 \otimes \tilde{J}_{ab} &= Z_{ab}, & (7.9) \end{aligned}$$

donde $\tilde{J}_{ab}$ corresponde a los generadores del álgebra original $\mathfrak{so}(3,1)$ y λ_α pertenecen al semigrupo abeliano finito $S_0^{(2)}$. Los nuevos generadores del álgebra $\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{ca} J_{bd} + \eta_{db} J_{ca} - \eta_{da} J_{cb} & (7.10)\\ [J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{cb} Z_{ad} - \eta_{ca} Z_{bd} + \eta_{db} Z_{ca} - \eta_{da} Z_{cb} & (7.11)\\ [Z_{ab}, Z_{cd}] &= 0. & (7.12) \end{aligned}$$

Usando el Teorema VII.2 de la Ref. [10] (ver sección 2.4) es posible mostrar que las únicas componentes no nulas de un tensor invariante simétrico para el álgebra $\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}$ vienen dadas por

$$\langle J_{ab} J_{cd} \rangle_{\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}} = \alpha_0 l^2 \varepsilon_{abcd}, \tag{7.13}$$

$$\langle J_{ab} Z_{cd} \rangle_{\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}} = \alpha_2 l^2 \varepsilon_{abcd}. \tag{7.14}$$

donde α_0 y α_2 son constantes arbitrarias y de dimensión $[longitud]^{-2}$.

Luego, usando el procedimiento dual de la S-expansión en términos de las formas de Maurer-Cartans [11], encontramos que el Lagrangiano Born-Infeld invariante bajo el álgebra

$\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}$ es dado por

$$L_{BI\ (4)}^{\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}} = \frac{\alpha_0}{4}\epsilon_{abcd} l^2 R^{ab} R^{cd} + \frac{\alpha_2}{2}\epsilon_{abcd}\left(R^{ab} e^c e^d + l^2 D_\omega k^{ab} R^{cd}\right). \tag{7.15}$$

Aquí podemos ver que el lagrangiano (7.15) es descompuesto en dos piezas independientes, uno proporcional a α_0 y el otro proporcional a α_2. El término proporcional a α_0 corresponde al invariante de Euler mientras que el término proporcional a α_2 contiene al término de Einstein Hilbert $\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d$ más un término de borde el cual contiene además de la usual curvatura R^{ab}, un campo de materia bosónico k^{ab}.

A diferencia del lagrangiano BI usual la constante de acoplamiento l^2 ya no aparece explicitamente en el término de Einstein Hilbert sino que acompaña los restantes elementos del lagrangeano. Esto permite obtener de forma explicita el Lagrangiano de EH al realizar el límite $l = 0$ garantizando así que la dinamica obtenida corresponde a la de Relatividad General.

Sin embargo, la ausencia de la constante cosmológica $\varepsilon_{abcd}\frac{1}{l^4} e^a e^b e^c e^d$ en el lagrangeano (7.15) tiene como consecuencia que no es necesario imponer el límite $l = 0$ para que las ecuaciones de movimiento resultantes sean las ecuaciones de RG. En efecto al considerar la variación del lagrangeano modulo término de borde tenemos que [35]

$$\delta L_{BI\ (4)}^{\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}} = \varepsilon_{abcd}\left(\alpha_2 R^{ab} e^c\right)\delta e^d + \varepsilon_{abcd}\ \delta\omega^{ab}\left(\alpha_2 T^c e^d + l^2 \alpha_2 k^c{}_e R^{ed}\right). \tag{7.16}$$

De modo que $\delta L_{BI\ (4)}^{\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}} = 0$ nos conduce a la dynamica de EH siempre que se considere un solución libre de materia $\left(k^{ab} = 0\right)$. No obstante, veremos más adelante que esto ya no es posible con lagrangeanos en dimensiones mayores, al menos que se realize un limite sobre la constante de acoplamiento l.

7.3.2 Lagrangiano BI en $D = 2n$ invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$

Siguiendo las definiciones de la Ref. [10] (ver sección 2.3), consideremos la S-expansión del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2n-1,1)$ usando como semigrupo el subsemigrupo $S_0^{(2n-2)} = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_4, \cdots, \lambda_{2n-1}\}$

del semigrupo $S_E^{(2n-2)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{2n-1}\}$. Despues de realizar una $0_S\,(=\lambda_{2n-1})$-reducción, uno encuentra una nueva álgebra de Lie que denotaremos $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$ la cual corresponde a una subálgebra del álgebra de Maxwell $\mathcal{M}_{2n}$. La nueva álgebra es generadad por $\left\{J_{ab}, Z_{ab}^{(i)}\right\}$ cuyos nuevos generadores pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ab} &= J_{ab}, & (7.17) \\ \lambda_{2i} \otimes \tilde{J}_{ab} &= Z_{ab}^{(i)}, & (7.18) \end{aligned}$$

donde $\tilde{J}_{ab}$ corresponde a los generadores del álgebra original $\mathfrak{so}\,(2n-1,1)$ y λ_α pertenecen al semigrupo abeliano finito $S_0^{(2n-2)}$. Los nuevos generadores del álgebra $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} \left[J_{ab}, J_{cd}\right] &= \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{db}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb}, & (7.19) \\ \left[J_{ab}, Z_{cd}^{(i)}\right] &= \eta_{cb}Z_{ad}^{(i)} - \eta_{ca}Z_{bd}^{(i)} + \eta_{db}Z_{ca}^{(i)} - \eta_{da}Z_{cb}^{(i)}, & (7.20) \\ \left[Z_{ab}^{(i)}, Z_{cd}^{(j)}\right] &= \eta_{cb}Z_{ad}^{(i+j)} - \eta_{ca}Z_{bd}^{(i+j)} + \eta_{db}Z_{ca}^{(i+j)} - \eta_{da}Z_{cb}^{(i+j)}. & (7.21) \end{aligned}$$

Usando el Teorema VII.2 de la Ref. [10] (ver sección 2.4) es posible mostrar que las únicas componentes no nulas de un tensor invariante simétrico para el álgebra $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$ vienen dadas por

$$\left\langle J_{(a_1a_2,i_1)} \cdots J_{(a_{2n-1}a_{2n},i_n)} \right\rangle = \frac{2^{n-1}l^{2n-2}}{n}\alpha_j \delta_{i_1+\cdots+i_n}^{j} \varepsilon_{a_1\cdots a_{2n}}, \tag{7.22}$$

donde i_p, $j = 0, \cdots, 2n-2$ y α_j son constantes arbitrarias de dimensiones $[longitud]^{2-2n}$. Con el fin de escribir un Lagrangiano Born-Infeld para el álgebra $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$, iniciamos con la 2-forma curvatura

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} F^{(ab,2k)} J_{(ab,2k)}, \tag{7.23}$$

donde

$$\begin{aligned} F^{(ab,2k)} = {} & d\omega^{(ab,2k)} + \eta_{cd}\omega^{(ac,2i)}\omega^{(db,2j)}\delta_{i+j}^{k} \\ & + \frac{1}{l^2} e^{(a,2i+1)} e^{(b,2j+1)} \delta_{i+j+1}^{k} \end{aligned} \tag{7.24}$$

Usando el procedimiento dual de la S-expansión en términos de las formas de Maurer-Cartan [11], encontramos que el Lagrangiano BI $2n$-dimensional $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$-invariante es dado por

$$
\begin{aligned}
L_{BI\ (2n)}^{\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}} = \sum_{k=1}^{n} l^{2k-2} \frac{1}{2n} \binom{n}{k} \alpha_j \delta_{i_1+\cdots+i_n}^{j} \delta_{p_1+q_1}^{i_{k+1}} \cdots \delta_{p_{n-k}+q_{n-k}}^{i_n} \\
\varepsilon_{a_1\cdots a_{2n}} R^{(a_1 a_2, i_1)} \cdots R^{(a_{2k-1} a_{2k}, i_k)} e^{(a_{2k+1}, p_1)} \\
e^{(a_{2k+2}, q_1)} \cdots e^{(a_{2n-1}, p_{n-k})} e^{(a_{2n}, q_{n-k})}. \qquad (7.25)
\end{aligned}
$$

De (7.25) podemos ver que en el límite $l = 0$, el único término no nulo corresponde al caso $k = 1$, a saber

$$
\begin{aligned}
L_{BI\ (2n)}^{\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}}\Big|_{l=0} &= \frac{1}{2} \alpha_j \delta_{i+k_1+\cdots+k_{2n-2}}^{j} \varepsilon_{a_1\cdots a_{2n}} R^{(a_1 a_2, i)} e^{(a_3, k_1)} \cdots e^{(a_{2n}, k_{2n-2})} \\
&= \frac{1}{2} \alpha_j \delta_{2p+2q_1+1+\cdots+2_{q_{2n-2}}+1}^{j} \varepsilon_{a_1\cdots a_{2n}} R^{(a_1 a_2, 2p)} \\
&\quad e^{(a_3, 2q_1+1)} \cdots e^{\left(a_{2n}, 2_{q_{2n-2}}+1\right)} \\
&= \frac{1}{2} \alpha_j \delta_{2(p+q_1+\cdots+q_{2n-2})+2n-2}^{j} \varepsilon_{a_1\cdots a_{2n}} R^{(a_1 a_2, 2p)} \\
&\quad e^{(a_3, 2q_1+1)} \cdots e^{\left(a_{2n}, 2_{q_{2n-2}}+1\right)}. \qquad (7.26)
\end{aligned}
$$

cuyas únicas componentes distintas de ceros (correspondiente al caso $p = q_1 = \cdots = q_{2n-2} = 0$) es proporcional al Lagrangiano de Einstein-Hilbert:

$$
\begin{aligned}
L_{BI\ (2n)}^{\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}}\Big|_{l=0} &= \frac{1}{2} \alpha_{2n-2} \varepsilon_{a_1\cdots a_{2n}} R^{(a_1 a_2, 0)} e^{(a_3, 1)} \cdots e^{(a_{2n}, 1)} \\
&= \frac{1}{2} \alpha_{2n-2} \varepsilon_{a_1\cdots a_{2n}} R^{a_1 a_2} e^{a_3} \cdots e^{a_{2n}}. \qquad (7.27)
\end{aligned}
$$

7.4 Lagrangiano Born-Infeld invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}^{\mathcal{M}}$

En esta sección, siguiendo a Ref. [37], mostraremos que la dinámica de Einstein-Hilbert para dimensiones pares es obtenida desde un lagrangiano Born-Infeld en $D \leq 2p$ dimensiones invariante bajo la subálgebra $\mathfrak{L}_{2p}^{\mathcal{M}}$ del álgebra de Lie $\mathcal{M}_{2p}$. Sin embargo, esto ya no es posible para Lagrangianos BI en dimensiones $D \geq (2p+2)$ invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}_{2p}^{\mathcal{M}}$ puesto que el término de EH desaparece.

7.4.1 Lagrangiano BI en $D = 4$ invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}$

Antes de considerar el lagrangiano Born-Infeld $2n$-dimensional y el álgebra $\mathfrak{L}_{2p}^{\mathcal{M}}$, estudiaremos el lagrangiano BI 4-dimensional invariante bajo el álgebra tipo Maxwell $\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}$. Dicha álgebra es obtenida mediante una S-expansión del álgebra de Lorentz utilizando el subsemigrupo $S_0^{(4)} = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5\}$ como el semigrupo abeliano finito. Luego, despues de realizar una $0_S\,\{= \lambda_5\}$-reducción, se encuentra el álgebra $\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}$. La nueva álgebra de Lie es generadad por $\left\{J_{ab},, Z_{ab}^{(1)}, Z_{ab}^{(2)}\right\}$, cuyos nuevos generadores pueden escribirse como

$$\lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ab} = J_{ab}, \quad \lambda_2 \otimes \tilde{J}_{ab} = Z_{ab}^{(1)}, \quad \lambda_4 \otimes \tilde{J}_{ab} = Z_{ab}^{(2)}, \tag{7.28}$$

donde $\tilde{J}_{ab}$ corresponden a los generadores del álgebra original $\mathfrak{so}(3,1)$ y λ_α pertenecen al semigrupo abeliano finito $S_0^{(4)}$. Los nuevos generadores del álgebra $\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{ca} J_{bd} + \eta_{db} J_{ca} - \eta_{da} J_{cb} && (7.29)\\
\left[J_{ab}, Z_{cd}^{(1)}\right] &= \eta_{cb} Z_{ad}^{(1)} - \eta_{ca} Z_{bd}^{(1)} + \eta_{db} Z_{ca}^{(1)} - \eta_{da} Z_{cb}^{(1)} && (7.30)\\
\left[J_{ab}, Z_{cd}^{(2)}\right] &= \eta_{cb} Z_{ad}^{(2)} - \eta_{ca} Z_{bd}^{(2)} + \eta_{db} Z_{ca}^{(2)} - \eta_{da} Z_{cb}^{(2)} && (7.31)\\
\left[Z_{ab}^{(1)}, Z_{cd}^{(1)}\right] &= \eta_{cb} Z_{ad}^{(2)} - \eta_{ca} Z_{bd}^{(2)} + \eta_{db} Z_{ca}^{(2)} - \eta_{da} Z_{cb}^{(2)} && (7.32)\\
\left[Z_{ab}^{(2)}, Z_{cd}^{(2)}\right] &= \left[Z_{ab}^{(1)}, Z_{cd}^{(2)}\right] = 0. && (7.33)
\end{aligned}$$

Usando el Teorema VII.2 de la Ref. [10] (ver sección 2.4) es posible mostrar que las únicas componentes no nulas de un tensor invariante para el álgebra $\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}$ vienen dados por

$$\langle J_{ab} J_{cd} \rangle_{\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}} = \alpha_0 \varepsilon_{abcd}, \tag{7.34}$$

$$\left\langle J_{ab} Z_{cd}^{(1)} \right\rangle_{\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}} = \alpha_2 \varepsilon_{abcd}, \tag{7.35}$$

$$\left\langle J_{ab} Z_{cd}^{(2)} \right\rangle_{\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}} = \left\langle Z_{ab}^{(1)} Z_{cd}^{(1)} \right\rangle_{\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}} = \alpha_4 \varepsilon_{abcd}, \tag{7.36}$$

donde α_0, α_2 y α_4 son constantes arbitrarias independientes y sin dimensión. Con el fin de escribir un Lagrangiano Born-Infeld para el álgebra $\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}$, iniciamos con la 2-forma curvatura

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} \left(D_\omega k^{(ab,1)} + \frac{1}{l^2} e^a e^b \right) Z_{ab}^{(1)} \\ & + \frac{1}{2} \left(D_\omega k^{(ab,2)} + k^a{}_c{}^{(1)} k^{cb(1)} + \frac{1}{l^2} \left[e^a h^{(b,1)} + h^{(a,1)} e^b \right] \right) Z_{ab}^{(2)} \end{aligned} \tag{7.37}$$

la cual es obtenida aplicando el procedimiento de la S-expansión a la 2-forma curvatura usada en la construcción de la acción Born-Infeld usual. Un estudio más detallado es realizado en el **Apéndice D**.

Haciendo uso de las componentes no nulas del tensor invariante simétrico y de la 2-forma curvatura $\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}$-valuada encontramos que el Lagrangiano Born-Infeld 4-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}$ es dado por [37]

$$\begin{aligned} L_{BI\ (4)}^{\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}} = & \frac{\alpha_0}{4} \epsilon_{abcd} R^{ab} R^{cd} + \frac{\alpha_2}{2} \epsilon_{abcd} \left(\mathfrak{R}^{(ab,1)} R^{cd} + \frac{1}{l^2} R^{ab} e^c e^d \right) \\ & + \frac{\alpha_4}{4} \epsilon_{abcd} \left(\mathfrak{R}^{(ab,1)} \mathfrak{R}^{(cd,1)} + \mathfrak{R}^{(ab,2)} R^{cd} + \frac{2}{l^2} \mathfrak{R}^{(ab,1)} e^c e^d \right. \\ & \left. + \frac{4}{l^2} R^{ab} h^{(c,1)} e^d + \frac{1}{l^4} e^a e^b e^c e^d \right), \end{aligned} \tag{7.38}$$

donde

$$\mathfrak{R}^{(ab,1)} = D_\omega k^{(ab,1)}, \tag{7.39}$$

$$\mathfrak{R}^{(ab,2)} = D_\omega k^{(ab,2)} + k^a{}_c{}^{(1)} k^{cb(1)}. \tag{7.40}$$

El Lagrangiano (7.38) es dividido en tres piezas independientes cada una proporcional a α_0, α_1 y α_4 respectivamente. El término proporcional a α_0 corresponde al invariante de Euler, mientras que α_2 acompaña al término de Einstein-Hilbert $\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d$ más un término de borde que contiene, además de la usual curvatura R^{ab}, un campo de materia bosonica $k^{(ab,1)}$.

La variación del Lagrangiano, modulo término de borde, es dado por

$$
\begin{aligned}
\delta L_{BI\ (4)}^{\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}} &= \varepsilon_{abcd}\left(\frac{\alpha_2}{l^2}R^{ab}e^c + \frac{\alpha_4}{l^2}\mathfrak{R}^{(ab,1)}e^c + \frac{\alpha_4}{l^2}R^{ab}h^{(c,1)} + \frac{\alpha_4}{l^4}e^ae^be^c\right)\delta e^d \\
&+ \varepsilon_{abcd}\ \left(\frac{\alpha_4}{l^2}R^{ab}e^c\right)\delta h^{(d,1)} + \varepsilon_{abcd}\ \delta\omega^{ab}\left(\alpha_2 k^c{}_e{}^{,(1)}R^{de} + \frac{\alpha_2}{l^2}T^ce^d + \frac{\alpha_4}{2}k^c{}_e{}^{,(2)}R^{de}\right. \\
&\left.+\frac{\alpha_4}{l^2}\left(D_\omega h^{(c,1)}e^d - h^{(c,1)}T^d\right)\right) + \varepsilon_{acde}\delta\omega^{ab}\left(\alpha_2 k_b{}^{c,(1)}R^{de} + \alpha_4 k_b{}^{c,(1)}\mathfrak{R}^{(de,1)}\right. \\
&\left.+\frac{\alpha_4}{2}k_b{}^{c,(2)}R^{de} + \frac{\alpha_4}{l^2}k_b{}^{c,(1)}e^de^e\right) + \varepsilon_{abcd}\ \delta k^{(ab,1)}\left(\frac{\alpha_4}{l^2}T^ce^d\right) \\
&+ \varepsilon_{acde}\delta k^{(ab,1)}\left(\alpha_4\omega_b{}^c\mathfrak{R}^{(de,1)} + \frac{\alpha_4}{2}k_b{}^{c,(1)}R^{de}\right). \qquad (7.41)
\end{aligned}
$$

Luego, al considerar una solución sin materia, es decir con $k^{(ab,1)} = k^{(ab,2)} = h^{(a,1)} = h^{(a,2)} = 0$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\delta L_{BI\ (4)}^{\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}} &= \varepsilon_{abcd}\left(\frac{\alpha_2}{l^2}R^{ab}e^c + \frac{\alpha_4}{l^4}e^ae^be^c\right)\delta e^d + \varepsilon_{abcd}\ \left(\frac{\alpha_4}{l^2}R^{ab}e^c\right)\delta h^{(d,1)} \\
&+ \varepsilon_{abcd}\ \delta\omega^{ab}\left(\frac{\alpha_2}{l^2}T^ce^d\right) + \varepsilon_{abcd}\ \delta k^{(ab,1)}\left(\frac{\alpha_4}{l^2}T^ce^d\right), \qquad (7.42)
\end{aligned}
$$

y puesto que los α's son constantes arbitrarias, tenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\varepsilon_{abcd}R^{ab}e^c = 0, \qquad (7.43)$$

$$\varepsilon_{abcd}T^ce^d = 0. \qquad (7.44)$$

De este modo, hemos obtenido la dinámica de Einstein-Hilbert en el vació sin restricción algúna sobre la constante de acoplamiento.

7.4.2 Lagrangiano BI en $D = 6$ invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}$

El Lagrangiano Born-Infeld invariante bajo el álgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(5,1)$ es dado por

$$L_{BI}^{(6)} = \frac{\kappa}{6}\epsilon_{abcdef}\left(R^{ab}R^{cd}R^{ef} + \frac{3}{l^2}R^{ab}R^{cd}e^ee^f + \frac{3}{l^4}R^{ab}e^ce^de^ee^f + \frac{1}{l^6}e^ae^be^ce^de^ee^f\right). \qquad (7.45)$$

Siguiendo las definiciones de la Ref. [10] (ver sección 2.3), consideremos la S-expansión del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(5,1)$ usando como semigrupo el subsemigrupo $S_0^{(2)} = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3\}$ del semigrupo $S_E^{(2)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Después de realizar una 0_S-reducción, uno encuentra el álgebra $\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}$ la cual corresponde a una subálgebra del álgebra de Maxwell $\mathcal{M}_4$. La nueva álgebra es generadad por $\{J_{ab}, Z_{ab}\}$ cuyos nuevos generadores pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ab} &= J_{ab}, & (7.46) \\ \lambda_2 \otimes \tilde{J}_{ab} &= Z_{ab}, & (7.47) \end{aligned}$$

donde $\tilde{J}_{ab}$ corresponde a los generadores del álgebra original $\mathfrak{so}\,(5,1)$ y λ_α pertenecen al semigrupo abeliano finito $S_0^{(2)}$. Los nuevos generadores del álgebra $\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{ca} J_{bd} + \eta_{db} J_{ca} - \eta_{da} J_{cb} & (7.48) \\ [J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{cb} Z_{ad} - \eta_{ca} Z_{bd} + \eta_{db} Z_{ca} - \eta_{da} Z_{cb} & (7.49) \\ [Z_{ab}, Z_{cd}] &= 0. & (7.50) \end{aligned}$$

Usando el Teorema VII.2 de la Ref. [10] (ver sección 2.4) es posible mostrar que las únicas componentes no nulas de un tensor invariante simétrico de rango 3 para el álgebra $\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}$ vienen dadas por

$$\langle J_{ab} J_{cd} J_{ef} \rangle_{\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}} = \frac{4}{3} \alpha_0 \varepsilon_{abcdef}, \tag{7.51}$$

$$\langle J_{ab} J_{cd} Z_{ef} \rangle_{\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}} = \frac{4}{3} \alpha_2 \varepsilon_{abcdef}, \tag{7.52}$$

donde α_0 y α_2 son constantes arbitrarias y sin dimensión. Luego, haciendo uso de la 2-forma curvatura $\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}$-valuada y de las componentes no nulas del tensor invariante encontramos que el Lagrangiano Born-Infeld 6-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}$ es dado por [37]

$$L_{BI-(6)}^{\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}} = \frac{\alpha_0}{6} \epsilon_{abcdef} R^{ab} R^{cd} R^{ef} + \frac{\alpha_2}{2} \epsilon_{abcdef} \left(\mathfrak{R}^{ab} R^{cd} R^{ef} + \frac{1}{l^2} R^{ab} R^{cd} e^e e^f \right), \tag{7.53}$$

donde $\mathfrak{R}^{ab} = D_\omega k^{ab}$.

Notemos que en este caso, el procedimiento de S-expansión provoca que el término de Einstein-Hilbert desaparece. Esto significa que la acción BI 6-dimensional invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}$ no desemboca a la dinámica de Relatividad General bajo ningún límite.

7.4.3 Relatividad General en dimensiones pares

Hemos visto que las acciones Born-Infeld $2p$-dimensional invariante bajo el álgebra de Lie $\mathfrak{L}_{2m}^{\mathcal{M}}$ no siempre desembocan en la dinámica de Relatividad General. En efecto, a pesar que todos estos lagrangianos conducen a ecuaciones tipo Lovelock existen ciertos valores de m para el cual es imposible obtener el término de Einstein-Hilbert en el lagrangiano BI $2p$-dimensional $\mathfrak{L}_{2m}^{\mathcal{M}}$-invariante. Esto se debe a que la presencia del término de Einstein-Hilbert requiere de la presencia de la componente $\left\langle J_{a_1a_2} Z_{a_3a_4} \cdots Z_{a_{2p-1}a_{2p}} \right\rangle$ del tensor invariante, la cual viene dada por

$$\left\langle J_{a_1a_2} Z_{a_3a_4} \cdots Z_{a_{2p-1}a_{2p}} \right\rangle_{\mathfrak{L}_{2m}^{\mathcal{M}}} = \begin{cases} l^{2p-2}\alpha_{2p-2} \left\langle J_{a_1a_2} \cdots J_{a_{2p-1}a_{2p}} \right\rangle_{\mathfrak{L}}, & \text{si } m \geq p \\ 0, & \text{si } \; m < p. \end{cases} \tag{7.54}$$

Esta observación permite establecer el siguiente teorema [37]:

Teorema 9 *Si $\mathfrak{L}_{2m}^{\mathcal{M}}$ es el álgebra obtenida del álgebra de Lorentz $\mathfrak{so}\,(D-1,1)$ mediante una $S_0^{(2m-2)}$-expansión reducida, la cual corresponde a una subálgebra del álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_{2m}$. Si $L_{BI\ (2p)}^{\mathfrak{L}_{2m}^{\mathcal{M}}}$ es un Lagrangiano tipo Born-Infeld $2p$-dimensional construida a partir de la 2-forma curvatura F $\mathcal{M}_{2m}$-valuada, el cual es invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}_{2m}^{\mathcal{M}}$. Entonces, el lagrangiano tipo Born-Infeld $2p$-dimensional conducirá al lagrangiano de Relatividad General en un cierto límite de la constante de acoplamiento l, si y solo si $m \geq p$.*

El **Teorema 9** nos permite alistar en la siguiente tabla el conjunto de Lagrangianos Born-Infeld $L_{BI\ (2p)}$ invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}_{2m}^{\mathcal{M}}$, que desemboca en la dinámica de Relatividad General en un cierto límite de la constante de acoplamiento l:

$$\begin{array}{c|cccccc}
\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}} & L_{BI\ (4)}^{\mathfrak{L}_4^{\mathcal{M}}} & & & & & \\
\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}} & L_{BI\ (4)}^{\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}} & L_{BI\ (6)}^{\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}} & & & & \\
\mathfrak{L}_8^{\mathcal{M}} & L_{BI\ (4)}^{\mathfrak{L}_8^{\mathcal{M}}} & L_{BI\ (6)}^{\mathfrak{L}_8^{\mathcal{M}}} & L_{BI\ (8)}^{\mathfrak{L}_8^{\mathcal{M}}} & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
\mathfrak{L}_{2n-2}^{\mathcal{M}} & L_{BI\ (4)}^{\mathfrak{L}_{2n-2}^{\mathcal{M}}} & L_{BI\ (6)}^{\mathfrak{L}_{2n-2}^{\mathcal{M}}} & L_{BI\ (8)}^{\mathfrak{L}_{2n-2}^{\mathcal{M}}} & \cdots \quad \cdots & L_{BI\ (2n-2)}^{\mathfrak{L}_{2n-2}^{\mathcal{M}}} & \\
\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}} & L_{BI\ (4)}^{\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}} & L_{BI\ (6)}^{\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}} & L_{BI\ (8)}^{\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}} & \cdots \quad \cdots & L_{BI\ (2n-2)}^{\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}} & L_{BI\ (2n)}^{\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}}
\end{array} \tag{7.55}$$

Es interesante notar que para cada dimensión D del espacio-tiempo, tenemos que el Lagrangiano $L_{BI\ (D)}$ invariante bajo el álgebra $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$ contiene a todos los otros Lagrangianos D-dimensional evaluado en un álgebra $\mathfrak{L}_{2m}^{\mathcal{M}}$ con $m < n$. De modo que siempre es posible obtener un acción de un álgebra menor apagando los campos apropiados.

Por último, es de interés notar que, analogamente a lo que ocurre en gravedad CS 3-dimensional, no es necesario en 4 dimensiones realizar el limite $l \to 0$ para desembocar en Relatividad General.

Capítulo 8

Acción de Einstein-Lovelock e invariancia de gauge tipo Maxwell

8.1 Lagrangiano de Einstein-Lovelock

Si se desea construir un lagrangiano de Einstein-Lovelock cuya elección de los coeficientes nos permita escribir una teoría Chern-Simons $(2n-1)$-dimensional y una teoría tipo Born-Infeld $(2n)$-dimensional que puedan desembocar en Relatividad General es necesario considerar una versión expandida del lagrangiano de Lanczos-Lovelock. Recientemente, se ha mostrado que el semigrupo $S_E^{(D-2)} = \{\lambda_i\}_{i=0}^{D-1}$ permite construir una teoría de Einstein-Chern-Simons y una teoría de Einstein-Born-Infeld. Luego haciendo uso de la ley de multiplicación del semigrupo es posible escribir un polinomio de grado $[D/2]$ en la 2-forma curvatura expandida $R^{(ab,i)}$.

Proponemos así la siguiente acción [38]

$$S_{\mathcal{EL}} = \int \sum_{p=0}^{[D/2]} \lambda_i \alpha_p L_{\mathcal{EL}}^{(p,i)} \tag{8.1}$$

donde α_p y λ_i son constantes arbitrarias y

$$L_{\mathcal{EL}}^{(p,i)} = l^{D-2} \delta^{i}_{i_1+\cdots+i_{D-p}} \varepsilon_{a_1 a_2 \cdots a_D} R^{(a_1 a_2, i_1)} \cdots R^{(a_{2p-1} a_{2p}, i_p)} e^{(a_{2p+1}, i_{p+1})} \cdots e^{\left(a_D, i_{D-p}\right)}, \tag{8.2}$$

donde

$$R^{(ab,i)} = d\omega^{(ab,i)} + \eta_{cd}\omega^{(ac,j)}\omega^{(db,k)}\delta^{i}_{j+k} \tag{8.3}$$

La expresión (8.1) es usada tanto en dimensiones pares como en dimensiones impares. Al igual que en el caso de la teoría de LL, los α_p, $p = 0, 1, \cdots, [D/2]$, no son fijados desde primeros principios. Al igual que en la ref. [16], es posible fijar los coeficientes de acuerdo al criterio que las condiciones de integrabilidad para las ecuaciones de campo no deberían imponer constraints algebraicos adicionales sobre los tensores curvatura y torsión.

En el formalismo de primer orden, la nueva acción de LL es escrita en función del vielbein, de la conexión de spin y de nuevos campos de materia producto de la $S_E^{(D-2)}$-expansión. Las correspondientes ecuaciones de campo variando con respecto a los campos expandidos $e^{(a,j)}$ y $\omega^{(ab,j)}$ vienen dadas por:

$$\varepsilon_a^{(i)} = \sum_{p=0}^{[(D-1)/2]} \lambda_i \alpha_p \left(D-2p\right) \varepsilon_a^{(p,i)} = 0 \tag{8.4}$$

$$\varepsilon_{ab}^{(i)} = \sum_{p=1}^{[(D-1)/2]} \lambda_i \alpha_p p \left(D-2p\right) \varepsilon_{ab}^{(p,i)} = 0 \tag{8.5}$$

donde.

$$\varepsilon_a^{(p,i)} : = l^{D-2}\delta^{i}_{i_1+\cdots+i_{D-p-1}}\varepsilon_{ab_1\cdots b_{D-1}}R^{(b_1b_2,i_1)}\cdots R^{(b_{2p-1}b_{2p},i_p)}e^{(b_{2p+1},i_{p+1})}\cdots e^{\left(b_{D-1},i_{D-p-1}\right)} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ab}^{(p,i)} : &= l^{D-2}\delta^{i}_{i_1+\cdots+i_{D-p-1}}\varepsilon_{aba_3\cdots a_D}R^{(a_3a_4,i_1)}\cdots R^{(a_{2p-1}a_{2p},i_{p-1})}\\ &\quad T^{(a_{2p+1},i_p)}e^{(a_{2p+2},i_{p+1})}\cdots e^{\left(a_D,i_{D-p-1}\right)}\end{aligned} \tag{8.7}$$

Aqui $T^{(a,i)} = de^{(a,i)} + \eta_{dc}\omega^{(ad,j)}e^{(c,k)}\delta^{i}_{j+k}$ representa a la 2-forma torsión expandida. Usando la identidad de Bianchi para la 2-forma curvatura expandida (ver **Apendice E**) tenemos

$$\begin{aligned}D\varepsilon_a^{(p,i)} &= l^{D-2}\left(D-1-2p\right)\delta^{i}_{i_1+\cdots+i_{D-p-1}}\varepsilon_{ab_1\cdots b_{D-1}}R^{(b_1b_2,i_1)}\cdots R^{(b_{2p-1}b_{2p},i_p)}\\ &\quad T^{(b_{2p+1},i_{p+1})}e^{(b_{2p+2},i_p)}\cdots e^{\left(a_{D-1},i_{D-p-1}\right)}\end{aligned} \tag{8.8}$$

Por otro lado podemos escribir

$$\begin{aligned}e^{(b,j)}\varepsilon_{ba}{}^{(p,k)}\delta^{i}_{j+k} &= l^{D-2}\delta^{i}_{i_1+\cdots+i_{D-p-1}}\varepsilon_{aa_1\cdots a_{D-2}}R^{(a_1a_2,i_1)}\cdots R^{(a_{2p-3}a_{2p-2},i_{p-1})}\\ &\quad T^{(a_{2p-1},i_p)}e^{(a_{2p},i_{p+1})}\cdots e^{\left(a_{D-2},i_{D-p-1}\right)}.\end{aligned} \tag{8.9}$$

de donde

$$
\begin{aligned}
e^{(b,j)}\varepsilon_{ba}{}^{(p+1,k)}\delta^{i}_{j+k} &= l^{D-2}\delta^{i}_{i_1+\cdots+i_{D-p}}\varepsilon_{aa_1\cdots a_{D-1}}R^{(a_1a_2,i_1)}\cdots R^{(a_{2p-1}a_{2p},i_{p-1})} \\
&\quad T^{(a_{2p+1},i_p)}e^{(a_{2p+2},i_{p+1})}\cdots e^{\left(a_{D-1},i_{D-p}\right)}. \qquad (8.10)
\end{aligned}
$$

Luego, comparando las ecuaciones (8.8) y (8.10) se tiene

$$
D\varepsilon_{a}^{(p,i)} = (D-1-2p)\, e^{(b,j)}\varepsilon_{ba}{}^{(p+1,k)}\delta^{i}_{j+k}
$$

para $0 \leq p \leq [(D-1)/2]$. Esto significa que

$$
D\varepsilon_{a}{}^{(i)} = \sum_{p=0}^{[(D-1)/2]} \lambda_i \alpha_p \,(D-2p)\,(D-1-2p)\, e^{(b,j)}\varepsilon_{ba}{}^{(p+1,k)}\delta^{i}_{j+k}. \qquad (8.11)
$$

llamando $p' = p+1$ se tiene que

$$
D\varepsilon_{a}{}^{(i)} = \sum_{p'=1}^{[(D+1)/2]} \lambda_i \alpha_{p'-1}\,(D-2p'+2)\,(D-2p'+1)\, e^{(b,j)}\varepsilon_{ba}{}^{(p',k)}\delta^{i}_{j+k} \qquad (8.12)
$$

lo cual se puede rescribir como

$$
D\varepsilon_{a}{}^{(i)} = \sum_{p=1}^{[(D+1)/2]} \lambda_i \alpha_{p-1}\,(D-2p+2)\,(D-2p+1)\, e^{(b,j)}\varepsilon_{ba}{}^{(p,k)}\delta^{i}_{j+k}. \qquad (8.13)
$$

Dicha ecuación debe ser nula por consistencia con la ecuación $\varepsilon_{a}^{(i)} = 0$. Además multiplicando $\varepsilon_{ba}{}^{(k)}$ con $e^{(b,j)}$ encontramos

$$
e^{(b,j)}\varepsilon_{ba}{}^{(k)}\delta^{i}_{j+k} = \sum_{p=1}^{[(D-1)/2]} \lambda_i \alpha_p p\,(D-2p)\, e^{(b,j)}\varepsilon_{ba}{}^{(p,k)}\delta^{i}_{j+k} \qquad (8.14)
$$

la cual se anula por consistencia con la ecuación $\varepsilon_{ab}^{(i)} = 0$.

En general existen diferentes maneras de escoger los coeficientes α_p los cuales en general corresponden a diferente teorías con diferente número de grados de libertad. Es posible elejir los α_p de tal manera que $\varepsilon_{a}^{(i)}$y $\varepsilon_{ab}^{(i)}$ sean independientes, o que estos tengan el máximo número de componentes independientes.

8.1.1 $D = 2n - 1$: Gravedad Chern-Simons $\mathcal{M}_{2n-1}$-valuada

En dimensiones impares, las ecuaciones (8.13) y (8.14) tienen el mismo número. Esto se debe a que el último término de la ec. (8.13) se anula para $p = (d+1)/2 = n$. Luego para $D = 2n-1$, la ec. (8.13) toma la forma

$$D\varepsilon_a{}^{(i)} = \sum_{p=1}^{[(D-1)/2]} \lambda_i \alpha_{p-1} (D-2p+2)(D-2p+1)\, e^{(b,j)} \varepsilon_{ba}{}^{(p,k)} \delta^i_{j+k}. \tag{8.15}$$

De modo que estas ecuaciones no imponen ningún constraint algebraico adicional sobre $R^{(ab,i)}$ y $T^{(a,i)}$. De modo que las dos series $D\varepsilon_a{}^{(i)}$ y $e^{(b,j)}\varepsilon_{ba}{}^{(k)}\delta^i_{j+k}$ deben ser proporcionales término a término:

$$\alpha_p p (D-2p)\, e^{(b,j)} \varepsilon_{ba}{}^{(p,k)} \delta^i_{j+k} = \gamma \alpha_{p-1} (D-2p+2)(D-2p+1)\, e^{(b,j)} \varepsilon_{ba}{}^{(p,k)} \delta^i_{j+k}$$

de donde

$$\gamma \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p} = \frac{p(D-2p)}{(D-2p+2)(D-2p+1)} \tag{8.16}$$

donde $1 \leq p \leq n$ y γ es una constante arbitraria de dimensión $[longitud]^2$. La solución a esta ecuación viene dada por

$$\alpha_p = \alpha_0 \frac{D(2\gamma)^p}{(2n-2p-1)} \binom{n-1}{p}, \tag{8.17}$$

donde las constantes α_0 y γ están relacionadas a la constante gravitacional y a la constante cosmológica respectivamente en la forma

$$\alpha_0 = \frac{\kappa}{(l^{D-1}D)}; \qquad \gamma = -sgn(\Lambda)\frac{l^2}{2}, \tag{8.18}$$

y donde para cualquier dimensión, l es un parámetro de longitud relacional a la constante cosmológica por

$$\Lambda = \pm \frac{(D-1)(D-2)}{2l^2} \tag{8.19}$$

Con estos coeficientes, el vielbein expandido y la conexión de spin expandida son acomodados dentro de una conexión para el álgebra $\mathcal{M}_{2n-1}$, permitiendo que el lagrangeano se convierta en la forma Chern-Simons (CS).

$$\sum_{p=0}^{n-1} l^{2p-2} \frac{\kappa}{2(n-p)-1} \binom{n-1}{p} \lambda_i \delta^i_{i_1+\cdots+i_{D-p}} \varepsilon_{a_1a_2\cdots a_D} R^{(a_1a_2,i_1)} \cdots R^{(a_{2p-1}a_{2p},i_p)} e^{(a_{2p+1},i_{p+1})} \cdots e^{(a_D,i_{D-p})}$$

La $2n-1$ forma CS puede escribirse análogamente como [33]

$$\begin{aligned} L_{CS}^{(2n-1)} &= \sum_{k=1}^{n-1} l^{2k-2} c_k \alpha_i \delta^i_{i_1+\cdots+i_n} \delta^{i_{k+1}}_{p_1+q_1} \cdots \delta^{i_{n-1}}_{p_{n-1-k}+q_{n-1-k}} \\ &\quad \varepsilon_{a_1\cdots a_{2n-1}} R^{(a_1a_2,i_1)} \cdots R^{(a_{2k-1}a_{2k},i_k)} e^{(a_{2k+1},p_1)} \\ &\quad e^{(a_{2k+2},q_1)} \cdots e^{(a_{2n-3},p_{n-1-k})} e^{(a_{2n-2},q_{n-1-k})} e^{(a_{2n-1},i_n)}. \end{aligned} \tag{8.20}$$

donde los α_j's son constantes independientes arbitrarias de dimensión $[longitud]^{-2n+3}$, las constantes c_k vienen definidas por

$$c_k = \frac{1}{2(n-k)-1}\binom{n-1}{k}, \tag{8.21}$$

y donde

$$R^{(ab,2i)} = d\omega^{(ab,2i)} + \eta_{cd}\omega^{(ac,2j)}\omega^{(db,2k)}\delta^i_{j+k} \tag{8.22}$$

Es importante mencionar que no todas las álgebras $\mathcal{M}_m$ son buenas candidatas para que un lagrangeano CS D dimensional desemboque en la dinámica de Relatividad General como fue bien mencionado en la Ref. [37].

8.1.2 $D = 2n$: Gravedad tipo Born-Infeld $\mathfrak{L}_{2n}^{\mathcal{M}}$-valuada

Considerando nuevamente las expresiones (8.13) y (8.14) es posible ver que la ec. (8.13) tiene un término adicional a (8.14). Por otro lado, variando el lagrangeano con respecto a $R^{(ab,i)}$ tenemos,

$$\delta L = \sum_{p=1}^{[D/2]} \lambda_i \alpha_p \delta L^{(p,i)},$$

$$\delta L^{(p,i)} = l^{D-2} p\ \delta^i_{i_1+\cdots+i_{D-p}} \varepsilon_{a_1a_2\cdots a_D} \left(\delta R^{(a_1a_2,i_1)}\right) \cdots R^{(a_{2p-1}a_{2p},i_p)} e^{(a_{2p+1},i_{p+1})} \cdots e^{\left(a_D,i_{D-p}\right)},$$

lo cual se puede escribir como

$$\frac{\delta L}{\delta R^{(ab,i)}} = \sum_{p=1}^{[D/2]} \lambda_i\ \alpha_p\ p\ l^{D-2} \delta^i_{i_1+\cdots+i_{D-p-1}} \varepsilon_{aba_3\cdots a_D} R^{(a_3a_4,i_1)} \cdots R^{(a_{2p-1}a_{2p},i_{p-1})} \tag{8.23}$$

$$e^{(a_{2p+1},i_p)} \cdots e^{\left(a_D,i_{D-p-1}\right)}. \tag{8.24}$$

Luego, llamando

$$\mathcal{T}_{ab}{}^{(i)} = \frac{\delta L}{\delta R^{(ab,i)}} = \sum_{p=1}^{[D/2]} \lambda_i \alpha_p p \mathcal{T}_{ab}^{(p,i)}, \tag{8.25}$$

con

$$\mathcal{T}_{ab}^{(p,i)} = l^{D-2} \delta^i_{i_1+\cdots+i_{D-p-1}} \varepsilon_{aba_3\cdots a_D} R^{(a_3a_4,i_1)} \cdots R^{(a_{2p-1}a_{2p},i_{p-1})} e^{(a_{2p+1},i_p)} \cdots e^{\left(a_D,i_{D-p-1}\right)}. \tag{8.26}$$

Haciendo uso nuevamente de la identidad de Bianchi es posible escribir

$$\begin{aligned} D\mathcal{T}_{ab}^{(p,i)} &= l^{2p-2} \left(D-2p\right) \delta^i_{i_1+\cdots+i_{D-p-1}} \varepsilon_{aba_3\cdots a_D} R^{(a_3a_4,i_1)} \cdots R^{(a_{2p-1}a_{2p},i_{p-1})} \\ & \left(De^{(a_{2p+1},i_p)}\right) e^{(a_{2p+2},i_{p+1})} \cdots e^{\left(a_D,i_{D-p-1}\right)} \end{aligned}$$

lo cual permite escribir

$$\begin{aligned} D\mathcal{T}_{ab}{}^{(i)} &= \sum_{p=1}^{[D/2]} \lambda_i \alpha_p p \; l^{D-2} \left(D-2p\right) \delta^i_{i_1+\cdots+i_{D-p-1}} \varepsilon_{aba_3\cdots a_D} R^{(a_3a_4,i_1)} \cdots R^{(a_{2p-1}a_{2p},i_{p-1})} \\ & T^{(a_{2p+1},i_p)} e^{(a_{2p+2},i_{p+1})} \cdots e^{\left(a_D,i_{D-p-1}\right)}. \end{aligned} \tag{8.27}$$

Comparando con las ecuaciones (8.5) y (8.7) vemos que

$$\varepsilon_{ab}^{(i)} = D\mathcal{T}_{ab}{}^{(i)} \tag{8.28}$$

de manera que

$$D\mathcal{T}_{ab}^{(p,i)} = \left(D-2p\right) \varepsilon_{ab}^{(p,i)} \tag{8.29}$$

para $1 \leq p \leq \left[\frac{D-1}{2}\right]$.

Por otro lado, se puede relacionar $\mathcal{T}_{ab}^{(p,i)}$ con $\varepsilon_a^{(p,i)}$ puesto que

$$\varepsilon_a^{(p-1,i)} = l^{D-2} \delta^i_{i_1+\cdots+i_{D-p-1}} \varepsilon_{ab_1\cdots b_{D-2}} R^{(b_1b_2,i_1)} \cdots R^{(b_{2p-3}b_{2p-2},i_p)} e^{(b_{2p-1},i_{p+1})} \cdots e^{\left(b_{D-2},i_{D-p-1}\right)}$$

de modo que es posible escribir

$$e^{(b,j)} \mathcal{T}_{ab}^{(p,k)} \delta^i_{j+k} = \varepsilon_a^{(p-1,i)} \tag{8.30}$$

para $1 \leq p \leq \left[\frac{D-1}{2}\right]$. Luego tenemos que

$$D\varepsilon_a^{(p-1,i)} = T^{(b,j)} \mathcal{T}_{ab}^{(p,k)} \delta^i_{j+k} - \left(D-2p\right) e^{(b,j)} \varepsilon_{ab}^{(p,k)} \delta^i_{j+k} \tag{8.31}$$

Definiendo ahora $p' = p + 1$ y considerando $1 \leq p \leq \left[\frac{D-1}{2}\right]$ se tiene

$$D\varepsilon_a{}^{(i)} = \sum_{p'=2}^{[(D+1)/2]} \lambda_i \alpha_{p'-1} (D - 2p' + 2) \, D\varepsilon_a^{(p'-1,i)}$$

de modo que

$$\begin{aligned} D\varepsilon_a{}^{(i)} &= \sum_{p=2}^{[(D+1)/2]} \lambda_i \alpha_{p-1} (D - 2p + 2) \, D\varepsilon_a^{(p-1,i)} \\ &= \sum_{p=2}^{[(D+1)/2]} \lambda_i \alpha_{p-1} (D - 2p + 2) \left[T^{(b,j)} \mathcal{T}_{ab}^{(p,k)} - (D - 2p) \, e^{(b,j)} \varepsilon_{ab}^{(p,k)} \right] \delta_{j+k}^i \end{aligned}$$

Así, para $D = 2n$, tenemos

$$\begin{aligned} D\varepsilon_a{}^{(i)} &= \lambda_i T^{(b,j)} \sum_{p=1}^{n-1} 2\alpha_{p-1} (n - p + 1) \, \mathcal{T}_{ab}^{(p,k)} \delta_{j+k}^i \\ &\quad - \lambda_i \sum_{p=1}^{n-1} 4\alpha_{p-1} (n - p + 1) (n - p) \, e^{(b,j)} \varepsilon_{ab}^{(p,k)} \delta_{j+k}^i. \end{aligned} \tag{8.32}$$

Se puede comparar dicha ecuación con la identidad (8.14)

$$e^{(b,j)} \varepsilon_{ba}{}^{(k)} \delta_{j+k}^i = \lambda_i \sum_{p=1}^{n-1} 2\alpha_p p \, (n - p) \, e^{(b,j)} \varepsilon_{ba}{}^{(p,k)} \delta_{j+k}^i \tag{8.33}$$

Tanto la ecuación (8.28) : $\varepsilon_{ab}^{(i)} = D\mathcal{T}_{ab}{}^{(i)}$ como (8.33) pueden hacerse nulas si $T^{(a,i)} = 0$ o $\mathcal{T}_{ab}{}^{(i)} = 0$. No obstante, esto representan condiciones muy fuertes para (8.32) . En realidad es suficiente con imponer la condición más debil a saber $T^{(a,j)} \mathcal{T}_{ab}{}^{(k)} = 0$ y exigir simultaneamente que el segundo término en (8.32) sea proporcional a la serie (8.33). Ahora, ambas series poseen el mismo número de términos de modo que la solución que permite el número maximo de grados de libertad se encuentra al igualar las dos series término a término salvo un factor global.

De este modo

$$\gamma 4\alpha_{p-1} (n - p + 1) (n - p) \, e^{(b,j)} \varepsilon_{ab}^{(p,k)} = 2\alpha_p p \, (n - p) \, e^{(b,j)} \varepsilon_{ba}{}^{(p,k)},$$

encontrando así

$$\alpha_p = \alpha_0 \left(2\gamma\right)^p \binom{n}{p}.$$

Con estos coeficientes el lagrangeano de Einstein-Lovelock es escrito como [35]

$$\begin{aligned} L^{(2n)}_{BI\text{-}\mathcal{L}^{\mathcal{M}}_{2n}} = \sum_{k=1}^{n} l^{2k-2} \frac{1}{2n} \binom{n}{k} \alpha_j \delta^{j}_{i_1+\cdots+i_n} \delta^{i_{k+1}}_{p_1+q_1} \cdots \delta^{i_n}_{p_{n-k}+q_{n-k}} \\ \varepsilon_{a_1\cdots a_{2n}} R^{(a_1a_2,i_1)} \cdots R^{(a_{2k-1}a_{2k},i_k)} e^{(a_{2k+1},p_1)} \\ e^{(a_{2k+2},q_1)} \cdots e^{(a_{2n-1},p_{n-k})} e^{(a_{2n},q_{n-k})}, \end{aligned} \tag{8.34}$$

donde los α_j's son contantes independites arbitrarias de dimensión $[longitud]^{-2n+2}$. El correspondiente lagrangiano fue denominado lagrangiano de Einstein-Born-Infeld y es invariante bajo el álgebra $\mathcal{L}^{\mathcal{M}}_{2n}$ el cual corresponde a una subálgebra del álgebra $\mathcal{M}_{2n}$.

8.2 Gravedad con torsion invariante bajo el álgebra tipo Maxwell

De forma analoga a lo que se realiza con la teoría de Lanczos-Lovelock [16] es posible generalizar la teoría de Einstein-Lovelock agregando "torsion" explicitamente lo cual es posible asumiendo que el Lagrangiano es la D-forma más general invariante bajo una subálgebra tipo Lorentz $\mathfrak{L}^{\mathcal{M}}$ del álgebra de Lie $\mathcal{M}$. Dicha D-forma es construida a partir del vielbein, la conexión de spin, los campos expandidos $e^{(a,2k+1)}$, $\omega^{(ab,2k)}$ $(\ k = 1, \ldots, n-1)$ y sus derivadas exteriores.

Analogamente a la Ref. [22], es posible reproducir todos los posibles invariantes locales bajo la nueva subálgebra tipo Lorentz $\mathfrak{L}^{\mathcal{M}}$ escrito a partir de $e^{(a,2k+1)}$, $R^{(ab,2k)}$ y $T^{(a,2k+1)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Siguiendo la Ref. [38], la introducción de estos términos torsionales conlleva un número de coeficientes arbitrarios γ_j. Es interesante notar que en ciertas dimensiones, se pueden elegir los coeficientes γ's de tal manera que es posible ampliar la invariancia bajo $\mathfrak{L}^{\mathcal{M}}$ a una simetria de gauge tipo Maxwell $\mathcal{M}$. No es casualidad que este procedimiento sea equivalente a lo realizado para la simetria de gauge AdS puesto que el álgebra tipo Maxwell consiste en una S-expansión del álgebra AdS.

A continuación veremos que en $D = 4k$, las únicas D-formas invariantes bajo el álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}$ construida a partir de $e^{(a,2k+1)}$, $R^{(ab,2k)}$ y $T^{(a,2k+1)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ son D-formas tipo Pontryagin $\mathcal{P}$. Habíamos dicho que es posible escribir localmente dichas formas como la derivada exterior de una $(4k-1)$-forma,

$$dL^{\mathcal{M}}_{P\,(4k-1)} = \mathcal{P}. \tag{8.35}$$

8.2.1 $D = 3$: Gravedad Chern-Simons $\mathcal{M}_5$-valuada

A modo de ejemplo, consideremos un Lagrangiano $(2+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_5$. Siguiendo las definiciones de la Ref. [10] (ver sección 2.3), consideremos la S-expansión del álgebra de Lie AdS usando $S_E^{(3)}$ como semigrupo abeliano. Despues de extraer una subálgebra resonante y realizar una $0_s\,\{=\lambda_4\}$-reducción, uno encuentra el álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_5$, la cual fue identificada como álgebra $\mathfrak{B}$ en la Ref. [33]. Los nuevos generadores $\{J_{ab}, P_a, Z_{ab}, Z_a\}$ pueden escribirse como

$$J_{ab} = \lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ab}, \tag{8.36}$$
$$Z_{ab} = \lambda_2 \otimes \tilde{J}_{ab}, \tag{8.37}$$
$$P_a = \lambda_1 \otimes \tilde{P}_a, \tag{8.38}$$
$$Z_a = \lambda_3 \otimes \tilde{P}_a, \tag{8.39}$$

donde $\tilde{J}_{ab}$ y $\tilde{P}_a$ corresponden a los generadores originales. La 1-forma conexión de gauge A $\mathcal{M}_5$-valuada es dada por

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}e^aP_a + \frac{1}{2}k^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}h^aZ_a, \tag{8.40}$$

y la 2-forma curvatura asociada

$$F = \frac{1}{2}R^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}T^aP_a + \frac{1}{2}\left(D_\omega k^{ab} + \frac{1}{l^2}e^ae^b\right)Z_{ab} + \frac{1}{l}\left(D_\omega h^a + k^a{}_b e^b\right)Z_a. \tag{8.41}$$

Es interesante notar que P_a no representa más un boost AdS sino que para el álgebra tipo Maxwell se tiene que $[P_a, P_b] = Z_{ab}$.

Por otro lado, haciendo uso del teorema VII.2 de la Ref. [10] (ver sección 2.4), es posible mostrar que las únicas componentes no nula de un tensor invariante simétrico para el álgebra de Lie $\mathcal{M}_5$ vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\langle J_{ab}J_{cd}\rangle_{\mathcal{M}_5} &= \alpha_0\left(\eta_{ad}\eta_{bc}-\eta_{ac}\eta_{bd}\right), & (8.42)\\
\langle J_{ab}Z_{cd}\rangle_{\mathcal{M}_5} &= \alpha_2\left(\eta_{ad}\eta_{bc}-\eta_{ac}\eta_{bd}\right), & (8.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle P_aP_c\rangle_{\mathcal{M}_5} &= \alpha_2\eta_{ac}, & (8.44)\\
\langle J_{ab}P_c\rangle_{\mathcal{M}_5} &= \alpha_1\epsilon_{abc}, & (8.45)\\
\langle J_{ab}Z_c\rangle_{\mathcal{M}_5} &= \alpha_3\epsilon_{abc}, & (8.46)\\
\langle Z_{ab}P_c\rangle_{\mathcal{M}_5} &= \alpha_3\epsilon_{abc}, & (8.47)
\end{aligned}$$

donde α_0, α_1, α_2, α_3 son constantes arbitrarias sin dimensión.

Usando el procedimiento dual de la S-expansión en términos de las formas de MC [11], encontramos que el lagrangiano CS invariante bajo el álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_5$ es dado por

$$\begin{aligned}
L_{CS\ \ (2+1)}^{\mathcal{M}_5} &= \frac{\kappa}{l}\varepsilon_{abc}\left[R^{ab}e^c+\frac{1}{3l^2}e^ae^be^c+R^{ab}h^c+k^{ab}T^c-\frac{1}{2}d\left(\omega^{ab}h^c-k^{ab}e^c+\omega^{ab}e^c\right)\right]\\
&\quad+\frac{\gamma_2}{2}\left[\omega^a{}_bd\omega^b{}_a+\frac{2}{3}\omega^a{}_b\omega^b{}_c\omega^c{}_a+\frac{2}{l^2}e^aT_a+\omega^a{}_bdk^b{}_a+k^a{}_bd\omega^b{}_a+2\omega^a{}_b\omega^b{}_ck^c{}_a\right] \qquad (8.48)\\
&= \kappa\left(L_{E\ \ (3)}^{\mathcal{M}_5}\right)+\frac{\gamma_2}{2}\left(L_{P\ \ (3)}^{\mathcal{M}_5}\right)
\end{aligned}$$

donde hemos elegido $\alpha_0=\alpha_2=\gamma_2$ y $\alpha_1=\alpha_3=\kappa$. La derivada exterior de dicho lagrangiano nos entrega el siguiente invariante

$$\begin{aligned}
P^{(4)\ \mathcal{M}} &= \frac{\kappa}{l}\left[\epsilon_{abc}\left(R^{ab}T^c+\frac{1}{l^2}e^ae^bT^c+R^{ab}\left(D_\omega h^c+k^c{}_de^d\right)+D_\omega k^{ab}T^c\right)\right]\\
&\quad+\frac{\gamma_2}{2}\left[R^a{}_bR^b{}_a+\frac{2}{l^2}\left(T^aT_a-e^ae^bR_{ab}\right)+2R^a{}_bD_\omega k^b{}_a\right]. \qquad (8.49)
\end{aligned}$$

Los parámetros κ, γ_2 son constantes arbitrarias cuyo origen radica en la existencia de dos posibles tensores invariantes independientes para el álgebra $\mathcal{M}_5$ y que aparecen de forma manifiesta debido al proceso de expansión.

Podemos resumir nuestro resultado de forma analoga a lo que se hace en la Ref. [25] ,en la siguiente tabla [38]:

Tabla 3

D = 3 Lagrangianos Chern-Simons	Invariante topológico
$L_{E\ 3}^{\mathcal{M}_5}$	$E_4^{\mathcal{M}_5}$
$L_3^{Lorentz} = \omega^a_{\ b} d\omega^b_{\ a} + \frac{2}{3}\omega^a_{\ b}\omega^b_{\ c}\omega^c_{\ a}$	$P_4 = R^a_{\ b} R^b_{\ a}$
$L_3^{Torsion} = e^a T_a$	$N_4 = T^a T_a - e^a e^b R_{ab}$
$L_3^{Lorentz}(k) = \omega^a_{\ b} dk^b_{\ a} + k^a_{\ b} d\omega^b_{\ a} + 2\omega^a_{\ b}\omega^b_{\ c}k^c_{\ a}$	$P_4(k) = 2R^a_{\ \ b} D_\omega k^b_{\ \ a}$

donde además de la densidad de Maxwell-Euler $E_4^{\mathcal{M}}$ vemos que aparece el usual Pontryagin P_4, el Nieh-Yan N_4 y una densidad tipo Pontryagin $P_4(k)$ proveniente directamente de los nuevos campos $k^a_{\ b}$. Notemos que es posible combinar P_4, N_4 y $P_4(k)$ en un único invariante tipo Maxwell-Pontryagin para el grupo $\mathcal{M}_5$. Así, con la elección $\alpha_0 = \alpha_2 = \gamma_2$ tenemos que

$$F^A_{\ B} F^B_{\ A} = R^a_{\ b} R^b_{\ a} + \frac{2}{l^2}\left(T^a T_a - e^a e^b R_{ab}\right) + 2R^a_{\ \ b} D_\omega k^b_{\ \ a}, \tag{8.50}$$

donde es posible escribir

$$F^{AB} = \begin{pmatrix} R^{ab} + \left(D_\omega k^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b\right) & \frac{1}{l}T^a + \frac{1}{l}\left(D_\omega h^a + k^a_{\ c} e^c\right) \\ & \\ -\frac{1}{l}T^b - \frac{1}{l}\left(D_\omega h^b + k^b_{\ c} e^c\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.51}$$

La introducción de los nuevos campos de materia $\left(k^{ab} \text{ y } h^a\right)$ en el caso 4-dimensional tiene como consecuencia que las familias de Euler y de Pontryagin se vean ampliadas con el fin de mantener su invariancia bajo esta nueva simetría $\mathcal{M}_5$. Veremos en la siguiente sección que el número de invariantes crece de forma considerable al considerar Gravedad CS $(6+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_7$.

8.2.2 $D = 7$: Gravedad Chern-Simons $\mathcal{M}_7$-valuada

Consideremos ahora un acción Chern-Simons $(6+1)$-dimensional invariante bajo el álgebra de Lie tipo Maxwell $\mathcal{M}_7$. Habiamos visto en la sección 6.4 que el álgebra $\mathcal{M}_7$

es obtenida mediante una S-expansión del álgebra AdS utilizando $S_E^{(5)}$ como el semigrupo abeliano finito. De hecho, despues de extraer una subálgebra resonante y de realizar una 0_S-reducción, se encuentra el álgebra de Lie $\mathcal{M}_7$. La nueva álgebra es generadad por $\left\{J_{ab}, P_a, Z_{ab}^{(1)}, Z_a^{(1)}, Z_{ab}^{(2)}, Z_a^{(2)}\right\}$, cuyos nuevos generadores pueden escribirse como

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ab} &= J_{ab}, \quad \lambda_2 \otimes \tilde{J}_{ab} = Z_{ab}^{(1)}, \quad \lambda_4 \otimes \tilde{J}_{ab} = Z_{ab}^{(2)}, && (8.52)\\
\lambda_1 \otimes \tilde{P}_a &= P_a, \quad \lambda_3 \otimes \tilde{P}_a = Z_a^{(1)}, \quad \lambda_5 \otimes \tilde{P}_a = Z_a^{(2)}, && (8.53)
\end{aligned}
$$

donde $\tilde{J}_{ab}$ y $\tilde{P}_a$ corresponden a los generadores del álgebra AdS.

De la Ref. [37], sabemos que el Lagrangiano $\mathcal{M}_7$-valuado viene dado por la expresión:

$$
\begin{aligned}
& L_{CS\;(6+1)}^{\mathcal{M}_7} \\
&= \boldsymbol{\alpha}_1 l^4 \varepsilon_{abcdefg} R^{ab} R^{cd} R^{ef} e^g + \boldsymbol{\alpha}_3 \varepsilon_{abcdefg} \left(l^4 R^{ab} R^{cd} R^{ef} h^{(g,1)} + 3l^4 R^{ab} R^{cd} \mathfrak{R}^{(ef,1)} e^g + l^2 R^{ab} R^{cd} e^e e^f e^g\right) \\
&+ \boldsymbol{\alpha}_5 \varepsilon_{abcdefg} \left(l^4 R^{ab} R^{cd} R^{ef} h^{(g,2)} + 3l^4 R^{ab} \mathfrak{R}^{(cd,1)} \mathfrak{R}^{(ef,1)} e^g + 3l^4 R^{ab} R^{cd} \mathfrak{R}^{(ef,2)} e^g \right.\\
&\left. + 3l^4 R^{ab} R^{cd} \mathfrak{R}^{(ef,1)} h^{(g,1)} + 2l^2 R^{ab} \mathfrak{R}^{(cd,1)} e^e e^f e^g + 3l^2 R^{ab} R^{cd} e^e e^f h^{(g,1)} + \frac{3}{5} R^{ab} e^c e^d e^e e^f e^g\right) \\
&+ \boldsymbol{\alpha}_{0\{2,2\}} l^5 \left[\left(R^a_{\ b} R^b_{\ a}\right) L_3^{Lorentz}\right] + \boldsymbol{\alpha}_{2\{2,2\}} l^5 \left[\left(R^a_{\ b} R^b_{\ a}\right) \left(L_3^{Lorentz}\left(k^{(1)}\right) + \frac{2}{l^2} e_c T^c\right)\right. \\
&\left. + 2\left(R^a_{\ b} \mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ a}\right) L_3^{Lorentz} + \frac{2}{l^2}\left(T^a T_a - R^{ab} e_a e_b\right) L_3^{Lorentz}\right] \\
&+ \boldsymbol{\alpha}_{4\{2,2\}} l^5 \left[\left(R^a_{\ b} R^b_{\ a}\right) \left(L_3^{Lorentz}\left(k^{(2)}\right) + L_3^{Lorentz}\left(k^{(1)} k^{(1)}\right) + \frac{2}{l^2} e_c \mathfrak{T}^{c\ (1)} + \frac{2}{l^2} h_c^{\ (1)} T^c\right)\right. \\
&+ 2\left(R^a_{\ b} \mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ a}\right) \left(L_3^{Lorentz}\left(k^{(1)}\right) + \frac{2}{l^2} e_c T^c\right) + \left(\mathfrak{R}^{a\ (1)}_{\ b} \mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ a}\right) L_3^{Lorentz} \\
&+ 2\left(R^a_{\ b} \mathfrak{R}^{b\ (2)}_{\ a}\right) L_3^{Lorentz} + \frac{2}{l^2}\left(T^a T_a - R^{ab} e_a e_b\right) \left(L_3^{Lorentz}\left(k^{(1)}\right) + \frac{2}{l^2} e_c T^c\right) \\
&\left. + \frac{2}{l^2}\left(2T^a \mathfrak{T}_a^{\ (1)} - 2R^{ab} e_a h_b^{\ (1)} - \mathfrak{R}^{(ab,1)} e_a e_b\right) L_3^{Lorentz}\right] \\
&+ \boldsymbol{\alpha}_{0\{4\}} l^5 \left[L_7^{Lorentz}\right] + \boldsymbol{\alpha}_{2\{4\}} l^5 \left[L_7^{Lorentz}\left(k^{(1)}\right) + \frac{1}{l^2} 4 T_a R^a_{\ b} R^b_{\ c} e^c\right] \\
&+ \boldsymbol{\alpha}_{4\{4\}} l^5 \left[L_7^{Lorentz}\left(k^{(2)}\right) + L_7^{Lorentz}\left(k^{(1)} k^{(1)}\right)\right. \\
&+ \frac{4}{l^2}\left(T_a R^a_{\ b} R^b_{\ c} h^{(c,1)} + \mathfrak{T}_a^{\ (1)} R^a_{\ b} R^b_{\ c} e^c + T_a R^a_{\ b} \mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ c} e^c + T_a \mathfrak{R}^{a\ (1)}_{\ b} R^b_{\ c} e^c\right) \\
&\left. + \frac{1}{l^4}\left[2\left(R^{ab} e_a e_b + T^a T_a\right) T^c e_c\right]\right]. \qquad (8.54)
\end{aligned}
$$

Luego, con el propósito de realizar un estudio de los invariantes y puesto que los $\alpha's$ son constantes arbitrarias independientes de dimensión $[longitud]^{-5}$ es útil elejir $\alpha_{0\{2,2\}} = \alpha_{2\{2,2\}} = \alpha_{4\{2,2\}} = l^{-5}\gamma_{2,2}$, $\boldsymbol{\alpha}_{0\{4\}} = \boldsymbol{\alpha}_{2\{4\}} = \boldsymbol{\alpha}_{4\{4\}} = l^{-5}\gamma_4$ y $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = l^{-5}\kappa$. Así, considerando primero el término proporcional a κ, tenemos [38]

$$\begin{aligned}
E_{(8)}^{\mathcal{M}_7} &= \frac{\kappa}{l}\epsilon_{abcdefg}\left(R^{ab}R^{cd}R^{ef}T^g + 3R^{ab}R^{cd}\mathfrak{R}^{(ef,1)}T^g + 3R^{ab}\mathfrak{R}^{(cd,1)}\mathfrak{R}^{(ef,1)}T^g\right. \\
&+R^{ab}R^{cd}R^{ef}\mathfrak{T}^{(g,1)} + 3R^{ab}R^{cd}\mathfrak{R}^{(ef,1)}\mathfrak{T}^{(g,1)} + R^{ab}R^{cd}R^{ef}\mathfrak{T}^{(g,2)} \\
&+3R^{ab}R^{cd}\mathfrak{R}^{(ef,2)}T^g + \frac{3}{l^2}R^{ab}R^{cd}e^e e^f T^g + \frac{6}{l^2}R^{ab}R^{cd}e^e h^{(f,1)}T^g \\
&\left.+\frac{3}{l^2}R^{ab}R^{cd}e^e e^f\mathfrak{T}^{(g,1)} + \frac{6}{l^2}R^{ab}\mathfrak{R}^{(cd,1)}e^e e^f T^g + \frac{3}{l^4}R^{ab}e^c e^d e^e e^f T^g\right).
\end{aligned}$$

Luego, considerando el término proporcional a $\gamma_{2,2}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{(8)\ \{2,2\}}^{\mathcal{M}_7} &= \left(\left(R^a_{\ b}R^b_{\ a}\right)^2 + 4\left(R^a_{\ b}R^b_{\ a}\right)\left(R^c_{\ d}\mathfrak{R}^{d\ (1)}_{\ c}\right) + 2\left(R^a_{\ b}R^b_{\ a}\right)\left(\mathfrak{R}^{c\ (1)}_{\ d}\mathfrak{R}^{d\ (1)}_{\ c}\right)\right. \\
&+4\left(R^a_{\ b}R^b_{\ a}\right)\left(R^c_{\ d}\mathfrak{R}^{d\ (2)}_{\ c}\right) + 4\left(R^a_{\ b}\mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ a}\right)^2 + \frac{4}{l^2}\left(R^a_{\ b}R^b_{\ a}\right)\left(T^cT_c - R^{cd}e_ce_d\right) \\
&+\frac{8}{l^2}\left(R^a_{\ b}\mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ a}\right)\left(T^cT_c - R^{cd}e_ce_d\right) + \frac{8}{l^2}R^a_{\ b}R^b_{\ a}\left(T^c\mathfrak{T}_c^{\ (1)} - R^{cd}e_ch_d^{\ (1)}\right) \\
&\left.-\frac{4}{l^2}R^a_{\ b}R^b_{\ a}\mathfrak{R}^{(cd,1)}e_ce_d + \frac{4}{l^4}\left[\left(T^aT_a\right)^2 - 2\left(T^aT_a\right)\left(R^{cd}e_ce_d\right) + \left(R^{ab}e_ae_b\right)^2\right]\right).
\end{aligned}$$

Por último, considerando el término proporcional a $\boldsymbol{\gamma}_4$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{(8)\ \{4\}}^{\mathcal{M}_7} = &\left[R^a_{\ b}R^b_{\ c}R^c_{\ d}R^d_{\ a} + 4R^a_{\ b}R^b_{\ c}R^c_{\ d}\mathfrak{R}^{d\ (1)}_{\ a} + 6R^a_{\ b}R^b_{\ c}\mathfrak{R}^{c\ (1)}_{\ d}\mathfrak{R}^{d\ (1)}_{\ a} + 4R^a_{\ b}R^b_{\ c}R^c_{\ d}\mathfrak{R}^{d\ (2)}_{\ a}\right. \\
&-\frac{4}{l^2}e_aR^a_{\ b}R^b_{\ c}R^c_{\ d}e^d - \frac{8}{l^2}e_aR^a_{\ b}R^b_{\ c}\mathfrak{R}^{c\ (1)}_{\ d}e^d - \frac{4}{l^2}e_aR^a_{\ b}\mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ c}R^c_{\ d}e^d - \frac{8}{l^2}e_aR^a_{\ b}R^b_{\ c}R^c_{\ d}h^{(d,1)} \\
&+\frac{4}{l^2}T_aR^a_{\ b}R^b_{\ c}T^c + \frac{8}{l^2}T_aR^a_{\ b}\mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ c}T^c + \frac{8}{l^2}T_aR^a_{\ b}R^b_{\ c}\mathfrak{T}^{(c,1)} - \frac{2}{l^4}\left(e_bR^b_{\ a}e^a\right)^2 \\
&\left.+\frac{8}{l^4}T_cR^c_{\ d}e^de_aT^a + \frac{2}{l^4}\left(T_aT^a\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Al igual que en el caso 3-dimensional podemos alistar nuestros resultados en las siguientes tablas, lo cual nos entrega una visión más clara de los invariante que existen en 8 dimensiones para el álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_7$.

Tabla 4

D = 7 Lagrangianos Chern-Simons	Invariantes topólogicos
$L_{E\ (7)}^{\mathcal{M}_7}$	$E_{(8)}^{\mathcal{M}_7}$
$\left(R^a_{\ b} R^b_{\ a}\right) L_3^{Lorentz}$	$\left(P_4\right)^2 = \left(R^a_{\ b} R^b_{\ a}\right)^2$
$\left(R^a_{\ b} R^b_{\ a}\right) e_c T^c$	$P_4\ N_4 = \left(R^a_{\ b} R^b_{\ a}\right)\left(T^a T_a - e^a e^b R_{ab}\right)$
$\left(T^a T_a - R^{ab} e_a e_b\right)\left(e_c T^c\right)$	$\left(N_4\right)^2$
$\left(R^a_{\ b} R^b_{\ a}\right)\left(L_3^{Lorentz}\left(k^{(1)}\right)\right)$	$P_4\ P_4\left(k^{(1)}\right) = 2\left(R^a_{\ b} R^b_{\ a}\right) R^a_{\ \ b} \mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ a}$
$\left(R^a_{\ b} R^b_{\ a}\right)\left(L_3^{Lor}\left(k^{(2)}\right) + L_3^{Lor}\left(k^{(1)} k^{(1)}\right)\right)$	$P_4\ P_4\left(k^{(2)}\right)$ $= \left(R^a_{\ b} R^b_{\ a}\right)\left(2 R^c_{\ d} \mathfrak{R}^{d\ (2)}_{\ c} + \mathfrak{R}^{c\ (1)}_{\ d} \mathfrak{R}^{d\ (1)}_{\ c}\right)$
$\left(R^a_{\ b} R^b_{\ a}\right)\left(e_c \mathfrak{T}^{c\ (1)} + h_c^{(1)} T^c\right)$	$P_4\ N_4\left(h^{(1)}\right)$ $= \left(R^a_{\ b} R^b_{\ a}\right)\left(2 T^a \mathfrak{T}^{(1)}_{\ a} - e^a e^b \mathfrak{R}^{(1)}_{ab} - 2 e^a h^{(b,1)} R_{ab}\right)$
$\left(R^a_{\ b} \mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ a}\right)\left(L_3^{Lorentz}\left(k^{(1)}\right)\right)$	$\left(P_4\left(k^{(1)}\right)\right)^2 = 2\left(R^a_{\ b} \mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ a}\right)^2$
$\left(R^a_{\ b} \mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ a}\right)\left(e_c T^c\right)$	$P_4\left(k^{(1)}\right) N_4 = \left(R^a_{\ b} \mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ a}\right)\left(T^c T_c - R^{cd} e_c e_d\right)$

Tabla 5

D = 7 Lagrangianos Chern-Simons	Invariantes topólogicos
$L_7^{Lorentz}$	$P_8 = R^a_{\ b} R^b_{\ c} R^c_{\ d} R^d_{\ a}$
$L_7^{Lorentz}\left(k^{(1)}\right)$	$P_8\left(k^{(1)}\right) = 4 R^a_{\ b} R^b_{\ c} R^c_{\ d} \mathfrak{R}^{d\ (1)}_{\ a}$
$L_7^{Lorentz}\left(k^{(1)} k^{(1)}\right) + L_7^{Lorentz}\left(k^{(2)}\right)$	$P_8\left(k^{(1)} k^{(1)}\right) + P_8\left(k^{(2)}\right)$ $= 6 R^a_{\ b} R^b_{\ c} \mathfrak{R}^{c\ (1)}_{\ d} \mathfrak{R}^{d\ (1)}_{\ a} + 4 R^a_{\ b} R^b_{\ c} R^c_{\ d} \mathfrak{R}^{d\ (2)}_{\ a}$
$L_7^{Torsión} = T_a R^a_{\ b} R^b_{\ c} e^c$ $+ \left[\left(R^{ab} e_a e_b + T^a T_a\right) T^c e_c\right]$	$T_2 - V_3 + 4 K_1 K_0 - V_1 V_1 + T_0 T_0$ $= T_a R^a_{\ b} R^b_{\ c} T^c - e_a R^a_{\ b} R^b_{\ c} R^c_{\ d} e^d$ $+ 4 T_c R^c_{\ d} e^d e_a T^a - \left(e_b R^b_{\ a} e^a\right)^2 + \left(T_a T^a\right)^2$
$L_7^{Torsión\ (1)} = T_a R^a_{\ b} R^b_{\ c} h^{(c,1)}$ $+ \mathfrak{T}_a^{(1)} R^a_{\ b} R^b_{\ c} e^c + T_a R^a_{\ b} \mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ c} e^c$ $+ T_a \mathfrak{R}^{a\ (1)}_{\ b} R^b_{\ c} e^c$	$2 T_2^{\ (1)\{I\}} - 2 V_3^{\ (1)\{I\}} + 2 T_2^{\ (1)\{II\}} - 2 V_3^{\ (1)\{II\}} - V_3^{(1)\{III\}}$ $= 2 T_a R^a_{\ b} R^b_{\ c} \mathfrak{T}^{(c,1)} - 2 e_a R^a_{\ b} R^b_{\ c} R^c_{\ d} h^{(d,1)}$ $+ 2 T_a R^a_{\ b} \mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ c} T^c - 2 e_a R^a_{\ b} R^b_{\ c} \mathfrak{R}^{c\ (1)}_{\ d} e^d$ $- e_a R^a_{\ b} \mathfrak{R}^{b\ (1)}_{\ c} R^c_{\ d} e^d$

De esta forma es trivial ver que a medida que la dimensionalidad del espacio-tiempo y la del álgebra crece, se tiene que el número de invariantes aumenta drásticamente. Es interesante notar además que despreciando el invariante de Maxwell-Euler es posible combinar los distintos invariantes en un único invariante tipo Maxwell-Pontryagin para el grupo $\mathcal{M}_7$. Así, con la particular elección $\alpha_{0\{2,2\}} = \alpha_{2\{2,2\}} = \alpha_{4\{2,2\}} = l^{-5}\gamma_{2,2}$ tenemos que

$$\left(F^A_{\ B}F^B_{\ A}\right)\left(F^C_{\ D}F^D_{\ C}\right) = \mathcal{P}^{\mathcal{M}_7}_{(8)\ \{2,2\}}, \tag{8.55}$$

mientras que eligiendo $\boldsymbol{\alpha}_{0\{4\}} = \boldsymbol{\alpha}_{2\{4\}} = \boldsymbol{\alpha}_{4\{4\}} = l^{-5}\gamma_4$ se tiene

$$F^A_{\ B}F^B_{\ C}F^C_{\ D}F^D_{\ A} = \mathcal{P}^{\mathcal{M}_7}_{(8)\ \{4\}}, \tag{8.56}$$

donde

$$F^{AB} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} R^{ab} + \left(\mathfrak{R}^{(ab,1)} + \frac{1}{l^2}e^a e^b\right) \\ + \left(\mathfrak{R}^{(ab,2)} + \frac{1}{l^2}\left[e^a h^{(b,1)} + h^{(a,1)}e^b\right]\right) \end{array} & \frac{1}{l}T^a + \frac{1}{l}\mathfrak{T}^{(a,1)} + \frac{1}{l}\mathfrak{T}^{(a,2)} \\ & \\ -\frac{1}{l}T^b - \frac{1}{l}\mathfrak{T}^{(a,1)} - \frac{1}{l}\mathfrak{T}^{(a,2)} & 0 \end{pmatrix} \tag{8.57}$$

y donde hemos definido

$$\mathfrak{R}^{(ab,1)} = D_\omega k^{(ab,1)} \tag{8.58}$$

$$\mathfrak{R}^{(ab,2)} = D_\omega k^{(ab,2)} + k^a_{\ c}{}^{(1)} k^{cb(1)} \tag{8.59}$$

$$\mathfrak{T}^{(a,1)} = D_\omega h^{(a,1)} + k^a_{\ c}{}^{(1)}\, e^c \tag{8.60}$$

$$\mathfrak{T}^{(a,2)} = D_\omega h^{(a,2)} + k^a_{\ c}{}^{(2)}\, e^c + k^a_{\ c}{}^{(1)}\, h^{(c,1)}. \tag{8.61}$$

A pesar del aparente desorden al aumentar la dimensión del espacio-tiempo y la del álgebra, existe un patrón evidente que se repite en $D = 4k - 1$ como veremos en la siguiente sección.

8.2.3 Generalización a $D = 4k - 1$

Consideremos finalmente el Lagrangiano más general en $(4k-1)$ dimensiones invariante bajo algún álgebra de Lie tipo Maxwell $\mathcal{M}_m$. Siguiendo las definiciones de la Ref. [10] (ver sección 2.3), consideremos la S-expansión del álgebra de Lie AdS usando $S_E^{(N)}$ como semi-grupo abeliano. Despues de extraer una subálgebra resonante y realizar una 0_s-reducción, uno encuentra el álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_m$.

Luego, el Lagrangiano más general en $(4k-1)$ dimensiones $\mathcal{M}_m$-valuado toma la forma

$$\kappa L_{E\ (4k-1)}^{\mathcal{M}_m} + \gamma_{\{n_j\}} L_{P\ \{n_j\}\ (4k-1)}^{\mathcal{M}_m}, \tag{8.62}$$

donde $dL_{P\ \{n_j\}\ (4k-1)}^{\mathcal{M}_m} = \mathcal{P}_{n_1 \cdots n_s}$, con $\sum_j n_j = 4k$.

Los resultados obtenidos hasta ahora nos permiten de esta manera generalizar el teorema de la Ref. [16] para el caso de las álgebras de Lie tipo Maxwell:

Teorema 10 *: En espacio tiempo de dimensión impar, existen dos familias de lagrangianos gravitacionales de primer orden $L\left(e^{(2k+1)}, \omega^{(2k)}\right)$, invariantes bajo transformaciones locales $\mathcal{M}$:*

- *La forma Maxwell-Euler-Chern-Simons $L_{E\ (2n-1)}^{\mathcal{M}}$, en $D = 2n-1$. Su derivada exterior nos entrega la densidad de Maxwell-Euler en $2n$ dimensiones.*
- *Las formas Maxwell-Pontryagin-Chern-Simons $L_{P\ (4n-1)}^{\mathcal{M}}$, en $D = 4k-1$. Sus derivadas exteriores nos entregan las densidades de Maxwell-Pontryagin $\mathcal{P}_{(4n)}^{\mathcal{M}}$ en $4n$ dimensiones.*

Por último, debe ser enfatizado que a pesar que dichos Lagrangianos CS $(2p+1)$-dimensional son invariantes bajo algún grupo de simetría de gauge $\mathcal{M}_{2m+1}$, solo conducirán al lagrangiano de Einstein-Hilbert en un cierto límite de la constante de acoplamiento l, si y solo si $m \geq p$.

Apéndices

"*All things are difficult*
before they are easy"
Thomas Fuller.

Apéndice A

Método de expansión en serie de potencias de las formas de MC

En este apéndice se estudia brevemente el método de expansión en serie de potencias de las formas de Maurer-Cartan desarrollado por Azcárraga, Izquierdo, Picón y Varela en la Ref. [9]. Dicho método consiste en resumen en expandir las formas de MC de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en series de potencias de un parámetro real λ el cual rescala las coordenadas del grupo de Lie G.

Siguiendo a Ref. [9], sea G un grupo de Lie, de coordenadas local g^A, $A = 1, \ldots, r = \dim G$. Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de base $\{T_A\}$, la cual es obtenida por los generadores invariantes izquierdos (LI) $T_A(g)$ sobre la variedad del grupo. Sea también $\mathfrak{g}^*$ la coálgebra, y sea $\{\omega^A(g)\}$, $A = 1, \ldots, r = \dim G$ la base determinada por las 1-formas de MC sobre G. Entonces, cuando la base $\{T_A\}$ satisface el paréntesis de Lie $[T_A, T_B] = C_{AB}^{\ \ C} T_C$, se satisfacen las ecuaciones de Maurer-Cartan

$$d\omega^C(g) = -\frac{1}{2} C_{AB}^{\ \ C} \omega^A(g) \wedge \omega^B(g) . \tag{A.1}$$

Sea además θ, la 1-forma canónica invariante izquierda sobre G,

$$\theta(g) = g^{-1} dg = e^{-g^A T_A} d e^{g^A T_A} \equiv \omega^A T_A \tag{A.2}$$

Haciendo uso del teorema de Baker-Campbell-Hausdorff, uno obtiene las expansiones de $\theta(g)$

y de las formas de MC $\omega^A(g)$ como polinomios en las coordenadas g^A del grupo:

$$\theta(g) = \left[\delta_B^A + \frac{1}{2!}C_{BC}{}^A g^C + \frac{1}{3!}C_{BC_1}{}^{D_1}C_{D_1C_2}{}^A g^{C_1}g^{C_2}\right. \tag{A.3}$$

$$\left. +\frac{1}{4!}C_{BC_1}{}^{D_1}C_{D_1C_2}{}^{D_2}C_{D_2C_3}{}^A g^{C_1}g^{C_2}g^{C_3} + \dots\right] dg^B T_A\ , \tag{A.4}$$

$$\omega^A(g) = \left[\delta_B^A + \frac{1}{2!}C_{BC}{}^A g^C\right. \tag{A.5}$$

$$\left. +\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}C_{BC_1}{}^{D_1}C_{D_1C_2}{}^{D_2}\dots C_{D_{n-2}C_{n-1}}{}^{D_{n-1}}C_{D_{n-1}C_n}{}^A g^{C_1}g^{C_2}\dots g^{C_{n-1}}g^{C_n}\right] dg^B\ .$$

De $(A.5)$ es evidente que la redefinición

$$g^L \to \lambda g^L \tag{A.6}$$

de alguna coordenadad g^L producirá una expansión de la 1-forma MC $\omega^A(g,\lambda)$ como una suma de 1-formas $\omega^{A,\alpha}(g)$ sobre G multiplicados por la potencia correspondiente λ^α de λ, a saber

$$\omega^A(g,\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\lambda^\alpha\omega^{A,\alpha}(g)\,. \tag{A.7}$$

Un ejemplo sencillo de expansión en serie de potencias es aquel cuando $\mathfrak{g}^*$ se descompone en la suma de dos subespacios vectoriales

$$\mathfrak{g}^* = V_0^* \oplus V_1^*, \tag{A.8}$$

siendo V_0^*, V_1^* generados por las formas de MC $\omega^{A_0}(g)$, $\omega^{A_1}(g)$ de $\mathfrak{g}^*$ con los índices correspondientes a los parámetros no modificados y modificados respectivamente,

$$g^{A_0} \to g^{A_0} \quad , \quad g^{A_1} \to \lambda g^{A_1} \quad , \quad A_0(A_1) = 1,\dots,\dim V_0(\dim V_1)\,. \tag{A.9}$$

En general, las series de $\omega^{A_0}(g,\lambda) \in V_0^*$ y $\omega^{A_1}(g,\lambda) \in V_1^*$ involucrará todas las potencias de λ,

$$\omega^{A_p}(g,\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\lambda^\alpha\omega^{A_p,\alpha}(g) \qquad , \qquad p=0,1 \tag{A.10}$$

$$= \omega^{A_p,0}(g) + \lambda\omega^{A_p,1}(g) + \lambda^2\omega^{A_p,2}(g) + \dots \tag{A.11}$$

Con esta notación, las ecuaciones de MC despues del reescalamiento pueden rescribirse como

$$d\omega^{C_s} = -\frac{1}{2}C_{A_pB_q}{}^{C_s}\omega^{A_p}\wedge\omega^{B_q} \qquad , \qquad p,q,s=0,1 \tag{A.12}$$

o explicitamente

$$d\omega^{C_0} = -\frac{1}{2}C_{A_0B_0}{}^{C_0}\omega^{A_0}\wedge\omega^{B_0} - C_{A_0B_1}{}^{C_0}\omega^{A_0}\wedge\omega^{B_1} - \frac{1}{2}C_{A_1B_1}{}^{C_0}\omega^{A_1}\wedge\omega^{B_1} \tag{A.13}$$

$$d\omega^{C_1} = -\frac{1}{2}C_{A_0B_0}{}^{C_1}\omega^{A_0}\wedge\omega^{B_0} - C_{A_0B_1}{}^{C_1}\omega^{A_0}\wedge\omega^{B_1} - \frac{1}{2}C_{A_1B_1}{}^{C_1}\omega^{A_1}\wedge\omega^{B_1}. \tag{A.14}$$

Luego, insertando ahora las expansiones $(A.10)$ en las ecuaciones de MC $(A.12)$ y usando la identidad

$$\left(\sum_{\alpha=p}^{\infty}\lambda^{\alpha}\omega^{A_p,\alpha}\right)\wedge\left(\sum_{\alpha=q}^{\infty}\lambda^{\alpha}\omega^{B_q,\alpha}\right) = \sum_{\alpha=p+q}^{\infty}\lambda^{\alpha}\sum_{\beta=p}^{\alpha-q}\omega^{A_p,\beta}\wedge\omega^{B_q,\alpha-\beta} \tag{A.15}$$

es posible mostrar lo siguiente

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty}\lambda^{\alpha}d\omega^{C_s,\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\lambda^{\alpha}\left[-\frac{1}{2}C_{A_pB_q}{}^{C_s}\sum_{\beta=0}^{\alpha}\omega^{A_p,\beta}\wedge\omega^{B_q,\alpha-\beta}\right] \tag{A.16}$$

Esto requiere la igualdad de los coeficientes de igual potencias λ^{α}. De este modo, los coeficientes 1-formas $\omega^{A_p,\alpha}$ satisfacen las identidades

$$d\omega^{C_s,\alpha} = -\frac{1}{2}C_{A_pB_q}{}^{C_s}\sum_{\beta=0}^{\alpha}\omega^{A_p,\beta}\wedge\omega^{B_q,\alpha-\beta} \qquad , \qquad p,q,s=0,1 \tag{A.17}$$

Las condiciones bajo las cuales podemos usar los coeficientes de expansión ω^{A_0,α_0} y ω^{A_1,α_1} hasta ciertos órdenes $N_0 \geq 0, N_1 \geq 0, \alpha = 0,1,\ldots,N_0, \beta = 0,1,\ldots,N_1$, tal que $(A.17)$ determine las ecuaciones de Maurer-Cartan de una nueva álgebra de Lie vienen dadas en el siguiente teorema:

Teorema 11 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{g} = V_0 \oplus V_1$. Sea $\{\omega^A\},\{\omega^{A_0}\},\{\omega^{A_1}\}$ ($A = 1,\ldots,\dim\mathfrak{g}$, $A_0 = 1,\ldots,\dim V_0$, $A_1 = 1,\ldots,\dim V_1$) respectivamente, las bases de $\mathfrak{g}^*$, V_0^* y V_1^* espacios vectoriales duales. Entonces, el espacio vectorial generado por*

$$\left\{\omega^{A_0,0},\omega^{A_0,1},\ldots,\omega^{A_0,N},\omega^{A_1,0},\omega^{A_1,1},\ldots,\omega^{A_1,N}\right\} \tag{A.18}$$

junto con las ecuaciones de MC

$$d\omega^{C_s,\alpha} = -\frac{1}{2} C_{A_p,\beta\ B_q,\gamma}^{\quad\quad\quad C_s,\alpha}\ \omega^{A_p,\beta}\omega^{B_q,\gamma}, \tag{A.19}$$

$$C_{A_p,\beta\ B_q,\gamma}^{\quad\quad\quad C_s,\alpha} = \begin{cases} 0 & si\ \beta+\gamma\neq\alpha \\ C_{A_pB_q}^{\quad C_s} & si\ \beta+\gamma=\alpha \end{cases} \tag{A.20}$$

determina un álgebra de Lie $\mathfrak{g}(N)$ *para cada orden de la expansión* $N \geq 0$ *de dimensión* $\dim\mathfrak{g}(N) = (N+1)\dim\mathfrak{g}$.

La prueba de este teorema es encontrada en la Ref. [9], además de los casos en que V_0 es una subálgebra, en que V_1 es un coseto simétrico y cuando $\mathfrak{g} = V_0 \oplus \cdots \oplus V_n$ satisface las condiciones de Weimar-Woods.

Apéndice B

Invariantes locales de Lorentz

El lagrangiano de Lanczos-Lovelock corresponde a la D-forma más general que satisface las siguientes dos condiciones:

- El lagrangiano de LL debe ser invariante bajo transformaciones locales de Lorentz, construido a partir del vielbein e^a, de la conexión de spin ω^{ab}, de sus derivadas exteriores y productos de ellos, sin hacer uso del dual de Hodge.
- El espacio-tiempo es una variedad Riemaniana, es decir libre de torsión.

Es claro que la primera condición implica que las ecuaciones de campo sean de segundo orden en la métrica. No obstante, es posible agregar torsión a la generalización del lagrangiano de Einstein-Hilbert despreciando simplemente la segunda condición.

Siguiendo a Ref. [22], los únicos tensores bajo transformaciones locales de Lorentz que se pueden construir aparte de e^a, $\omega^a_{\ b}$, y sus derivadas exteriores son, además de e^a por sí mismo, $R^a_{\ b}$, T^a, y productos de ellos. Luego, las combinaciones invariantes que pueden ocurrir en el lagrangiano son contracciones entre estos tensores, incluyendo los tensores invariantes

$\varepsilon_{a_1\ldots a_D}$,$\eta_{ab}$, η^{ab}. Así, los invariantes que se pueden construir son los siguientes

$$
\begin{aligned}
L^{(p)} &= \varepsilon_{a_1\ldots a_D} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \cdots e^{a_D}, && \text{(B.1)}\\
R_A &= R^{a_1}{}_{a_2} \cdots R^{a_A}{}_{a_1}, && \text{(B.2)}\\
V_A &= e_{a_1} R^{a_1}{}_{a_2} \cdots R^{a_A}{}_{b} e^b, && \text{(B.3)}\\
T_A &= T_{a_1} R^{a_1}{}_{a_2} \cdots R^{a_A}{}_{b} T^b, && \text{(B.4)}\\
K_A &= T_{a_1} R^{a_1}{}_{a_2} \cdots R^{a_A}{}_{b} e^b. && \text{(B.5)}
\end{aligned}
$$

Cualquier otro invariante, en particular el lagrangiano, es escrito como una combinación lineal de productos de estas combinaciones de invariantes locales de Lorentz.

En especial, las respectivas derivadas exteriores de estos invariantes son

$$
\begin{aligned}
dR_A &= 0 && \text{(B.6)}\\
dV_A &= 2K_A && \text{(B.7)}\\
dT_A &= 2K_{A+1} && \text{(B.8)}\\
dK_A &= T_A - V_{A+1} && \text{(B.9)}
\end{aligned}
$$

cuyos resultados pueden resultar util en la construcciones de teorías Chern-Simons que impliquen torsión.

Apéndice C

Álgebras de Maxwell Generalizadas

En este apéndice, siguiendo a la Ref. [39], mostraremos que las contracciones de Inönü-Wigner generalizadas [40] de las álgebras AdS-Maxwell generalizadas proveen de las álgebras tipo Maxwell $\mathcal{M}_m$ las cuales corresponden a las llamadas álgebras $\mathfrak{B}_m$ definidas por los autores de la Ref. [33].

Para obtener el álgebra de Lie AdS-Maxwell generalizada consideremos la S-expansión del álgebra AdS con $S_{\mathcal{M}}^{(N)}$ como semigrupo abeliano. El semigrupo $S_{\mathcal{M}}^{(N)} = \{\lambda_\alpha, \alpha = 0, \cdots, N\}$ satisface la siguiente ley de multiplicación

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha+\beta \leq N \\ \lambda_{\alpha+\beta-2\left[\frac{N+1}{2}\right]} & \text{si } \alpha+\beta > N \end{cases} \tag{C.1}$$

donde $[\cdot]$ representa la parte entera. Notemos que para N impar, $S_{\mathcal{M}}^{(N)}$, corresponde al grupo cíclico de $(N+1)$ elementos $\mathbb{Z}_{N+1}$.

Consideremos a modo de ejemplo la expansión con el semigrupo $S_{\mathcal{M}}^{(3)}$. Así, siguiendo las definiciones de la Ref. [10] (ver sección 2.3), consideremos la S-expansión del álgebra de Lie AdS usando como semigrupo $S_{\mathcal{M}}^{(3)} = \mathbb{Z}_4 = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ con la ley de multiplicación

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha+\beta \leq 3 \\ \lambda_{\alpha+\beta-4} & \text{si } \alpha+\beta > 3. \end{cases} \tag{C.2}$$

Después de extraer una subálgebra resonante, uno encuentra el álgebra $AdS-\mathcal{M}_5$, cuyos generadores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= Z_{ab}, \qquad [J_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b && \text{(C.3)}\\
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{db}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb} && \text{(C.4)}\\
[J_{ab}, Z_c] &= \eta_{bc}Z_a - \eta_{ac}Z_b, && \text{(C.5)}\\
[Z_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}Z_a - \eta_{ac}Z_b, && \text{(C.6)}\\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{cb}Z_{ad} - \eta_{ca}Z_{bd} + \eta_{db}Z_{ca} - \eta_{da}Z_{cb} && \text{(C.7)}\\
[Z_{ab}, Z_c] &= \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b && \text{(C.8)}\\
[P_a, Z_c] &= J_{ab}, \qquad [Z_a, Z_c] = Z_{ab} && \text{(C.9)}\\
[Z_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{db}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb}. && \text{(C.10)}
\end{aligned}$$

Luego mediante una contracción de Inönü-Wigner generalizada [40], es decir reescalando $P_a \rightarrow \lambda P_a$, $Z_{ab} \rightarrow \lambda^2 Z_{ab}$, $Z_a \rightarrow \lambda^3 Z_a$ y al realizar el limite $\lambda \rightarrow \infty$ obtenemos el álgebra tipo Maxwell $\mathcal{M}_5$

$$\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= Z_{ab}, \qquad [J_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b && \text{(C.11)}\\
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{db}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb} && \text{(C.12)}\\
[J_{ab}, Z_c] &= \eta_{bc}Z_a - \eta_{ac}Z_b, && \text{(C.13)}\\
[Z_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}Z_a - \eta_{ac}Z_b, && \text{(C.14)}\\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{cb}Z_{ad} - \eta_{ca}Z_{bd} + \eta_{db}Z_{ca} - \eta_{da}Z_{cb} && \text{(C.15)}\\
[Z_{ab}, Z_c] &= [P_a, Z_c] = [Z_a, Z_c] = [Z_{ab}, Z_{cd}] = 0, && \text{(C.16)}
\end{aligned}$$

la cual coincide con la conocida álgebra $\mathfrak{B}_5$ [33] obtenida mediante $S_E^{(3)}$-expansion resonante reducida del álgebra AdS.

Este proceso es generalizado por los autores de la Ref. [39] a todas las álgebras $\mathfrak{B}_m$ las cuales son obtenidas mediante una contracción de Inönü-Wigner generalizada del álgebra AdS-Maxwell generalizada mostrando así la equivalencia entre las álgebras $\mathfrak{B}_m$ y las álgebras de Maxwell generalizadas[4] que denotaremos $\mathcal{M}_m$.

[4] También llamadas álgebras de Poincaré Generalizadas $\mathcal{P}_m$

Apéndice D

S-expansión de la curvatura de Lorentz

Consideremos a modo de ejemplos el álgebra $\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}$, la cual es obtenida mediante una $S_0^{(4)}$-expansión reducida del álgebra de Lorentz. Para ello, consideramos el semigrupo $S_0^{(4)}$ $= \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5\}$ con la siguiente ley de multiplicación

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha+\beta \leq 5 \\ \lambda_{N+1} & \text{si } \alpha+\beta > 5 \end{cases} \tag{D.1}$$

con $\lambda_5 \equiv 0_S$.

Los generadores de la nueva álgebra vienen dados por $\{J_{ab,0}; J_{ab,2}; J_{ab,4}\} = \left\{J_{ab}, Z_{ab}^{(1)}, Z_{ab}^{(2)}\right\}$los cuales satisfacen

$$\begin{aligned}
[J_{ab}, J_{cd}]_{\mathcal{M}} &= [\lambda_0 J_{ab}, \lambda_0 J_{cd}]_{V_0} = \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{ca} J_{bd} + \eta_{db} J_{ca} - \eta_{da} J_{cb}, \\
\left[J_{ab}, Z_{cd}^{(1)}\right]_{\mathcal{M}} &= [\lambda_0 J_{ab}, \lambda_2 J_{cd}]_{V_0} = \eta_{cb} Z_{ad}^{(1)} - \eta_{ca} Z_{bd}^{(1)} + \eta_{db} Z_{ca}^{(1)} - \eta_{da} Z_{cb}^{(1)}, \\
\left[Z_{ab}^{(1)}, Z_{cd}^{(1)}\right]_{\mathcal{M}} &= [\lambda_2 J_{ab}, \lambda_2 J_{cd}]_{V_0} = \eta_{cb} Z_{ad}^{(2)} - \eta_{ca} Z_{bd}^{(2)} + \eta_{db} Z_{ca}^{(2)} - \eta_{da} Z_{cb}^{(2)}, \\
\left[J_{ab}, Z_{cd}^{(2)}\right]_{\mathcal{M}} &= [\lambda_0 J_{ab}, \lambda_4 J_{cd}]_{V_0} = \eta_{cb} Z_{ad}^{(2)} - \eta_{ca} Z_{bd}^{(2)} + \eta_{db} Z_{ca}^{(2)} - \eta_{da} Z_{cb}^{(2)}, \\
\left[Z_{cd}^{(2)}, Z_{cd}^{(2)}\right]_{\mathcal{M}} &= \left[Z_{ab}^{(1)}, Z_{cd}^{(2)}\right]_{\mathcal{M}} = \lambda_5 [J_{ab}, J_{cd}]_{V_0} = 0.
\end{aligned} \tag{D.2}$$

Es interesante notar que el semigrupo $S_0^{(5)} = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_4\}$ corresponde a una descomposición del semigrupo $S_E^{(4)}$ usado para obtener el álgebra $\mathcal{M}_6$. Esta coincidencia tiene como consecuencia que el álgebra $\mathfrak{L}_6^{\mathcal{M}}$ corresponde a una subálgebra tipo Lorentz del álgebra $\mathcal{M}_6$.

Por otro lado, sea la 2-forma curvatura de Lorentz

$$\tilde{F} = \frac{1}{2}\left(R^{ab} + \frac{1}{l^2}e^a e^b\right) J_{ab}, \tag{D.3}$$

la cual nos permite construir la acción invariante Born-Infeld 6-dimensional invariante bajo el grupo de Lorentz

$$L_{BI}^{(6)} = \frac{\kappa}{6}\epsilon_{abcdef}\left(R^{ab} + \frac{1}{l}e^a e^b\right)\left(R^{cd} + \frac{1}{l}e^c e^d\right)\left(R^{ef} + \frac{1}{l}e^e e^f\right). \tag{D.4}$$

Luego, la 2-forma curvatura expandida es obtenida de la siguiente forma

$$\begin{aligned} F &= \lambda_\alpha \tilde{F}^\alpha \\ &= \frac{1}{2}\lambda_0 R^{ab,0} J_{ab} + \frac{1}{2}\left(\lambda_2 R^{ab,2} + \frac{1}{l^2}\lambda_2\left(e^a e^b\right)^{,2}\right) J_{ab} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\lambda_4 R^{ab,4} + \frac{2}{l^2}\lambda_4\left(e^a e^b\right)^{,4}\right) J_{ab} \\ &= \frac{1}{2}R^{ab,0} J_{ab,0} + \frac{1}{2}\left(R^{ab,2} + \frac{1}{l^2}\left(e^a e^b\right)^{,2}\right) J_{ab,2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(R^{ab,4} + \frac{2}{l^2}\left(e^a e^b\right)^{,4}\right) J_{ab,4}. \end{aligned}$$

Recordemos que la curvatura de Riemann R^{ab} es dada por $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c\omega^{cb}$. Esto significa que la expansión de la curvatura R^{ab} es obtenida expandiendo la conexión de spin ω^{ab}. Por ejemplo $R^{(ab,4)}$ es obtenido haciendo

$$\lambda_4 R^{(ab,4)} = \lambda_4 d\omega^{ab,4} + \lambda_2\lambda_2\omega^a{}_c{}^{,2}\omega^{cb,2} + \lambda_4\lambda_0\omega^a{}_c{}^{,4}\omega^{cb,0} + \lambda_0\lambda_4\omega^a{}_c{}^{,0}\omega^{cb,4}.$$

Luego definiendo $\omega^{ab,4} = k^{(ab,2)}$, $\omega^{ab,2} = k^{(ab,1)}$, $\omega^{ab,0} = \omega^{ab}$ se tiene que

$$\begin{aligned} R^{(ab,4)} &= dk^{(ab,2)} + k^a{}_c{}^{,(1)}k^{(cb,1)} + k^a{}_c{}^{,(2)}\omega^{cb} + \omega^a{}_c k^{(cb,2)} \\ &= dk^{(ab,2)} + \omega^a{}_c k^{(cb,2)} + \omega^{bc}k^a{}_c{}^{,(2)} + k^a{}_c{}^{,(1)}k^{(cb,1)} \\ &= D_\omega k^{(ab,2)} + k^a{}_c{}^{,(1)}k^{(cb,1)}. \end{aligned} \tag{D.5}$$

Por otro lado, es posible definir el campo $h^{(a,1)}$ a partir del vielbein e^a expandido de la siguiente manera:

$$\lambda_1\lambda_3 e^{(a,1)}e^{(b,3)} = \lambda_4 e^a h^{(a,1)}$$

Notemos además que la combinación $\lambda_5 h^{(a,1)} h^{(b,1)}$ no está permitida debido a que λ_5 corresponde al elemento cero del semigrupo.

De modo que la 2-forma curvatura,

$$F = \frac{1}{2} R^{ab,0} J_{ab,0} + \frac{1}{2} \left(R^{ab,2} + \frac{1}{l^2} \left(e^a e^b \right)^{,2} \right) J_{ab,2} + \frac{1}{2} \left(R^{ab,4} + \frac{2}{l^2} \left(e^a e^b \right)^{,4} \right) J_{ab,4}$$

puede rescribirse como

$$F = \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} \left(D_\omega k^{(ab,1)} + \frac{1}{l^2} e^a e^b \right) Z_{ab}^{(1)} + \frac{1}{2} \left(D_\omega k^{(ab,2)} + k^{a\ (1)}_{\ c} k^{cb(1)} + \frac{1}{l^2} \left(e^a h^{(b,1)} + h^{(a,1)} e^b \right) \right) Z_{ab}^{(2)}. \tag{D.6}$$

donde $R^{(ab,0)} = R^{ab}$, $R^{(ab,2)} = D_\omega k^{(ab,1)}$, $\left(e^a e^b \right)^{,2} = e^a e^b$, $R^{(ab,4)} = D_\omega k^{(ab,2)} + k^{a\ (1)}_{\ c} k^{cb(1)}$, $\left(e^a e^b \right)^{,4} = e^a h^{(b,1)}$. De esta forma, se muestra explicitamente que los campos $k^{(ab,1)}$, $k^{(ab,2)}$ y $h^{(a,1)}$ aparecen como consecuencia del procedimiento de la S-expansión. De forma análoga, se puede mostrar que al considerar un semigrupo $S_E^{(N)}$ de orden mayor, se obtendrá un número mayor de campos de materia $k^{(ab,i)}$ y $h^{(a,i)}$.

Apéndice E

La identidad de Bianchi para álgebras tipo Maxwell

Consideremos a modo de ejemplo el álgebra $\mathcal{M}_7$ la cual es obtenida mediante una S-expansión del álgebra AdS utilizando $S_E^{(5)}$ como el semigrupo abeliano (ver sección 6.4).

Sea la 1-forma conexión A $\mathcal{M}_7$-valuada

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}e^a P_a + \frac{1}{2}k^{(ab,1)}Z_{ab}^{(1)} + \frac{1}{l}h^{(a,1)}Z_a^{(1)} + \frac{1}{2}k^{(ab,2)}Z_{ab}^{(2)} + \frac{1}{l}h^{(a,2)}Z_a^{(2)}, \tag{E.1}$$

y la 2-forma curvatura F $\mathcal{M}_7$-valuada

$$\begin{aligned} F \;=\; & \frac{1}{2}R^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}T^a P_a + \frac{1}{2}\left(D_\omega k^{(ab,1)} + \frac{1}{l^2}e^a e^b\right)Z_{ab}^{(1)} + \frac{1}{l}\left(D_\omega h^{(a,1)} + k^{a}{}_{b}{}^{(1)}e^b\right)Z_a^{(1)} \\ & + \frac{1}{2}\left(D_\omega k^{(ab,2)} + k^{a}{}_{c}{}^{(1)}k^{cb(1)} + \frac{1}{l^2}\left[e^a h^{(b,1)} + h^{(a,1)}e^b\right]\right)Z_{ab}^{(2)} \\ & + \frac{1}{l}\left(D_\omega h^{(a,2)} + k^{a}{}_{c}{}^{(2)}\,e^c + k^{a}{}_{c}{}^{(1)}\,h^{(c,1)}\right)Z_a^{(2)} \end{aligned} \tag{E.2}$$

Luego la identidad de Bianchi establece que

$$DF = 0 \tag{E.3}$$

donde

$$D = d + [A,\cdot] \tag{E.4}$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned} DF &= \frac{1}{2}D_\omega R^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}\left(D_\omega T^a - R^{ac}e_c\right)P_a + \frac{1}{2}\left(D_\omega D_\omega k^{(ab,1)} + k^{a}_{\ c}{}^{(1)}R^{cb} + k^{b}_{\ c}{}^{(1)}R^{ac}\right)Z^{(1)}_{ab} \\ &+\frac{1}{l}\left(D_\omega D_\omega h^{(a,1)} - R^{ac}h^{(1)}_c\right)Z^{(1)}_a \\ &+\frac{1}{2}\left(D_\omega D_\omega k^{(ab,2)} + k^{a}_{\ c}{}^{(2)}R^{cb} + k^{b}_{\ c}{}^{(2)}R^{ac}\right)Z^{(2)}_{ab} \\ &+\frac{1}{l}\left(D_\omega D_\omega h^{(a,2)} - R^{ac}h^{(2)}_c\right)Z^{(2)}_a \end{aligned}$$

lo cual implica que cada componente satiface [38]

$$D_\omega R^{ab} = 0 \tag{E.5}$$

$$D_\omega T^a - R^{ac}e_c = 0 \tag{E.6}$$

$$D_\omega D_\omega k^{(ab,1)} + k^{a}_{\ c}{}^{(1)}R^{cb} + k^{b}_{\ c}{}^{(1)}R^{ac} = 0 \tag{E.7}$$

$$D_\omega D_\omega h^{(a,1)} - R^{ac}h^{(1)}_c = 0 \tag{E.8}$$

$$D_\omega D_\omega k^{(ab,2)} + k^{a}_{\ c}{}^{(2)}R^{cb} + k^{b}_{\ c}{}^{(2)}R^{ac} = 0 \tag{E.9}$$

$$D_\omega D_\omega h^{(a,2)} - R^{ac}h^{(2)}_c = 0 \tag{E.10}$$

las cuales corresponde a las distintas componentes de la identidad de Bianchi.

Es interesante notar que al considerar la derivada covariante exterior $D = d + [A,\cdot]$ a una suma de $R^{ab}J_{ab}$ expandidos tenemos

$$D\left(\sum_{i=0}^{5}\lambda_i R^{(ab,i)}J_{ab}\right) = \sum_{i=0}^{5}\lambda_i DR^{(ab,i)}J_{ab} \tag{E.11}$$

donde λ_i es un elemento del semigrupo $S^{(5)}_E$. Luego es posible reescribir $(E.11)$ como

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{i=0}^{5}\lambda_i R^{ab,i}J_{ab}\right) &= \lambda_0 DR^{ab,0}J_{ab} + \lambda_2 DR^{ab,2}J_{ab} + \lambda_4 DR^{ab,4}J_{ab} \\ &= D_\omega R^{ab,0}J_{ab,0} + \omega^{a}_{\ c}{}^{,2}R^{cb,0}J_{ab,2} + \omega^{b}_{\ c}{}^{,2}R^{ac,0}J_{ab,2} + \omega^{a}_{\ c}{}^{,4}R^{cb,0}J_{ab,4} + \omega^{b}_{\ c}{}^{,4}R^{ac,0}J_{ab,4} \\ &+D_\omega R^{ab,2}J_{ab,2} + \omega^{a}_{\ c}{}^{,2}R^{cb,2}J_{ab,4} + \omega^{b}_{\ c}{}^{,2}R^{ac,2}J_{ab,4} + D_\omega R^{ab,4}J_{ab,4} \end{aligned}$$

Luego identificando

$$\begin{aligned} \omega^{ab,0} &= \omega^{ab},\ \omega^{ab,2} = k^{(ab,1)},\ \omega^{ab,4} = k^{(ab,2)}, \\ R^{ab,0} &= R^{ab}, R^{ab,2} = D_\omega k^{(ab,1)}, R^{ab,4} = D_\omega k^{(ab,2)} + k^{a}_{\ c}{}^{(1)}k^{cb(1)}, \\ J_{ab,0} &= J_{ab},\ J_{ab,2} = Z^{(1)}_{ab},\ J_{ab,4} = Z^{(2)}_{ab}, \end{aligned}$$

se tiene que

$$
\begin{aligned}
D\left(\sum_{i=0}^{5}\lambda_i R^{(ab,i)}J_{ab}\right) &= D_\omega R^{ab}J_{ab}+k^{a}_{\ c}{}^{(1)}R^{cb}Z^{(1)}_{ab}+k^{b}_{\ c}{}^{(1)}R^{ac}Z^{(1)}_{ab}+k^{a}_{\ c}{}^{(2)}R^{cb}Z^{(2)}_{ab}\\
&+k^{b}_{\ c}{}^{(2)}R^{ac}Z^{(2)}_{ab}+D_\omega D_\omega k^{(ab,1)}Z^{(1)}_{ab}+k^{a}_{\ c}{}^{(1)}D_\omega k^{(cb,1)}Z^{(2)}_{ab}\\
&+k^{b}_{\ c}{}^{(1)}D_\omega k^{(ac,1)}Z^{(2)}_{ab}+D_\omega D_\omega k^{(ab,2)}Z^{(2)}_{ab}\\
&+D_\omega k^{a}_{\ c}{}^{(1)}k^{cb(1)}Z^{(2)}_{ab}-k^{a}_{\ c}{}^{(1)}D_\omega k^{cb(1)}Z^{(2)}_{ab}
\end{aligned}
$$

lo cual corresponde a las componentes de la identidad de Bianchi $(E.5)$, $(E.7)$, $(E.9)$

$$
\begin{aligned}
D\left(\sum_{i=0}^{5}\lambda_i R^{(ab,i)}J_{ab}\right) &= D_\omega R^{ab}J_{ab}+\left(D_\omega D_\omega k^{(ab,1)}+k^{a}_{\ c}{}^{(1)}R^{cb}+k^{b}_{\ c}{}^{(1)}R^{ac}\right)Z^{(1)}_{ab}\\
&+\left(D_\omega D_\omega k^{(ab,2)}+k^{a}_{\ c}{}^{(2)}R^{cb}+k^{b}_{\ c}{}^{(2)}R^{ac}\right)Z^{(2)}_{ab}
\end{aligned}
\tag{E.12}
$$

Notemos además que la única componente no nula de un tensor invariante simétrico de rango 4 para el álgebra $\mathcal{M}_7$ viene dado por

$$
\left\langle J_{(a_1a_2,i_1)}J_{(a_3a_4,i_2)}J_{(a_5a_6,i_3)}P_{(a_7,i_4)}\right\rangle = 2l^5\alpha_j\delta^{j}_{i_1+i_2+i_3+i_4}\varepsilon_{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}, \tag{E.13}
$$

donde i_p, $j=0,\cdots,5$, los coeficientes α_i son constantes arbitrarias de dimensión $[\text{longitud}]^{-5}$. De modo que al considerar la derivada covariante exterior $D=d+[A,\cdot]$ sobre el lagrangiano CS 7-dimensional para gravedad, tenemos que

$$
\begin{aligned}
DL^{(7)}_{CS} &= \sum_{k=1}^{4} l^{2k-2}c_k\alpha_j\delta^{j}_{i_1+i_2+i_3+i_4}\delta^{i_{k+1}}_{p_1+q_1}\cdots\delta^{i_4}_{p_{4-k}+q_{4-k}}\\
&\quad \varepsilon_{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}\ D\ \left(R^{(a_1a_2,i_1)}\cdots R^{(a_{2k-1}a_{2k},i_k)}e^{(a_{2k+1},p_1)}e^{(a_{2k+2},q_1)}\cdots e^{(g,i_4)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} l^{2k-2}c_k\alpha_j\delta^{j}_{i_1+i_2+i_3+i_4}\delta^{i_{k+1}}_{p_1+q_1}\cdots\delta^{i_n}_{p_{n-k}+q_{n-k}}\\
&\quad \varepsilon_{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}\ R^{(ab,i_1)}\cdots R^{(ef,i_k)}D\left(e^{(a_{2k+1},p_1)}e^{(a_{2k+2},q_1)}\cdots e^{(g,i_4)}\right),
\end{aligned}
$$

donde hemos ocupado las distintas componentes de la identidad de Bianchi $(E.12)$.

Notemos que este mismo procedimiento es utilizado en la expresión (8.8) obteniendo así

$$
\begin{aligned}
D\varepsilon^{(p,i)}_{a}: &= \delta^{i}_{i_1+\cdots+i_{D-p-1}}\varepsilon_{ab_1\cdots b_{D-1}}D\left(R^{(b_1b_2,i_1)}\cdots R^{(b_{2p-1}b_{2p},i_p)}e^{(b_{2p+1},i_{p+1})}\cdots e^{\left(b_{D-1},i_{D-p-1}\right)}\right)\\
&= (D-1-2p)\,\delta^{i}_{i_1+\cdots+i_{D-p-1}}\varepsilon_{ab_1\cdots b_{D-1}}R^{(b_1b_2,i_1)}\cdots R^{(b_{2p-1}b_{2p},i_p)}\\
&\quad T^{(b_{2p+1},i_{p+1})}e^{(b_{2p+2},i_p)}\cdots e^{\left(a_{d-1},i_{D-p-1}\right)}.
\end{aligned}
$$

Bibliografía

[1] C, Lanczos, Ann. Math. **39** (1938) 842.

[2] D. Lovelock, J. Math Phys. **12** (1971) 498.

[3] B. Zumino, Phys. Rep. **137** (1986) 109.

[4] C. Teitelboim, J. Zanelli, Class. and Quantum Grav. **4** (1987) L125.

[5] E. İnönü, E.P. Wigner, *On the contraction of groups and their representations,* Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A. **39**, 510-524 (1953); E. İnönü, *contractions of Lie groups and their representations*, in *Groups theoretical concepts in elementary particle physics*, F. Gürsey ed., Gordon and Breach, pp. 391-402 (1964).

[6] E. Weimar-Woods, *Contractions, generalized İnönü and Wigner contractions and deformations of finite-dimensional Lie algebras,* Rev. Math. Phys. **12**, 1505-1529 (2000).

[7] J.A. de Azcárraga, J.M. Izquierdo, *Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in physics,* Camb. Univ. Press. (1995).

[8] M. Hatsuda and M. Sakaguchi, *Wess-Zumino term for the AdS superstring and generalized İnönü-Wigner contraction,* Prog.Theor.Phys. **109** (2003) 853-867.

[9] J. A. de Azcárraga, J.M. Izquierdo, M. Picón, O. Varela, *Generating Lie and gauge Free Differential (Super)Algebras by Expanding Maurer-Cartan Forms and Chern-Simons Supergravity.* Nucl. Phys. B **662** (2003) 185.

[10] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, *Expanding Lie (Super)Algebras through Abelian Semigroups.* J. Math. Phys. **47** (2006) 123512.

[11] F. Izaurieta, A. Pérez, E. Rodríguez, P. Salgado, *Dual Formulation of the Lie Algebra S-expansion Procedure.* J. Math. Phys. **50** (2009) 073511.

[12] F. Izaurieta, *Expansión en Semigrupoes y M-Supergravedad en 11 dimensiones.* Tesis de Doctorado, Universidad de Concepción, Chile (2006).

[13] E. Rodríguez, *Formas de Transgresión y Semigrupos Abelianos en Supergravedad.* Tesis de Doctorado, Universidad de Concepción, Chile (2006).

[14] A. Pérez, *Expansión de Álgebras y Gravedad Chern-Simons.* Tesis de Doctorado, Universidad de Concepción, Chile (2010).

[15] E. Cremmer, B. Julia and J. Scherk, *Supergravity theory in eleven dimensions,* Phys. Lett. B **76**, 409-412 (1978).

[16] R. Troncoso, J. Zanelli, *Higher-dimensional Gravity, Propagatting Torsion and AdS Gauge Invariance.* Class. Quantum Grav. **17** (2000) 4451.

[17] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli, Lovelock-Born-Infeld Theory of Gravity in J.J. Giambiagi Festshrift, H. Falomir, E. Gamboa-Saraví, P. Leal, and F. Schaposnik (eds.), World Scientific, Singapore, (1991).

[18] A. H. Chamseddine, *Topological Gauge Theory of Gravity in Five and All Odd Dimensions.* Phys. Lett. B **233** (1989) 291.

[19] A. H. Chamseddine, *Topological Gravity and Supergravity in Various Dimensions.* Nucl. Phys. B **346** (1990) 213.

[20] E. Witten, $(2+1)$-*Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System.* Nucl. Phys. B **311** (1988) 46.

[21] E. Witten, *Topology Changing Amplitudes in* $(2+1)$-*Dimensional Gravity.* Nucl. Phys. B **323** (1989) 113.

[22] A. Mardones, J. Zanelli, *Lovelock-Cartan theory of gravity*, Class. and Quantum Grav. **8** (1991) 1545.

[23] R. Troncoso, J. Zanelli, *New gauge Supergravity in Seven and Eleven Dimensions.* Phys. Rev. D **58** (1998) 101703.

[24] R. Troncoso, J. Zanelli, *Gauge Supergravities for All Odd Dimensions.* Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1181.

[25] J. Zanelli, *Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities.* Second edition (February 2008), hep-th/0502193

[26] J. Crisóstomo, R. Troncoso, J. Zanelli, *Black Hole Scan.* Phys. Rev. D **62** (2000) 084013.

[27] P. Salgado, M. Cataldo, S. del Campo, *Supergravity and the Poincaré group.* Phys. Rev. D **65** (2002) 084032.

[28] P. Salgado, M. Cataldo, S. del Campo, *Higher-dimensional Gravity Invariant under the Poincaré Group.* Phys. Rev. D **66** (2002) 024013.

[29] P. Salgado, S. del Campo, M. Cataldo, *N=1 Supergravity with Cosmological Constant and the AdS Group.* Phys. Rev. D **68** (2003) 024021.

[30] P. Salgado, F. Izaurieta, E. Rodríguez, *Higher Dimensional Gravity Invariant Under the AdS Group.* Phys. Lett. B **574** (2003) 283.

[31] P. Salgado, F. Izaurieta, E. Rodríguez, *Supergravity in* $2+1$ *Dimensions from* $(3+1)$*-dimensional Supergravity.* Eur. Phys. J. C **35** (2004) 429.

[32] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, *Eleven-Dimensional Gauge Theory for the M Algebra as an Abelian Semigroup Expansion of* $\mathfrak{osp}(32|1)$. Eur. Phys. J. C **54** (2008) 675.

[33] F. Izaurieta, P. Minning, A. Pérez, E. Rodríguez, P. Salgado, *Standard General Relativity from Chern-Simons Gravity.* Phys. Lett. B **678** (2009) 213-217.

[34] J. D. Edelstein, M. Hassaïne, R. Troncoso, J. Zanelli, *Lie-algebra expansions, Chern-Simons theories and the Einstein-Hilbert lagrangian.* Phys. Lett. B **640** (2006) 278-284

[35] P. K. Concha, D. M. Peñafiel, E. K. Rodríguez, P. Salgado, *Even dimensional General Relativity from Born-Infeld Gravity.* Phys. Lett. B **725** (2013) 419-424.

[36] C. A. C. Quinzacara, P. Salgado, *Black Hole for the Einstein-Chern-Simons gravity.* Phys. Rev. D **85** (2012) 124026.

[37] P. K. Concha, D. M. Peñafiel, E. K. Rodríguez, P. Salgado, *Chern-Simons and Born-Infeld gravity theories and Maxwell algebras type.* Trabajo enviado al Eur.J.Phys (2013).

[38] P. K. Concha, D. M. Peñafiel, E. K. Rodríguez, P. Salgado, *Generalized Poincare algebras and Lovelock gravity theory,* Trabajo proximamente enviado.

[39] P. Salgado, S. Salgado, Phys. Lett. B. (2013), Trabajo enviado.

[40] J. Lukierski, *Generalized Wigner-Inonu Contractions and Maxwell (Super)Algebras.* Proc. Steklov Inst. Math. 272 (2011) 183. [arXiv:1007.3405hep-th]