



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICAS

(Super)-gravedad Chern Simons para el álgebra AdS-Lorentz vía S -expansión.

Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas
Por
OCTAVIO ARIEL FIERRO MONDACA

Director de Tesis: Dr. Patricio Salgado Arias
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción.

CONCEPCIÓN, CHILE, ABRIL 2014





Director de Tesis : Dr. Patricio Salgado.

Comisión : Dr. Ricardo Caroca.

Dr. Mauricio Cataldo.

Dr. Fernando Izaurieta.



A mis padres Celsa y Octavio,

A mis hermanos Andrea y Fernando,

A mi abuelita Mely.





Agradecimientos

Aprovecho estas páginas de mi tesis para expresar los agradecimientos a quienes me han apoyado, enseñado, guiado y acompañado de una u otra manera en esta larga travesía.

En primer lugar a quién dedico este trabajo, a mi familia. A mi padre que siempre me ha respaldado, tanto en mis decisiones como económicamente cada vez que lo necesité, a mi madre por su amor y apoyo incondicional, por enseñarme sobre las cosas que más importan en la vida, a mis amados hermanos y a abuelita Mely, que conforman parte fundamental de mi vida y de mis motivaciones.

He aprendido de muchos en esta larga carrera, de mis profesores, de mis colegas, de mis compañeros y de mis amigos, a ellos les agradezco a continuación.

El agradecimiento más significativo en lo concreto de mi tesis es para mis profesores. En primer lugar para mi guía, Profesor Patricio Salgado, por guiarme a lo largo de mis años en el doctorado, por su constante disposición a ayudar tanto en lo académico como en lo personal cuando lo necesité. A mis profesores a lo largo del programa, al Profesor Guillermo Rubilar, por lo mucho que aprendí de él tanto como su estudiante como su ayudante, por su gran compromiso con la buena docencia, a los Profesores Juan Crisóstomo, Igor Kondrashuk y Jaime Araneda, cuyos cursos han sido piezas valiosas e importantes en mi formación científica.

En mi estadía en Italia a los Profesores Ricardo D'Auria, Laura Andrianopoli y Mario Trigiante, por su hospitalidad en Torino, por su buena disposición a recibirme desde el comienzo y por su accesibilidad cuando uno necesitaba de ellos. Al Profesor Juan Díaz de Valdés quien, a través del proyecto *MECESUP – FSM0605*, hizo posible esta estadía.

A los Profesores Jorge Zanelli y Ricardo Troncoso, entre otros profesores del Centro de Estudios Científicos del Sur (*CECS*), por el grato y educativo ambiente de discusión que siempre se generaba tanto en las aulas de Valdivia como en las de Concepción.

A los Profesores Osvaldo Chandía y Brenno Vallilo, por su acogida y buena disposición durante el curso de Teoría de Cuerdas dictado en la Universidad Andrés Bello de Santiago.

A Marcela Sanhueza, Soledad Daroch, Patricia Luarte, Marta Astudillo y Heraldo Manríquez, porque siempre hicieron que todo funcionará, por tener la mejor disposición y al mismo ser muy eficientes.

A mis compañeros y amigos en la física teórica, a Carlos Inostroza, Addy Sala-

zar, Cristián C. Quinzacara, Ricardo Caroca, Danilo Díaz, Arturo Gómez y Omar Valdivia, a las nuevas generaciones Patrick Concha, Evelyn Rodríguez, Diego Molina, Marcelo Calderon, Fabrizio Bugini, Patricio Salgado R., Miguel Riquelme, Oscar Fuentealba, Javier Matulich y Emerson Tenorio, por las cientos de conversaciones y discusiones, cada una sumando un poquito más a nuestro entendimiento de esta física que tanto queremos.

A todos aquellos amigos que acompañan desde afuera este viaje, y que más de alguna vez me prestaron apoyo académico o logístico. A Rodrigo Fuentes, por su constante preocupación e incondicional amistad, a Fabián Torres, Fabiola Arévalo, Carlos Pava, Arturo Fernández y Claudia Trejo por haberme acogido en mis primeros años en Concepción, a Paulina Troncoso, Basilio Solis, Paz Bluhm, Alejandra Mejías, Carlos Olivares, Francisca Orellana, Gustavo Cañas, Juan Pablo Staforelli, Patricio Mella, Marisol Zambrano, Javier Calderón, Felipe Quiero, Carlos Ríos, Ivonne Espinoza, Ignacia Calisto, Yazmina Olmos, Fernanda Aróstica, Mauricio Santibañez, Miguel Solis y Esteban Sepúlveda, por su amistad durante todos estos años.

A Benjamín Burgos, por haberme acogido junto a su familia cuando lo necesité, por ser un gran amigo y apoyo. A Nelson Merino, por haber hecho que mi llegada y estadía en Torino fueran más fáciles, por su amistad y auténtico compañerismo. A Cristian Salas, por su amistad, constancia y buenos consejos, por su importante apoyo en este último periodo del doctorado

A Katherine, por la paciencia y amor entregados en estos últimos años, por ser mi cable a tierra y compañera a toda prueba, gracias mi amor por haberme hecho más fácil llegar hasta aquí. Gracias a la familia Hernández Herrera por el cariño entregado y por haberme acogido como uno más durante estos últimos años.

Agradezco sinceramente al Programa de Formación de Capital Humano Avanzado de CONICYT por el apoyo económico entregado durante el periodo 2007 – 2011 a través de una beca de doctorado y una posterior extensión, las cuales fueron fundamentales para concretar el trabajo de esta tesis.

Resumen

En esta tesis se presentan acciones Chern-Simons para gravedad y supergravedad en la cuales la simetría local del espaciotiempo son extensiones (semisimples) de las álgebras y superálgebras de Poincaré. Estas acciones son complementadas con acciones bosónicas y supersimétricas cuyas simetrías de gauge son dadas por las álgebra y superálgebra de Maxwell, las cuales han sido utilizadas para describir espaciotiempos con un “background” electromagnético constante.

Estas simetrías incluyen un generador tensorial adicional: Z_{ab} , que para el caso de álgebras de Maxwell representa la libertad de gauge para elegir el “background” electromagnético. Para el caso de teorías gravitacionales ha sido interpretado como una extensión de las simetrías de Poincaré necesaria para explicar la naturaleza de la constante cosmológica y el actual problema en la interpretación de su valor numérico.

La construcción de las (super)-álgebras se realiza a través de un proceso de expansión de álgebras que requiere la utilización de semigrupos abelianos, este procedimiento es conocido como S -expansión [12]-[13]. En la construcción de los lagrangeanos invariantes bajo la (super)-álgebra de Maxwell se presenta un método de contracción de Inönü-Wigner generalizado, que además de modificar los generadores del álgebra modifica también sus tensores invariantes.



Índice general

Agradecimientos	7
Resumen	9
Índice de Figuras	15
1. Introducción	17
1.1. En el concepto de unificación.	17
1.2. Sobre la gravedad como teoría de gauge.	20
1.3. Desarrollo de la tesis.	21
2. Fundamentos matemáticos	23
2.1. Fibrados	23
2.1.1. En el concepto de fibrado.	24
2.1.2. Fibrado Tangente	25
2.1.3. Definición formal de fibrado.	25
2.1.4. Fibrado vectorial	26
2.1.5. Fibrado cotangente	26
2.1.6. Fibrados principales	26
2.2. Conexiones en fibrados	27
2.2.1. Conexión en un fibrado principal	27
2.2.2. 2-forma Curvatura.	31
2.3. Teorías de gauge	32
2.3.1. Teorías de Yang-Mills.	32
2.3.2. Invariantes y lagrangeanos Chern-Simons.	35
3. Procedimiento de S-expansión y cálculo de tensores invariantes	45
3.1. S -expansion	45
3.1.1. Semigrupos	45
3.1.2. Álgebra S -expandida	46
3.1.3. Subálgebras resonantes	47
3.1.4. Álgebra 0_S -reducida	47
3.1.5. Obtención de tensores invariantes a través de la S -expansión	48
3.2. Procedimiento de S -expansión Dual	49
3.2.1. 0_S -reducción del álgebra S -expandida	49
3.2.2. S -expansion dual en álgebras diferenciales libres.	50
3.3. Operadores de Casimir para álgebras S -expandidas.	51

3.3.1.	Caso estándar	51
3.3.2.	Caso álgebra S -expandida	52
4.	SSEP como una S-expansión del álgebra AdS.	53
4.1.	Extensión semisimple del álgebra de Poincaré	53
4.2.	S -expansion del álgebra de anti-de Sitter	55
4.2.1.	Semigrupo S_{S_3}	55
4.2.2.	Semigrupo S_{S_2}	57
4.2.3.	Relación entre las tablas de multiplicación de los semigrupos S_{S_3} y S_{S_2}	58
4.3.	Operadores de Casimir para el álgebra $SSEP$	59
4.3.1.	Operadores de Casimir para el álgebra AdS	59
4.3.2.	Operadores de Casimir para la extensión semisimple del álgebra de Poincaré	61
4.4.	Acción Ch-S para gravedad $2 + 1$ dimensional a partir del álgebra $SSEP$	63
4.4.1.	Tensores invariantes para $SSEP$	63
4.4.2.	Acción Chern-Simons para el álgebra $SSEP$	63
5.	SSEPS como una S-expansión de la superálgebra AdS.	67
5.1.	Extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré	67
5.2.	S -Expansion of the Anti-de-Sitter Superalgebra	71
5.2.1.	Semigroup S_{S_3}	72
5.2.2.	Semigroup S_{S_2}	74
5.3.	Operadores de Casimir para $SSEPS$	75
5.3.1.	Operadores de Casimir de segundo orden para la superálgebra AdS	75
5.3.2.	Operadores de Casimir de segundo orden para $SSEPS$	79
5.4.	Acción Chern-Simons para la superálgebra $SSEPS$ en $(2 + 1)$ -dimensiones.	80
5.4.1.	Tensores invariantes bilineales para la superálgebra $SSEPS$	80
5.4.2.	Acción Chern-Simons para supergravedad con simetría de gauge $SSEPS$ en $(2 + 1)$ -dimensiones.	81
6.	(Super)-gravedad Chern-Simons de Maxwell	83
6.1.	Una acción para gravedad de Maxwell	83
6.1.1.	Álgebra de Maxwell	84
6.1.2.	$SSEP$ con base $\{J_{ab}, Z_{ab}, P_a\}$ como una S -expansión de AdS	84
6.1.3.	Conexión entre el álgebra $SSEP$ y el álgebra de Maxwell vía contracción de IW	87
6.1.4.	Acción Chern-Simons para el álgebra de Maxwell en $D = 3$	88
6.1.5.	Superálgebra de Maxwell $\mathcal{N} = 1$	90
6.1.6.	$SSEPS$ con base $\{J_{ab}, Z_{ab}, P_a, Q_\alpha\}$ como una S -expansión de $SAdS$	90
6.1.7.	Superálgebra de Maxwell vía contracción de IW de la superálgebra $SSEPS$	93
6.1.8.	Acción Chern-Simons para el álgebra de Maxwell en $D = 3$	95
6.2.	Superálgebra de Maxwell $\mathcal{N} = 2$ a partir de $\mathfrak{osp}(4 1)$ en $D = 4$	96
6.2.1.	Superálgebra de AdS $\mathfrak{osp}(4 1)$	96
6.2.2.	S -expansión de la superálgebra AdS	97
7.	Conclusiones y comentarios	99

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	13
A. Convenciones	101
A.1. Generalidades	101
B. Matrices Gamma	103
B.1. Definiciones y propiedades generales	103
B.2. Indices espinoriales	105
B.3. Caso $D = 2 + 1$	105
C. Métrica de Cartan y forma de Killing	107
Bibliografía	109





Índice de figuras

1.1. Diagrama de los cuatro elementos que conformaban el universo en el pensamiento Aristotélico.	17
1.2. Tabla periódica de los elementos con información cronológica de sus descubrimientos.	18
1.3. Partículas subatómicas.	19
1.4. Modelo Estándar.	20
2.1. Separación en subespacios vertical V_uP y horizontal H_uP del espacio tangente T_uP al fibrado P en el punto u , para la definición de conexión en fibrados principales.	29





Capítulo 1

Introducción

1.1. En el concepto de unificación.

En la búsqueda de simplicidad en nuestra descripción de la naturaleza el concepto de unificación, de que todo está conectado a través de sus subestructuras, se ha vuelto una guía fundamental. Ya siglos a.c. los griegos compartían el pensamiento de que un mínimo de (sub)estructuras serían las que conforman el universo que nos rodea y nos contiene, en el s. V a.c. Empedocles establece la teoría de las cuatro raíces o cuatro elementos (teoría que es mejorada y popularizada luego por Aristóteles) en la cual todo estaría formado por cuatro elementos: Agua, Aire, Fuego y Tierra. En el *Timeo* (*Τίμαιος*) Platón describe cada uno de los cuatro elementos más



Figura 1.1: Diagrama de los cuatro elementos que conformaban el universo en el pensamiento Aristotélico.

el quinto, conocido como Éter o la Quintaesencia, como conformados por partículas diminutas cuyas formas eran cada uno de los cinco poliedros regulares: tetraedro (fuego), hexaedro o cubo

(tierra), octaedro (aire), dodecaedro (éter) e icosaedro (agua), dicho de otra forma *los cuantos* de la materia serían cinco y tendrían formas bien definidas.

Un cambio de paradigma y una nueva definición de elemento no llega sino hasta la segunda mitad del s. XVII liderada por el científico Robert Boyle. En su obra *The Sceptical Chymist: or Chymico-Physical Doubts and Paradoxes* redefine el concepto de elemento, en sus palabras:

And, to prevent mistakes, I must advertize you, that I now mean by elements, as those chymists that speak plainest do by their principles, certain primitive or simple, or perfectly unmingled bodies; which not being made of any other bodies, or of one another, are the ingredients of which all those called perfectly mixt bodies are immediately compounded, and into which they are ultimately resolved: now whether there be any such body to be constantly met with in all, and each, of those that are said to be elemented bodies, is the thing I now question.

- Robert Boyle

The Sceptical Chemist (1661), 187.

Esta fue la primera definición de *elemento químico* que llevaría luego a los científicos entre el s. XVII y XIX, entre ellos Antoine-Laurent de Lavoisier y Dmitri Mendeleev, a encontrar y clasificar las nuevas, en ese momento, subestructuras de la materia. Esta descripción siendo más profunda y precisa, era menos simple que la anterior ya que se pasó de 4 o 5 elementos a muchos más.

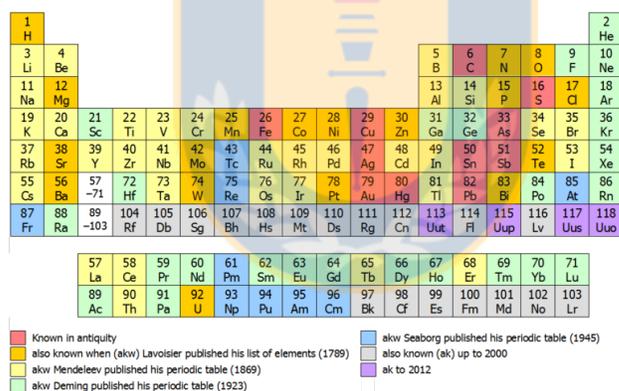


Figura 1.2: Tabla periódica de los elementos con información cronológica de sus descubrimientos.

A finales del S. XIX es descubierta la primera partícula subatómica: el electrón (1897), y conforme transcurre el siglo XX avanza la tecnología, las buenas ideas en física y los descubrimientos en esta dirección: el núcleo atómico en 1909, el protón en 1918 y por último el neutrón 1932. Con el descubrimiento de las partículas subatómicas no solo se había logrado una descripción más precisa sino también una más simple y unificadora. Para la década del 30' se había logrado construir una teoría que lograba explicar la estructura de toda la materia conocida en base solo a 3 partículas (protón, neutrón y electrón), se contaba con exitosas teorías para la descripción de la interacción gravitacional y de la interacción electromagnética, por otro lado la mecánica cuántica había alcanzado un importante desarrollo y mostrado un alto poder predictivo.

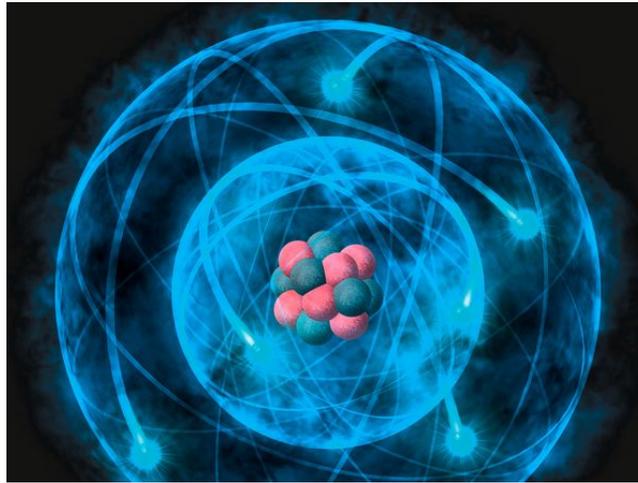


Figura 1.3: Partículas subatómicas.

A finales de la década de los cuarenta se formula la primera teoría cuántica de campos exitosa (renormalizable), la electrodinámica cuántica, a través de los trabajos de Schwinger, Feynman y Dyson, entre otros. Durante la década del 60' se formula la cromodinámica cuántica (teoría de gauge del grupo $SU(3)$), una teoría cuántica de campos de la interacción nuclear fuerte, y la teoría que describe la interacción nuclear débil.

A finales de la década del 60' Abdus Salam, Sheldon Glashow y Steven Weinberg, entre otros, logran una descripción unificada de la interacción nuclear débil y el electromagnetismo introduciendo la interacción electrodébil (100 GeV, con grupo de gauge $SU(2) \times U(1)$), la cual es posteriormente verificada experimentalmente.

La descripción de estas interacciones, no-gravitacionales, conforman lo que hoy conocemos como Modelo Estándar de partículas, la cual es una teoría de gauge descrita por una acción de Yang-Mills (como lo son cada una de las interacciones) para el grupo de simetría $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Todas las partículas del modelo estándar han sido observadas experimentalmente. El modelo estándar es el punto cúlmine del importante desarrollo que tuvo la física el siglo pasado, en particular en la descripción de los bloques fundamentales de la materia y la unificación de las interacciones. La gravedad por otro lado, ha seguido un camino apartado incluso en su desarrollo histórico, siendo la interacción estudiada durante más tiempo y aunque su estructura matemática presenta prácticamente los mismos componentes que los presentes en las teorías que describen las interacciones no-gravitacionales, presenta diferencias que han hecho imposible su unificación.

El modelo estándar ahora representa una descripción más precisa de la materia y tres de sus interacciones, un entendimiento teórico sin comparaciones con el entendimiento de la época de Empedocles, sin embargo es una descripción con más bloques fundamentales que aquellos que describían la física de los años 30'. Así, vemos que pasamos de una era que contaba solo con 5 elementos a una era que tenía más de 100, de allí a una descripción basada solo en 3 partículas subatómicas y la radiación EM , usando una analogía nos encontramos en una época como la de la tabla periódica, con 128 elementos y buscamos mayor simplicidad reduciendo una vez más el número de bloques fundamentales (como en los años del neutron), y por supuesto una teoría que incluya la cuarta interacción de manera armónica y bien comportada como la QED

Three generations
of matter (fermions)

	I	II	III		
mass →	2.4 MeV/c ²	1.27 GeV/c ²	171.2 GeV/c ²	0	? GeV/c ²
charge →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
spin →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
name →	u up	c charm	t top	γ photon	H Higgs boson
Quarks	4.8 MeV/c ² $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ d down	104 MeV/c ² $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ s strange	4.2 GeV/c ² $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ b bottom	0 0 1 g gluon	
	<2.2 eV/c ² 0 $\frac{1}{2}$ ν_e electron neutrino	<0.17 MeV/c ² 0 $\frac{1}{2}$ ν_μ muon neutrino	<15.5 MeV/c ² 0 $\frac{1}{2}$ ν_τ tau neutrino	91.2 GeV/c ² 0 0 1 Z⁰ Z boson	
Leptons	0.511 MeV/c ² -1 $\frac{1}{2}$ e electron	105.7 MeV/c ² -1 $\frac{1}{2}$ μ muon	1.777 GeV/c ² -1 $\frac{1}{2}$ τ tau	80.4 GeV/c ² ± 1 1 W[±] W boson	Gauge bosons

Figura 1.4: Modelo Estándar.

de Schwinger-Dyson y Feynman.

1.2. Sobre la gravedad como teoría de gauge.

Además de ser la única interacción que no ha logrado ser unificada con el resto, la gravedad es también la única interacción que no ha logrado cuantizarse, ambos problemas podrían tener un origen común y las propuestas para solucionarlos han sido diversas. Conocido el éxito de la cuantización de las teorías no gravitacionales se tiene información de las características esperadas en una teoría cuántica de la gravedad, una condición natural es requerir invariancia de gauge, sin embargo utilizando directamente lagrangeanos de Yang-Mills no es posible obtener una teoría dinámica para la métrica del espaciotiempo. Durante los 80' aparecen los trabajos de Achúcarro y Towsend [33] y posteriormente Witten [30], los cuales proponen la construcción de acciones para la gravedad a partir de objetos topológicos conocidos Chern-Simons (CS) [2], los cuales poseen como derivada exterior invariantes topológicos. Una “aparente” desventaja es que todos los invariantes topológicos conocidos viven en dimensiones pares, lo que condiciona la existencia de los lagrangeanos CS a dimensiones impares. Las acciones CS dan origen a teorías de gauge para cualquier grupo de simetría, la métrica de la teoría es naturalmente dinámica por lo que son ideales para representar teorías gravitacionales [34, 35, 32, 38]. En $D = 3$ el lagrangeano de Einstein-Hilbert ($E - H$) con constante cosmológica es equivalente a un lagrangeano CS para la gravedad con grupo de simetría dS o AdS [30]. En $D = 5$ dan origen a teorías gravitacionales más generales que la de $E - H$, en particular en la referencia [14] se obtiene Relatividad General (RG) a partir de un lagrangeano CS en cinco dimensiones a través de reducción dimensional. También han sido construidos lagrangeanos CS para teorías de la gravedad en $D = 11$.

1.3. Desarrollo de la tesis.

En este trabajo se presentan acciones tanto para gravedad como para supergravedad basadas en formas de Chern-Simons en $D = 3$. Todos los lagrangeanos presentados “gaugean” expansiones de las simetrías básicas de las teorías gravitacionales, el álgebra y la superálgebra de Poincaré. Estas versiones son conocidas como *extensión semisimple del álgebra de Poincaré (SSEP)*, *extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré (SSEPS)* [3, 4, 5], álgebra y superálgebra de Maxwell, las cuales han sido utilizadas en el contexto de la gravitación en las referencias [28, 23, 24] buscando dar una solución y una explicación al problema de la constante cosmológica: las diferencias entre su valor esperado y su valor medido [27, 26]

La construcción de estas acciones requiere conocer tensores invariantes asociados a las simetrías que serán “gaugeadas”. Pero esto se utilizará un método conocido como procedimiento de S -expansión [12, 13]. El procedimiento de S -expansión permite conectar un álgebra de salida \mathfrak{g} con un álgebra de llegada \mathfrak{G} a través de un semigrupo abeliano S y un procedimiento bien definido que será descrito en el tercer capítulo de la tesis. En sí, la cualidad de la S -expansión de conectar dos álgebras diferentes la convierte en un mecanismo interesante, ya que la conexión entre dos simetrías en física implica en ciertos casos la conexión entre dos descripciones físicas diferentes, por ejemplo entre dos descripciones a diferentes escalas de energía. Sin embargo la propiedad más útil que provee el mecanismo de S -expansión es que permite la obtención de tensores invariantes para el álgebra de llegada \mathfrak{G} conocidos los tensores invariantes del álgebra de salida \mathfrak{g} , existiendo prácticamente ninguna restricción entre los tipos de álgebras implicadas, problema que en general es altamente no trivial.

La tesis se distribuye de la siguiente manera; en el segundo capítulo se presentan las bases y fundamentos matemáticos necesarios para una descripción consistente del contenido en los capítulos posteriores. En el tercer capítulo se presenta el mecanismo de S -expansión [12] y su formalismo dual [13]. En el cuarto capítulo se muestra que la extensión semisimple del álgebra de Poincaré es equivalente a la S -expansión del álgebra AdS utilizando semigrupos particulares para ello, luego se construyen sus operadores de Casimir, los cuales coinciden con los obtenidos en la referencia original [5], finalmente se obtienen sus tensores invariantes y se construye un lagrangeano Chern-Simons para gravedad utilizando como simetría de gauge el álgebra $SSEP$. En el quinto capítulo se comienza demostrando que la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré puede ser obtenida como una S -expansión de la superálgebra AdS , luego se construyen sus operadores de Casimir, los cuales difieren de los obtenidos en la referencia [5], finalmente se construyen los tensores invariantes de la superálgebra $SSEPS$ y un lagrangeano para supergravedad $D = 3$ con esta como su simetría de gauge. En el capítulo seis se obtienen S -expansiones para las álgebras $SSEP$ y $SSEPS$ pero en una base diferente, con el objetivo establecer una comparación directa de nuestros resultados con aquellos obtenidos en las referencias [22],[28],[23],[24], además se obtiene sus tensores invariantes y lagrangeanos CS generales para $D = 3$. Además se utilizan contracciones tipo Inönü-Wigner [29] para construir lagrangeanos para el álgebra y superálgebra de Maxwell. En el capítulo siete se presentan las conclusiones, resultados más importante y posibles extensiones de esta investigación.

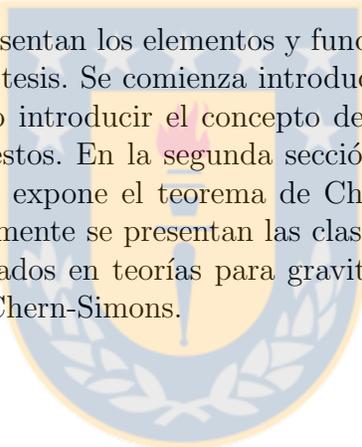


Capítulo 2

Fundamentos matemáticos

The theoretical physicist is compelled in an increasing degree to be guided by purely mathematical, formal considerations... The theorist who undertakes such a labor should not be carped at as "fancifull"

-Albert Einstein, 1934-



En este capítulo se presentan los elementos y fundamentos matemáticos básicos para el desarrollo de esta tesis. Se comienza introduciendo el concepto de fibrados (fiber bundles) para luego introducir el concepto de fibrados principales y de conexiones definidas sobre estos. En la segunda sección se introduce el concepto de polinomios invariantes, se expone el teorema de Chern-Weil y se define la forma de transgresión. Posteriormente se presentan las clases características, y se expone sobre los casos más utilizados en teorías para gravitación, se concluye el capítulo definiendo las formas de Chern-Simons.

2.1. Fibrados

En esta sección se expone el concepto de fibrado, sus características principales y algunos casos particulares de interés. Los fibrados son la base matemática en la descripción de las teorías de gauge. Un fibrado es un espacio topológico que *localmente* luce como el producto directo de dos espacios topológicos, pero no necesariamente globalmente, de manera análoga a como una variedad es un espacio topológico que localmente luce como \mathbb{R}^m (y no necesariamente globalmente).

La noción de campo vectorial (de un vector asociado a cada punto de un espacio) es el predecesor natural de un fibrado. Supongamos que se desea describir no solo un campo vectorial sobre una variedad, sino que se quiere tener acceso a todos los campos vectoriales (por ejemplo con igual dimensión que la variedad) que se podrían definir sobre la variedad, para esto se puede asociar un espacio vectorial completo a cada punto de la variedad. Esta es la idea intuitiva detrás de un fibrado vectorial (un caso particular de fibrado), es decir, tener una colección de espacios vectoriales parametrizados por los puntos de la variedad. Un fibrado en general implicaría, entre otras cosas, el cambiar este espacio vectorial por otra variedad arbitraria (de campos tensoriales, espinoriales, p -formas, etc).

2.1.1. En el concepto de fibrado.

Un *fibrado* E sobre una *variedad base* M con *fibra* F es una variedad que localmente luce como el producto directo $M \times F$. Si M es cubierto por un conjunto de vecindades $\{U_i\}$, entonces el fibrado E es descrito en cada vecindad por el producto $U_i \times F$. La topología del fibrado es descrita localmente por este producto directo, sin embargo esta descripción no nos dice nada sobre la topología global del fibrado. Para realizar una completa descripción de la topología del fibrado se introduce un conjunto de funciones $\{\phi_{ij}\}$, llamadas *funciones de transición*, las cuales contienen información de las regiones de intersección entre dos vecindades, es decir de las regiones del tipo $U_i \cap U_j$, el mapeo ϕ_{ij} es de la forma

$$\phi_{ij} : F|_p \rightarrow F|_p \quad , \quad \text{con } p \in U_i \cap U_j . \quad (2.1)$$

La información de la no trivialidad en la topología global de un fibrado está codificada en las funciones de transición. Un *fibrado trivial* es aquel que puede ser representado por el producto directo $M \times F$ no solo local sino también globalmente.

Un ejemplo simple de fibrado no trivial es la *Cinta de Möbius*. La variedad base M de este fibrado es el círculo S^1 (parametrizado por el ángulo θ). Cubrimos la variedad con dos vecindades, U_+ y U_- , definidas de la siguiente manera:

$$U_+ = \{\theta : -\epsilon < \theta < \pi + \epsilon\} , \quad (2.2)$$

$$U_- = \{\theta : \pi - \epsilon < \theta < 2\pi + \epsilon = 0 + \epsilon\} , \quad (2.3)$$

donde ϵ es un $\delta\theta$ “pequeño”. Definimos la fibra F como un intervalo de la recta real \mathbb{R} parametrizada con la coordenada $t \in [-1, 1]$. Luego el fibrado se compone de dos piezas locales (dos productos directos), específicamente

$$U_+ \times F \text{ con coordenadas } (\theta, t_+) , \quad (2.4)$$

$$U_- \times F \text{ con coordenadas } (\theta, t_-) , \quad (2.5)$$

Y de las funciones de transición ϕ_{+-} que relacionan las fibras asociadas a ambas vecindades (t_+ y t_-) en la región de intersección $U_+ \cap U_-$. Las funciones de transición son elegidas de la siguiente manera

$$\phi_{+-}^I : t_+ = t_- \text{ en la región de intersección } I = \{\theta : -\epsilon < \theta < \epsilon\} , \text{ y} \quad (2.6)$$

$$\phi_{+-}^{II} : t_+ = -t_- \text{ en la región de intersección } II = \{\theta : \pi - \epsilon < \theta < \pi + \epsilon\} , \quad (2.7)$$

Es justamente en la región II en donde la identificación de t con $-t$ “tuerce el fibrado”, generando así la topología global no trivial de la Cinta de Möbius (aquí concluye el ejemplo).

Otro concepto de importancia y utilidad es el de *sección en un fibrado*. Una sección en un fibrado E es una regla σ , la cual asigna o selecciona un punto $\sigma(p) \in F$ por cada punto $p \in M$, una sección en un fibrado vectorial implicaría la elección de *un* vector particular por cada punto sobre la variedad base. Una *sección local* σ_i es una sección definida solo en una vecindad U_i de la variedad, estas secciones son funciones desde U_i a F . Por otro lado, la existencia de *secciones globales* depende de la topología global del fibrado E , en general no es posible definir secciones globales sobre los fibrados.

2.1.2. Fibrado Tangente

El *fibrado tangente* es, entre los fibrados, el caso más simple de visualizar y entender. Un fibrado tangente TM sobre una variedad m -dimensional M es la colección de todos los espacios tangentes a los puntos $p \in M$:

$$TM \equiv \bigcup_{p \in M} T_p M . \quad (2.8)$$

Sean $\{U_i\}$ un conjunto de vecindades sobre M . Si x^μ son las coordenadas sobre U_i , un elemento de

$$TU_i \equiv \bigcup_{p \in U_i} T_p M \quad (2.9)$$

es especificado por un punto $p \in M$ y un vector tangente $V = V^\mu(p)(\partial/\partial x^\mu)|_p \in T_p M$. A través de las coordenadas x^μ la vecindad U_i es homeomorfa a \mathbb{R}^m y cada $T_p M$ es también homeomórfico a \mathbb{R}^m , y por lo tanto TU_i puede identificarse con el producto directo de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Si $(p, V) \in TU_i$ entonces con la introducción de coordenadas x^μ en la vecindad U_i induce la identificación $(p, V) \mapsto (x^\mu(p), V^\mu(p))$. TU_i es una variedad diferenciable $2m$ -dimensional descompuesta en el producto directo de $U_i \times \mathbb{R}^m$. Si se toma un punto u de TU_i , es posible descomponer sistemáticamente la información que contiene u en un punto $p \in M$ y en un vector $V \in T_p M$. Podemos definir un mapeo π llamado *proyección* π tal que $\pi : TU_i \rightarrow U_i$ de manera que para cada punto $u \in TU_i$, $\pi(u)$ es un punto $p \in U_i$, la información sobre el vector V asociado a u se pierde bajo la proyección.

Sean U_i, U_j dos cartas sobre M tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ y sean x^μ, y^μ las coordenadas sobre estas cartas, respectivamente. Consideremos un vector $V \in T_p M$ donde $p \in U_i \cap U_j$. Luego V tiene dos posibles representaciones coordenadas:

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p = \tilde{V}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \Big|_p . \quad (2.10)$$

Y por lo tanto

$$\tilde{V}^\nu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}(p) V_\mu . \quad (2.11)$$

Si se tienen “buenos” sistemas de coordenadas la matriz $(G^\nu_\mu) \equiv (\partial y^\nu / \partial x^\mu)$ es no singular y por lo tanto pertenece a $GL(m, \mathbb{R})$. Con esto las coordenadas de la fibra son rotadas por un elemento de $GL(m, \mathbb{R})$ bajo cambios en las coordenadas. El grupo $GL(m, \mathbb{R})$ correspondiente es conocido como *Grupo de Estructura* de TM .

2.1.3. Definición formal de fibrado.

Un fibrado E con fibra F sobre una variedad base M consiste en: un espacio topológico E , una proyección $\pi : E \rightarrow M$, donde se satisface que para todo punto $p \in M$ existe una vecindad U_i de p y un isomorfismo ϕ_i el cual mapea al producto directo $U_i \times F$ a $\pi^{-1}(U_i) \in E$, dicho de otra forma, si denotamos como (p, f) a un punto de $U_i \times F$, se debe cumplir que $\pi(\phi_i(p, f)) = p$. La función ϕ_i o de manera más adecuada ϕ_i^{-1} es conocida como *trivialización local*. Las funciones de transición ϕ_{ij} son definidas en la región de intersección entre dos vecindades U_i y U_j , si ϕ_i y ϕ_j son los isomorfismos asociados a la región U_i y U_j , respectivamente, entonces

$$\phi_{ij} \equiv \phi_i^{-1} \phi_j . \quad (2.12)$$

Para cada punto p en la región de intersección $U_i \cap U_j$ este mapeo es de $F \rightarrow F$. Las funciones de transición deben pertenecer a un grupo G de transformaciones en el espacio de la fibra F , como fue definido en la sección anterior, este es el grupo de estructura del fibrado. Las funciones de transición satisfacen las siguientes condiciones

$$\phi_{ii} = \text{identidad} \quad (2.13)$$

$$\phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik} \text{ para cualquier } p \in U_i \cap U_j \cap U_k. \quad (2.14)$$

2.1.4. Fibrado vectorial

Un fibrado vectorial E viene dotado de un fibra real k -dimensional $F = \mathbb{R}^k$ sobre un espacio base n -dimensional M . La dimensión total del fibrado E es $n + k$. Las funciones de transición en este caso pertenecen al grupo $GL(k, \mathbb{R})$, ya que este preserva la adición y el producto escalar sobre un espacio vectorial, con esta elección las fibras poseen inherentemente la estructura de espacio vectorial. El fibrado vectorial puede ser visto como una colección de espacios vectoriales (cada fibra) parametrizados por el espacio base M . Este tipo de espacio vectorial es directamente generalizable al caso complejo cambiando la fibra de $F = \mathbb{R}^k$ a $F' = \mathbb{C}^k$, y el grupo de estructura de $GL(k, \mathbb{R})$ a $GL(k, \mathbb{C})$.

2.1.5. Fibrado cotangente

El fibrado cotangente T^*M tiene como espacio base la variedad M y como fibra el espacio cotangente T_p^*M en cada punto $p \in M$. Si se tiene un sistema local de coordenadas x^μ definido sobre una cierta vecindad $U_i \in M$, el espacio cotangente tiene base $\{dx^\mu\}$ y luego un elemento de la fibra es de la forma $f_\mu dx^\mu$. Si U_j es otra vecindad de M con coordenadas y^ν , las funciones de transición en la región $U_i \cap U_j$ son dadas por

$$dx^\mu = dy^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}. \quad (2.15)$$

2.1.6. Fibrados principales

Este tipo de fibrado es el más importante en la construcción de las teorías de gauge que describen las interacciones fundamentales no gravitacionales (a través de lagrangeanos de Yang-Mills).

Un fibrado principal P tiene como fibra F el grupo de estructura G , es decir en cada punto p de la variedad base la fibra es un grupo de Lie. Este fibrado es denotado por $P(M, G)$. Las funciones de transición son elementos de G , al igual que los elementos de la fibra, y actúan sobre los elementos de F por la izquierda. Sea $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ y su inversa $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$, donde $u \in \pi^{-1}(U_i) \subset P$ y $\pi(u) = p$. Es posible definir la acción derecha de G sobre F ya que esta conmuta con la acción izquierda del grupo: la acción derecha de G sobre $\pi^{-1}(U_i)$ es definida por $\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a)$, es decir que $ua = \phi_i(p, g_i a)$ para cualquier $a \in G$ y $u \in \pi^{-1}(p)$.

La función proyección actuando sobre dos elementos en la misma fibra nos lleva al mismo punto de la variedad base, es decir, $\pi(u, a) = \pi(u) = p$. La acción derecha de G sobre $\pi^{-1}(p)$ es transitiva dado que G actúa sobre G transitivamente por la derecha y F_p es difeomórfico a G (cuidado con las sutiles diferencias entre F y G). Por lo tanto para cualquier par de elementos $u_1, u_2 \in F_p$ existe un elemento a de G tal que $u_1 = u_2 a$ y dado que $\pi(u) = p$ es posible construir toda la fibra a través de la acción del grupo como $F_p = \{ua \mid a \in G\}$.

Fibrados asociados a un fibrado principal.

Dado un fibrado principal $P(M, G)$, consideremos la acción del grupo G sobre una variedad F por la izquierda. Definamos la acción local de $g \in G$ sobre $P \times F$ como

$$(u, f) \rightarrow (ug, g^{-1}f), \quad (2.16)$$

donde $u \in P$ y $f \in F$. Luego el fibrado asociado es una clase de equivalencia $P \times F/G$ que identifica un punto (u, f) con el punto $(ug, g^{-1}f)$.

Consideremos el caso en que F es un espacio vectorial k -dimensional V y ρ la representación k -dimensional de G . El *fibrado vectorial asociado* $P \times_{\rho} V$ es definido a través de la identificación de los puntos (u, v) y $(ug, \rho(g)^{-1}v)$, con $u \in P$, $g \in G$ y $v \in V$. Por ejemplo, asociado al fibrado $P(M, GL(k, \mathbb{R}))$ está el fibrado vectorial de fibra \mathbb{R}^k sobre M .

La estructura del fibrado vectorial asociado $E = P \times_{\rho} V$ se compone además de una proyección $\pi_E : E \rightarrow M$, definida por $\pi_E(u, v) = \pi(u)$. Esta proyección está correctamente definida puesto que satisface

$$\pi_E(ug, \rho(g)^{-1}v) = \pi(ug) = \pi_E(u, v). \quad (2.17)$$

La trivialización local es dada por $\varphi_i : U_i \times V \rightarrow \pi_E^{-1}(U_i)$ y la función de transición de E es dada por $\rho(t_{ij}(p))$ donde $t_{ij}(p)$ es la función de transición del fibrado principal P .

De igual forma un fibrado vectorial tiene asociado un fibrado principal. Sea E un fibrado vectorial k -dimensional con fibra \mathbb{R}^k (ó \mathbb{C}^k). Luego E induce un fibrado principal $P(E) \equiv P(M, G)$ sobre M . El grupo de estructura G es $GL(k, \mathbb{R})$ (ó $GL(k, \mathbb{C})$).

2.2. Conexiones en fibrados

El concepto de conexión es fundamental en geometría diferencial, es un elemento necesario en la definición de derivada (covariante) sobre espacios no euclidianos. En Relatividad General la conexión, de Levi-Civita, permite definir una derivada covariante y por lo tanto comparar cantidades definidas en distintos puntos del espaciotiempo.

Para definir una conexión sobre un fibrado el requerimiento fundamental sigue siendo que permita comparar objetos matemáticos (vectores, tensores de mayor rango, formas diferenciales, etc.) en distintos puntos del fibrado. En particular se presentará el caso de conexión en un fibrado principal, que es la conexión utilizada en las teorías de gauge que describen el Modelo Estándar.

2.2.1. Conexión en un fibrado principal

Se muestra en primera instancia la definición abstracta de conexión, luego se obtiene una realización de la misma introduciendo 1-formas locales conexiones, que en el contexto físico serán los potenciales de gauge de una teoría particular dependiendo del fibrado principal sobre el cual fue definida. La intensidad de campo de Yang-Mills es definida como la curvatura asociada a la conexión.

De muchas definiciones equivalentes de conexión la que se presentará aquí, basada en la referencia [7], es puramente geométrica y simultáneamente más abstracta que otras definiciones.

La definición se basa en realizar una *separación* del espacio tangente T_uP (tangente a un punto del fibrado P , no a un punto p del espacio base M) en un subespacio vertical V_uP y un subespacio horizontal H_uP . Antes de continuar con esta definición se revisarán algunos conceptos asociados a grupos y álgebras de Lie.

Sobre grupos y álgebras de Lie

Sea G un grupo de Lie. Las acciones izquierda L_g y derecha R_g son definidas como $L_g h = gh$ y $R_g h = hg$ para $g, h \in G$. L_g induce el mapeo de *push-forward* $L_{g*} : T_h(G) \rightarrow T_{gh}(G)$. Un campo vectorial X que es invariante izquierdo satisface $L_{g*}X|_h = X|_{gh}$. Los campos vectoriales invariantes izquierdos forman un álgebra de Lie \mathfrak{g} . Dado que $X \in \mathfrak{g}$ puede ser especificado por el valor de X en el elemento identidad del grupo, e , y viceversa:

$$L_{g*}X|_e = X|_g, \quad (2.18)$$

$$L_{g^{-1}*}X|_g = X|_e, \quad (2.19)$$

existe un isomorfismo entre los espacios vectoriales \mathfrak{g} y T_eG . El álgebra de Lie \mathfrak{g} es cerrada bajo el corchete de Lie

$$[T_A, T_B] = C_{AB}^C T_C, \quad (2.20)$$

donde $\{T_A\}$ son los generadores del álgebra de Lie \mathfrak{g} y C_{AB}^C sus constantes de estructura. La acción adjunta $ad : G \rightarrow G$ es definida como $ad_g h \equiv ghg^{-1}$. El mapeo tangente inducido llamado mapeo adjunto y denotado por Ad satisface $Ad_g : T_h(G) \rightarrow T_{ghg^{-1}}(G)$, si elegimos $h = e$ el mapeo Ad_g queda restringido a $T_e(G) \simeq \mathfrak{g}$ y por lo tanto $Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ como $A \mapsto gAg^{-1}$, $A \in \mathfrak{g}$.

Definición geométrica de conexión

Sea u un elemento del fibrado principal $P(M, G)$ y sea G_p la fibra en $p = \pi(u)$. El subespacio vertical V_uP de T_uP es tangente a la fibra G_p en u . Consideremos un elemento del grupo G como $g = e^{tA}$, con $A \in \mathfrak{g}$ y t un parámetro, actuando por la derecha sobre u , es decir

$$R_g u = ue^{tA}, \quad (2.21)$$

esta acción define una curva a través de u en P . Debido a que $\pi(u) = \pi(ug) = p$ esta curva esta sobre G_p . Utilizando una función escalar suave $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ es posible definir un vector tangente A^\sharp a P en u , tal que $A^\sharp \in V_uP$, de la siguiente forma

$$A^\sharp f(u) = \left. \frac{d}{dt} f(ue^{tA}) \right|_{t=0} \quad (2.22)$$

De esta manera definiendo un vector A^\sharp en cada punto de P se construye un campo vectorial llama *campo vectorial fundamental* generado por A . Y por lo tanto $\sharp : \mathfrak{g} \rightarrow V_uP$ dado por $A \mapsto A^\sharp$. El *subespacio horizontal* H_uP es el complemento de V_uP en T_uP y es **especificado únicamente si una conexión es definida en P** . La conexión sobre el fibrado principal es definida a partir del hecho de *que existe una única separación* del espacio tangente T_uP en los

subespacios V_uP y H_uP que satisfacen las siguientes tres condiciones:

- (i) $T_uP = H_uP \oplus V_uP$
 - (ii) Un campo vectorial X sobre P es separado en dos campos vectoriales $X^H \in H_uP$ y $X^V \in V_uP$ como $X = X^H + X^V$.
 - (iii) $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$ para un u arbitrario $\in P$ y $g \in G$
- (2.23)

La condición (iii) establece que los subespacios horizontales H_uP y $H_{ug}P$ sobre la misma

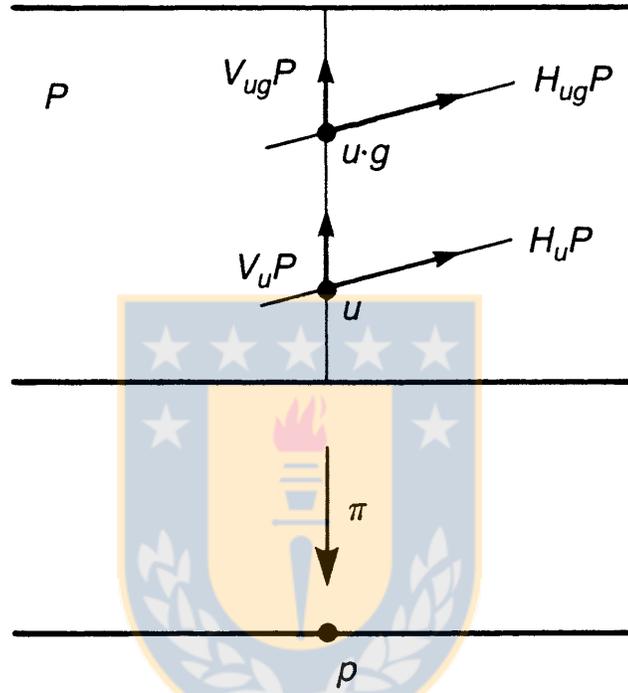


Figura 2.1: Separación en subespacios vertical V_uP y horizontal H_uP del espacio tangente T_uP al fibrado P en el punto u , para la definición de conexión en fibrados principales.

fibra están relacionados por un mapeo lineal R_{g*} inducido por la acción derecha del grupo, dicho de otra forma, un subespacio H_uP en u genera todos los subespacios horizontales de la misma fibra. Esta condición asegura que un punto u cualquier de P siempre es transportado de manera paralela. Está es una definición abstracta y primitiva de conexión, sin embargo es puramente geométrica. El nexo entre esta definición con los conceptos físicos de potencial de gauge e intensidad de campo son más claros al introducir la 1-forma conexión sobre P .

La 1-forma conexión

Para una definición mas concreta es necesario separar el espacio tangente T_uP en los subespacios vertical y horizontal en una manera sistemática. Esto puede conseguirse introduciendo la 1-forma conexión valuada en el álgebra de Lie \mathfrak{g} , la cual pertenece a $\mathfrak{g} \otimes T^*P$ y es una proyección de T_uP sobre el espacio vertical $V_uP \simeq \mathfrak{g}$. Esta proyección debe satisfacer los siguientes

requerimientos

$$(i) \quad \omega(A^\sharp) = A \quad , \quad A \in \mathfrak{g} \quad , \quad (2.24)$$

$$(ii) \quad R_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega \quad , \quad (2.25)$$

para cualquier $X \in T_u P$,

$$R_g^* \omega_{ug}(X) = \omega_{ug}(R_{g^*} X) = g^{-1} \omega_u(X) g \quad . \quad (2.26)$$

El subespacio horizontal $H_u P$ se define como el kernel de ω

$$H_u P \equiv \{X \in T_u P \mid \omega(X) = 0\} \quad (2.27)$$

el cual se puede demostrar satisface la condición (iii) de [2.23]. Con estas propiedades la 1-forma conexión cumple con separar $T_u P = H_u P \oplus V_u P$ de acuerdo a las condiciones requeridas por [2.23], una conexión como esta es también conocida como *conexión de Ehresmann*. A partir de la conexión ω sobre el fibrado podemos definir una conexión \mathcal{A}_i sobre el espacio base, más específicamente sobre U_i . Consideremos un conjunto de vecindades $\{U_i\}$ cubriendo M y en cada una de ellas una sección σ_i , a partir de esto se define la conexión \mathcal{A}_i sobre la vecindad U_i de la siguiente manera

$$\mathcal{A}_i \equiv \sigma_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i) \quad . \quad (2.28)$$

En la referencia [7] se demuestra que la relación inversa puede escribirse como

$$\omega_i \equiv g_i^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i g_i + g_i^{-1} d_P g_i \quad . \quad (2.29)$$

Donde d_P es la derivada exterior sobre P y g_i es la la coordenada en la fibra que se obtiene a través de la *trivialización local* $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$ para todo $u \in P$.

Para que la conexión defina una única separación $T_u P = H_u P \oplus V_u P$ primero ω debe ser única, luego $\omega_i = \omega_j$ sobre $U_i \cap U_j$. Esta condición induce una restricción en las conexiones \mathcal{A}_i y \mathcal{A}_j definidas en el espacio base M , esta restricción considera las funciones de transición ϕ_{ij} , puesto que se genera en las zonas de intersección $U_i \cap U_j$, y es de la forma

$$\mathcal{A}_j = \phi_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \phi_{ij} + \phi_{ij}^{-1} d \phi_{ij} \quad (2.30)$$

y es conocida como *condición de compatibilidad*. Esta es precisamente la conocida ley de transformación para las 1-formas conexión en las teorías de gauge y en este *approach* geométrico es consecuencia de requerir que la conexión ω elegida sobre el fibrado P sea única, en otras palabras del requerimiento que el espacio tangente al fibrado principal $T_u P$ sea dividido en los subespacios vertical $V_u P$ y horizontal $H_u P$ de acuerdo a las condiciones en [2.23] (que al mismo tiene relación con una correcta definición del transporte paralelo de los puntos u sobre el fibrado P). En las teorías de gauge, \mathcal{A}_i es identificada como el potencial de gauge.

Consideremos el caso de que P sea un fibrado principal $U(1)$ sobre M . Sean U_i y U_j dos vecindades sobre M , \mathcal{A}_i y \mathcal{A}_j las conexiones definidas a través de cada una de estas vecindades. La función de transición $\phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow U(1)$ es dada por

$$\phi_{ij}(p) = e^{\chi(p)} \quad \chi(p) \in \mathbb{R} \quad (2.31)$$

Luego \mathcal{A}_i con \mathcal{A}_j están relacionados como

$$\mathcal{A}_j(p) = \phi_{ij}^{-1}(p)\mathcal{A}_i(p)\phi_{ij}(p) + \phi_{ij}^{-1}(p)d\phi_{ij}(p) \quad (2.32)$$

$$\mathcal{A}_j(p) = \mathcal{A}_i(p) + d\chi(p) \quad (2.33)$$

$$\mathcal{A}_{j\mu}(p) \wedge dx^\mu = \mathcal{A}_{i\mu}(p) \wedge dx^\mu + \partial_\mu\chi(p) \wedge dx^\mu, \quad (2.34)$$

por componentes,

$$\mathcal{A}_{j\mu}(p) = \mathcal{A}_{i\mu}(p) + \partial_\mu\chi(p). \quad (2.35)$$

En esta ecuación vemos la ley de transformación del potencial de gauge de la interacción electromagnética.

2.2.2. 2-forma Curvatura.

Sobre el fibrado la 2-forma curvatura Ω se define como la derivada covariante de la 1-forma conexión ω

$$\Omega \equiv D\omega \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}. \quad (2.36)$$

Dados dos vectores tangentes al fibrado $X, Y \in T_uP$, la 2-forma curvatura y la 1-forma conexión satisfacen la *ecuación de estructura de Cartan*¹:

$$\Omega(X, Y) = d_P\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \quad \text{ó} \quad (2.37)$$

$$\Omega = d_P\omega + \omega \wedge \omega. \quad (2.38)$$

Dado que las formas ω y Ω son \mathfrak{g} -valuadas, es posible escribirlas en término de la base $\{T_A\}$ de \mathfrak{g} como sigue

$$\omega = \omega^A T_A \quad (2.39)$$

$$\Omega = \Omega^A T_A, \quad (2.40)$$

Y luego la ecuación (2.38) queda de la forma

$$\Omega^A T_A = d_P\omega^A T_A + \omega^B \wedge \omega^C [T_B, T_C], \quad (2.41)$$

utilizando el hecho que $[T_B, T_C] = C_{BC}^A T_A$

$$\Omega^A = d_P\omega^A + f_{BC}^A \omega^B \wedge \omega^C. \quad (2.42)$$

La 2-forma curvatura \mathcal{F} , forma local de la curvatura Ω es definida por

$$\mathcal{F} \equiv \sigma^*\Omega, \quad (2.43)$$

donde σ es la sección local definida sobre una vecindad U de M . \mathcal{F} en términos del potencial de gauge $\mathcal{A} = \sigma^*\omega$ es de la forma

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}, \quad (2.44)$$

¹Vea teorema 10,3 de la referencia [7]

donde $d = \partial_\mu \wedge dx^\mu$ es la derivada exterior sobre M , con x^μ coordenadas locales sobre la vecindad U . Utilizando estas coordenadas es posible reescribir (2.44) como

$$\frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu + A_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (2.45)$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu + \frac{1}{2} (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (2.46)$$

en componentes

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu], \quad (2.47)$$

es esta 2-forma curvatura \mathcal{F} la que representa al campo electromagnético y a los otros campos presentes en las interacciones descritas por teorías de Yang-Mills. Dado que ambas formas: \mathcal{A} , \mathcal{F} son \mathfrak{g} -valuadas, éstas pueden ser expandidas en la base $\{T_A\}$ del álgebra \mathfrak{g} , es decir

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu^A T_A \quad (2.48)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^A T_A, \quad (2.49)$$

y por lo tanto podemos escribir

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + f_{BC}^A A_\mu^B A_\nu^C. \quad (2.50)$$

Es directo demostrar a partir de (2.44) que la derivada covariante \mathcal{D} de la curvatura es cero:

$$\mathcal{D}\mathcal{F} \equiv \mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} - \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0, \quad (2.51)$$

que es la conocida identidad de Bianchi. La acción de \mathcal{D} sobre una p -forma \mathfrak{g} -valuada es definida como

$$\mathcal{D}\chi = d\chi + [\mathcal{A}, \chi]. \quad (2.52)$$

2.3. Teorías de gauge

En esta sección revisamos desde el punto de vista físico el concepto de teorías de gauge, que utiliza como base matemática la sección anterior. Se comienza con la revisión de la teorías de Yang-Mills, el caso particular y más simple de la descripción del electromagnetismo y luego el caso no abeliano más simple de $SU(2)$. Luego se introduce el concepto de tensores invariantes y de clases característica.

2.3.1. Teorías de Yang-Mills.

Interacción electromagnética.

Comenzaremos rescatando algunos de los aspectos básicos de esta interacción. En su formulación vectorial, la teoría electromagnética es descrita a través de las ecuaciones de Maxwell para el campo vectorial \mathcal{E} (campo eléctrico) y para el campo vectorial \mathcal{B} (campo magnético)

representadas, libre de fuentes y en el vacío, de la siguiente manera

$$\nabla \times \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 , \quad (2.53)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0 , \quad (2.54)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 0 , \quad (2.55)$$

$$\nabla \times \mathcal{B} - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 0 . \quad (2.56)$$

Estás 8 ecuaciones diferenciales dependen solo de 6 incógnitas, lo que ya da indicios de la presencia de la libertad de gauge de la teoría. Introduciendo los potenciales escalar eléctrico \mathcal{V} y vectorial magnético \mathcal{A} a través de

$$\mathcal{B} \equiv \nabla \times \mathcal{A} , \quad (2.57)$$

$$\mathcal{E} \equiv -\nabla \mathcal{V} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} , \quad (2.58)$$

las ecuaciones de Maxwell se reducen a un conjunto de 4 ecuaciones con los potenciales como sus (4) incógnitas. Sin embargo, siendo \mathcal{E} y \mathcal{B} únicos los potenciales \mathcal{V} y \mathcal{A} pueden ser elegidos entre infinitas opciones conectadas entre sí por las transformaciones

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} - \nabla \chi , \quad (2.59)$$

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} + \frac{\partial \chi}{\partial t} , \quad (2.60)$$

donde $\chi = \chi(x)$ es una función arbitraria de las coordenadas del espaciotiempo. Estás relaciones dejan invariantes las ecuaciones (2.58) y por lo tanto también las ecuaciones de Maxwell. Esta invariancia, es invariancia de gauge más simple y la primera en ser descubierta (conocida desde el s. XIX). Las ecuaciones de Maxwell son además invariantes de Lorentz, lo cual se vuelve explícito al introducir la notación relativista

$$\mathcal{F}_{0i} = \mathcal{E}_i , \quad (2.61)$$

$$\mathcal{F}_{ij} = -\epsilon_{ijk} \mathcal{B}_k , \text{ con } i, j, k = 1, 2, 3 , \quad (2.62)$$

donde las ecuaciones de Maxwell (2.56), libre de fuentes y en el vacío, son de la forma

$$\partial_{[\mu} \mathcal{F}_{\nu\lambda]} = 0 \quad (2.63)$$

$$\partial_{\mu} \mathcal{F}^{\nu\mu} = 0 , \text{ con } \mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3 , \quad (2.64)$$

donde los paréntesis [...] indican antisimetría en todos los índices encerrados. La relación entre los campos y los potenciales, en las ecuaciones (2.58) se reducen a la ecuación

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \mathcal{A}_{\nu} - \partial_{\nu} \mathcal{A}_{\mu} \quad (2.65)$$

o escrito en formas diferenciales simplemente

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} . \quad (2.66)$$

Esta ecuación es un caso particular de la ecuación (2.44)² si consideramos al término $\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = 0$, lo que en el contexto de fibrados principales es equivalente a considerar que las constantes de estructura C_{BC}^A de la fibra o del grupo de estructura son todas nulas, es decir que todos los generadores del grupo conmutan

$$[T_A, T_B] = 0 , \quad (2.67)$$

Este conmutador define al grupo $U(1)$, que es el grupo circular o también el grupo de todos los números complejos de módulo 1. La interacción electromagnética de Maxwell es descrita en el contexto de los fibrados por un fibrado $U(1)$ sobre M , donde la variedad base M es el espacio de Minkowski 4-dimensional. En particular este es un fibrado trivial $P(\mathbb{M}_4, U(1)) = \mathbb{R}^4 \times U(1)$ ³. En la cuantización de esta teoría, la electrodinámica cuántica (*QED*), el potencial electromagnético \mathcal{A} es interpretado como la partícula mediadora de la interacción electromagnética, es decir el bosón de la interacción (debido a que existe solo un generador, es solo un bosón) y como es conocido este es *el fotón*.

Lagrangeano de Yang-Mills, caso no abeliano $SU(2)$.

En el trabajo publicado en 1954 [9] generaliza el caso abeliano de $U(1)$ (que describe la interacción electromagnética) a grupos no abelianos tipo $SU(N)$ (en general a cualquier grupo de Lie semisimple y compacto). Consideramos un fibrado de $SU(2)$ sobre el espacio Minkowskiano \mathbb{M}_4 $P(\mathbb{M}_4, SU(2))$, este es un caso de fibrado no trivial. Aquí la 1-forma conexión \mathcal{A} o el potencial de gauge es de la forma

$$\mathcal{A} = A_\mu^A T_A dx^\mu , \quad (2.68)$$

donde los generadores son las matrices de Pauli, salvo factores, $T_A = -i\sigma_A/2$ ⁴ y satisfacen el álgebra $\mathfrak{su}(2)$

$$[T_A, T_B] = -\frac{1}{4}[\sigma_A, \sigma_B] = -\frac{1}{4}(2i\epsilon_{ABC}\sigma_C) \quad (2.69)$$

$$[T_A, T_B] = \epsilon_{ABC}T_C , \quad (2.70)$$

lo que implica que en este caso $C_{BC}^A = \epsilon_{ABC}$. La intensidad de campo viene dada por la ecuación (2.50)

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + f_{BC}^A A_\mu^B A_\nu^C \quad (2.71)$$

$$F_{\mu\nu A} = \partial_\mu A_{\nu A} - \partial_\nu A_{\mu A} + \epsilon_{ABC} A_{\mu B} A_{\nu C} . \quad (2.72)$$

Dado que la dimensión del álgebra es 3 (número de generadores) el número de bosones de gauge asociado a la cuantización de una teoría basada en este grupo también sería 3. La acción de Yang-Mills se define como

$$S_{YM}[\mathcal{A}] \equiv -\frac{1}{4} \int_M Tr(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) . \quad (2.73)$$

La variación con respecto a \mathcal{A}_μ nos lleva a

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 . \quad (2.74)$$

²Salvo un factor imaginario: la intensidad de campo \mathcal{F} es en realidad $(-i)$ veces la 2-forma curvatura de la ecuación (2.44), de la misma forma el potencial electromagnético \mathcal{A} es $(-i)$ veces la 1-forma conexión de la ecuación (2.44)

³Ver corolario 9,1 de la referencia [7]

⁴Ver apéndice B

El conjunto de ecuaciones complementarias son obtenidas a través de la identidad de Bianchi (2.51)

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} = 0 . \quad (2.75)$$

Es directo verificar que en el caso de la interacción electromagnética las ecuaciones (2.74,2.75) se reducen a las ecuaciones de Maxwell en (2.64)

Este tratamiento y ecuaciones son directamente generalizables a casos de otros grupos de Lie compactos y semisimples. La interacción Electrodébil (*EW*) es descrita por una teoría de Yang-Mills con fibrado $P(\mathbb{M}_4, SU(2) \times U(1))$, los cuatro potenciales de gauge de esta teoría representarán a los bosones de gauge Z^0 , W^\pm y al fotón. La interacción Fuerte o Cromodinámica Cuántica (*QCD*) es descrita por una teoría de Yang-Mills con fibrado $P(\mathbb{M}_4, SU(3))$, los ocho potenciales de gauge de esta teoría representarán en la versión cuantizada los ocho gluones de la interacción fuerte.

2.3.2. Invariantes y lagrangeanos Chern-Simons.

Polinomios invariantes.

Dado un conjunto de matrices complejas de $k \times k$ $M(k, \mathbb{C})$ se introduce el espacio vectorial $S^r(M(k, \mathbb{C}))$, de las funciones complejas, simétricas y r -lineales en los elementos de $M(k, \mathbb{C})$. Un elemento $\in S^r$ es denotado en general por \tilde{P}

$$\tilde{P} : (m_1, m_2, \dots, m_r) \rightarrow \mathbb{C} , \text{ con } m_i \in M(k, \mathbb{C}), i = 1 \dots r . \quad (2.76)$$

Un elemento $\tilde{P} \in S^r$ debe ser lineal en cada una de las entradas m_i e invariante bajo permutaciones en la dependencia de sus elementos, es decir

$$\tilde{P}(m_1, \dots, m_i, \dots, m_j, \dots, m_r) = \tilde{P}(m_1, \dots, m_j, \dots, m_i, \dots, m_r) . \quad (2.77)$$

Si consideramos el grupo lineal general $GL(k, \mathbb{C}) \subset M(k, \mathbb{C})$, en particular podemos elegir que las entradas m_i sean elementos de un álgebra de Lie \mathfrak{g} asociada a un grupo de Lie G . Un elemento $\tilde{P} \in S^r(\mathfrak{g})$ se denomina invariante si su valor no cambia al aplicar el mapeo adjunto ad_g de un elemento $g \in G$ sobre cada elemento del álgebra de los que depende \tilde{P} , es decir que

$$\tilde{P}(ad_g A_1, \dots, ad_g A_r) = \tilde{P}(g^{-1} A_1 g, \dots, g^{-1} A_r g) = \tilde{P}(A_1, \dots, A_r) , \quad (2.78)$$

Donde los $A_i \in \mathfrak{g}$. El conjunto de elementos \tilde{P} invariantes bajo el grupo G es denotado como $I^r(G) (\subset S^r(\mathfrak{g}))$. Es posible elegir todas las entradas de \tilde{P} como el mismo elemento $A \in \mathfrak{g}$, denominado combinación lineal, hecho esto podemos reducir la notación como sigue

$$\tilde{P}(A) \equiv \tilde{P}(A, \dots, A) , y \quad (2.79)$$

$$\tilde{P}(ad_g A) = \tilde{P}(A) . \quad (2.80)$$

En este caso \tilde{P} es un polinomio en A y es llamado *polinomio invariante*. Consideremos por ejemplo la traza simetrizada (*str*) como un elemento de $I^r(\mathfrak{g})$, es decir

$$\tilde{P}(A_1, \dots, A_r) = str(A_1, \dots, A_r) \quad (2.81)$$

$$\equiv \frac{1}{r!} \sum_p tr(A_{p(1)}, \dots, A_{p(r)}) , \quad (2.82)$$

donde la suma sobre p considera todas las permutaciones de los r términos. El polinomio invariante correspondiente vendría dado por

$$P(A) = P(A, \dots, A) = \frac{1}{r!} \sum_p \text{tr}(A, \dots, A) = \text{tr}(A^r) , \quad (2.83)$$

que es simplemente la traza de A^r . En general, un polinomio invariante puede ser escrito como una suma de productos de términos de la forma $\text{tr}(A^r)$. Correspondientemente a partir de un polinomio invariante $P(A)$ se puede obtener una forma r -lineal y simétrica \tilde{P} . Esto se puede conseguir considerando al elemento $A \in \mathfrak{g}$ como una combinación lineal de otros elementos $\in \mathfrak{g}$, de forma que el polinomio invariante toma la forma $P(t_1 A_1 + \dots + t_r A_r)$. Luego se obtiene una forma lineal y r -simétrica tomando $1/r!$ veces el término acompañando a $t_1 \dots t_r$, este término es conocido como polarización de P .

Consideremos el polinomio invariante definido por la traza eligiendo $r = 3$, luego $P(A) = \text{tr}(A^3)$, escribiendo A en término de los t_i se tiene que $P = \text{tr}((t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3)^3)$, expandiendo el polinomio encontramos que el término que acompaña a $t_1 t_2 t_3$ es $3 \text{tr}(A_1 A_2 A_3 + A_2 A_1 A_3)$, dividiendo por $1/r! = 1/6$ se obtiene la polarización \tilde{P} de P , es decir una forma simétrica y r -lineal asociada al polinomio invariante, explícitamente

$$P(A) = \text{tr}(A^3) \rightarrow \tilde{P}(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{2} \text{tr}(A_1 A_2 A_3 + A_2 A_1 A_3) = \text{str}(A_1, A_2, A_3) . \quad (2.84)$$

Estas definiciones se pueden extender directamente a p -formas valuadas en el álgebra \mathfrak{g} . Consideremos un fibrado principal $P(M, \mathbb{C})$ y formas definidas sobre el espacio base M como $A = A_i \eta_i$ con $A_i \in \mathfrak{g}$ y $\eta_i \in \Omega^{p_i}(M)$ (con $1 \leq i \leq r$). Se define una forma r -lineal y simétrica de una p -forma \mathfrak{g} como

$$\tilde{P}(A_1 \eta_1, \dots, A_r \eta_r) \equiv \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r \tilde{P}(A_1, \dots, A_r) , \quad (2.85)$$

la combinación sería de la forma

$$P(A\eta) \equiv \eta \wedge \dots \wedge \eta P(A) . \quad (2.86)$$

En la construcción de teorías para la descripción de las interacciones es importante obtener polinomios invariantes, bajo un grupo de simetría G , que dependan de la 2-forma curvatura \mathcal{F} , es decir polinomios invariantes de la forma $P(\mathcal{F})$.

Teorema de Chern-Weil.

Sea \mathcal{F} la 2-forma curvatura asociada a una conexión \mathcal{A} sobre la variedad base de un fibrado principal y $P(\mathcal{F})$ un polinomio invariante \mathcal{F} -dependiente, luego este polinomio satisface⁵:

- (a) $dP(\mathcal{F}) = 0$,
- (b) Sean \mathcal{F} y \mathcal{F}' las 2-formas curvaturas correspondientes a dos 1-formas conexiones \mathcal{A} y \mathcal{A}' definidas sobre M . Entonces la diferencia $P(\mathcal{F}) - P(\mathcal{F}')$ es exacta.

⁵Ver el Teorema 11,1 y su demostración en la referencia [7]

En particular la diferencia entre dos polinomios invariantes de orden r , segunda parte del teorema, está dada explícitamente por

$$P_r(\mathcal{F}') - P_r(\mathcal{F}) = d \left[r \int_0^1 dt \tilde{P}_r(\mathcal{A}' - \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \right], \quad (2.87)$$

Donde $\mathcal{F}_t \equiv d\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t \wedge \mathcal{A}_t$, con

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A} + t(\mathcal{A}' - \mathcal{A}), \quad (2.88)$$

este término interpola continuamente entre las dos conexiones a través del parámetro t , con $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ y con $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}'$.

El término entre los paréntesis [...] se conoce como la *transgresión* $TP_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ de P_r .

$$TP_r(\mathcal{A}', \mathcal{A}) \equiv r \int_0^1 dt \tilde{P}_r(\mathcal{A}' - \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t). \quad (2.89)$$

Si consideramos la dimensión de la variedad M , donde las conexiones y curvaturas son definidas, igual a $\dim M = m$ y consideramos $r = m$ se puede integrar la diferencia entre polinomios de la ecuación 2,87 sobre la variedad M , de forma que

$$\int_M [P_r(\mathcal{F}') - P_r(\mathcal{F})] = \int_M dT P_r(\mathcal{A}', \mathcal{A}) \quad (2.90)$$

Si consideramos una variedad sin borde, las integrales de cada polinomio serán equivalentes

$$\int_M P_r(\mathcal{F}') = \int_M P_r(\mathcal{F}) \quad (2.91)$$

Estos resultados serán relevantes a la hora de definir los lagrangeanos basados en la forma de Chern-Simons.

En el concepto de clase característica.

Antes de definir las clases características es necesario recordar el concepto de cohomología, en particular la definición de grupo de cohomología de de Rham⁶.

Definición 7: Sea M una variedad m -dimensional. El conjunto de todas las p -formas es llamado el grupo cociclo de orden p y es denotado por $Z^p(M)$. El conjunto de todas las p -formas exactas es llamado el grupo coborde de orden p y es denotado por $B^p(M)$. Dado que $d^2 = 0$

$$B^p(M) \subset Z^p(M). \quad (2.92)$$

Se define como el *grupo de cohomología de de Rham* de orden p al conjunto de todos los elementos que conforman el espacio

$$H^p(M; \mathbb{R}) \equiv \frac{Z^p(M)}{B^p(M)}, \quad (2.93)$$

De todas las p formas que son cerradas pero no exactas.

Sea $\psi \in Z^p$, luego $[\psi] \in H^p(M)$ es la clase de equivalencia definida por

⁶Para mayores detalles vea el capítulo 6 de la referencia [7]

⁷Definición 6,1 de la referencia [7]

$\{\psi' \in Z^p(M) | \psi' = \psi + d\varphi, \varphi \in \Omega^{p-1}(M)\}$ ⁸, dos formas que difieren en una forma exacta se dicen cohomólogas, esta clase de equivalencia es conocida como *clase de cohomología*.

El punto (b) del teorema de Chern-Weil, o de (2.87), define una clase de cohomología entre los polinomios invariantes sobre M , la cual es independiente de la elección de la conexión \mathcal{A} . Esta clase de cohomología es conocida como *clase característica*. Dado un polinomio invariantes P se denota como $\chi_E(P)$ a la clase característica asociada, donde E es el fibrado sobre el cual las conexiones y curvaturas fueron definidas. Las clases características son invariantes globales que permiten medir la no-trivialidad de un fibrado, las clases característica de un fibrado trivial son triviales.

Teorema⁹ Sea $P \in I^*$ ¹⁰ un polinomio invariante bajo el grupo G y E un fibrado sobre M con grupo de estructura G . El mapeo

$$\chi_E : I^* \rightarrow H^* , \quad (2.94)$$

donde $H^* \equiv \bigoplus_{p=1}^m H^p(M)$ y es llamado *anillo de cohomología*, definido por $P \rightarrow \chi_E(P)$ es un homomorfismo conocido como el *homomorfismo de Weil*. A continuación se describirán clases características importantes.

Clase de Chern y Carácter de Chern

Las clases de Chern fueron introducidas por Shiing-Shen Chern en 1946. Son clases características asociadas a un fibrado vectorial complejo, es decir, son un invariante topológico que nos permite establecer si dos fibrados vectoriales son topológicamente diferentes o no. Sea $E(M, \mathbb{C}^k)$ un fibrado vectorial. El grupo de estructura G es subgrupo de $GL(k, \mathbb{C})$. La conexión de gauge y la curvatura están valuadas en la correspondiente álgebra de Lie: $\mathcal{A} = \mathcal{A}^A T_A$ y $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \mathcal{F}^A T_A$, con $T_A \in \mathfrak{g}$.

Se define la *clase total de Chern* $c(\mathcal{F})$ como

$$c(\mathcal{F}) \equiv \det \left(I + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right) \quad (2.95)$$

Es posible expandir la clase de Chern en una suma de formas de grado par que dependen de \mathcal{F} como

$$c(\mathcal{F}) = 1 + c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F}) + \dots , \quad (2.96)$$

donde cada uno de los términos de la expansión define una *clase de Chern*, el término $c_l(\mathcal{F}) \in \Omega^{2l}(M)$ y es conocido como la l -ésima clase de Chern. Debido a que la dimensión de M es m , formas con orden mayor a m son trivialmente nulas, luego cualquier término luego de la expansión (2.96) posterior es $c_{m/2}$ si m es par o a $c_{(m-1)/2}$ si m es impar es idénticamente cero. Independiente de la dimensión del espacio base M el último término de la serie siempre está dado por $c_L = \det(i\mathcal{F}/2\pi)$ y por lo tanto todo término posterior es nulo, es decir $c_n(\mathcal{F}) = 0$ cuando $n > L$, luego cada uno de estos términos define un elemento $[c_n(\mathcal{F})] \in H^{2n}$.

Es útil para simplificar el cálculo de las clases de Chern, diagonalizar la 2-forma curvatura. Esto se puede conseguir utilizando un elemento $g \in GL(k, \mathbb{C})$ como

$$\mathcal{R} \equiv g^{-1} \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right) g = \text{diag}(f_1, \dots, f_k) , \text{ con } f_i \in \Omega^2(M) . \quad (2.97)$$

⁸Donde $\Omega^{p-1}(M)$ es el espacio de las $p-1$ formas sobre M

⁹Ver teorema 11.2.a y su demostración en la referencia[7]

¹⁰Donde $I^* \equiv \bigotimes_{p \geq 0} I^p(G)$

Luego la clase de Chern queda de la forma

$$c(\mathcal{R}) = \det(I + \mathcal{R}) = \det[1 + f_1, 1 + f_2, \dots, 1 + f_k] \quad (2.98)$$

$$= \prod_{i=1}^k (1 + f_i) = 1 + (f_1 + \dots + f_k) + (f_1 f_2 + \dots + f_{k-1} f_k) + \prod_{i=1}^k (f_i) \quad (2.99)$$

$$c(\mathcal{R}) = 1 + \text{tr} \mathcal{R} + \frac{1}{2} \{(\text{tr} \mathcal{R})^2 - \text{tr} \mathcal{R}^2\} + \dots + \det \mathcal{R} . \quad (2.100)$$

Cada uno de los términos de la expansión 2.100 son funciones simétricas de los f_i , luego, $\det(I + \mathcal{R})$ es un polinomio invariante y $P(\mathcal{F}) = P(g\mathcal{F}g^{-1}) = P(2\pi\mathcal{F}/i)$. Explícitamente las clases de Chern toman la siguiente forma

$$c_0(\mathcal{F}) = 1 \quad (2.101)$$

$$c_1(\mathcal{F}) = \text{tr} \mathcal{R} = \text{tr} \left(g \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} g^{-1} \right) = \frac{i}{2\pi} \text{tr} \mathcal{F} \quad (2.102)$$

$$c_2(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathcal{R})^2 - \text{tr} \mathcal{R}^2] = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 [\text{tr} \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} - \text{tr}(\mathcal{R} \wedge \mathcal{R})] \quad (2.103)$$

$$\vdots \quad (2.104)$$

$$c_k(\mathcal{F}) = \det \mathcal{R} = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^k \det \mathcal{F} . \quad (2.105)$$

Se define el *carácter total de Chern* como

$$ch(\mathcal{F}) \equiv \text{tr} \exp \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right) = \sum_i \frac{1}{i!} \text{tr} \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right)^i , \quad (2.106)$$

el i -ésimo carácter de Chern esta entonces dado por

$$ch_i(\mathcal{F}) \equiv \frac{1}{i!} \text{tr} \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right)^i . \quad (2.107)$$

Todo carácter de Chern $ch_i(\mathcal{F})$ es trivialmente cero si $2i > m = \dim M$. Si diagonalizamos la curvatura a través de

$$g^{-1} \left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \right) g = \mathcal{R} \equiv \text{diag}(f_1, \dots, f_j) , \quad (2.108)$$

con $g \in GL(k, \mathbb{C})$, el carácter total de Chern queda expresado como

$$ch(\mathcal{F}) \rightarrow ch(\mathcal{R}) = \text{tr}[\exp(\mathcal{R})] = \sum_{i=1}^j \exp(f_i) = \sum_{i=1}^j \left(1 + f_i + \frac{1}{2!} f_i^2 + \dots \right) \quad (2.109)$$

$$= j + S_1(x_i) + \frac{1}{2!} [S_1(x_i)^2 - 2S_2(x_i)] + \dots , \quad (2.110)$$

utilizando los resultados de las ecuaciones (2.101-2.103) se pueden escribir los caracteres de Chern como funciones de las clases de Chern

$$ch_0(\mathcal{F}) = j \quad (2.111)$$

$$ch_1(\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{F}) \quad (2.112)$$

$$ch_2(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} [c_1(\mathcal{F})^2 - 2c_2(\mathcal{F})] \quad (2.113)$$

$$\vdots \quad (2.114)$$

con j la dimensión de la fibra.

A continuación se presentan los dos tipos de clases características más importantes en la construcción de teorías gravitacionales, ambas asociadas a fibrados vectoriales reales: La clase de Pontrjagin y la clase de Euler.

Clases de Pontrjagin

Sea E un fibrado vectorial real sobre una variedad base M de dimensión m con $\dim_{\mathbb{R}} E = k$ y con grupo de estructura $GL(k, \mathbb{R})$. Si la fibra real esta equipada de una métrica es posible introducir marcos de referencia ortonormales en cada fibra y el grupo de estructura puede ser reducido al grupo ortonormal $O(k) \in GL(k, \mathbb{R})$. Debido a que los generadores de $O(k)$ son antisimétricos la intensidad de campo \mathcal{F} también lo es. En general una matriz antisimétrica no es diagonalizable por un elemento de $GL(k, \mathbb{R})$, como máximo puede llevarse a una estructura diagonal de bloques. Para llegar a \mathcal{F} desde una estructura diagonal por bloques a una diagonal es necesario utilizar un elemento de $GL(k, \mathbb{C})$. Si k es par el último elemento de la diagonal es un bloque, si k es impar el último elemento de la diagonal es simplemente cero.

La clase total de Pontrjagin se define como

$$p(\mathcal{F}) \equiv \det \left(I + \frac{\mathcal{F}}{2\pi} \right). \quad (2.115)$$

Dado que \mathcal{F} es antisimétrica se tiene que¹¹

$$\det \left(I + \frac{\mathcal{F}}{2\pi} \right) = \det \left(I + \frac{\mathcal{F}^T}{2\pi} \right) = \det \left(I - \frac{\mathcal{F}}{2\pi} \right) \quad (2.116)$$

y por lo tanto la clase total de Pontrjagin es una función par de \mathcal{F} : $p(\mathcal{F}) = p(-\mathcal{F})$. La clase total de Pontrjagin se puede expandir de la siguiente manera

$$p(\mathcal{F}) = 1 + p_1(\mathcal{F}) + p_2(\mathcal{F}) + \dots, \quad (2.117)$$

donde las $p_j(\mathcal{F})$ son las clases de Pontrjagin y son polinomios de orden $2j$. Consideremos la siguiente diagonalización

$$\frac{\mathcal{F}}{2\pi} \rightarrow \mathcal{R} \equiv \text{diagonal} (-if_1, if_1, -if_2, if_2), \dots, -if_{k/2}, if_{k/2}) \text{ , para } k \text{ par ,} \quad (2.118)$$

$$\frac{\mathcal{F}}{2\pi} \rightarrow \mathcal{R} \equiv \text{diagonal} (-if_1, if_1, -if_2, if_2), \dots, -if_{[k/2]}, if_{[k/2]}, 0) \text{ , para } k \text{ impar ,} \quad (2.119)$$

¹¹Teniendo en cuenta que $\det(A^T) = \det(A)$

donde el paréntesis $[\dots]$ indica la parte entera del argumento y con $f_i \equiv -\lambda_i/2\pi$ donde los λ_i son los autovalores de \mathcal{F} . Teniendo en cuenta representación (2.119) en la definición (2.115) se obtiene

$$p(\mathcal{F}) \equiv \prod_{i=1}^{[k/2]} (1 + f_i^2) . \quad (2.120)$$

Es directo demostrar que cada clase de Pontrjagin en la expansión se puede escribir como

$$p_1(\mathcal{F}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \text{tr} \mathcal{F}^2 \quad (2.121)$$

$$p_2(\mathcal{F}) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \left[(\text{tr} \mathcal{F}^2)^2 - 2\text{tr} \mathcal{F}^4 \right] \quad (2.122)$$

$$p_3(\mathcal{F}) = \frac{1}{48} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^6 \left[-(\text{tr} \mathcal{F}^2)^3 + 6\text{tr} \mathcal{F}^2 \text{tr} \mathcal{F}^4 - 8\text{tr} \mathcal{F}^6 \right] \quad (2.123)$$

$$\vdots \quad (2.124)$$

$$p_{[k/2]}(\mathcal{F}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^k \det \mathcal{F} . \quad (2.125)$$

Las clases de Chern pueden escribirse en función de las clases de Pontrjagin, para esto es necesario complexificar la fibra de E sobre la cual se calculó la clase de Pontrjagin a una fibra $E^{\mathbb{C}}$, hecho esto la relación entre ambas clases características es de la forma

$$p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E^{\mathbb{C}}) . \quad (2.126)$$

Clases de Euler

Sea M una variedad Riemanniana m -dimensional, con $m = 2n$ orientable de curvatura \mathcal{R} y TM el fibrado tangente de M . Siempre es posible reducir el grupo de estructura de TM a $SO(2n)$ utilizando marcos de referencia ortonormales.

La *clase de Euler* $e(\mathcal{R})$ de M se define como la raíz cuadrada de la $4n$ -forma p_n

$$e(\mathcal{X})e(\mathcal{X}) = p_n(\mathcal{X}) , \quad (2.127)$$

con \mathcal{X} una matriz de $2n \times 2n$, en caso de considerar \mathcal{X} como la 2-forma curvatura el lado derecho de la ecuación (2.127) es idénticamente cero. Por definición $e(\mathcal{R}) = 0$ en variedades de dimensión impar y en variedades de dimension par define un elemento de volumen de M .

Consideremos como ejemplo el fibrado tangente TS^2 con variedad M la 2-esfera S^2 , con métrica

$$g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi . \quad (2.128)$$

Teniendo en consideración la definición de la 2-forma curvatura

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\lambda\rho} dx^\lambda \wedge dx^\rho , \quad (2.129)$$

donde $R^{\mu\nu\lambda\rho}$ es el tensor de curvatura de Riemann y los e_a^μ los vierbein, es decir, las matrices que nos llevan de la base coordenada (rotulada por los índices μ, ν, \dots) a la base ortonormal no coordenada (rotulada por los índices a, b, \dots)

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu . \quad (2.130)$$

Cálculos directos con la métrica (2.128) nos permiten obtener que los únicos vierbein y componentes no nulas de la curvatura son

$$R_{\phi\theta\phi}^\theta = -R_{\phi\phi\theta}^\theta = \sin^2 \theta \quad R_{\theta\phi\theta}^\phi = -R_{\theta\theta\phi}^\phi = 1 \quad (2.131)$$

$$e_1^\theta = 1 \quad e_2^\theta = 0 \quad e_1^\phi = 0 \quad e_2^\phi = \sin \theta , \quad (2.132)$$

Luego la 2-forma curvatura en la base coordenada posee como solo dos componentes no nulas

$$\mathcal{R}_{\theta\phi} = -\mathcal{R}_{\phi\theta} = \sin \theta d\theta \wedge d\phi \quad (2.133)$$

La clase de Pontrjagin $p_1(\mathcal{R})$, siendo una 4-forma, es idénticamente cero sobre la 2-esfera, sin embargo nos será útil para hallar la clase de Euler. Utilizando la ecuación (2.121) se tiene que

$$p_1(\mathcal{R}) = -\frac{1}{8\pi^2} \text{tr} \mathcal{R}^2 = \frac{1}{8\pi^2} [\mathcal{R}_{\theta\phi} \mathcal{R}_{\phi\theta} + \mathcal{R}_{\phi\theta} \mathcal{R}_{\theta\phi}] \quad (2.134)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\phi \right)^2 , \quad (2.135)$$

usando (2.127) es claro que la clase de Euler sobre la 2-esfera es de la forma

$$e(S^2) \equiv e(\mathcal{R}) = \frac{1}{2\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\phi , \quad (2.136)$$

donde se ha introducido una nueva notación para la forma de Euler, que hace alusión solo a la variedad sobre la cual está definida.

Es posible demostrar que, como resultado general, la integral sobre la variedad M clase de Euler es igual al valor de la característica de Euler de la variedad, este resultado es el conocido teorema de *Gauss-Bonnet* [10], y se expresa como

$$\int_M e(M) = \chi(M) , \quad (2.137)$$

donde M es una variedad compacta, orientable y de dimensión par, si la dimensión es impar tanto la clase como el número de Euler son nulos. En particular para el ejemplo de la 2-esfera se tiene que

$$\int_{S^2} e(S^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta = 2 , \quad (2.138)$$

que es efectivamente la característica de Euler de la 2-esfera.

La clase de Euler puede ser escrita también como el Pfaffiano ¹².

$$e(M) = Pf \left(\frac{\mathcal{R}}{2\pi} \right) = \frac{(-1)^l}{(4\pi)^l l!} \sum_P \text{sgn}(P) \mathcal{R}_{P(1)P(2)} \mathcal{R}_{P(3)P(4)} \dots \mathcal{R}_{P(2l-1)P(2l)} . \quad (2.139)$$

¹²El determinante de una matriz antisimétrica A define el cuadrado del Pfaffiano de la misma, es decir, $\det A = Pf(A)^2$. Si la matriz A es de dimensión $2l \times 2l$ su Pfaffiano es definido por $Pf(A) = (-1)^l / (2^l l!) \sum_P \text{sgn}(P) A_{P(1)P(2)} A_{P(3)P(4)} \dots A_{P(2l-1)P(2l)}$

Si M es una variedad orientable 4-dimensional con grupo de estructura $SO(4)$ la clase de Euler, según (2.139), puede en general ser escrita como

$$e(M) = \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{ijkl} \mathcal{R}_{ij} \wedge \mathcal{R}_{kl} . \quad (2.140)$$

Lagrangeanos Chern-Simons

Sea $P_j(\mathcal{F})$ una clase característica y $2j$ -forma sobre una variedad M . Dado que $P_j(\mathcal{F})$ es cerrada, a través del lema de Poincaré puede ser localmente escrita como una forma exacta

$$P_j(\mathcal{F}) = dQ_{2j-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) . \quad (2.141)$$

Esta $2j - 1$ -forma es llamada forma de *Chern-Simons* de la clase característica $P_j(\mathcal{F})$. Del teorema de Chern-Weil, de (2.87), se identifica que la forma de Chern-Simons Q_{2j-1} puede ser definida como la forma de transgresión

$$Q_{2j-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = T P_j(\mathcal{A}, 0) = j \int_0^1 dt \tilde{P}_j(\mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) , \quad (2.142)$$

donde se fijó $\mathcal{A}' = 0 = \mathcal{F}'$, esta fijación puede hacerse solo localmente y sobre una carta donde el fibrado sea trivial.

Consideremos la estructura de la forma de Chern-Simons definida por el carácter de Chern $ch_j(\mathcal{F})$. Habiendo fijado localmente una de las conexiones como cero, la conexión (2.88) es de la forma $\mathcal{A}_t = t\mathcal{A}$, interpolando entre 0 y \mathcal{A} , luego su correspondiente curvatura viene dada por

$$\mathcal{F}_t = td\mathcal{A} + t^2\mathcal{A}^2 \quad (2.143)$$

$$= td\mathcal{A} + t\mathcal{A}^2 - t\mathcal{A}^2 + t^2\mathcal{A}^2 \quad (2.144)$$

$$= t\mathcal{F} + (t^2 - t)\mathcal{A}^2 . \quad (2.145)$$

Luego la forma Chern-Simons, utilizando la definición de transgresión (2.89), es de la forma

$$Q_{2j-1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^j \int_0^1 dt \operatorname{str} (\mathcal{A}, \mathcal{F}_t^{j-1}) . \quad (2.146)$$

Para $j = 1, 3, 5$ se obtiene que

$$Q_1(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = \frac{i}{2\pi} \int_0^1 dt \operatorname{tr} \mathcal{A} \quad (2.147)$$

$$Q_3(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \int_0^1 dt \operatorname{str} (\mathcal{A}, \mathcal{F}_t) = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \operatorname{tr} \left(\mathcal{A}d\mathcal{A} + \frac{2}{3}\mathcal{A}^3 \right) \quad (2.148)$$

$$Q_5(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^3 \int_0^1 dt \operatorname{str} (\mathcal{A}, \mathcal{F}_t^2) \quad (2.149)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^3 \operatorname{tr} \left[\mathcal{A}(d\mathcal{A})^2 + \frac{3}{2}\mathcal{A}^3d\mathcal{A} + \frac{3}{5}\mathcal{A}^5 \right] \quad (2.150)$$

$$\left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 . \quad (2.151)$$



Capítulo 3

Procedimiento de S -expansión y cálculo de tensores invariantes.

En este capítulo se presenta el mecanismo de S -expansión introducido en la referencia [12], así como su formalismo dual [13], el cual será utilizado en los siguientes capítulos.

El procedimiento de S -expansión permite establecer una conexión entre dos (super)álgebras conocidas o la obtención de una nueva (super)álgebra a partir de una (super)álgebra de partida, la (super)álgebra de llegada puede tener igual o distinta dimensionalidad que la (super)álgebra de partida. Una importante característica de la S -expansión es que permite la construcción de tensores invariantes para la (super)álgebra de llegada conocidos los tensores invariantes de la (super)álgebra inicial.

3.1. S-expansion

Dos elementos básicos en el procedimiento de S -expansión son un álgebra de Lie \mathfrak{g} y un semigrupo abeliano S .

3.1.1. Semigrupos

Un semigrupo S es un conjunto de elementos $\{\lambda_\alpha\}$, con $\alpha = 1..dim S$, dotado de un producto interno asociativo, es requerimiento que el tipo de semigrupo utilizado en la S -expansión sea finito, discreto y **abeliano**, luego se satisface que

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_\gamma, \quad (3.1)$$

$$(\lambda_\alpha \lambda_\beta) \lambda_\gamma = \lambda_\alpha (\lambda_\beta \lambda_\gamma), \quad (3.2)$$

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_\beta \lambda_\alpha, \quad (3.3)$$

$$\forall \lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma \in S. \quad (3.4)$$

Así como la estructura de un álgebra de Lie se codifica en sus constantes de estructura, toda la información de la tabla de multiplicación del semigrupo puede codificarse en un objeto llamado 2-selector. Consideremos λ_α , λ_β y λ_γ tres elementos cualesquiera del semigrupo S , se define el

2-selector $K_{\alpha\beta}{}^\gamma$ como

$$K_{\alpha\beta}{}^\gamma = \begin{cases} 1 & , \text{ if } \lambda_\alpha\lambda_\beta = \lambda_\gamma \\ 0 & , \text{ if } \lambda_\alpha\lambda_\beta \neq \lambda_\gamma \end{cases} . \quad (3.5)$$

Así como las constantes de estructura de un álgebra de Lie proveen una representación matricial para sus generadores (representación adjunta o regular), los 2-selectores proveen de una representación matricial a los elementos del semigrupo, es decir

$$[\lambda_\alpha]_\beta{}^\gamma = K_{\beta\alpha}{}^\gamma . \quad (3.6)$$

A partir de los 2-selectores es posible definir un selector generalizado o compuesto llamado n -selector, definido como

$$K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}{}^\gamma \equiv K_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}{}^{\beta_1} K_{\beta_1 \alpha_n}{}^\gamma \equiv \dots \equiv K_{\alpha_1 \alpha_2}{}^{\beta_{n-2}} K_{\beta_{n-2} \alpha_3}{}^{\beta_{n-3}} \dots K_{\beta_1 \alpha_n}{}^\gamma . \quad (3.7)$$

Este selector será especialmente útil en la construcción de tensores invariantes a través de la S -expansión.

Otra característica de utilidad que comparten los semigrupos con las álgebras, es que así como es posible dividir el conjunto de elementos de un álgebra en subespacios es posible también separar los elementos de un semigrupo en subconjuntos. De forma que si $S = \cup_p S_p$, donde p rotula cada subconjunto de S , se satisface que

$$S_p \cdot S_q = \{ \lambda_\gamma \text{ tal que } \lambda_\gamma = \lambda_{\alpha_p} \lambda_{\alpha_q}, \text{ con } \lambda_{\alpha_p} \in S_p \text{ y } \lambda_{\alpha_q} \in S_q \} \subset S , \quad (3.8)$$

$$\forall S_p, S_q \in S \quad (3.9)$$

Aquí S_p y S_q no necesitan ser semigrupos en sí.

Además de utilizar semigrupos, es común en el procedimiento de S -expansión utilizar monoides, semigrupos más un elemento cero 0_S , es decir un elemento que satisface $\lambda_\alpha 0_S = 0_S \lambda_\alpha = 0_S$.

3.1.2. Álgebra S -expandida

Dada una (super)álgebra de Lie \mathfrak{g} con generadores $\{T_A\}$ y un semigrupo abeliano finito $S = \{\lambda_\alpha\}$, el producto directo $S \times \mathfrak{g}$ define también una (super)álgebra de Lie¹, que comunmente se denota \mathfrak{G} . Los generadores de la (super)álgebra S -expandida \mathfrak{G} son definidos como $T_{(A,\alpha)} \equiv \lambda_\alpha T_A$ y sus constantes de estructura dadas por

$$C_{(A,\alpha)(B,\beta)}^{(C,\gamma)} = K_{\alpha\beta}{}^\gamma C_{AB}^C , \quad (3.10)$$

donde $K_{\alpha\beta}{}^\gamma$ es el 2-selector del semigrupo S y C_{AB}^C las constantes de estructura de la (super)álgebra de Lie \mathfrak{g} . El (super)conmutador toma la forma

$$[T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)}] = C_{(A,\alpha)(B,\beta)}^{(C,\gamma)} T_{(C,\gamma)} . \quad (3.11)$$

La estructura del álgebra \mathfrak{G} resulta algo trivial ya que en general solo produce replicas del álgebra original, por esto resulta útil aplicar otros mecanismos para extraer subálgebras de \mathfrak{G} con estructuras más interesantes. Los tipos más importantes de álgebras que se pueden obtener luego de la S -expansión son las subálgebras resonantes, las subálgebras 0_S -reducidas y una combinación de estos dos tipos.

¹Teorema III.1 de la referencia [12]

3.1.3. Subálgebras resonantes

Consideremos una descomposición de la (super)álgebra \mathfrak{g} en un conjunto de subespacios V_p

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in I} V_p , \quad (3.12)$$

Donde I rotula el número total de particiones de la descomposición. Dado que \mathfrak{g} es cerrada el conmutador entre elementos de diferentes subespacios estará contenido en general en un conjunto de los subespacios de \mathfrak{g} , es decir

$$[V_p, V_q] \subset \bigoplus_{r \in i(p,q)} V_r \subset \mathfrak{g} , \quad (3.13)$$

donde $i(p, q) \subset I$. Consideremos ahora una descomposición del semigrupo S en I subconjuntos, de forma que

$$S = \bigcup_{p \in I} S_p , \quad (3.14)$$

Tal que si es posible hallar una descomposición donde el producto definido en (3.9) satisfaga

$$S_p \cdot S_q = \bigcap_{r \in i(p,q)} S_r \quad (3.15)$$

Entonces se dice que la descomposición del semigrupo S (3.14) es resonante con la descomposición en subespacios del álgebra \mathfrak{g} . Existiendo tal descomposición resonante entre el semigrupo y el álgebra de una S -expansión, y dados los subespacios de $\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$

$$W_p = S_p \otimes V_p \quad , \quad \text{con } p \in I , \quad (3.16)$$

Entonces,

$$\mathfrak{G}_R \equiv \bigoplus_{p \in I} W_p \quad (3.17)$$

es subálgebra de \mathfrak{G} y es llamada *subálgebra resonante*².

3.1.4. Álgebra 0_S -reducida

Si adicional a la estructura del semigrupo se cuenta con un elemento cero (definiendo un monoide), denotado como 0_S , es posible obtener un nuevo tipo de álgebra llamada álgebra 0_S -reducida.

Sea $\lambda_{N+1} \equiv 0_S$ y λ_i con $i = 0..N$ el resto de los elementos del semigrupo, luego los 2-selectores son de la forma

$$K_{i,N+1}^j = K_{N+1,i}^j = 0 , \quad (3.18)$$

$$K_{i,N+1}^{N+1} = K_{N+1,i}^{N+1} = 1 , \quad (3.19)$$

$$K_{N+1,N+1}^j = 0 , \quad (3.20)$$

$$K_{N+1,N+1}^{N+1} = 1 , \quad (3.21)$$

²Teorema IV.2 de la referencia [12]

Y entonces el álgebra $\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$ con S un monoide tiene la siguiente estructura

$$[T_{(A,i)}, T_{(B,j)}] = K_{ij} {}^k C_{AB} {}^C T_{(C,k)} + K_{ij} {}^{N+1} C_{AB} {}^C T_{(C,N+1)} , \quad (3.22)$$

$$[T_{(A,N+1)}, T_{(B,j)}] = C_{AB} {}^C T_{(C,N+1)} , \quad (3.23)$$

$$[T_{(A,N+1)}, T_{(B,N+1)}] = C_{AB} {}^C T_{(C,N+1)} . \quad (3.24)$$

El álgebra 0_S -reducida es la resultante de imponer la condición

$$T_{(A,N+1)} = 0_S T_A = 0 , \quad (3.25)$$

es decir elegir como ceros todos los elementos del álgebra \mathfrak{G} asociados con el elemento cero del semigrupo. Si vemos el procedimiento de S -expansión como la aplicación $S : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{G}$ la 0_S -reducción es equivalente a elegir el elemento 0_S como el Kernel de la aplicación. Esto abelianiza varios de los conmutadores y por lo tanto cambia de manera importante la estructura del álgebra.

En los trabajos que presentamos en esta tesis se aplican tanto el procedimiento de subálgebra resonante así como el de 0_S -reducción en los procesos de S -expansión utilizados.

3.1.5. Obtención de tensores invariantes a través de la S -expansión

Una de las características más importantes del procedimiento de S -expansión es que permite obtener tensores invariantes para cualquier tipo de álgebra \mathfrak{G} , siempre y cuando esta haya sido obtenida a través de este procedimiento y que el álgebra inicial \mathfrak{g} posea tensores invariantes conocidos.

Dada el álgebra $\mathfrak{g} = \{T_A\}$ y el semigrupo S con n -selector ³ $K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^\gamma$, entonces si el álgebra \mathfrak{g} posee un tensor invariante $\langle T_{A_1} \dots T_{A_m} \rangle$, entonces

$$\langle T_{(A_1, \alpha_1)} \dots T_{(A_m, \alpha_m)} \rangle = \mu_\gamma K_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^\gamma \langle T_{A_1} \dots T_{A_m} \rangle \quad (3.26)$$

Es un tensor invariante del álgebra S -expandida $\mathfrak{G} = S \times G$ ⁴, donde μ_γ son constantes arbitrarias. Con las correspondientes restricciones en los selectores y en los generadores este resultado es generalizado directamente al caso de subálgebras resonantes y subálgebras 0_S -reducidas.

³Definido en (3.7)

⁴Teorema VII.1 de la referencia [12]

3.2. Procedimiento de S-expansión Dual

El procedimiento dual de la S -expansión ofrece un camino alternativo a la S -expansión, el cual resulta ser más simple y de mayor utilidad cuando lo que se requiere es la construcción de un lagrangeano para el álgebra S -expandida. A diferencia del procedimiento de S -expansión, que actúa sobre los generadores del álgebra \mathfrak{g} , el mecanismo dual actúa sobre las formas de Maurer-Cartan o directamente sobre los campos de gauge.

Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} de generadores $\{T_A\}$ tal que

$$[T_A, T_B] = C_{AB}{}^C T_C , \quad (3.27)$$

por cada generador se define su correspondiente forma de Maurer-Cartan σ^A como

$$\sigma^A(T_B) = \delta_B^A , \quad (3.28)$$

las cuales satisfacen las ecuaciones de Maurer-Cartan

$$d\sigma^A + \frac{1}{2}C_{BC}{}^A \sigma^B \wedge \sigma^C = 0 . \quad (3.29)$$

Dado un semigrupo abeliano $S = \{\lambda_\alpha, \alpha = 1, \dots, N\}$ con 2-selector $K_{\alpha\beta}{}^\gamma$ y un (super)álgebra \mathfrak{g} con formas de Maurer-Cartan σ^A y constantes de estructura $C_{AB}{}^C$. Se define al álgebra S -expandida $\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$ ⁵ como aquella cuyas formas de Maurer-Cartan $\sigma^{(A,\alpha)}$ vienen dadas por

$$\sigma^A = \lambda_\alpha \sigma^{(A,\alpha)} , \quad (3.30)$$

que por definición satisfacen las siguientes ecuaciones de Maurer-Cartan

$$d\sigma^{(A,\alpha)} + \frac{1}{2}K_{\beta\gamma}{}^\alpha C_{BC}{}^A \sigma^{(B,\beta)} \wedge \sigma^{(C,\gamma)} = 0 , \quad \text{ó} \quad (3.31)$$

$$d\sigma^{(A,\alpha)} + \frac{1}{2}C_{(B,\beta)(C,\gamma)}^{(A,\alpha)} \sigma^{(B,\beta)} \wedge \sigma^{(C,\gamma)} = 0 . \quad (3.32)$$

3.2.1. 0_S -reducción del álgebra S -expandida

Como se revisó en la sección (3.1.4) la 0_S -reducción requiere que el semigrupo abeliano S cuente con un elemento cero $\lambda_{N+1} = 0_S$, tal que el 2-selector del semigrupo satisfaga las condiciones (3.18-3.21). Con esto en consideración las formas de Maurer-Cartan de \mathfrak{g} y \mathfrak{G} satisfacen

$$\sigma^A = \lambda_i \sigma^{(A,i)} + 0_S \tilde{\sigma}^A , \quad \text{con } i = 1, \dots, N \quad (3.33)$$

donde $\tilde{\sigma}^A \equiv \sigma^{(A,N+1)}$. Se puede demostrar⁶ que el conjunto de formas $\sigma^{(A,i)}$ son las formas de Maurer-Cartan del álgebra 0_S -reducida de \mathfrak{G} y que por lo tanto satisfacen la ecuación de Maurer-Cartan

$$d\sigma^{(A,i)} + \frac{1}{2}C_{BC}{}^A K_{jk}{}^i \sigma^{(B,j)} \sigma^{(C,k)} = 0 . \quad (3.34)$$

⁵Ver teorema III,1 de la referencia [13]

⁶Ver teorema III,2 de la referencia [13]

3.2.2. S -expansion dual en álgebras diferenciales libres.

Un álgebra diferencial libre ([15],[16],[17],[18],[19]) es obtenida al pasar de las ecuaciones de Maurer-Cartan de las 1-formas σ^A a una ecuación en donde el lado derecho de la ecuación (3.29) es una 2-forma curvatura distinta de cero. Un álgebra diferencial libre (FDA) es representada a través de una ecuación de la forma

$$dA^A + \frac{1}{2}C_{BC}^A A^B \wedge A^C = F^A \neq 0, \quad (3.35)$$

en donde las 1-formas A^A son campos dinámicos, y pueden representar campos de gauge de una teoría cuya simetría es la asociada a las constantes de estructura C_{AB}^C . En las referencias ([15],[17]) el paso de la ecuación (3.29) a la ecuación (3.35) es visto como una deformación de la variedad del grupo original G , con álgebra de constantes de estructura C_{AB}^C , a la variedad de un grupo \tilde{G} , llamada *variedad del grupo suave* (*soft group manifold*), tal que F^A es una medida de tal deformación. Esta ecuación es complementada con la ecuación de Bianchi, resultado de aplicar la derivada exterior sobre la ecuación (3.35), y es dada por

$$dF^A + C_{BC}^C A^B \wedge A^C = 0. \quad (3.36)$$

Para aplicar la S -expansión sobre una FDA se considera, de manera análoga al caso visto en la sección anterior, un semigrupo abeliano $S = \{\lambda_\alpha, \alpha = 1, \dots, N\}$, un álgebra de Lie \mathfrak{g} y un conjunto de campos conexión A^A y curvaturas F^A que satisfacen ecuaciones de FDAs (3.35,3.36). A partir de estos elementos se definen las 1-formas conexión $A^{(A,\alpha)}$ y 2-formas curvatura $F^{(A,\alpha)}$ como

$$A^A = \lambda_\alpha A^{(A,\alpha)}, \quad (3.37)$$

$$F^A = \lambda_\alpha F^{(A,\alpha)}, \quad (3.38)$$

las cuales a su vez conforman un álgebra diferencial libre para el álgebra S -expandida $\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$, es decir, que satisfacen

$$dA^{(A,\alpha)} + \frac{1}{2}K_{\beta\gamma}^\alpha C_{BC}^A A^{(B,\beta)} \wedge A^{(C,\gamma)} = F^{(A,\alpha)} \neq 0, \quad (3.39)$$

$$dF^{(A,\alpha)} + K_{\beta\gamma}^\alpha C_{BC}^A A^{(B,\beta)} \wedge A^{(C,\gamma)} = 0. \quad (3.40)$$

El proceso de 0_S -reducción, a través del elemento $\lambda_{N+1} = 0_S$, modifica la expansión de la conexión y curvatura de la siguiente manera

$$A^A = \lambda_i A^{(A,i)} + 0_S \tilde{A}^A, \quad (3.41)$$

$$F^A = \lambda_i F^{(A,i)} + 0_S \tilde{F}^A, \quad (3.42)$$

con $\tilde{A}^A \equiv A^{(A,N+1)}$ y $\tilde{F}^A \equiv F^{(A,N+1)}$. Las ecuaciones para las álgebras diferenciales libres de un álgebra 0_S -reducida \mathfrak{G}_R son

$$dA^{(A,i)} + \frac{1}{2}K_{jk}^i C_{BC}^A A^{(B,j)} \wedge A^{(C,k)} = F^{(A,i)} \neq 0, \quad (3.43)$$

$$dF^{(A,i)} + K_{jk}^i C_{BC}^A A^{(B,j)} \wedge A^{(C,k)} = 0, \quad \text{con } i, j, k = 1, \dots, N. \quad (3.44)$$

3.3. Operadores de Casimir para álgebras S -expandidas.

Conocidos los operadores de Casimir del álgebra de partida es posible construir los operadores de Casimir del álgebra S -expandida. El método que se muestra a continuación es válido tanto para el caso estándar (bilineal) como para el caso general (multilineal).

3.3.1. Caso estándar

Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} con generadores $\{T_A\}$ y constantes de estructura C_{AB}^C , un operador de Casimir $\mathbf{\Pi}_p$ p -lineal en los generadores se define como

$$\mathbf{\Pi}_p = \Pi^{A_1 \dots A_p} T_{A_1} \dots T_{A_p} , \quad (3.45)$$

tal que su conmutador con cada generador del álgebra de Lie \mathfrak{g} sea nulo. El tensor $\Pi^{A_1 \dots A_p}$ debe cumplir con ser simétrico en todos sus índices e invariante bajo la acción del grupo. Luego, el conmutador del operador de Casimir con un generador arbitrario T_B del álgebra \mathfrak{g} es de la forma

$$[T_B, \mathbf{\Pi}_p] = 0 , \quad (3.46)$$

$$[T_B, \Pi^{A_1 \dots A_p} T_{A_1} \dots T_{A_p}] = 0 , \quad (3.47)$$

$$\left(\sum_{i=1}^p C_{BC}^{A_i} \Pi^{A_1 \dots A_{i-1} C A_{i+1} \dots A_p} \right) T_{A_1} \dots T_{A_p} = 0 . \quad (3.48)$$

Por lo tanto, la condición que debe satisfacer un operador de Casimir, definido como en (3.45), de un álgebra de constantes de estructura C_{AB}^C es

$$\sum_{i=1}^p C_{BC}^{A_i} \Pi^{A_1 \dots A_{i-1} C A_{i+1} \dots A_p} = 0 . \quad (3.49)$$

Por ejemplo, se sabe que el álgebra $\mathfrak{so}(3)$ tiene como operador de Casimir (bilineal) el siguiente

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = g^{ij} L_i L_j , \quad \text{con } i, j = 1, \dots, 3 , \quad (3.50)$$

y donde $g^{ij} = g_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ es la métrica euclidea tridimensional. Por otro lado se tiene que los generadores de $\mathfrak{so}(3)$ satisfacen el conmutador

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L^k = \epsilon_{ijk} g^{kl} L_l , \quad (3.51)$$

y que por lo tanto las constantes de estructura del álgebra son

$$C_{ij}^l = \epsilon_{ijk} g^{kl} \quad (3.52)$$

La ecuación (3.49) para el caso $p = 2$ es de la forma

$$C_{BC}^{A_1} \Pi^{C A_2} + C_{BC}^{A_2} \Pi^{C A_1} = 0 , \quad (3.53)$$

y para el ejemplo, usando (3.50) y (3.52) en (3.53), se obtiene que

$$\epsilon_{BCk} g^{k A_1} g^{C A_2} + \epsilon_{BCk} g^{k A_2} g^{C A_1} , \quad (3.54)$$

$$\epsilon_{BCk} (g^{k A_1} g^{C A_2} + g^{k A_2} g^{C A_1}) , \quad (3.55)$$

El cual es efectivamente nulo ya que el término entre paréntesis (...) es simétrico en los índices $C \leftrightarrow k$.

3.3.2. Caso álgebra S -expandida

Para el caso de álgebras S -expandidas, las condiciones para operadores de Casimir son directamente generalizadas a

$$\sum_{i=1}^p C_{(B,\beta)(C,\gamma)}^{(A_i,\alpha_i)} \Pi^{(A_1,\alpha_1)\dots(A_{i-1},\alpha_{i-1})(C,\gamma)(A_{i+1},\alpha_{i+1})\dots(A_p,\alpha_p)} = 0 , \quad (3.56)$$

$$C_{(B,\beta)(C,\gamma)}^{(A_1,\alpha_1)} \Pi^{(C,\gamma)(A_2,\alpha_2)} + C_{(B,\beta)(C,\gamma)}^{(A_1,\alpha_1)} \Pi^{(C,\gamma)(A_2,\alpha_2)} = 0 , \quad (3.57)$$

para los casos p -lineales y bilineales respectivamente.

Así como los 2-selectores del semigrupo S son un análogo a las constantes de estructura C_{AB}^C del álgebra \mathfrak{g} , resulta natural considerar un tensor simétrico de orden p $m^{\alpha\beta\gamma\dots}$ asociado al semigrupo S análogo al tensor invariante $\Pi^{ABC\dots}$ del álgebra \mathfrak{g} , de manera que

$$\Pi^{(A_1,\alpha_1)\dots(A_p,\alpha_p)} = m^{\alpha_1\dots\alpha_p} \Pi^{A_1\dots A_p} , \quad (3.58)$$

o en el caso $p = 2$

$$\Pi^{(A,\alpha)(B,\beta)} = m^{\alpha\beta} \Pi^{AB} . \quad (3.59)$$

Analícemos el caso bilineal. Reemplazando (3.59) en la ecuación (3.57) se obtiene que

$$K_{\beta\gamma}^{\alpha_1} m^{\gamma\alpha_2} C_{BC}^{A_1} \Pi^{CA_2} + K_{\beta\gamma}^{\alpha_2} m^{\alpha_1\gamma} C_{BC}^{A_2} \Pi^{A_1C} , \quad (3.60)$$

utilizando la ecuación (3.53) en (3.60) se obtiene

$$K_{\beta\gamma}^{\alpha_1} m^{\gamma\alpha_2} C_{BC}^{A_1} \Pi^{CA_2} - K_{\beta\gamma}^{\alpha_2} m^{\alpha_1\gamma} C_{BC}^{A_2} \Pi^{A_1C} = 0 \quad (3.61)$$

$$K_{\beta\gamma}^{\alpha_1} m^{\gamma\alpha_2} = K_{\beta\gamma}^{\alpha_2} m^{\alpha_1\gamma} = 0 . \quad (3.62)$$

En la referencia [13] se demuestra que la condición (3.62) es satisfecha eligiendo el ansatz

$$m_{\alpha\beta} = \alpha_\gamma K_{\alpha\beta}^\gamma , \quad (3.63)$$

con α_γ coeficientes numéricos, tal que $m^{\alpha\beta}$ sea la inversa de este tensor ($m^{\alpha\lambda} m_{\lambda\beta} = \delta_\beta^\alpha$). El tensor simétrico $m_{\alpha\beta}$ así definido define una especie “métrica” sobre los índices del semigrupo.

Capítulo 4

Extensión semisimple del álgebra de Poincaré como una S -expansión del álgebra AdS.

En este capítulo se demuestra que la extensión semisimple del álgebra de Poincaré (SSEP) en D dimensiones [3] puede ser obtenida a través de una S -expansión aplicada sobre el álgebra Anti-de-Sitter $\mathfrak{so}(D-1, 2)$ utilizando un semigrupo S particular.

Se comienza definiendo el álgebra de Poincaré semisimple extendida y sus propiedades generales. En la segunda sección se construye explícitamente la S -expansión que conecta el álgebra Anti-de-Sitter con el álgebra SSEP. En la tercera sección se construyen los tensores invariantes del álgebra S -expandida de AdS y por lo tanto de la álgebra SSEP. En la cuarta sección se construye un lagrangeano Chern-Simons para gravedad en $(2+1)$ -dimensiones a partir del álgebra SSEP. Para mayores detalles ver referencia [43].

4.1. Extensión semisimple del álgebra de Poincaré

En las referencias [20, 21] es introducida el álgebra de Maxwell como el conjunto de simetrías en la descripción de una partícula masiva moviéndose en un espacio de Minkowski \mathbb{M}_4 con un campo electromagnético constante de fondo. El álgebra de Maxwell es una extensión no-central del álgebra de Poincaré que se obtiene cambiando el conmutador de las traslaciones por

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] = 0 \quad \rightarrow \quad [\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] \sim \mathbf{Z}_{ab} , \quad (4.1)$$

Donde $\mathbf{Z}_{ab} = -\mathbf{Z}_{ba}$ son seis generadores abelianos que conmutan con las traslaciones y que con las transformaciones de Lorentz \mathbf{J}_{ab} satisfacen

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{ad}\mathbf{Z}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{Z}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{Z}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{Z}_{ac} . \quad (4.2)$$

El álgebra de Maxwell ha sido utilizada en el contexto de la gravitación [22] como propuesta a solucionar los problemas de la constante cosmológica [26, 27].

En la referencia [5] D.V. Soroka y V.A. Soroka proponen una extensión semisimple del álgebra

de Poincaré a través del conjunto de tensores antisimétricos \mathbf{Z}_{ab} como una generalización del álgebra de Maxwell. La extensión semisimple del álgebra de Poincaré es dada por

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] = \eta_{ad}\mathbf{J}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{J}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{J}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{J}_{ac}, \quad (4.3)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \eta_{bc}\mathbf{P}_a - \eta_{ac}\mathbf{P}_b, \quad (4.4)$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] = c\mathbf{Z}_{ab}, \quad (4.5)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{ad}\mathbf{Z}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{Z}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{Z}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{Z}_{ac}, \quad (4.6)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \frac{4a^2}{c} (\eta_{bc}\mathbf{P}_a - \eta_{ac}\mathbf{P}_b), \quad (4.7)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \frac{4a^2}{c} [\eta_{ad}\mathbf{Z}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{Z}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{Z}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{Z}_{ac}], \quad (4.8)$$

donde a y c son constantes. En el límite $a \rightarrow 0$ se recupera el álgebra de Maxwell y en el límite $c \rightarrow 0$ se obtiene una suma semidirecta entre el álgebra de Poincaré y el ideal conmutativo compuesto por los \mathbf{Z}_{ab} .

La extensión semisimple del álgebra de Poincaré (*SSEP*) algebra (4.3)–(4.8) puede ser reescrita de la forma

$$[\mathbf{N}_{ab}, \mathbf{N}_{cd}] = \eta_{ad}\mathbf{N}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{N}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{N}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{N}_{ac}, \quad (4.9)$$

$$[\mathbf{L}_{AB}, \mathbf{L}_{CD}] = \eta_{AD}\mathbf{L}_{BC} + \eta_{BC}\mathbf{L}_{AD} - \eta_{AC}\mathbf{L}_{BD} - \eta_{BD}\mathbf{L}_{AC}, \quad (4.10)$$

$$[\mathbf{N}_{ab}, \mathbf{L}_{CD}] = 0, \quad (4.11)$$

donde la métrica η_{AB} es dada por

$$\eta_{AB} = \begin{bmatrix} \eta_{ab} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

y los generadores \mathbf{N}_{ab} por

$$\mathbf{N}_{ab} = \mathbf{J}_{ab} - \frac{c}{4a^2}\mathbf{Z}_{ab} \quad (4.13)$$

Los generadores \mathbf{N}_{ab} conforman una base del álgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(D-1, 1)$. Los generadores \mathbf{L}_{AB} por otro lado son definidos por

$$\mathbf{L}_{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ab} & \mathbf{L}_{a,D} \\ \mathbf{L}_{D,a} & \mathbf{L}_{D,D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{4a^2}\mathbf{Z}_{ab} & \frac{1}{2a}\mathbf{P}_a \\ -\frac{1}{2a}\mathbf{P}_a & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

y forman una base para el álgebra de anti-de-Sitter (*AdS*) $\mathfrak{so}(D-1, 2)$. El álgebra *SSEP* (4.9)–(4.11) es por lo tanto la suma directa $\mathfrak{so}(D-1, 1) \oplus \mathfrak{so}(D-1, 2)$ de el álgebra de Lorentz y el álgebra AdS, ambas en D dimensiones.

Usando (4.13) y (4.14) en (4.9)–(4.11) encontramos que el álgebra *SSEP* (4.3)–(4.8) puede ser escrita como

$$[\mathbf{N}_{ab}, \mathbf{N}_{cd}] = \eta_{ad}\mathbf{N}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{N}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{N}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{N}_{ac}, \quad (4.15)$$

$$[\mathbf{L}_{ab}, \mathbf{L}_{cd}] = \eta_{ad}\mathbf{L}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{L}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{L}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{L}_{ac}, \quad (4.16)$$

$$[\mathbf{L}_{ab}, \mathbf{L}_{c,D}] = \eta_{bc}\mathbf{L}_{a,D} - \eta_{ac}\mathbf{L}_{b,D}, \quad (4.17)$$

$$[\mathbf{L}_{a,D}, \mathbf{L}_{c,D}] = \mathbf{L}_{ac}, \quad (4.18)$$

$$[\mathbf{N}_{ab}, \mathbf{L}_{cd}] = 0, \quad (4.19)$$

$$[\mathbf{N}_{ab}, \mathbf{L}_{c,D}] = 0. \quad (4.20)$$

4.2. *S*-expansion del álgebra de anti-de Sitter

En esta sección se establece la conexión entre el álgebra $AdS \mathfrak{so}(D-1, 2)$ y el álgebra $SSEP$, $\mathfrak{so}(D-1, 1) \oplus \mathfrak{so}(D-1, 2)$, a través del procedimiento de *S*-expansion mostrado en el capítulo [3].

En la primera etapa realizamos una descomposición en subespacios del álgebra AdS . Se utiliza una descomposición en dos subespacios de la forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(D-1, 2) = V_0 \oplus V_1$, donde V_0 corresponde a la subálgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(D-1, 1)$, generada por los \bar{J}_{ab} , y V_1 corresponde a los boosts de AdS , generada por los \bar{P}_a . Los generadores \bar{J}_{ab} , \bar{P}_a satisfacen las siguientes relaciones

$$[\bar{P}_a, \bar{P}_b] = \bar{J}_{ab} \quad (4.21)$$

$$[\bar{J}_{ab}, \bar{P}_c] = \eta_{cb}\bar{P}_a - \eta_{ca}\bar{P}_b \quad (4.22)$$

$$[\bar{J}_{ab}, \bar{J}_{cd}] = \eta_{ad}\bar{J}_{bc} + \eta_{bc}\bar{J}_{ad} - \eta_{ac}\bar{J}_{bd} - \eta_{bd}\bar{J}_{ac}. \quad (4.23)$$

Y por lo tanto los subespacios V_0 y V_1 cumplen con

$$[V_0, V_0] \subset V_0, \quad (4.24)$$

$$[V_0, V_1] \subset V_1, \quad (4.25)$$

$$[V_1, V_1] \subset V_0. \quad (4.26)$$

La siguiente etapa consiste en hallar un semigrupo abeliano S el cual admita una partición resonante ¹ con las ecuaciones (4.24-4.26). En lo que sigue se considerarán dos semigrupos que satisfacen con este requerimiento.

4.2.1. Semigrupo S_{S_3}

Primero consideremos el semigrupo $S_{S_3} = \{\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3\}$ definido por la siguiente tabla de multiplicación

$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$
$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\lambda}_3$
$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_3$
$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$
$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_3$

(4.27)

Dado que para cada elemento $\lambda_\alpha \in S$ se tiene que $\bar{\lambda}_3 \bar{\lambda}_\alpha = \bar{\lambda}_3$ se identifica al elemento $\bar{\lambda}_3$ como el elemento 0_S del semigrupo.

Considerando la partición del semigrupo como $S = S_0 \cup S_1$, con

$$S_0 = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3\}, \quad (4.28)$$

$$S_1 = \{\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_3\}, \quad (4.29)$$

Se observa que esta partición es resonante con la del álgebra AdS en las ecuaciones (4.24-4.26)

$$S_0 \cdot S_0 \subset S_0 \quad (4.30)$$

$$S_0 \cdot S_1 \subset S_1 \quad (4.31)$$

$$S_1 \cdot S_1 \subset S_0 \quad (4.32)$$

¹Ver capítulo 3

Y como se revisó en el capítulo [3] ecuación (3.17) ²

$$\mathfrak{G}_R = W_0 \oplus W_1, \quad (4.33)$$

es una *subálgebra resonante* de $S_{S_3} \times \mathfrak{g}$, donde

$$W_0 = (S_0 \times V_0) = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3\} \otimes \{\bar{\mathbf{J}}_{ab}\} = \{\bar{\lambda}_1 \bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\lambda}_2 \bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\lambda}_3 \bar{\mathbf{J}}_{ab}\} \quad (4.34)$$

$$W_1 = (S_1 \times V_1) = \{\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_3\} \otimes \{\bar{\mathbf{P}}_a\} = \{\bar{\lambda}_0 \bar{\mathbf{P}}_a, \bar{\lambda}_3 \bar{\mathbf{P}}_a\} \quad (4.35)$$

Finalmente se impone la condición de 0_S -reducción $\lambda_3 \times \mathfrak{g} = 0$ sobre \mathfrak{G}_R y renombramos los generadores como $\mathbf{J}_{ab,1} = \bar{\lambda}_1 \bar{\mathbf{J}}_{ab}$; $\mathbf{J}_{ab,2} = \bar{\lambda}_2 \bar{\mathbf{J}}_{ab}$; y $\mathbf{P}_{a,0} = \bar{\lambda}_0 \bar{\mathbf{P}}_a$. Este prodedimiento nos lleva a la siguiente estructura algebraica:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,1}, \mathbf{J}_{cd,1}] &= \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_1 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] = \bar{\lambda}_1 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] \\ &= \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc,1} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad,1} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd,1} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac,1} \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,2}, \mathbf{J}_{cd,2}] &= \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_2 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] = \bar{\lambda}_2 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] \\ &= \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc,2} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad,2} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd,2} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac,2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$[\mathbf{J}_{ab,1}, \mathbf{J}_{cd,2}] = \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] = \bar{\lambda}_3 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] = 0 \quad (4.38)$$

$$[\mathbf{J}_{ab,1}, \mathbf{P}_{c,0}] = \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_0 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_c] = \bar{\lambda}_3 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_c] = 0 \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,2}, \mathbf{P}_{c,0}] &= \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_0 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_c] = \bar{\lambda}_0 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_c] \\ &= \eta_{bc} \mathbf{P}_{a,0} - \eta_{ac} \mathbf{P}_{b,0} \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$[\mathbf{P}_{a,0}, \mathbf{P}_{b,0}] = \bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_0 [\bar{\mathbf{P}}_a, \bar{\mathbf{P}}_b] = \bar{\lambda}_2 [\bar{\mathbf{P}}_a, \bar{\mathbf{P}}_b] = \bar{\lambda}_2 \bar{\mathbf{J}}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,2} \quad (4.41)$$

Donde se ha utilizado las reglas de conmutación del álgebra AdS , ecuaciones (4.3-4.8) y la tabla de multiplicación del semigrupo S_{S_3} (4.27) .

A través de la identificación $\mathbf{N}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,1}$; $\mathbf{L}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,2}$; $\mathbf{L}_{aD+1} = \mathbf{P}_{a,0}$ es claro que el álgebra (4.36-4.41), obtenida por S_{S_3} -expansión y 0_S -reducción del álgebra $AdS \mathfrak{so}(D-1, 2)$, coincide con la extensión semisimple del álgebra de Poincaré (4.15-4.20) .

²Teorema IV.2 de la referencia [12]

4.2.2. Semigrupo S_{S_2}

El procedimiento de *S*-expansión conecta con el álgebra *SSEP* utilizando más de un semigrupo.

Consideremos el semigrupo $S_{S_2} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ definido por la tabla de multiplicación

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta} & \text{if } \alpha + \beta \leq 2 \\ \lambda_{\alpha+\beta-2} & \text{if } \alpha + \beta > 2 \end{cases} \quad (4.42)$$

o, equivalentemente

	λ_0	λ_1	λ_2	
λ_0	λ_0	λ_1	λ_2	
λ_1	λ_1	λ_2	λ_1	
λ_2	λ_2	λ_1	λ_2	

(4.43)

Consideremos la partición $S = S_0 \cup S_1$, con

$$S_0 = \{\lambda_0, \lambda_2\}, \quad (4.44)$$

$$S_1 = \{\lambda_1\}, \quad (4.45)$$

Esta partición es resonante con la del álgebra *ADS* (4.24-4.26) ya que satisface

$$S_0 \cdot S_0 \subset S_0 \quad (4.46)$$

$$S_0 \cdot S_1 \subset S_1 \quad (4.47)$$

$$S_1 \cdot S_1 \subset S_0 \quad (4.48)$$

Luego

$$\mathfrak{G}_R = W_0 \oplus W_1, \quad (4.49)$$

es una subálgebra resonante de $S_{S_2} \times \mathfrak{g}^3$, donde

$$W_0 = (S_0 \times V_0) = \{\lambda_0, \lambda_2\} \otimes \{\bar{\mathbf{J}}_{ab}\} = \{\lambda_0 \bar{\mathbf{J}}_{ab}, \lambda_2 \bar{\mathbf{J}}_{ab}\} \quad (4.50)$$

$$W_1 = (S_1 \times V_1) = \{\lambda_1\} \otimes \{\bar{\mathbf{P}}_a\} = \{\lambda_1 \bar{\mathbf{P}}_a\} \quad (4.51)$$

Renombrando los generadores de la subálgebra resonante como $\mathbf{J}_{ab,0} = \lambda_0 \bar{\mathbf{J}}_{ab}$; $\mathbf{J}_{ab,2} = \lambda_2 \bar{\mathbf{J}}_{ab}$; y $\mathbf{P}_{a,1} = \lambda_1 \bar{\mathbf{P}}_a$, utilizando las relaciones de conmutación del álgebra *AdS* y la tabla de multiplicación (4.43) del semigrupo S_{S_2} se obtiene que

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,0}, \mathbf{J}_{cd,0}] &= \lambda_0 \lambda_0 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] = \lambda_0 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] \\ &= \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc,0} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad,0} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd,0} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac,0} \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,2}, \mathbf{J}_{cd,2}] &= \lambda_2 \lambda_2 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] = \lambda_2 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] \\ &= \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc,2} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad,2} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd,2} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac,2} \end{aligned} \quad (4.53)$$

³Teorema IV.2 de la referencia [12]

$$\begin{aligned}
[\mathbf{J}_{ab,0}, \mathbf{J}_{cd,2}] &= \lambda_0 \lambda_2 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] = \lambda_2 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] \\
&= \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc,2} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad,2} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd,2} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac,2}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{J}_{ab,0}, \mathbf{P}_{c,1}] &= \lambda_0 \lambda_1 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_c] = \lambda_1 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_c] \\
&= \eta_{cb} \mathbf{P}_{a,1} - \eta_{ac} \mathbf{P}_{b,1}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{J}_{ab,2}, \mathbf{P}_{c,1}] &= \lambda_2 \lambda_1 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_c] = \lambda_1 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_c] \\
&= \eta_{bc} \mathbf{P}_{a,1} - \eta_{ac} \mathbf{P}_{b,1}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$[\mathbf{P}_{a,1}, \mathbf{P}_{b,1}] = \lambda_1 \lambda_1 [\bar{\mathbf{P}}_a, \bar{\mathbf{P}}_b] = \lambda_2 [\bar{\mathbf{P}}_a, \bar{\mathbf{P}}_b] = \lambda_2 \bar{\mathbf{J}}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,2} \tag{4.57}$$

La identificación $\mathbf{J}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,0}$; $\mathbf{Z}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,2}$; y $\mathbf{P}_a = \mathbf{P}_{a,1}$ nos lleva a las siguientes relaciones de conmutación

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] = \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac}, \tag{4.58}$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \eta_{bc} \mathbf{P}_a - \eta_{ac} \mathbf{P}_b, \tag{4.59}$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] = \mathbf{Z}_{ab}, \tag{4.60}$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{ad} \mathbf{Z}_{bc} + \eta_{bc} \mathbf{Z}_{ad} - \eta_{ac} \mathbf{Z}_{bd} - \eta_{bd} \mathbf{Z}_{ac}, \tag{4.61}$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \eta_{bc} \mathbf{P}_a - \eta_{ac} \mathbf{P}_b, \tag{4.62}$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{ad} \mathbf{Z}_{bc} + \eta_{bc} \mathbf{Z}_{ad} - \eta_{ac} \mathbf{Z}_{bd} - \eta_{bd} \mathbf{Z}_{ac}, \tag{4.63}$$

Es decir, se obtiene nuevamente el álgebra *SSEP* (4.3)–(4.8) salvo factores numéricos

4.2.3. Relación entre las tablas de multiplicación de los semigrupos S_{S_3} y S_{S_2}

En la sección [4.2.1], el álgebra *SSEP* (4.15-4.20) se obtuvo a través de una *S*-expansión usando el semigrupo abeliano S_{S_3} , definido por la tabla de multiplicación (4.27), más un proceso de 0_S -reducción⁴.

En la sección [4.2.2], el álgebra *SSEP* (4.3-4.8) se obtuvo (salvo factores numéricos) a través de una *S*-expansión usando el semigrupo abeliano S_{S_2} , con tabla de multiplicación (4.43). A diferencia de la primera *S*-expansión en este caso no se utilizó 0_S -reducción.

Si admitimos que los elementos de S_{S_2} conformen un anillo (se agrega una operación binaria de suma) manteniendo su estructura de semigrupo bajo la multiplicación (sin requerir un elemento cero y la existencia de inverso multiplicativo) es posible hallar una conexión entre S_{S_2}

⁴Presentado en la sección [3.1.4]

y S_{S_3} . Utilizando la operación de suma realizamos la siguiente transformación en los elementos de S_{S_2}

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_1 &= \lambda_0 - \lambda_2, \\ \bar{\lambda}_2 &= \lambda_2, \\ \bar{\lambda}_0 &= \lambda_1,\end{aligned}\tag{4.64}$$

a través de esta se obtiene la siguiente tabla de multiplicación

	$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	
$\bar{\lambda}_0$	λ_2	0	λ_0	(4.65)
$\bar{\lambda}_1$	0	$\bar{\lambda}_1$	0	
$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_0$	0	$\bar{\lambda}_2$	

Esta tabla de multiplicación coincide con la del semigrupo S_{S_3} (4.27) excepto por la fila y columna asociada al elemento λ_3 . En el lugar de λ_3 en este caso se tiene al elemento “0”, que representa el cero de la suma del anillo S_{S_2} .

Los generadores \mathbf{N}_{ab} y \mathbf{L}_{AB} se reobtienen considerando

$$\mathbf{N}_{ab} = \bar{\lambda}_1 \bar{\mathbf{J}}_{ab} = (\lambda_0 - \lambda_2) \bar{\mathbf{J}}_{ab}\tag{4.66}$$

$$\mathbf{L}_{ab} = \bar{\lambda}_2 \bar{\mathbf{J}}_{ab} = \lambda_2 \bar{\mathbf{J}}_{ab}\tag{4.67}$$

$$\mathbf{L}_{aD} = \bar{\lambda}_0 \bar{\mathbf{P}}_a = \lambda_1 \bar{\mathbf{P}}_a\tag{4.68}$$

sin la necesidad de aplicar 0_S -reduction. La ventaja de no utilizar 0_S -reduction esta en que facilita la construcción de los operadores de Casimir del álgebra obtenida de la S -expansión.

4.3. Operadores de Casimir para el álgebra SSEP

En esta sección son calculados los operadores de Casimir para la extensión semisimple del álgebra de Poincaré a través del mecanismo de S -expansión. Para esto primero se presentan los tensores invariantes y operadores de Casimir para el álgebra de anti-de-Sitter.

4.3.1. Operadores de Casimir para el álgebra AdS.

Para construir los operadores de Casimir del álgebra $AdS \mathfrak{so}(D-1, 2)$ los generadores \mathbf{P}_a y \mathbf{J}_{ab} son representados a través de las matrices de Dirac de la siguiente manera

$$\bar{\mathbf{P}}_a = \frac{1}{2} \Gamma_a\tag{4.69}$$

$$\bar{\mathbf{J}}_{ab} = \frac{1}{2} \Gamma_{ab}\tag{4.70}$$

donde Γ_a son matrices de Dirac en D dimensiones y $\Gamma_{ab} = [\Gamma_a, \Gamma_b]/2$.

La métrica de Killing k_{AB} para el álgebra AdS se puede escribir como

$$k_{AB} = \frac{1}{\text{Tr} \mathbf{1}} \text{Tr} (\mathbf{T}_A \mathbf{T}_B)\tag{4.71}$$

$$= \frac{1}{\text{Tr} \mathbf{1}} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} \{ \mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B \} \right)\tag{4.72}$$

la cual en $d \geq 4$ es dada por

$$k_{a,b} = \frac{1}{4}\eta_{ab} \quad (4.73)$$

$$k_{ab,cd} = -\frac{1}{4}\eta_{[ab][cd]}. \quad (4.74)$$

$$k_{ab,c} = 0. \quad (4.75)$$

donde

$$\eta_{[ab][cd]} = \delta_{ab}^{mn}\eta_{mc}\eta_{nd}. \quad (4.76)$$

Para un álgebra semisimple arbitraria el operador de Casimir cuadrático es dado por

$$\mathbf{\Pi} = k^{AB}\mathbf{T}_A\mathbf{T}_B. \quad (4.77)$$

donde k^{AB} es la inversa de la métrica de Killing k_{AB} .

Para el álgebra AdS se tiene

$$k^{a,b} = 4\eta^{ab} \quad (4.78)$$

$$k^{ab,c} = 0 \quad (4.79)$$

$$k^{ab,cd} = -\eta^{[ab][cd]} \quad (4.80)$$

de forma que el operador de Casimir es

$$\mathbf{\Pi}_{AdS} = 4 \left[\bar{\mathbf{P}}^a \bar{\mathbf{P}}_a - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{J}}_{ab} \bar{\mathbf{J}}^{ab} \right]. \quad (4.81)$$

Este resultado es válido en cualquier dimensión $d \geq 4$.

Otra “métrica” puede ser construida para el álgebra AdS en $d = 4$. Esta es

$$\bar{k}_{(A,B)} = \frac{1}{\text{Tr}\mathbf{1}} \text{Tr}(\Gamma_* \mathbf{T}_A \mathbf{T}_B), \quad (4.82)$$

Donde Γ_* es la matriz γ_5 (ver apéndice [B]), explícitamente

$$\bar{k}_{a,b} = 0 \quad (4.83)$$

$$\bar{k}_{ab,cd} = -\frac{1}{4}\epsilon_{abcd} \quad (4.84)$$

$$\bar{k}_{ab,c} = 0. \quad (4.85)$$

Sin embargo estas ecuaciones no pueden representar una métrica, $\bar{k}_{(A,B)}$ no es invertible, y por lo tanto no es útil para construir un operador de Casimir para el álgebra AdS . Por otro lado la parte asociada a la subálgebra de Lorentz es invertible (ecuación (4.84)) y por lo tanto es posible construir un operador de Casimir para el álgebra de Lorentz a partir de este.

Consideramos luego, como métrica del álgebra de Lorentz a

$$\bar{k}^{(ab,cd)} = -\epsilon^{abcd}. \quad (4.86)$$

Y luego un operador de Casimir para el álgebra de Lorentz al operador

$$\bar{\mathbf{\Pi}}_L = -\epsilon^{abcd} \bar{\mathbf{J}}_{ab} \bar{\mathbf{J}}_{cd}. \quad (4.87)$$

4.3.2. Operadores de Casimir para la extensión semisimple del álgebra de Poincaré

Comenzaremos construyendo una métrica $m_{\alpha\beta}$ para el semigrupo S_{S_2} , cuya tabla de multiplicación es dada en la ecuación (4.43). Los elementos S_{S_2} pueden ser representados por el siguiente conjunto de matrices:

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.88)$$

Es directo verificar que la representación (4.88) es una representación fiel del semigrupo S_{S_2} , es decir que satisface las ecuaciones (4.42) y (4.43). El 2-selector $K_{\alpha\beta}^\rho$ de S_{S_2} puede ser representado como ⁵

$$K_{\alpha\beta}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{\alpha\beta}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{\alpha\beta}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.89)$$

A partir de esta representación es claro $m_{\alpha\beta}$ esta dada por

$$m_{\alpha\beta} = \alpha_\lambda K_{\alpha\beta}^\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

donde los α_λ son coeficientes numéricos. La inversa de esta métrica es dada por

$$m^{\alpha\beta} = \frac{1}{\det(m_{\alpha\beta})} \begin{pmatrix} \alpha_2^2 - \alpha_1^2 & 0 & -(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \\ 0 & \alpha_2(\alpha_0 - \alpha_2) & -\alpha_1(\alpha_0 - \alpha_2) \\ -(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) & -\alpha_1(\alpha_0 - \alpha_2) & \alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2 \end{pmatrix}, \quad (4.91)$$

donde los coeficientes α_0 , α_1 y α_2 deben satisfacer

$$\det(m_{\alpha\beta}) = (\alpha_0 - \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0. \quad (4.92)$$

Los operadores de Casimir cuadráticos para el álgebra SSEP son de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &= \Pi^{(\alpha,A)(\beta,B)} \mathbf{T}_{(\alpha,A)} \mathbf{T}_{(\beta,B)}, \\ &= m^{\alpha\beta} \Pi^{AB} \mathbf{T}_{(\alpha,A)} \mathbf{T}_{(\beta,B)}, \\ &= m^{00} \Pi^{ab,cd} \mathbf{J}_{ab} \mathbf{J}_{cd} + m^{11} \Pi^{ab} \mathbf{P}_a \mathbf{P}_b + 2m^{02} \Pi^{ab,cd} \mathbf{J}_{ab} \mathbf{Z}_{cd} + m^{22} \Pi^{ab,cd} \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Z}_{cd}, \\ &= \frac{1}{\det(m_{\alpha\beta})} \left[(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \Pi^{ab,cd} \mathbf{J}_{ab} \mathbf{J}_{cd} + \alpha_2(\alpha_0 - \alpha_2) \Pi^{ab} \mathbf{P}_a \mathbf{P}_b \right. \\ &\quad \left. - 2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \Pi^{ab,cd} \mathbf{J}_{ab} \mathbf{Z}_{cd} + (\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) \Pi^{ab,cd} \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Z}_{cd} \right], \end{aligned} \quad (4.93)$$

⁵Vea ecuaciones (1)-(2) de la referencia [12]

donde Π^{AB} son las componentes del operador de Casimir del álgebra AdS . El término m^{12} no aparece porque las componentes correspondientes al operador de Casimir del álgebra AdS en $d \geq 4$ son nulas, $\Pi^{ab,c} = \Pi^{a,bc} = 0$.

Insertando las ecuaciones (4.78-4.80) en (4.93) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} = \frac{4}{\det(m_{\alpha\beta})} & \left[\frac{1}{2} (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \mathbf{J}_{ab} \mathbf{J}^{ab} + \alpha_2 (\alpha_0 - \alpha_2) \mathbf{P}_a \mathbf{P}^a \right. \\ & \left. - (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \mathbf{J}_{ab} \mathbf{Z}^{ab} + \frac{1}{2} (\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2) \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Z}^{ab} \right]. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Definiendo

$$\alpha = \alpha_2 \alpha_0 - \alpha_2^2; \quad \beta = \alpha_2 \alpha_0 - \alpha_1^2, \quad (4.95)$$

la ecuación (4.94) queda como

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &= \frac{4}{\det(m_{\alpha\beta})} \left[\frac{1}{2} (\beta - \alpha) \mathbf{J}_{ab} \mathbf{J}^{ab} + \alpha \mathbf{P}_a \mathbf{P}^a - (\beta - \alpha) \mathbf{J}_{ab} \mathbf{Z}^{ab} + \frac{1}{2} \beta \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Z}^{ab} \right] \\ &= \frac{4}{\det(m_{\alpha\beta})} \left[\alpha \left(\mathbf{P}_a \mathbf{P}^a - \frac{1}{2} \mathbf{J}_{ab} \mathbf{J}^{ab} + \mathbf{J}_{ab} \mathbf{Z}^{ab} \right) + \beta \left(\frac{1}{2} \mathbf{J}_{ab} \mathbf{J}^{ab} - \mathbf{J}_{ab} \mathbf{Z}^{ab} + \frac{1}{2} \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Z}^{ab} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.96)$$

Dado que α y β son arbitrarios, considerando la condición $\det(m_{\alpha\beta}) \neq 0$ podemos extraer de la ecuación (4.96) que el álgebra $SSEP$ posee dos operadores de Casimir independientes, dados por

$$\mathbf{\Pi}_1 = \frac{4\alpha}{\det(m_{\alpha\beta})} \left(\mathbf{P}_a \mathbf{P}^a + \mathbf{J}_{ab} \mathbf{Z}^{ab} - \frac{1}{2} \mathbf{J}_{ab} \mathbf{J}^{ab} \right), \quad (4.97)$$

$$\mathbf{\Pi}_2 = \frac{2\beta}{\det(m_{\alpha\beta})} \left(\mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Z}^{ab} - 2 \mathbf{J}_{ab} \mathbf{Z}^{ab} + \mathbf{J}_{ab} \mathbf{J}^{ab} \right). \quad (4.98)$$

Además de estos dos operadores de Casimir existe un tercero, el cual es válido solo para el subespacio de los operadores de Lorentz \mathbf{J}_{ab} y los operadores \mathbf{Z}_{ab} , no para toda el álgebra $SSEP$. Este operador es construido de la "métrica" $\bar{k}^{(ab,cd)} = -\epsilon^{abcd}$ ⁶, y es dado por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{\Pi}}_{JZ} &= -\frac{1}{\det(m_{\alpha\beta})} \left[(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \epsilon^{abcd} \mathbf{J}_{ab} \mathbf{J}_{cd} - 2 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \epsilon^{abcd} \mathbf{J}_{ab} \mathbf{Z}_{cd} + (\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2) \epsilon^{abcd} \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Z}_{cd} \right], \\ &= -\frac{1}{\det(m_{\alpha\beta})} \left[\alpha \epsilon^{abcd} \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Z}_{cd} - 2 (\beta - \alpha) \epsilon^{abcd} \mathbf{J}_{ab} \mathbf{Z}_{cd} + (\beta - \alpha) \epsilon^{abcd} \mathbf{J}_{ab} \mathbf{J}_{cd} \right]. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Los operadores de Casimir del álgebra $SSEP$ obtenidos en las referencias [3, 4, 5] coinciden con los operadores (4.97), (4.98) eligiendo $c = 1$ y $a = i/2$ en las ecuaciones (2.2) y (2.3) de la referencia [5]. Si además consideramos $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ en la ecuación (4.99) se aprecia que el operador de Casimir C_3 de la referencia [5] es reobtenido a partir de nuestro operador de Casimir $\bar{\mathbf{\Pi}}_{JZ}$.

⁶Ver ecuación (4.86)

4.4. Acción Ch-S para gravedad 2+1 dimensional a partir del álgebra SSEP

En la referencia [22] se construye un lagrangeano tipo Yang-Mills basado en la simetría descrita por el álgebra de Maxwell [20, 21] como un candidato a explicar el problema de la constante cosmológica [26, 27]. Por otro lado el álgebra SSEP en $D = 4$ es “gaugeado” en lagrangeanos para gravedad en las referencias [28, 23, 24] como propuestas a resolver el mismo problema. En la presente sección realizaremos la construcción de un lagrangeano Chern-Simons para gravedad en $(2 + 1)$ -dimensiones [36, 37] utilizando como simetría de gauge la extensión semisimple del álgebra de Poincaré.

Para la construcción de un lagrangeano Chern-Simons es necesario en primer lugar conocer u obtener tensores invariantes simétricos (de segundo orden para $D = 3$).

4.4.1. Tensores invariantes para SSEP

Para la obtención de los tensores invariantes del álgebra SSEP utilizamos el teorema VII,2 de la referencia [12]. Para esto es necesario conocer los tensores invariantes asociados al álgebra de inicial \mathfrak{g} , en este caso el álgebra AdS . De las ecuaciones (56)-(58) de la referencia [13] se tiene que los tensores invariantes del álgebra AdS en el caso más general son de la forma

$$\langle \bar{\mathbf{J}}_{ab} \bar{\mathbf{J}}_{cd} \rangle = \tilde{\mu}_0 (\eta_{ad} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bd}) \quad (4.100)$$

$$\langle \bar{\mathbf{J}}_{ab} \bar{\mathbf{J}}_c \rangle = \tilde{\mu}_1 \epsilon_{abc} \quad (4.101)$$

$$\langle \bar{\mathbf{P}}_a \bar{\mathbf{P}}_b \rangle = \tilde{\mu}_0 \eta_{ab} \quad (4.102)$$

donde $\tilde{\mu}_0$ y $\tilde{\mu}_1$ son constantes arbitrarias. A partir de estos se tiene que los tensores invariantes del álgebra SSEP son

$$\langle \mathbf{N}_{ab} \mathbf{N}_{cd} \rangle = \alpha_0 (\eta_{ad} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bd}) \quad (4.103)$$

$$\langle \mathbf{L}_{ab} \mathbf{L}_{cd} \rangle = \alpha_2 (\eta_{ad} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bd}) \quad (4.104)$$

$$\langle \mathbf{L}_{ab} \mathbf{L}_{c3} \rangle = \alpha_1 \epsilon_{abc} \quad (4.105)$$

$$\langle \mathbf{L}_{a3} \mathbf{L}_{b3} \rangle = \alpha_2 \eta_{ab} \quad (4.106)$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, son constantes arbitrarias.

4.4.2. Acción Chern-Simons para el álgebra SSEP

Un lagrangeano Chern-Simons en $(2 + 1)$ -dimensiones es de la forma [34, 35]

$$L_{CS}^{2+1} = 2k \int_0^1 dt \langle A (tdA + t^2 A^2) \rangle = k \left\langle A \left(dA + \frac{2}{3} A^2 \right) \right\rangle \quad (4.107)$$

con A una 1-forma conexión valuada en un álgebra de Lie particular y k una constante de acomplamiento arbitraria. Para el álgebra SSEP esta conexión se puede expresar como

$$A = \frac{1}{2} \varpi^{ab} \mathbf{N}_{ab} + \frac{1}{2} \omega^{AB} \mathbf{L}_{AB} = \frac{1}{2} \varpi^{ab} \mathbf{N}_{ab} + \frac{1}{2} \omega^{ab} \mathbf{L}_{ab} + \omega^{a3} \mathbf{L}_{a3} . \quad (4.108)$$

Para simplificar la notación y el posterior cálculo se definen las 1-formas valuadas en el álgebra *SSEP*: $\varpi = \frac{1}{2}\varpi^{ab}\mathbf{N}_{ab}$, $\omega = \frac{1}{2}\omega^{ab}\mathbf{L}_{ab}$, $\varphi = \omega^{a3}\mathbf{L}_{a3}$. En término de estos campos A se escribe como

$$A = \varpi + \omega + \varphi . \quad (4.109)$$

Reemplazando esta conexión en la ecuación (5.103) se obtiene que el lagrangeano para el álgebra *SSEP* es de la forma

$$\begin{aligned} L_{SSEP}^{(2+1)} &= k \left\langle A \left(dA + \frac{2}{3}A^2 \right) \right\rangle = k \left\langle \varpi d\varpi + \varpi d\omega + \varpi d\varphi + \frac{1}{3}\varpi [\varpi, \varpi] \right\rangle \\ &+ k \left\langle \omega d\varpi + \omega d\omega + \omega d\varphi + \frac{1}{3}\omega [\omega, \omega] + \frac{2}{3}\omega [\omega, \varphi] + \frac{1}{3}\omega [\varphi, \varphi] \right\rangle \\ &+ k \left\langle \varphi d\varpi + \varphi d\omega + \varphi d\varphi + \frac{1}{3}\varphi [\omega, \omega] + \frac{2}{3}\varphi [\omega, \varphi] + \frac{1}{3}\varphi [\varphi, \varphi] \right\rangle . \end{aligned} \quad (4.110)$$

La 2-forma curvatura vendría dada por

$$\begin{aligned} F &= dA + AA , \\ &= d\varpi + d\omega + d\varphi + \varpi\varpi + \omega\omega + \varphi\varphi + [\omega, \varphi] , \\ &= (d\varpi + \varpi\varpi) + (d\omega + \omega\omega) + (d\varphi + \varphi\varphi + [\omega, \varphi]) . \end{aligned} \quad (4.111)$$

Se induce naturalmente la definición de las siguientes curvaturas

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= d\varpi + \varpi\varpi = d\varpi + \frac{1}{2}[\varpi, \varpi] , \\ R &= d\omega + \omega\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] , \\ \tilde{T} &= d\varphi + \varphi\varphi + [\omega, \varphi] = T + \frac{1}{2}[\varphi, \varphi] , \end{aligned} \quad (4.112)$$

con $T = d\varphi + [\omega, \varphi]$.

De la definición de derivada covariante,

$$D\phi = d\phi + [A, \phi] = d\phi + [\varpi, \phi] + [\omega, \phi] + [\varphi, \phi] , \quad (4.113)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} D\varpi &= d\varpi + [\varpi, \varpi] , \\ D\omega &= d\omega + [\omega, \omega] + [\omega, \varphi] , \\ D\varphi &= d\varphi + [\omega, \varphi] + [\varphi, \varphi] = T + [\varphi, \varphi] . \end{aligned} \quad (4.114)$$

Insertando las ecuaciones (5.108) y (4.114) en la ecuación (5.107), se tiene que

$$L_{SSEP}^{(2+1)} = k \left\langle A \left(dA + \frac{2}{3}A^2 \right) \right\rangle , \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{k}{4}\varpi^{ab} \left(d\varpi^{cd} + \frac{2}{3}\varpi^c_e \varpi^{ed} \right) \langle \mathbf{N}_{ab}\mathbf{N}_{cd} \rangle + \frac{k}{4}\omega^{ab} \left(d\omega^{cd} + \frac{2}{3}\omega^c_e \omega^{ed} \right) \langle \mathbf{L}_{ab}\mathbf{L}_{cd} \rangle \\ &+ k \left(R^{ab}\omega^{c3} - \frac{2}{3}\omega^{a3}\omega^{b3}\omega^{c3} \right) \langle \mathbf{L}_{ab}\mathbf{L}_{c3} \rangle + k D\omega^{a3}\omega^{c3} \langle \mathbf{L}_{a3}\mathbf{L}_{c3} \rangle \\ &- d \left(\frac{k}{2}\omega^{ab}\omega^{c3} \langle \mathbf{L}_{ab}\mathbf{L}_{c3} \rangle \right) . \end{aligned} \quad (4.116)$$

4.4. ACCIÓN CH-S PARA GRAVEDAD 2+1 DIMENSIONAL A PARTIR DEL ÁLGEBRA SSEP65

Reemplazando los tensores invariantes (4.103 - 5.99) en la ecuación (4.116), se obtiene que la acción Chern-Simons para el álgebra SSEP en (2 + 1)-dimensiones, en la base $\{\mathbf{N}_{ab}, \mathbf{L}_{CD}\}$, es dada por

$$S_{SSEP}^{(2+1)} = \int_M \frac{1}{2} \alpha_0 \varpi^a_c \left(d\varpi^c_a + \frac{2}{3} \varpi^c_d \varpi^d_a \right) + \alpha_1 \epsilon_{abc} \left(R^{ab} \omega^{c3} + \frac{1}{3} \omega^{a3} \omega^{b3} \omega^{c3} \right) \\ + \alpha_2 D\omega^{a3} \omega_a^3 + \frac{1}{2} \alpha_2 \omega^a_c \left(d\omega^c_a + \frac{2}{3} \omega^c_d \omega^d_a \right) - d \left(\alpha_1 \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \omega^{ab} \omega^{c3} \right)$$

donde hemos absorbido la constante k en las constantes α_i .

Renombrando $\omega^{a3} = e^a/l$, donde l posee unidades de longitud, se tiene

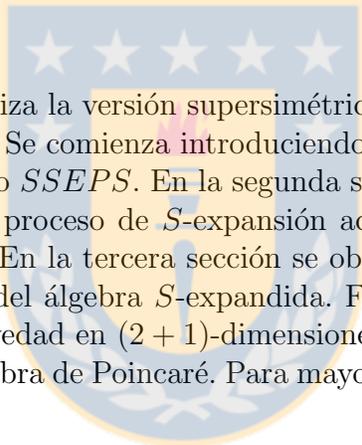
$$S_{SSEP}^{(2+1)} = \frac{\alpha_0}{2} \int \varpi^a_c \left(d\varpi^c_a + \frac{2}{3} \varpi^c_d \varpi^d_a \right) \\ + \frac{\alpha_1}{l} \left[\int_M \epsilon_{abc} \left(R^{ab} e^c + \frac{1}{3l^2} e^a e^b e^c \right) - \frac{1}{2} \int_{\partial M} \epsilon_{abc} \omega^{ab} e^c \right] \\ + \frac{\alpha_2}{2} \int_M \left[\omega^a_c \left(d\omega^c_a + \frac{2}{3} \omega^c_d \omega^d_a \right) + \frac{2}{l^2} e_a T^a \right] \quad (4.117)$$

donde se uso $D\omega^{a3} = (De^a)/l = T^a/l$. La acción (5.113) es probablemente la acción para gravedad Chern-Simons más general en (2 + 1)-dimensiones.



Capítulo 5

Extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré como una S -expansión de la superálgebra AdS .



En este capítulo se realiza la versión supersimétrica $\mathcal{N} = 1$ del cálculo presentado en el capítulo anterior. Se comienza introduciendo la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré o $SSEPS$. En la segunda sección se obtiene la superálgebra $SSEPS$ a través del proceso de S -expansión actuando sobre la superálgebra de Anti-de-Sitter $\mathcal{N} = 1$. En la tercera sección se obtienen los tensores invariantes y operadores de Casimir del álgebra S -expandida. Finalmente se construye un lagrangeano para Supergravedad en $(2 + 1)$ -dimensiones invariante bajo la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré. Para mayores detalles ver referencia [44].

5.1. Extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré

La extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré es la versión supersimétrica del álgebra $SSEP$ introducida en la referencia ([5]). Al igual que en el caso no supersimétrico, la superálgebra $SSEPS$ tuvo un predecesor no semisimple, la superálgebra de Maxwell [3, 6]. La extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré está compuesta por las rotaciones \mathbf{J}_{ab} , las traslaciones \mathbf{P}_a , las transformaciones de supersimetría \mathbf{Q}_α y por los generadores tensoriales

\mathbf{Z}_{ab} . Este conjunto de generadores satisface las siguientes relaciones de (anti)-conmutación:

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] = \eta_{ad}\mathbf{J}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{J}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{J}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{J}_{ac} \quad (5.1)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \eta_{bc}\mathbf{P}_a - \eta_{ac}\mathbf{P}_b \quad (5.2)$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] = c\mathbf{Z}_{ab} \quad (5.3)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{ad}\mathbf{Z}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{Z}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{Z}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{Z}_{ac} \quad (5.4)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \frac{4a^2}{c} (\eta_{bc}\mathbf{P}_a - \eta_{ac}\mathbf{P}_b) \quad (5.5)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \frac{4a^2}{c} [\eta_{ad}\mathbf{Z}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{Z}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{Z}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{Z}_{ac}] \quad (5.6)$$

$$\{\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta\} = -d \left[\frac{2a}{c} (\Gamma^a C)_{\alpha\beta} \mathbf{P}_a + (\sigma^{ab} C)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{ab} \right] \quad (5.7)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Q}_\alpha] = -(\sigma_{ab} \mathbf{Q})_\alpha \quad (5.8)$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}_\alpha] = a (\Gamma_a \mathbf{Q})_\alpha \quad (5.9)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Q}_\alpha] = -\frac{4a^2}{c} (\sigma_{ab} \mathbf{Q})_\alpha, \quad (5.10)$$

donde a , c y d son constantes, $\sigma_{ab} = \frac{1}{4} [\Gamma_a, \Gamma_b]$, con Γ_a matrices de Dirac¹.

Para $D = 3$ las constantes de estructura pueden ser levemente modificadas manteniendo todas las propiedades de la superálgebra (5.1-5.10).

Las relaciones de (anti)-conmutación que incluyen al generador fermiónico consideremos la siguiente generalización

$$\{\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta\} = -d \left[\mu \frac{2a}{c} (\gamma^a C)_{\alpha\beta} \mathbf{P}_a + \nu (\sigma^{ab} C)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{ab} \right] \quad (5.11)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Q}_\alpha] = \chi (\sigma_{ab} \mathbf{Q})_\alpha \quad (5.12)$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}_\alpha] = \tau a (\gamma_a \mathbf{Q})_\alpha \quad (5.13)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Q}_\alpha] = \zeta \frac{4a^2}{c} (\sigma_{ab} \mathbf{Q})_\alpha \quad (5.14)$$

Con μ , ν , χ , τ , ζ constantes por ahora arbitrarias y las matrices gamma γ están definidas en el apéndice [B].

Consideremos las condiciones que imponen las identidades de Jacobi sobre estas constantes.

¹Ver apéndice [B]

La identidad de Jacobi QQP

$$\{\mathbf{Q}_\alpha, [\mathbf{Q}_\beta, \mathbf{P}_a]\} + [\mathbf{P}_a, \{\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta\}] - \{\mathbf{Q}_\beta, [\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}_\alpha]\} = 0 \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{Q}_\alpha, -\tau a (\gamma_a \mathbf{Q})_\beta\} + \left[\mathbf{P}_a, -d \left(\mu (\gamma^c C)_{\alpha\beta} \mathbf{P}_c + \nu (\sigma^{cd} C)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{cd} \right) \right] - \{\mathbf{Q}_\beta, \tau a (\gamma_a \mathbf{Q})_\alpha\} = 0 \\ & - a\tau (\gamma_a)_\beta^\lambda \{\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\lambda\} - d\mu (\gamma^c C)_{\alpha\beta} [\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_c] - d\nu (\sigma^{cd} C)_{\alpha\beta} [\mathbf{P}_a, \mathbf{Z}_{cd}] - a\tau (\gamma_a)_\alpha^\lambda \{\mathbf{Q}_\beta, \mathbf{Q}_\lambda\} = 0 \\ & - a\tau (\gamma_a)_\beta^\lambda \left(\mu (\gamma^c C)_{\alpha\lambda} \mathbf{P}_c + \nu (\sigma^{cd} C)_{\alpha\lambda} \mathbf{Z}_{cd} \right) + \mu (\gamma^c C)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{ac} + \nu (\sigma^{cd} C)_{\alpha\beta} (\eta_{ca} \mathbf{P}_d - \eta_{da} \mathbf{P}_c) \\ & - a\tau (\gamma_a)_\alpha^\lambda \left(\mu (\gamma^c C)_{\beta\lambda} \mathbf{P}_c + \nu (\sigma^{cd} C)_{\beta\lambda} \mathbf{Z}_{cd} \right) = 0 \\ & - a\mu\tau (\gamma_a \gamma^c C)_{\beta\alpha} \mathbf{P}_c + a\nu\tau \left(\gamma_a C (\sigma^T)^{cd} \right)_{\beta\alpha} \mathbf{Z}_{cd} + \mu (\gamma^c C)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{ac} + 2\nu (\sigma_a^c C)_{\alpha\beta} \mathbf{P}_c \\ & - a\mu\tau (\gamma_a \gamma^c C)_{\alpha\beta} \mathbf{P}_c + a\nu\tau \left(\gamma_a C (\sigma^T)^{cd} \right)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{cd} = 0 . \end{aligned} \quad (5.16)$$

Los términos proporcionales a los boost AdS así como los proporcionales a los generadores \mathbf{Z}_{ab} deben anularse de manera independiente. Tomando aquellos que contienen algún generador \mathbf{Z} se obtiene

$$\begin{aligned} & 2a\nu\tau \left(\gamma_a C (\sigma^T)^{01} \right)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{01} + 2a\nu\tau \left(\gamma_a C (\sigma^T)^{12} \right)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{12} + 2a\nu\tau \left(\gamma_a C (\sigma^T)^{20} \right)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{20} + \\ & \mu (\gamma^0 C)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{a0} + \mu (\gamma^1 C)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{a1} + \mu (\gamma^2 C)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{a2} = 0 \\ & - a\nu\tau (\gamma_a \sigma_x)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{01} + a\nu\tau (\gamma_a)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{12} + a\nu\tau (\gamma_a \sigma_z)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{20} + \\ & - \mu (\mathbb{1})_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{a0} + \mu (\sigma_z)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{a1} - \mu (\sigma_x)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{a2} = 0 , \end{aligned}$$

evaluando el caso $a = 0$

$$- 2a\nu\tau (\sigma_z) \mathbf{Z}_{01} - 2a\nu\tau (\sigma_x) \mathbf{Z}_{20} + \mu (\sigma_z) \mathbf{Z}_{01} - \mu (\sigma_x) \mathbf{Z}_{02} = 0 , \quad (5.17)$$

de donde se obtiene que

$$\nu\tau + \mu = 0 , \quad (5.18)$$

esta relación es re-obtenida como condición para los casos $a = 1$ y $a = 2$. De los términos proporcionales a los boosts en (5.16) se obtiene que

$$\mu\tau + \nu = 0 , \quad (5.19)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, la identidad de Jacobi QQJ

$$\{\mathbf{Q}_\alpha, [\mathbf{Q}_\beta, \mathbf{J}_{ab}]\} + [\mathbf{J}_{ab}, \{\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta\}] - \{\mathbf{Q}_\beta, [\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Q}_\alpha]\} = 0 , \quad (5.20)$$

no entrega información adicional, se anula idénticamente. La identidad QQZ

$$\{\mathbf{Q}_\alpha, [\mathbf{Q}_\beta, \mathbf{Z}_{ab}]\} + [\mathbf{Z}_{ab}, \{\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta\}] - \{\mathbf{Q}_\beta, [\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Q}_\alpha]\} = 0 , \quad (5.21)$$

conduce a

$$\zeta = -1 . \quad (5.22)$$

La identidad QPP

$$[\mathbf{Q}_\alpha, [\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b]] + [\mathbf{P}_b, [\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{P}_a]] + [\mathbf{P}_a, [\mathbf{P}_b, \mathbf{Q}_\alpha]] = 0 , \quad (5.23)$$

requiere que

$$\tau = \pm 1 . \quad (5.24)$$

La identidad QJP

$$[Q_\alpha, [J_{ab}, P_c]] + [P_c, [Q_\alpha, J_{ab}]] + [J_{ab}, [P_c, Q_\alpha]] = 0 , \quad (5.25)$$

fija a

$$\chi = -1 . , \quad (5.26)$$

La identidad QQQ establece restricciones sobre las entradas en las matrices γ , pero como estas fueron elegidas como las matrices de Pauli desde el comienzo, y estas satisfacen los requerimientos por construcción, la identidad se anula idénticamente. El resto de las identidades con un Q también se anulan sin restricciones adicionales. Resumiendo las relaciones de conmutación (5.1-5.6) junto a las relaciones (5.11-5.14) conforman la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré, solo si

$$\chi = \zeta = -1 \quad \mu = \pm \nu \quad y \quad \tau = \pm 1 \quad (5.27)$$

donde se considero (5.22) y (5.26), y se resolvió (5.18), (5.19) usando (5.24).

La estructura (5.1-5.10) se recupera si se eligen

$$\mu = \nu = 1 \quad y \quad \tau = +1 . \quad (5.28)$$

En lo que sigue del capítulo se utilizará la siguiente convención

$$\mu = -\nu = 1 \quad y \quad \tau = -1 , \quad (5.29)$$

está elección es útil a la hora de construir la acción Chern-Simons para esta simetría. Explícitamente el álgebra que se usará de este punto en adelante es

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{ad} J_{bc} + \eta_{bc} J_{ad} - \eta_{ac} J_{bd} - \eta_{bd} J_{ac} \quad (5.30)$$

$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b \quad (5.31)$$

$$[P_a, P_b] = c Z_{ab} \quad (5.32)$$

$$[J_{ab}, Z_{cd}] = \eta_{ad} Z_{bc} + \eta_{bc} Z_{ad} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac} \quad (5.33)$$

$$[Z_{ab}, P_c] = \frac{4a^2}{c} (\eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b) \quad (5.34)$$

$$[Z_{ab}, Z_{cd}] = \frac{4a^2}{c} [\eta_{ad} Z_{bc} + \eta_{bc} Z_{ad} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac}] \quad (5.35)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -d \left[\frac{2a}{c} (\gamma^a C)_{\alpha\beta} P_a - (\sigma^{ab} C)_{\alpha\beta} Z_{ab} \right] \quad (5.36)$$

$$[J_{ab}, Q_\alpha] = -(\sigma_{ab} Q)_\alpha \quad (5.37)$$

$$[P_a, Q_\alpha] = -a (\gamma_a Q)_\alpha \quad (5.38)$$

$$[Z_{ab}, Q_\alpha] = -\frac{4a^2}{c} (\sigma_{ab} Q)_\alpha \quad (5.39)$$

Es posible escribir la extensión semisimple del álgebra de Poincaré en una base diferente.

Definiendo los generadores N_{ab} como

$$N_{ab} \equiv J_{ab} - \frac{c}{4a^2} Z_{ab} , \quad (5.40)$$

los generadores $\{\mathbf{L}_{ab}, \mathbf{L}_a\}$ como

$$\mathbf{L}_{ab} = \frac{c}{4a^2} \mathbf{Z}_{ab}, \quad \mathbf{L}_{a3} = -\mathbf{L}_{3a} \equiv \frac{1}{2a} \mathbf{P}_a \equiv \mathbf{L}_a, \quad (5.41)$$

y los generadores

$$\mathbf{Q}'_\alpha \equiv \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{c}{2d}} \mathbf{Q}_\alpha, \quad (5.42)$$

la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré (5.30-5.39) toma la forma

$$[\mathbf{N}_{ab}, \mathbf{N}_{cd}] = \eta_{ad} \mathbf{N}_{bc} + \eta_{bc} \mathbf{N}_{ad} - \eta_{ac} \mathbf{N}_{bd} - \eta_{bd} \mathbf{N}_{ac} \quad (5.43)$$

$$[\mathbf{L}_{ab}, \mathbf{L}_{cd}] = \eta_{ad} \mathbf{L}_{bc} + \eta_{bc} \mathbf{L}_{ad} - \eta_{ac} \mathbf{L}_{bd} - \eta_{bd} \mathbf{L}_{ac} \quad (5.44)$$

$$[\mathbf{L}_{ab}, \mathbf{L}_c] = \eta_{bc} \mathbf{L}_a - \eta_{ac} \mathbf{L}_b \quad (5.45)$$

$$[\mathbf{L}_a, \mathbf{L}_b] = \mathbf{L}_{ab} \quad (5.46)$$

$$[\mathbf{N}_{ab}, \mathbf{L}_{cd}] = 0 \quad (5.47)$$

$$[\mathbf{N}_{ab}, \mathbf{L}_c] = 0. \quad (5.48)$$

$$\{\mathbf{Q}'_\alpha, \mathbf{Q}'_\beta\} = \frac{1}{2} \left[(\sigma^{ab} C)_{\alpha\beta} \mathbf{L}_{ab} - (\gamma^a C)_{\alpha\beta} \mathbf{L}_a \right] \quad (5.49)$$

$$[\mathbf{L}_{ab}, \mathbf{Q}'_\alpha] = -(\sigma_{ab} \mathbf{Q}'_\alpha)_\alpha \quad (5.50)$$

$$[\mathbf{L}_a, \mathbf{Q}'_\alpha] = -\frac{1}{2} (\gamma_a \mathbf{Q}'_\alpha)_\alpha \quad (5.51)$$

$$[\mathbf{N}_{ab}, \mathbf{Q}'_\alpha] = 0 \quad (5.52)$$

Donde se ve que los generadores \mathbf{N}_{ab} generan el álgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(2,1)$, y los generadores $\{\mathbf{L}_{ab}, \mathbf{L}_a, \mathbf{Q}'_\alpha\}$ generan el álgebra $\mathfrak{osp}(2|1) \otimes \mathfrak{sp}(2)$, la cual genera al grupo de simetría de la superálgebra $AdS \mathcal{N} = 1$ en $D = 3$. El álgebra (5.43-5.52) es la suma directa $\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathfrak{osp}(2|1) \otimes \mathfrak{sp}(2)$ del álgebra de Lorentz en $D = 3$ y de la superálgebra de Anti-de-Sitter 3-dimensional con $\mathcal{N} = 1$.

5.2. S-Expansion of the Anti-de-Sitter Superalgebra

En esta sección mostraremos que la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré $\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathfrak{osp}(2|1) \otimes \mathfrak{sp}(2)$ puede ser obtenida a través del procedimiento de S -expansión aplicado sobre la superálgebra de Anti-de-Sitter con $\mathcal{N} = 1$, $\mathfrak{osp}(2|1) \otimes \mathfrak{sp}(2)$, utilizando el semigrupo apropiado [12, 13]. Para aplicar la S -expansión comenzamos con dividir la superálgebra de AdS en subespacios de la siguiente manera $G = \mathfrak{osp}(2|1) \otimes \mathfrak{sp}(2) = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$, donde V_0 corresponde a la subálgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(2,1)$ generada por $\tilde{\mathbf{J}}_{ab}$, V_1 corresponde a las traslaciones de supersimetría generadas por $\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha$ y V_2 corresponde a los boosts de AdS generados por $\tilde{\mathbf{P}}_a$.

Los generadores $\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha, \tilde{\mathbf{P}}_a$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación ($D = 3$)

$$\begin{aligned}
 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] &= \eta_{bc}\tilde{\mathbf{J}}_{ad} - \eta_{bd}\tilde{\mathbf{J}}_{ac} - \eta_{ac}\tilde{\mathbf{J}}_{bd} + \eta_{ad}\tilde{\mathbf{J}}_{bc}, \\
 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{P}}_c] &= \eta_{cb}\tilde{\mathbf{P}}_a - \eta_{ca}\tilde{\mathbf{P}}_b, \\
 [\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{P}}_b] &= \tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \\
 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{Q}}] &= -\sigma_{ab}\tilde{\mathbf{Q}}, \\
 [\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{Q}}] &= -\frac{1}{2}\gamma_a\tilde{\mathbf{Q}}, \\
 \{\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha, \tilde{\mathbf{Q}}_\beta\} &= \frac{1}{2} \left[(\sigma^{ab}C)_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{J}}_{ab} - (\gamma^a C)_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{P}}_a \right].
 \end{aligned}$$

En función de los subespacios estas relaciones se representan como

$$\begin{aligned}
 [V_0, V_0] &\subset V_0, & [V_0, V_2] &\subset V_2, & [V_2, V_2] &\subset V_0, \\
 [V_0, V_1] &\subset V_1, & [V_2, V_1] &\subset V_1, & [V_1, V_1] &\subset V_0 \oplus V_2.
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

El siguiente paso es hallar un semigrupo abeliano S el cual puede ser particionado de manera resonante respecto a (5.53).

5.2.1. Semigroup S_{S_3}

Dadas las características y similitudes entre el álgebra $SSEP$ y su versión supersimétrica $SSEPS$, los mismos semigrupos útiles en la S -expansión revisada en el capítulo anterior son útiles para el caso supersimétrico, sin embargo las particiones son diferentes.

Para el semigrupo $S_{S_3} = \{\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3\}$ definido, como fue visto anteriormente, por la tabla multiplicación:

$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	(5.54)
$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\lambda}_3$	
$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_3$	
$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	
$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_3$	

La partición necesaria en la S -expansión en este caso es

$$S_0 = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3\}, \tag{5.55}$$

$$S_1 = \{\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_3\}, \tag{5.56}$$

$$S_2 = \{\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3\}. \tag{5.57}$$

Partición que cumple con ser resonante con la estructura en subespacios de la superálgebra AdS (resonancia entre las ecuaciones (5.53) y (5.58))

$$\begin{aligned}
 S_0 \cdot S_0 &\subset S_0, & S_0 \cdot S_2 &\subset S_2, & S_2 \cdot S_2 &\subset S_0 \\
 S_0 \cdot S_1 &\subset S_1, & S_2 \cdot S_1 &\subset S_1, & S_1 \cdot S_1 &\subset S_0 \cap S_2
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

Luego

$$\mathfrak{G}_R = W_0 \oplus W_1 \oplus W_2, \quad (5.59)$$

es una subálgebra resonante de $S_{S_3} \times \mathfrak{g}$,² donde

$$W_0 = (S_0 \times V_0) = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3\} \otimes \{\tilde{\mathbf{J}}_{ab}\} = \{\bar{\lambda}_1 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\lambda}_2 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\lambda}_3 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}\} \quad (5.60)$$

$$W_1 = (S_1 \times V_1) = \{\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_3\} \otimes \{\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha\} = \{\bar{\lambda}_0 \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha, \bar{\lambda}_3 \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha\} \quad (5.61)$$

$$W_2 = (S_2 \times V_2) = \{\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3\} \otimes \{\tilde{\mathbf{P}}_a\} = \{\bar{\lambda}_2 \tilde{\mathbf{P}}_a, \bar{\lambda}_3 \tilde{\mathbf{P}}_a\} \quad (5.62)$$

La última etapa es imponer la condición de 0_S -reducción $\lambda_3 \times \mathfrak{g} = 0$ sobre \mathfrak{G}_R y renombramos sus generadores en la forma $\mathbf{J}_{ab,1} = \bar{\lambda}_1 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}$; $\mathbf{J}_{ab,2} = \bar{\lambda}_2 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}$; $\mathbf{Q}_{\alpha,0} = \bar{\lambda}_0 \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha$; $\mathbf{P}_{a,2} = \bar{\lambda}_2 \tilde{\mathbf{P}}_a$. Este procedimiento nos lleva a las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,1}, \mathbf{J}_{cd,1}] &= \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_1 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] = \bar{\lambda}_1 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] \\ &= \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc,1} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad,1} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd,1} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac,1} \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,2}, \mathbf{J}_{cd,2}] &= \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_2 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] = \bar{\lambda}_2 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] \\ &\quad \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc,2} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad,2} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd,2} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac,2} \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$[\mathbf{J}_{ab,1}, \mathbf{J}_{cd,2}] = \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_2 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] = \bar{\lambda}_3 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] = 0 \quad (5.65)$$

$$[\mathbf{J}_{ab,1}, \mathbf{P}_{c,2}] = \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{P}}_c] = \bar{\lambda}_3 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{P}}_c] = 0 \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,2}, \mathbf{P}_{c,2}] &= \lambda_2 \lambda_2 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{P}}_c] = \lambda_2 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{P}}_c] \\ &= \eta_{bc} \mathbf{P}_{a,2} - \eta_{ac} \mathbf{P}_{b,2} \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$[\mathbf{P}_{a,2}, \mathbf{P}_{b,2}] = \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_2 [\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{P}}_b] = \bar{\lambda}_2 [\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{P}}_b] = \bar{\lambda}_2 \tilde{\mathbf{J}}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,2} \quad (5.68)$$

$$[\mathbf{J}_{ab,1}, \mathbf{Q}_{\alpha,0}] = \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha] = \bar{\lambda}_3 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha] = 0 \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,2}, \mathbf{Q}_{\alpha,0}] &= \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha] = \bar{\lambda}_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha] \\ &= - \left(\sigma_{ab} \tilde{\mathbf{Q}}_0 \right)_\alpha \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_{a,2}, \mathbf{Q}_{\alpha,0}] &= \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_0 [\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha] = \bar{\lambda}_0 [\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha] \\ &= -\frac{1}{2} \left(\gamma_a \tilde{\mathbf{Q}}_0 \right)_\alpha \end{aligned} \quad (5.71)$$

²Ver Teorema IV.2 de la referencia [12]

$$\begin{aligned} \{Q_{\alpha,0}, Q_{\beta,0}\} &= \bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_0 \{ \tilde{Q}_\alpha, \tilde{Q}_\beta \} = \bar{\lambda}_2 \{ \tilde{Q}_\alpha, \tilde{Q}_\beta \} \\ &= \frac{1}{2} \left[(\sigma^{ab} C)_{\alpha\beta} \mathbf{J}_{ab,2} - (\gamma^a C)_{\alpha\beta} \mathbf{P}_{a,2} \right] \end{aligned} \quad (5.72)$$

en donde se han utilizado las relaciones de conmutación

de la superálgebra AdS y la regla de multiplicación del semigrupo (5.54).

A través de la identificación $\mathbf{N}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,1}$; $\mathbf{L}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,2}$; $\mathbf{L}_a = \mathbf{P}_{a,2}$; $\mathbf{Q}'_\alpha = \mathbf{Q}_{\alpha,0}$; vemos que el álgebra (5.63-5.72), obtenida por expansión de la superálgebra $AdS \mathfrak{osp}(2|1) \otimes \mathfrak{sp}(2)$, es la superálgebra (5.43-5.52) $\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathfrak{osp}(2|1) \otimes \mathfrak{sp}(2)$ obtenida por la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré ref. [5].

5.2.2. Semigroup S_{S_2}

Al igual que para la S -expansión que nos conectaba con el álgebra $SSEP$ en este caso el semigrupo $S_{S_2} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ con tabla de multiplicación

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta}, & \text{cuando } \alpha + \beta \leq 2 \\ \lambda_{\alpha+\beta-2}, & \text{cuando } \alpha + \beta > 2 \end{cases} .$$

Y con una partición en tres conjuntos $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$, en lugar de dos,

$$\begin{aligned} S_0 &= \{\lambda_0, \lambda_2\}, \\ S_1 &= \{\lambda_1\}, \\ S_2 &= \{\lambda_2\}. \end{aligned}$$

Resulta estar en resonancia con la partición elegida para la superálgebra AdS , ya que satisface

$$\begin{aligned} S_0 \cdot S_0 &\subset S_0, \\ S_0 \cdot S_1 &\subset S_1, \\ S_0 \cdot S_2 &\subset S_2, \\ S_1 \cdot S_1 &\subset S_0 \cap S_2, \\ S_1 \cdot S_2 &\subset S_1, \\ S_2 \cdot S_2 &\subset S_2. \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\mathfrak{G}_R = W_0 \oplus W_1 \oplus W_2, \quad (5.73)$$

es una subálgebra resonante de $S_{S_2} \times \mathfrak{g}$, donde

$$W_0 = (S_0 \times V_0) = \{\lambda_0, \lambda_2\} \otimes \{ \tilde{\mathbf{J}}_{ab} \} = \{ \lambda_0 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \lambda_2 \tilde{\mathbf{J}}_{ab} \} \quad (5.74)$$

$$W_1 = (S_1 \times V_1) = \{\lambda_1\} \otimes \{ \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha \} = \{ \lambda_1 \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha \} \quad (5.75)$$

$$W_2 = (S_2 \times V_2) = \{\lambda_2\} \otimes \{ \tilde{\mathbf{P}}_a \} = \{ \lambda_2 \tilde{\mathbf{P}}_a \} \quad (5.76)$$

Renombrando los generadores de la subálgebra resonante como

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{ab} &= \lambda_0 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \\ \mathbf{Q} &= \lambda_1 \tilde{\mathbf{Q}}, \\ \mathbf{Z}_{ab} &= \lambda_2 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \\ \mathbf{P}_a &= \lambda_2 \tilde{\mathbf{P}}_a.\end{aligned}$$

Se obtienen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] &= \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd} + \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc}, \\ [\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] &= \eta_{bc} \mathbf{Z}_{ad} - \eta_{bd} \mathbf{Z}_{ac} - \eta_{ac} \mathbf{Z}_{bd} + \eta_{ad} \mathbf{Z}_{bc}, \\ [\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] &= \eta_{bc} \mathbf{Z}_{ad} - \eta_{bd} \mathbf{Z}_{ac} - \eta_{ac} \mathbf{Z}_{bd} + \eta_{ad} \mathbf{Z}_{bc}, \\ [\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_c] &= \eta_{cb} \mathbf{P}_a - \eta_{ca} \mathbf{P}_b, \\ [\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_c] &= \eta_{cb} \mathbf{P}_a - \eta_{ca} \mathbf{P}_b, \\ [\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] &= \mathbf{Z}_{ab}, \\ [\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Q}] &= -\sigma_{ab} \mathbf{Q}, \\ [\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Q}] &= -\sigma_{ab} \mathbf{Q}, \\ [\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}] &= -\frac{1}{2} \gamma_a \mathbf{Q}, \\ \{\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta\} &= \frac{1}{2} \left[(\sigma^{ab} C)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{ab} - (\gamma^a C)_{\alpha\beta} \mathbf{P}_a \right].\end{aligned}$$

Como fue visto en el capítulo [4], las tablas de multiplicación de los semigrupos S_{S_3} y S_{S_2} están relacionadas, el cual se vuelve explícito cuando consideramos a S_{S_2} un anillo y efectuamos el cambio de base siguiente

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_1 &= \lambda_0 - \lambda_2, \\ \bar{\lambda}_2 &= \lambda_2, \\ \bar{\lambda}_0 &= \lambda_1,\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a tabla de multiplicación para S_{S_2} de la forma

	$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$
λ_0	λ_2	0	λ_0
$\bar{\lambda}_1$	0	$\bar{\lambda}_1$	0
$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_0$	0	$\bar{\lambda}_2$

La cual es equivalente a la tabla de multiplicación (5.54) del semigrupo S_{S_3} identificando al 0 aditivo del anillo S_{S_2} con el elemento cero multiplicativo (λ_3) del semigrpo S_{S_3} .

5.3. Operadores de Casimir para SSEPS.

5.3.1. Operadores de Casimir de segundo orden para la superálgebra AdS .

Usando el método de S -expansión se obtienen los tensores invariantes para el álgebra $SSEPS$, lo cual nos permite construir una acción más general de supergravedad Chern-Simons

en $(2+1)$ -dimensiones.

Usando el método introducido en la ref. [12], es posible obtener operadores de Casimir del álgebra \mathfrak{G} a partir de operadores de Casimir del álgebra \mathfrak{g} . En este caso particular, es necesario tener los operadores de la superálgebra AdS para luego obtener los operadores de Casimir de la superálgebra $\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathfrak{osp}(2|1) \otimes \mathfrak{sp}(2)$.

Los tensores invariantes para la superálgebra AdS son [33, 35, 37, 38]

$$\langle \tilde{\mathbf{J}}_{ab} \tilde{\mathbf{J}}_{cd} \rangle = \tilde{\mu}_0 (\eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}) , \quad (5.77)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{J}}_{ab} \tilde{\mathbf{P}}_c \rangle = \tilde{\mu}_1 \epsilon_{abc} , \quad (5.78)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{P}}_a \tilde{\mathbf{P}}_b \rangle = \tilde{\mu}_0 \eta_{ab} , \quad (5.79)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha \tilde{\mathbf{Q}}_\beta \rangle = (\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_1) C_{\alpha\beta} , \quad (5.80)$$

que también representan las componentes de la métrica de Killing de la superálgebra AdS

$$k_{ab,cd} = \tilde{\mu}_0 (\eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}) , \quad (5.81)$$

$$k_{ab,c} = k_{c,ab} = \tilde{\mu}_1 \epsilon_{abc} , \quad (5.82)$$

$$k_{a,b} = \tilde{\mu}_0 \eta_{ab} , \quad (5.83)$$

$$k_{\alpha,\beta} = (\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_1) C_{\alpha\beta} . \quad (5.84)$$

Para conocer las componentes de la inversa de la métrica de Killing utilizamos

$$\mathbf{T}_A = k_{AC} k^{CB} \mathbf{T}_B , \quad (5.85)$$

para los generadores de la subálgebra de Lorentz

$$\tilde{\mathbf{J}}_{ab} = k_{ab,mn} k^{mn,cd} \tilde{\mathbf{J}}_{cd} + k_{ab,m} k^{m,cd} \tilde{\mathbf{J}}_{cd} + k_{ab,m} k^{m,c} \tilde{\mathbf{P}}_c , \quad (5.86)$$

donde es necesario que

$$k^{a,b} = 0 \quad (5.87)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}}_{ab} &= \tilde{\mu}_0 (\eta_{an}\eta_{bm} - \eta_{am}\eta_{bn}) k^{mn,cd} \tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mu}_1 \epsilon_{abm} k^{m,cd} \tilde{\mathbf{J}}_{cd} \\ &= \tilde{\mu}_0 (k_{ba}{}^{,cd} - k_{ab}{}^{,cd}) \tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mu}_1 \epsilon_{abm} k^{m,cd} \tilde{\mathbf{J}}_{cd} \\ &= 2\tilde{\mu}_0 k_{ba}{}^{,cd} \tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \tilde{\mu}_1 \epsilon_{abm} k^{m,cd} \tilde{\mathbf{J}}_{cd} . \end{aligned} \quad (5.88)$$

Eligiendo

$$k^{ab,cd} = \alpha \eta^{[ab][cd]} \quad (5.89)$$

$$k^{m,cd} = \beta \epsilon^{mcd} \quad (5.90)$$

en (5.88)

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{J}}_{ab} &= -2\alpha\tilde{\mu}_0\delta_{ba}^{cd}\tilde{\mathbf{J}}_{cd} + \beta\tilde{\mu}_1\epsilon_{abm}\epsilon^{mcd}\tilde{\mathbf{J}}_{cd} \\
&= -2\alpha\tilde{\mu}_0\delta_{ba}^{cd}\tilde{\mathbf{J}}_{cd} - \beta\tilde{\mu}_1\delta_{abm}^{mcd}\tilde{\mathbf{J}}_{cd} \\
&= -2\alpha\tilde{\mu}_0\delta_{ba}^{cd}\tilde{\mathbf{J}}_{cd} - (3-2)!\beta\tilde{\mu}_1\delta_{ab}^{cd}\tilde{\mathbf{J}}_{cd} \\
&= -4\alpha\tilde{\mu}_0\tilde{\mathbf{J}}_{ba} - 2\beta\tilde{\mu}_1\tilde{\mathbf{J}}_{ab} \\
&= 2(2\alpha\tilde{\mu}_0 - \beta\tilde{\mu}_1)\tilde{\mathbf{J}}_{ab}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\alpha\tilde{\mu}_0 - \beta\tilde{\mu}_1 &= \frac{1}{2} \\
\beta &= \frac{1}{\tilde{\mu}_1} \left(2\alpha\tilde{\mu}_0 - \frac{1}{2} \right)
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Para los boost AdS

$$\tilde{\mathbf{P}}_a = k_{a,m}k^{m,b}\tilde{\mathbf{P}}_b + k_{a,mn}k^{mn,b}\tilde{\mathbf{P}}_b + k_{a,mn}k^{mn,cd}\tilde{\mathbf{J}}_{cd} \tag{5.92}$$

lo que implica que $\alpha = 0$. Considerando (5.87) se tiene que

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{P}}_a &= k_{a,mn}k^{mn,b}\tilde{\mathbf{P}}_b \\
&= \tilde{\mu}_1\epsilon_{amn}k^{mn,b}\tilde{\mathbf{P}}_b .
\end{aligned} \tag{5.93}$$

De (5.90) y (5.91) se obtiene

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{P}}_a &= \tilde{\mu}_1\epsilon_{amn} \left(-\frac{1}{2\tilde{\mu}_1} \right) \epsilon^{mnb}\tilde{\mathbf{P}}_b \\
&= \frac{1}{2}\delta_{amn}^{bmn}\tilde{\mathbf{P}}_b \\
&= \frac{1}{2}(3-1)!\delta_a^b\tilde{\mathbf{P}}_b \\
&= \tilde{\mathbf{P}}_a .
\end{aligned}$$

Para el generador de supersimetría

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha &= k_{\alpha,\gamma}k^{\gamma,\beta}\tilde{\mathbf{Q}}_\beta \\
&= (\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_1)C_{\alpha\gamma}k^{\gamma,\beta}\tilde{\mathbf{Q}}_\beta ,
\end{aligned}$$

donde es natural considerar que

$$k^{\alpha,\beta} = -\frac{1}{\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_1}C^{\alpha\beta} .$$

Resumiendo

$$\begin{aligned}
k^{ab,c} &= -\frac{1}{2\tilde{\mu}_1}\epsilon^{abc} \\
k^{\alpha,\beta} &= -\frac{1}{\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_1}C^{\alpha\beta} .
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{\Pi} = -\frac{1}{2\tilde{\mu}_1}\epsilon^{abc}\left(\tilde{\mathbf{J}}_{ab}\tilde{\mathbf{P}}_c + \tilde{\mathbf{P}}_c\tilde{\mathbf{J}}_{ab}\right) - \frac{1}{\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_1}C^{\alpha\beta}\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha\tilde{\mathbf{Q}}_\beta ,$$

Es un operador de Casimir bilineal, útil y fundamental en la construcción de lagrangeanos Chern-Simons de 3 dimensiones.



5.3.2. Operadores de Casimir de segundo orden para SSEPS

De la referencia [12] se sabe que el operador de Casimir para un álgebra de Lie S -expandida es definido a partir del álgebra de partida \mathfrak{g} como

$$\mathbf{\Pi} = m^{\alpha\beta} \Pi^{AB} \mathbf{T}_{(A,\alpha)} \mathbf{T}_{(B,\beta)},$$

con Π^{AB} las componentes del operador de Casimir del álgebra \mathfrak{g} y $m^{\alpha\beta}$ la matriz inversa de $m_{\alpha\beta} \equiv \alpha_\gamma K_{\alpha\beta}^\gamma$. Para el anillo S_{S_2} los 2-selectores pueden ser representados por

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ K_{\alpha\beta}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ K_{\alpha\beta}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con esta estructura en los 2-selectores, la métrica $m_{\alpha\beta}$ para S_{S_2} es de la forma

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta} &= \alpha_\lambda K_{\alpha\beta}^\lambda \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Cuya inversa viene siendo

$$m^{\alpha\beta} = \frac{1}{\det m_{\alpha\beta}} \begin{pmatrix} \alpha_2^2 - \alpha_1^2 & 0 & -(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \\ 0 & \alpha_2(\alpha_0 - \alpha_2) & -\alpha_1(\alpha_0 - \alpha_2) \\ -(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) & -\alpha_1(\alpha_0 - \alpha_2) & \alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2 \end{pmatrix},$$

con

$$\det m_{\alpha\beta} = (\alpha_0 - \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0.$$

Finalmente obtenemos que el operador de Casimir cuadrático para la superálgebra SSEPS es de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &= m^{02} \Pi^{ab,c} \mathbf{J}_{ab} \mathbf{P}_c + m^{20} \Pi^{c,ab} \mathbf{P}_c \mathbf{J}_{ab} + m^{22} \Pi^{ab,c} \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{P}_c + m^{22} \Pi^{c,ab} \mathbf{P}_c \mathbf{Z}_{ab} + m^{11} \Pi^{\alpha\beta} \mathbf{Q} \mathbf{Q}, \\ &= (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \frac{1}{2\tilde{\mu}_1} \epsilon^{abc} (\mathbf{J}_{ab} \mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c \mathbf{J}_{ab}) - (\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) \frac{1}{2\tilde{\mu}_1} \epsilon^{abc} (\mathbf{Z}_{ab} \mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c \mathbf{Z}_{ab}) \\ &\quad - \alpha_2(\alpha_0 - \alpha_2) \frac{1}{\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_1} \mathbf{Q} \mathbf{Q} \\ &= (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \frac{1}{2\tilde{\mu}_1} \epsilon^{abc} (\mathbf{J}_{ab} \mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c \mathbf{J}_{ab}) - (\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) \frac{1}{2\tilde{\mu}_1} \epsilon^{abc} (\mathbf{Z}_{ab} \mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c \mathbf{Z}_{ab}) \\ &\quad - (\alpha_2\alpha_0 - \alpha_2^2) \frac{1}{\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_1} \mathbf{Q} \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Definiendo

$$\begin{aligned}\alpha &= -(\alpha_2\alpha_0 - \alpha_2^2) , \\ \beta &= -(\alpha_2\alpha_0 - \alpha_1^2) ,\end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}\Pi &= (\alpha - \beta) \frac{1}{2\tilde{\mu}_1} \epsilon^{abc} (\mathbf{J}_{ab}\mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c\mathbf{J}_{ab}) + \beta \frac{1}{2\tilde{\mu}_1} \epsilon^{abc} (\mathbf{Z}_{ab}\mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c\mathbf{Z}_{ab}) + \alpha \frac{1}{\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_1} \mathbf{Q}\bar{\mathbf{Q}} \\ &= \alpha \left[\frac{1}{2\tilde{\mu}_1} \epsilon^{abc} (\mathbf{J}_{ab}\mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c\mathbf{J}_{ab}) + \frac{1}{\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_1} \mathbf{Q}\bar{\mathbf{Q}} \right] + \frac{\beta}{2\tilde{\mu}_1} \epsilon^{abc} [\mathbf{Z}_{ab}\mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c\mathbf{Z}_{ab} - \mathbf{J}_{ab}\mathbf{P}_c - \mathbf{P}_c\mathbf{J}_{ab}] \\ &= \frac{\alpha}{\tilde{\mu}_1} \left[\frac{1}{2} \epsilon^{abc} (\mathbf{J}_{ab}\mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c\mathbf{J}_{ab}) + \frac{1}{1 - \frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{\mu}_1}} \mathbf{Q}\bar{\mathbf{Q}} \right] + \frac{\beta}{2\tilde{\mu}_1} \epsilon^{abc} [\mathbf{Z}_{ab}\mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c\mathbf{Z}_{ab} - \mathbf{J}_{ab}\mathbf{P}_c - \mathbf{P}_c\mathbf{J}_{ab}] .\end{aligned}$$

Por lo tanto se tienen dos operadores de Casimir cuadráticos independientes.

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_1 &= \frac{1}{2} \epsilon^{abc} (\mathbf{J}_{ab}\mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c\mathbf{J}_{ab}) + \frac{1}{1 - \frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{\mu}_1}} \mathbf{Q}\bar{\mathbf{Q}}, \\ \mathbf{C}_2 &= \epsilon^{abc} [\mathbf{Z}_{ab}\mathbf{P}_c + \mathbf{P}_c\mathbf{Z}_{ab} - \mathbf{J}_{ab}\mathbf{P}_c - \mathbf{P}_c\mathbf{J}_{ab}].\end{aligned}$$

5.4. Acción Chern-Simons para la superálgebra *SSEPS* en $(2+1)$ -dimensiones.

Para la construcción del lagrangeano Chern-Simons de la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré en $(2+1)$ -dimensiones, es necesario conocer tensores invariantes, simétricos y bilineales asociados a esta álgebra. Una de las características más importantes del procedimiento de *S*-expansión es que nos permite obtener los tensores invariantes del álgebra de llegada \mathfrak{G} a partir de los tensores invariantes del álgebra de partida \mathfrak{g} . En la primera parte de esta sección son obtenidos dichos tensores invariantes a partir de los asociados a la superálgebra *AdS*. En la segunda parte es contruido un lagrangeano Chern-Simons cuya 1-forma conexión esta valuada en la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré.

5.4.1. Tensores invariantes bilineales para la superálgebra *SSEPS*

Los tensores invariantes de la superálgebra *AdS* son [38]

$$\langle \tilde{\mathbf{J}}_{ab} \tilde{\mathbf{J}}_{cd} \rangle = \tilde{\mu}_0 (\eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}) , \quad (5.94)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{J}}_{ab} \tilde{\mathbf{P}}_c \rangle = \tilde{\mu}_1 \epsilon_{abc} , \quad (5.95)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{P}}_a \tilde{\mathbf{P}}_b \rangle = \tilde{\mu}_0 \eta_{ab} , \quad (5.96)$$

$$\langle \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha \tilde{\mathbf{Q}}_\beta \rangle = (\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_1) C_{\alpha\beta} . \quad (5.97)$$

Del procedimiento de S -expansión se tiene que los tensores invariantes y simétricos de la superálgebra $SSEPS$ son ³

$$\langle \mathbf{N}_{ab} \mathbf{N}_{cd} \rangle = \alpha_0 (\eta_{ad} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bd}) \quad (5.98)$$

$$\langle \mathbf{L}_{ab} \mathbf{L}_{cd} \rangle = \alpha_2 (\eta_{ad} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bd}) \quad (5.99)$$

$$\langle \mathbf{L}_{ab} \mathbf{L}_{c3} \rangle = \alpha_1 \epsilon_{abc} \quad (5.100)$$

$$\langle \mathbf{L}_{a3} \mathbf{L}_{b3} \rangle = \alpha_2 \eta_{ab} \quad (5.101)$$

$$\langle \mathbf{Q}'_\alpha \mathbf{Q}'_\beta \rangle = (\alpha_2 - \alpha_1) C_{\alpha\beta}. \quad (5.102)$$

5.4.2. Acción Chern-Simons para supergravedad con simetría de gauge $SSEPS$ en $(2+1)$ -dimensiones.

Como fue expuesto en el capítulo dos, la forma de Chern-Simons en $(2+1)$ -dimensiones es definido como

$$L_{CS}^{2+1} = 2k \int_0^1 dt \langle A (tdA + t^2 A^2) \rangle = k \left\langle A \left(dA + \frac{2}{3} A^2 \right) \right\rangle, \quad (5.103)$$

donde para nuestro problema la 1-forma conexión esta valuada en la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré (5.43-5.52), luego puede ser escrita como

$$A = \frac{1}{2} \varpi^{ab} \mathbf{N}_{ab} + \frac{1}{2} \omega^{AB} L_{AB} + \psi^\alpha Q'_\alpha = \frac{1}{2} \varpi^{ab} \mathbf{N}_{ab} + \frac{1}{2} \omega^{ab} \mathbf{L}_{ab} + \omega^{a3} \mathbf{L}_{a3} + \psi^\alpha Q'_\alpha. \quad (5.104)$$

Por simplicidad a la hora de calcular, y en analogía al caso no supersimétrico, introducimos la notación $\varpi = \frac{1}{2} \varpi^{ab} \mathbf{N}_{ab}$, $\omega = \frac{1}{2} \omega^{ab} \mathbf{L}_{ab}$, $\varphi = \omega^{a3} \mathbf{L}_{a3}$, $\psi = \psi^\alpha Q'_\alpha$, tal que

$$A = \varpi + \omega + \varphi + \psi. \quad (5.105)$$

Por lo tanto

$$\left\langle A \left(dA + \frac{2}{3} A^2 \right) \right\rangle = \left\langle (\varpi + \omega + \varphi + \psi) \left(d\varpi + d\omega + d\varphi + \psi + \frac{2}{3} (\varpi + \omega + \varphi + \psi)^2 \right) \right\rangle. \quad (5.106)$$

Teniendo en consideración que los únicos tensores invariantes distintos de cero son los de las ecuaciones (5.98-5.102) se llega a que

$$\begin{aligned} \left\langle AdA + \frac{2}{3} A^3 \right\rangle &= \left\langle \varpi d\varpi + \frac{1}{3} \varpi [\varpi, \varpi] \right\rangle \\ &+ \left\langle \omega d\omega + \frac{1}{3} \omega [\omega, \omega] + \varphi d\varphi + \frac{1}{3} \omega [\varphi, \varphi] + \frac{2}{3} \varphi [\omega, \varphi] \right\rangle \\ &+ \left\langle \varphi d\omega + \omega d\varphi + \frac{1}{3} \varphi [\omega, \omega] + \frac{2}{3} \omega [\varphi, \omega] + \frac{1}{3} \varphi [\varphi, \varphi] \right\rangle \\ &+ \left\langle \psi d\psi + \frac{1}{3} \omega \{\psi, \psi\} + \frac{2}{3} \psi [\omega, \psi] + \frac{1}{3} \varphi \{\psi, \psi\} + \frac{2}{3} \psi [\varphi, \psi] \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.107)$$

³Ver teorema VII,2 de [12]

Definiendo las 2-formas curvaturas

$$\tilde{R} = d\varpi + \varpi\varpi = d\varpi + \frac{1}{2}[\varpi, \varpi] \quad (5.108)$$

$$R = d\omega + \omega\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

$$T = d\varphi + [\omega, \varphi] ,$$

e introduciendo la derivada convariante

$$D\psi = d\psi + [A - \psi, \psi] = d\psi + [\varpi, \psi] + [\omega, \psi] + [\varphi, \psi] , \quad (5.109)$$

en la ecuación (5.107) se obtiene que la acción Chern-Simons para la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré, en la base $\{\mathbf{N}_{ab}, \mathbf{L}_{CD}, \mathbf{Q}_\alpha\}$, es

$$\begin{aligned} S_{CS}^{(2+1)} = & k \int \frac{1}{2} \alpha_0 \varpi^a_c \left(d\varpi^c_a + \frac{2}{3} \varpi^c_d \varpi^d_a \right) + \alpha_1 \epsilon_{abc} \left(R^{ab} \omega^{c3} + \frac{1}{3} \omega^{a3} \omega^{b3} \omega^{c3} \right) + (\alpha_1 - \alpha_2) \psi^\alpha D\psi_\alpha \\ & - \alpha_2 D\omega^{a3} \omega^3_a + \frac{1}{2} \alpha_2 \omega^a_c \left(d\omega^c_a + \frac{2}{3} \omega^c_d \omega^d_a \right) - d \left\{ \alpha_1 \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \omega^{ab} \omega^{c3} \right\} , \end{aligned} \quad (5.110)$$

donde además fueron reemplazados los tensores invariantes (5.98-5.102).

Definiendo

$$\omega^{a3} = e^a/l , \text{ y utilizando} \quad (5.111)$$

$$D_\omega \omega^{a3} = (D\omega e^a)/l = T^a/l , \quad (5.112)$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} S_{CS}^{(2+1)} = & k \int \frac{1}{2} \alpha_0 \varpi^a_c \left(d\varpi^c_a + \frac{2}{3} \varpi^c_d \varpi^d_a \right) \\ & + \frac{\alpha_1 k}{l} \left[\int_M \epsilon_{abc} \left(R^{ab} e^c + \frac{1}{3l^2} e^a e^b e^c \right) + \psi^\alpha D\psi_\alpha - \frac{1}{2} \int_{\partial M} \epsilon_{abc} \omega^{ab} e^c \right] \\ & + \frac{1}{2} \alpha_2 k \int \left[\omega^a_c \left(d\omega^c_a + \frac{2}{3} \omega^c_d \omega^d_a \right) + \frac{2}{l^2} e_a T^a - 2\psi^\alpha D\psi_\alpha \right] . \end{aligned} \quad (5.113)$$

Capítulo 6

(Super)-gravedad Chern-Simons de Maxwell

En los capítulos [4] y [5] se consigue conectar mediante el proceso de S -expansión al álgebra y (super)-álgebra Anti-de-Sitter con las álgebras $SSEP$ y $SSEPS$ respectivamente, en ambos casos, bosónico y supersimétrico, los generadores Z_{ab} originales de las álgebras de Maxwell no se encuentran presentes (producto del cambio de base) y no es posible aplicar el límite ($a \rightarrow 0$) en (4.3-4.8) y (5.1-5.10), después de la S -expansión, para reobtener tensores invariantes o un lagrangeano para las álgebras de Maxwell. En el presente capítulo se obtienen acciones tanto para el álgebra como para la superálgebra de Maxwell, en ambos casos se combina el proceso de S -expansión y contracciones de Inönü-Wigner [29]. Para mayores detalles ver referencia [45].

6.1. Una acción para gravedad de Maxwell

En esta sección se revisa el caso no supersimétrico. Como primera etapa se mostrará que el álgebra $SSEP$ con base $\{J_{ab}, Z_{ab}, P_a\}$ se puede obtener como una S -expansión del álgebra Anti-de-Sitter a través del semigrupo $(\{0, 1\}, \wedge)$. En la siguiente etapa se efectuará un reescalamiento en los generadores del álgebra para utilizar una contracción tipo Inönü-Wigner, sin aplicar el límite correspondiente en el parámetro de la contracción. Luego se construirán los tensores invariantes y un lagrangeano Chern-Simons para $SSEP$ para $D = 3$. Finalmente se aplicará el límite correspondiente para, desde los resultados obtenidos para $SSEP$, desembocar en los correspondientes al álgebra de Maxwell.

6.1.1. Álgebra de Maxwell

El álgebra de Maxwell se obtiene al tomar el límite $a \rightarrow 0$ en (4.3-4.8), explícitamente

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] = \eta_{ad}\mathbf{J}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{J}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{J}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{J}_{ac} , \quad (6.1)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \eta_{bc}\mathbf{P}_a - \eta_{ac}\mathbf{P}_b , \quad (6.2)$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] = \mathbf{Z}_{ab} , \quad (6.3)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{ad}\mathbf{Z}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{Z}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{Z}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{Z}_{ac} , \quad (6.4)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_c] = 0 , \quad (6.5)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = 0 . \quad (6.6)$$

Donde se elige $c = +1$. En la referencia [22] se obtuvo una acción a partir de una conexión valuada en el álgebra de Maxwell en $D = 4$, esta acción se presenta como una propuesta a solucionar el problema de la constante cosmológica [25], [26], sin embargo el lagrangeano no es invariante bajo el álgebra de Maxwell sino solo bajo la subálgebra de Lorentz.

6.1.2. SSEP con base $\{J_{ab}, Z_{ab}, P_a\}$ como una S -expansión de AdS

Para conectar el álgebra AdS con el álgebra $SSEP$ (4.3-4.8) utilizaremos un semigrupo de dos elementos conocido como $(\{0, 1\}, \wedge)$.

Semigrupo $(\{0, 1\}, \wedge)$

Existen tres semigrupos abelianos de dos elementos [40],[41], estos son:

- El semigrupo trivial, con número lexicográfico $N = 0$.
- El semigrupo \mathbb{Z}_2 , con número lexicográfico $N = 3$, utilizado en la referencia [13] para conectar mediante S -expansión el álgebra de Lorentz con el álgebra AdS en $D = 3$.
- El semigrupo $(\{0, 1\}, \wedge)$, con número lexicográfico $N = 1$.

La S -expansión generada a través del semigrupo $(\{0, 1\}, \wedge)$ será denotada 1-expansión. Explícitamente este semigrupo tiene la siguiente tabla de Cayley

$$\begin{array}{c|cc} N = 1 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \hline \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_0 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_1 \end{array} \quad (6.7)$$

1-expansión del álgebra AdS

Como punto de partida tenemos el álgebra Anti-de-Sitter $\mathfrak{so}(D - 1, 2)$

$$[\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] = \eta_{ad}\bar{\mathbf{J}}_{bc} + \eta_{bc}\bar{\mathbf{J}}_{ad} - \eta_{ac}\bar{\mathbf{J}}_{bd} - \eta_{bd}\bar{\mathbf{J}}_{ac} \quad (6.8)$$

$$[\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_c] = \eta_{cb}\bar{\mathbf{P}}_a - \eta_{ca}\bar{\mathbf{P}}_b \quad (6.9)$$

$$[\bar{\mathbf{P}}_a, \bar{\mathbf{P}}_b] = \bar{\mathbf{J}}_{ab} . \quad (6.10)$$

En esta S -expansión se elige la misma de separación en subespacios utilizada en el capítulo [4], donde los generadores $\bar{\mathbf{J}}_{ab}$ de rotaciones de Lorentz, subálgebra $\mathfrak{so}(D-1, 1)$, conforman el espacio V_0 y los generadores $\bar{\mathbf{P}}_a$ de los boosts de AdS , conforman el espacio V_1 , así el álgebra \mathfrak{g} de Anti-de-Sitter queda expresada como

$$\mathfrak{g} = V_0 \oplus V_1 , \quad (6.11)$$

la estructura

$$[V_0, V_0] \subset V_0 , \quad (6.12)$$

$$[V_0, V_1] \subset V_1 , \quad (6.13)$$

$$[V_1, V_1] \subset V_0 . \quad (6.14)$$

Es directo demostrar que el semigrupo $(\{0, 1\}, \wedge)$ con tabla de multiplicación (6.7) y partición $S = S_0 \cup S_1$ con

$$S_0 = \{\lambda_0, \lambda_1\} , \quad (6.15)$$

$$S_1 = \{\lambda_0\} , \quad (6.16)$$

satisface las relaciones

$$S_0 \cdot S_0 \subset S_0 \quad (6.17)$$

$$S_0 \cdot S_1 \subset S_1 \quad (6.18)$$

$$S_1 \cdot S_1 \subset S_0 \quad (6.19)$$

y que por lo tanto es resonante con el álgebra AdS en la partición (6.11), (6.12-6.14). Elegidas las particiones y semigrupo se puede construir el álgebra resonante ¹

$$\mathfrak{G}_R = W_0 \oplus W_1 , \quad (6.20)$$

subálgebra de $\mathfrak{G} = (\{0, 1\}, \wedge) \times \mathfrak{so}(D-1, 2)$, donde

$$W_0 = (S_0 \times V_0) = \{\lambda_0, \lambda_1\} \otimes \{\bar{\mathbf{J}}_{ab}\} = \{\lambda_0 \bar{\mathbf{J}}_{ab}, \lambda_1 \bar{\mathbf{J}}_{ab}\}$$

$$W_1 = (S_1 \times V_1) = \{\lambda_0\} \otimes \{\bar{\mathbf{P}}_a\} = \{\lambda_0 \bar{\mathbf{P}}_a\}$$

Renombrando los generadores de la subálgebra resonante como $\mathbf{J}_{ab,0} = \lambda_0 \bar{\mathbf{J}}_{ab}$; $\mathbf{J}_{ab,1} = \lambda_1 \bar{\mathbf{J}}_{ab}$; y $\mathbf{P}_{a,0} = \lambda_0 \bar{\mathbf{P}}_a$, utilizando las relaciones de conmutación del álgebra AdS y la tabla de multiplicación (6.7) se obtiene que

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,0}, \mathbf{J}_{cd,0}] &= \lambda_0 \lambda_0 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] = \lambda_0 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] \\ &= \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc,0} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad,0} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd,0} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac,0} \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,1}, \mathbf{J}_{cd,1}] &= \lambda_1 \lambda_1 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] = \lambda_1 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] \\ &= \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc,1} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad,1} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd,1} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac,1} \end{aligned} \quad (6.22)$$

¹Teorema IV.2 de la referencia [12]

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,0}, \mathbf{J}_{cd,1}] &= \lambda_0 \lambda_1 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] = \lambda_0 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{J}}_{cd}] \\ &= \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc,0} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad,0} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd,0} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac,0} \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,0}, \mathbf{P}_{c,0}] &= \lambda_0 \lambda_0 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_c] = \lambda_0 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_c] \\ &= \eta_{cb} \mathbf{P}_{a,0} - \eta_{ac} \mathbf{P}_{b,0} \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,1}, \mathbf{P}_{c,0}] &= \lambda_1 \lambda_0 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_c] = \lambda_0 [\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_c] \\ &= \eta_{bc} \mathbf{P}_{a,0} - \eta_{ac} \mathbf{P}_{b,0} \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$[\mathbf{P}_{a,0}, \mathbf{P}_{b,0}] = \lambda_0 \lambda_0 [\bar{\mathbf{P}}_a, \bar{\mathbf{P}}_b] = \lambda_0 [\bar{\mathbf{P}}_a, \bar{\mathbf{P}}_b] = \lambda_0 \bar{\mathbf{J}}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,0} \quad (6.26)$$

Renombrando los generadores como $\mathbf{J}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,1}$; $\mathbf{Z}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,0}$; y $\mathbf{P}_a = \mathbf{P}_{a,0}$ se obtiene

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] = \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd} + \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc} , \quad (6.27)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \eta_{cb} \mathbf{P}_a - \eta_{ca} \mathbf{P}_b , \quad (6.28)$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] = \mathbf{Z}_{ab} , \quad (6.29)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{bc} \mathbf{Z}_{ad} - \eta_{bd} \mathbf{Z}_{ac} - \eta_{ac} \mathbf{Z}_{bd} + \eta_{ad} \mathbf{Z}_{bc} , \quad (6.30)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{bc} \mathbf{Z}_{ad} - \eta_{bd} \mathbf{Z}_{ac} - \eta_{ac} \mathbf{Z}_{bd} + \eta_{ad} \mathbf{Z}_{bc} , \quad (6.31)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \eta_{cb} \mathbf{P}_a - \eta_{ca} \mathbf{P}_b , \quad (6.32)$$

La cual es la extensión semisimple del álgebra de Poincaré en su base original $\{\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_a$.

Tensores invariantes para el álgebra $SSEP$

Como se mostro en la sección [3.1.5] es posible construir los tensores invariantes para la álgebra S -expandida a partir de los tensores invariantes del álgebra de partida. Para el caso del álgebra de Anti-de-Sitter se tienen los siguientes tres tensores invariantes

$$\langle \bar{\mathbf{J}}_{ab} \bar{\mathbf{J}}_{cd} \rangle = \bar{\alpha} (\eta_{ad} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bd}) , \quad (6.33)$$

$$\langle \bar{\mathbf{J}}_{ab} \bar{\mathbf{P}}_c \rangle = \bar{\beta} \epsilon_{abc} , \quad (6.34)$$

$$\langle \bar{\mathbf{P}}_a \bar{\mathbf{P}}_b \rangle = \bar{\alpha} \eta_{ab} , \quad (6.35)$$

con $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ constantes arbitrarias. A partir de estos tensores invariantes (6.33-6.35) y la tabla de Cayley del semigrupo $(\{0, 1\}, \wedge)$ (6.7) se obtienen para $SSEP$ los siguientes tensores invariantes

$$\langle \mathbf{J}_{ab} \mathbf{J}_{cd} \rangle = \alpha_1 (\eta_{ad} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bd}) \quad (6.36)$$

$$\langle \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Z}_{cd} \rangle = \alpha_0 (\eta_{ad} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bd}) \quad (6.37)$$

$$\langle \mathbf{J}_{ab} \mathbf{Z}_{cd} \rangle = \alpha_0 (\eta_{ad} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bd}) \quad (6.38)$$

$$\langle \mathbf{J}_{ab} \mathbf{P}_c \rangle = \beta_0 \epsilon_{abc} \quad (6.39)$$

$$\langle \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{P}_c \rangle = \beta_0 \epsilon_{abc} \quad (6.40)$$

$$\langle \mathbf{P}_a \mathbf{P}_b \rangle = \alpha_0 \eta_{ab} , \quad (6.41)$$

donde nuevamente α_0 , α_1 y β_0 son constantes arbitrarias.

6.1.3. Conexión entre el álgebra $SSEP$ y el álgebra de Maxwell vía contracción de IW

Rescalamiento de los generadores del álgebra de Maxwell

Consideraremos los reescalamientos presentados en la referencia [29] para la contracción de Inönü-Wigner, estos son

$$Z_{ab} \rightarrow \lambda^2 Z_{ab} \quad , \quad y \quad P_a \rightarrow \lambda P_a \quad . \quad (6.42)$$

Con estos reescalamientos el álgebra $SSEP$ en las ecuaciones (6.27-6.32) toma la siguiente estructura

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] = \eta_{bc}\mathbf{J}_{ad} - \eta_{bd}\mathbf{J}_{ac} - \eta_{ac}\mathbf{J}_{bd} + \eta_{ad}\mathbf{J}_{bc}, \quad (6.43)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \eta_{cb}\mathbf{P}_a - \eta_{ca}\mathbf{P}_b, \quad (6.44)$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] = \mathbf{Z}_{ab}, \quad (6.45)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \lambda^{-2}(\eta_{bc}\mathbf{Z}_{ad} - \eta_{bd}\mathbf{Z}_{ac} - \eta_{ac}\mathbf{Z}_{bd} + \eta_{ad}\mathbf{Z}_{bc}), \quad (6.46)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{bc}\mathbf{Z}_{ad} - \eta_{bd}\mathbf{Z}_{ac} - \eta_{ac}\mathbf{Z}_{bd} + \eta_{ad}\mathbf{Z}_{bc}, \quad (6.47)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \lambda^{-2}(\eta_{cb}\mathbf{P}_a - \eta_{ca}\mathbf{P}_b), \quad (6.48)$$

la cual en el límite $\lambda^{-1} \rightarrow 0$ ² nos conduce al álgebra de Maxwell (6.1-6.6). No se tomará el límite en el parámetro λ ya que el objetivo es construir un lagrangeano para el álgebra de Maxwell, y para esto resulta necesario tomar el límite luego de construido el lagrangeano correspondiente.

Reescalamiento en los tensores invariantes

Una de las dificultades para construir un lagrangeano Chern-Simons de Maxwell a partir del álgebra $SSEP$ es el hecho de que el límite paramétrico que conecta ambas álgebras generaba lagrangeanos (casi) triviales³. Este problema se puede resolver aprovechando la arbitrariedad de las constantes en los tensores invariantes, reescalándolas junto con los generadores, evitando la anulación de varios términos. Es interesante notar que el reescalamiento que soluciona el problema (de la obtención de lagrangeanos triviales) es *único* y que además genera una estructura “resonante” entre el álgebra y los tensores invariantes, como se mostrará a continuación.

En los tensores invariantes se debe reescalar, además de los generadores, las constantes α_0 y β_0 en (6.36-6.41) de la siguiente manera⁴

$$\alpha_0 \rightarrow \lambda^2 \alpha_0 \quad (6.49)$$

$$\beta_0 \rightarrow \lambda \beta_0 \quad , \quad (6.50)$$

obteniendo

$$\langle \mathbf{J}_{ab} \mathbf{J}_{cd} \rangle = \alpha_1 (\eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}) \quad (6.51)$$

$$\langle \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Z}_{cd} \rangle = \lambda^{-2} \alpha_0 (\eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}) \quad (6.52)$$

$$\langle \mathbf{J}_{ab} \mathbf{Z}_{cd} \rangle = \alpha_0 (\eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}) \quad (6.53)$$

²Este límite es equivalente al límite $a \rightarrow 0$ introducido en la referencia [5]

³Con pocos términos distintos de cero

⁴Teniendo en consideración que la constante α_0 proviene del invariante de Pontrjagin y que la constante β_0 del invariante de Euler, y existiendo una relación cuadrática entre ellos, se podría pensar que la elección del reescalamiento en las constantes contiene un significado geométrico

$$\langle \mathbf{J}_{ab} \mathbf{P}_c \rangle = \beta_0 \epsilon_{abc} \quad (6.54)$$

$$\langle \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{P}_c \rangle = \lambda^{-2} \beta_0 \epsilon_{abc} \quad (6.55)$$

$$\langle \mathbf{P}_a \mathbf{P}_b \rangle = \alpha_0 \eta_{ab} \quad (6.56)$$

Al comparar la estructura de los tensores invariantes en función del parámetro λ en (6.51-6.56) se puede apreciar una especie de resonancia con la estructura del álgebra en (6.43-6.48).

6.1.4. Acción Chern-Simons para el álgebra de Maxwell en $D = 3$

Para la construcción de un lagrangeano con simetría local el álgebra de Maxwell se comienza introduciendo la 1-forma conexión A valuada en el álgebra

$$A = \frac{1}{2} \omega^{ab} \mathbf{J}_{ab} + \frac{1}{2} B^{ab} \mathbf{Z}_{ab} + \frac{1}{l} e^a \mathbf{P}_a . \quad (6.57)$$

Donde $\omega^{ab} = \omega_\mu^{ab} dx^{\mu}$ es la 1-forma conexión de espín, $e^a = e_\mu^a dx^\mu$ el vielbein y $B^{ab} = B_\mu^{ab} dx^{\mu}$ el campo de gauge correspondiente al generador Z_{ab} . En $D = 3$ el lagrangeano Chern-Simons viene dado por [34, 35]

$$L_{CS}^{2+1} = k \left\langle A \left(dA + \frac{2}{3} A^2 \right) \right\rangle \quad (6.58)$$

donde en este caso $\langle \dots \rangle$ representa una forma, en este caso, bilineal en los generadores, simétrica e invariante bajo la acción del grupo. Evaluando (6.57) en (6.130) y utilizando los tensores invariantes (6.51-6.56) obtenidos mediante el proceso de S -expansión

$$\begin{aligned} S_{CS}^{(2+1)} = \int L_{CS}^{(2+1)} = k \int \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} \left[\left(R^{ab} + \frac{\lambda^{-2}}{3l^2} e^a e^b \right) e^c + \lambda^{-2} (dB^{ab} + \lambda^{-2} B_a^d B^{db} + 2\omega_a^d B^{db}) e^c \right] \\ + \alpha_0 \left[B_b^a (R_a^b + \lambda^{-2} \omega_b^c B_c^a) + \frac{1}{l^2} e^a (T^a + \lambda^{-2} B_a^b e_b) \right] \\ + \frac{\lambda^{-2}}{2} \left(B_b^a dB_a^b + \frac{2\lambda^{-2}}{3} B_b^a B_c^b B_c^a \right) + \frac{\alpha_1}{2} \left(\omega_b^a d\omega_a^b + \frac{2}{3} \omega_b^a \omega_c^b \omega_c^a \right) \\ - \frac{1}{2} d \left(\alpha_0 \omega_b^a B_a^b + \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} \omega^{ab} e^c + \frac{\lambda^{-2} \beta_0}{l} \epsilon_{abc} B^{ab} e^c \right) . \end{aligned} \quad (6.59)$$

donde

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega_a^d \omega^{db} , \quad (6.60)$$

$$T^a = de_a + \omega_a^b e_b . \quad (6.61)$$

Tomando el límite $\lambda \rightarrow 1$ se obtiene una acción para gravedad invariante bajo el álgebra $SSEP$ en su base original, que puede ser comparada con aquella presentada en referencia [28], la cual en este caso viene dada por

$$\begin{aligned} S_{CS}^{(2+1)} = k \int \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} \left(R^{ab} + F^{ab} + \frac{1}{3l^2} e^a e^b \right) e^c + \frac{\alpha_1}{2} \left(\omega_b^a d\omega_a^b + \frac{2}{3} \omega_b^a \omega_c^b \omega_c^a \right) \\ + \alpha_0 \left[B_b^a (R_a^b + \omega_b^c B_c^a) + \frac{1}{l^2} e^a (T^a + B_a^b e_b) + \frac{1}{2} \left(B_b^a dB_a^b + \frac{2}{3} B_b^a B_c^b B_c^a \right) \right] \\ - \frac{1}{2} d \left(\alpha_0 \omega_b^a B_a^b + \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} \omega^{ab} e^c + \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} B^{ab} e^c \right) . \end{aligned} \quad (6.62)$$

donde

$$F^{ab} \equiv dB^{ab} + B^a{}_dB^{db} + 2\omega^a{}_dB^{db} . \quad (6.63)$$

Finalmente tomando el $\lambda^{-1} \rightarrow 0$ obtenemos la acción invariante para el álgebra de Maxwell

$$\begin{aligned} S_{CS}^{2+1} = k \int \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} R^{ab} e^c + \alpha_0 \left(B^a{}_b R^b{}_a + \frac{1}{l^2} e^a T_a \right) + \frac{\alpha_1}{2} \left(\omega^a{}_b d\omega^b{}_a + \frac{2}{3} \omega^a{}_b \omega^b{}_c \omega^c{}_a \right) \\ - \frac{1}{2} d \left(\alpha_0 \omega^a{}_b B^b{}_a + \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} \omega^{ab} e^c \right) . \end{aligned} \quad (6.64)$$

Esta fue acción obtenida también mediante el método de S -expansión para el caso $D = 5$ utilizando el semigrupo $S_E^{(2)}$ sobre el álgebra AdS_5 en referencia [42], para $D = 3$ el cálculo es directo. A pesar de que el método presentado en este capítulo es más extenso, tiene la ventaja de que es directamente generalizable al caso supersimétrico, como se mostrará a continuación.



6.1.5. Superálgebra de Maxwell $\mathcal{N} = 1$

La superálgebra de Maxwell se obtiene al tomar el límite $a \rightarrow 0$ en (5.1-5.10), explícitamente viene dada por

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] = \eta_{ad}\mathbf{J}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{J}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{J}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{J}_{ac} \quad (6.65)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \eta_{bc}\mathbf{P}_a - \eta_{ac}\mathbf{P}_b \quad (6.66)$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] = \mathbf{Z}_{ab} \quad (6.67)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{ad}\mathbf{Z}_{bc} + \eta_{bc}\mathbf{Z}_{ad} - \eta_{ac}\mathbf{Z}_{bd} - \eta_{bd}\mathbf{Z}_{ac} \quad (6.68)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_c] = 0 \quad (6.69)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = 0 \quad (6.70)$$

$$\{\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta\} = \frac{1}{2} (\sigma^{ab}C)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{ab} \quad (6.71)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Q}_\alpha] = -(\sigma_{ab}\mathbf{Q})_\alpha \quad (6.72)$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}_\alpha] = 0 \quad (6.73)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Q}_\alpha] = 0, \quad (6.74)$$

Donde se elige $c = +1$ y $d = -\frac{1}{2}$, y donde $\sigma_{ab} = \frac{1}{4} [\Gamma_a, \Gamma_b]$, con Γ_a matrices de Dirac.

En referencia [22] se proponen generalizar su resultado, no supersimétrico, en $D = 4$ a una acción invariante bajo la superálgebra de Maxwell propuesta en [6], la cual posee a diferencia del álgebra (-) dos cargas supersimétricas en lugar de una.

6.1.6. $SSEPS$ con base $\{J_{ab}, Z_{ab}, P_a, Q_\alpha\}$ como una S -expansión de $SAdS$

Para conectar mediante S -expansión la superálgebra de AdS con la superálgebra $SSEPS$ se utilizará el mismo semigrupo que para el caso no supersimétrico, es decir el semigrupo $(\{0, 1\}, \wedge)$.

1-expansión del álgebra $SAdS$

Como punto de partida tenemos el álgebra Anti-de-Sitter $\mathcal{N} = 1^5$, generada por $\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{Q}}$ donde

$$[\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] = \eta_{bc}\tilde{\mathbf{J}}_{ad} - \eta_{bd}\tilde{\mathbf{J}}_{ac} - \eta_{ac}\tilde{\mathbf{J}}_{bd} + \eta_{ad}\tilde{\mathbf{J}}_{bc},$$

$$[\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{P}}_c] = \eta_{cb}\tilde{\mathbf{P}}_a - \eta_{ca}\tilde{\mathbf{P}}_b,$$

$$[\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{P}}_b] = \tilde{\mathbf{J}}_{ab},$$

$$[\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{Q}}] = -\sigma_{ab}\tilde{\mathbf{Q}},$$

$$[\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{Q}}] = -\frac{1}{2}\gamma_a\tilde{\mathbf{Q}},$$

$$\{\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha, \tilde{\mathbf{Q}}_\beta\} = \frac{1}{2} \left[(\sigma^{ab}C)_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{J}}_{ab} - (\gamma^a C)_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{P}}_a \right].$$

⁵Isomorfa a $\mathfrak{osp}(2|1) \otimes \mathfrak{sp}(2)$ en $D = 3$

En este caso se elige la misma de separación en subespacios utilizada en el capítulo [5], donde los generadores $\tilde{\mathbf{J}}_{ab}$ de las rotaciones de Lorentz, subálgebra $\mathfrak{so}(D-1, 1)$, conforman el espacio V_0 , los generadores de supersimetría \mathbf{Q}'_α el espacio V_1 y los boost de AdS $\tilde{\mathbf{P}}_a$ el espacio V_2 , así el álgebra \mathfrak{g} de Anti-de-Sitter en $D = 3$ queda expresada como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(2|1) \otimes sp(2) = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 . \quad (6.75)$$

La superálgebra de Anti-de-Sitter en función de los subespacios es de la forma

$$\begin{aligned} [V_0, V_0] &\subset V_0, & [V_0, V_2] &\subset V_2, & [V_2, V_2] &\subset V_0, \\ [V_0, V_1] &\subset V_1, & [V_2, V_1] &\subset V_1, & [V_1, V_1] &\subset V_0 \oplus V_2. \end{aligned} \quad (6.76)$$

En este caso la partición para el semigrupo $(\{0, 1\}, \wedge)$ es de la siguiente manera: $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ con

$$S_0 = \{\lambda_0, \lambda_1\}, \quad (6.77)$$

$$S_1 = \{\lambda_0\} \quad (6.78)$$

$$S_2 = \{\lambda_0\}, \quad (6.79)$$

la cual es directo demostrar esta en resonancia con la partición elegida de la superálgebra de AdS (6.75).

Elegidas las particiones y el semigrupo se puede construir el álgebra resonante ⁶

$$\mathfrak{G}_R = W_0 \oplus W_1 \oplus W_2, \quad (6.80)$$

subálgebra de $\mathfrak{G} = (\{0, 1\}, \wedge) \times SAdS$, donde

$$W_0 = (S_0 \times V_0) = \{\lambda_0, \lambda_1\} \otimes \{\tilde{\mathbf{J}}\} = \{\lambda_0 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \lambda_1 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}\}$$

$$W_1 = (S_1 \times V_1) = \{\lambda_0\} \otimes \{\tilde{\mathbf{P}}_a\} = \{\lambda_0 \tilde{\mathbf{P}}_a\}$$

$$W_2 = (S_2 \times V_2) = \{\lambda_0\} \otimes \{\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha\} = \{\lambda_0 \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha\}$$

Renombrando los generadores de la subálgebra resonante como $\mathbf{J}_{ab,0} = \lambda_0 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}$; $\mathbf{J}_{ab,1} = \lambda_1 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}$; $\mathbf{Q}_{\alpha,0} = \lambda_0 \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha$; y $\mathbf{P}_{a,0} = \lambda_0 \tilde{\mathbf{P}}_a$, utilizando las relaciones de conmutación de la superálgebra AdS y la tabla de multiplicación (6.7) se obtiene que

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,0}, \mathbf{J}_{cd,0}] &= \lambda_0 \lambda_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] = \lambda_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] \\ &= \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc,0} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad,0} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd,0} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac,0} \end{aligned} \quad (6.81)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{ab,1}, \mathbf{J}_{cd,1}] &= \lambda_1 \lambda_1 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] = \lambda_1 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] \\ &= \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc,1} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad,1} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd,1} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac,1} \end{aligned} \quad (6.82)$$

⁶Teorema IV.2 de la referencia [12]

$$\begin{aligned}
[\mathbf{J}_{ab,0}, \mathbf{J}_{cd,1}] &= \lambda_0 \lambda_1 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] = \lambda_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] \\
&= \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc,0} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad,0} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd,0} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac,0}
\end{aligned} \tag{6.83}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{J}_{ab,0}, \mathbf{P}_{c,0}] &= \lambda_0 \lambda_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{P}}_c] = \lambda_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{P}}_c] \\
&= \eta_{cb} \mathbf{P}_{a,0} - \eta_{ac} \mathbf{P}_{b,0}
\end{aligned} \tag{6.84}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{J}_{ab,1}, \mathbf{P}_{c,0}] &= \lambda_1 \lambda_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{P}}_c] = \lambda_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{P}}_c] \\
&= \eta_{bc} \mathbf{P}_{a,0} - \eta_{ac} \mathbf{P}_{b,0}
\end{aligned} \tag{6.85}$$

$$[\mathbf{P}_{a,0}, \mathbf{P}_{b,0}] = \lambda_0 \lambda_0 [\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{P}}_b] = \lambda_0 [\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{P}}_b] = \lambda_0 \tilde{\mathbf{J}}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,0} \tag{6.86}$$

$$[\mathbf{J}_{ab,0}, \mathbf{Q}_{\alpha,0}] = \lambda_0 \lambda_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha}] = \lambda_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha}] = -(\sigma_{ab} \mathbf{Q}_0)_{\alpha}$$

$$[\mathbf{J}_{ab,1}, \mathbf{Q}_{\alpha,0}] = \lambda_1 \lambda_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha}] = \lambda_0 [\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha}] \tag{6.87}$$

$$= -(\sigma_{ab} \mathbf{Q}_0)_{\alpha}$$

$$[\mathbf{P}_{a,0}, \mathbf{Q}_{\alpha,0}] = \lambda_0 \lambda_0 [\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha}] = \lambda_0 [\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha}] \tag{6.88}$$

$$= -\frac{1}{2} (\gamma^a \mathbf{Q}_0)_{\alpha}$$

$$\{\mathbf{Q}_{\alpha,0}, \mathbf{Q}_{\beta,0}\} = \lambda_0 \lambda_0 \{\tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta}\} = \lambda_0 \{\tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha}, \tilde{\mathbf{Q}}_{\beta}\} \tag{6.89}$$

$$= \frac{1}{2} [(\sigma^{ab} C)_{\alpha\beta} \mathbf{J}_{ab,0} - (\gamma^a C)_{\alpha\beta} \mathbf{P}_{a,0}]$$

Renombrando los generadores como $\mathbf{J}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,1}$; $\mathbf{Z}_{ab} = \mathbf{J}_{ab,0}$; $\mathbf{Q}_{\alpha} = \mathbf{Q}_{\alpha,0}$; y $\mathbf{P}_a = \mathbf{P}_{a,0}$ se obtiene

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] = \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac} \tag{6.90}$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \eta_{bc} \mathbf{P}_a - \eta_{ac} \mathbf{P}_b \tag{6.91}$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] = \mathbf{Z}_{ab} \tag{6.92}$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{ad} \mathbf{Z}_{bc} + \eta_{bc} \mathbf{Z}_{ad} - \eta_{ac} \mathbf{Z}_{bd} - \eta_{bd} \mathbf{Z}_{ac} \tag{6.93}$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \eta_{bc} \mathbf{P}_a - \eta_{ac} \mathbf{P}_b \tag{6.94}$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{ad} \mathbf{Z}_{bc} + \eta_{bc} \mathbf{Z}_{ad} - \eta_{ac} \mathbf{Z}_{bd} - \eta_{bd} \mathbf{Z}_{ac} \tag{6.95}$$

$$\{\mathbf{Q}_{\alpha}, \mathbf{Q}_{\beta}\} = \frac{1}{2} [(\sigma^{ab} C)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{ab} - (\gamma^a C)_{\alpha\beta} \mathbf{P}_a] \tag{6.96}$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Q}_{\alpha}] = -(\sigma_{ab} \mathbf{Q})_{\alpha} \tag{6.97}$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}_{\alpha}] = -\frac{1}{2} (\gamma^a \mathbf{Q})_{\alpha} \tag{6.98}$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Q}_{\alpha}] = -(\sigma_{ab} \mathbf{Q})_{\alpha} , \tag{6.99}$$

La cual es la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré en su base original $\{\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_a, \mathbf{Q}_\alpha\}$.

Tensores invariantes para el álgebra $SSEP$

Se sabe que el álgebra de Anti-de-Sitter posee los siguientes tensores invariantes [38]

$$\langle \bar{\mathbf{J}}_{ab} \bar{\mathbf{J}}_{cd} \rangle = \bar{\alpha} (\eta_{ad} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bd}) , \quad (6.100)$$

$$\langle \bar{\mathbf{J}}_{ab} \bar{\mathbf{P}}_c \rangle = \bar{\beta} \epsilon_{abc} , \quad (6.101)$$

$$\langle \bar{\mathbf{P}}_a \bar{\mathbf{P}}_b \rangle = \bar{\alpha} \eta_{ab} , \quad (6.102)$$

$$\langle \bar{\mathbf{Q}}_\alpha \bar{\mathbf{Q}}_\beta \rangle = (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) C_{\alpha\beta} . \quad (6.103)$$

con $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ constantes arbitrarias. A partir de estos tensores invariantes (6.100-6.103) y la tabla de Cayley del semigrupo $(\{0, 1\}, \wedge)$ (6.7) se obtienen para $SSEPS$ los siguientes tensores invariantes

$$\langle \mathbf{J}_{ab} \mathbf{J}_{cd} \rangle = \alpha_1 (\eta_{ad} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bd}) \quad (6.104)$$

$$\langle \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Z}_{cd} \rangle = \alpha_0 (\eta_{ad} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bd}) \quad (6.105)$$

$$\langle \mathbf{J}_{ab} \mathbf{Z}_{cd} \rangle = \alpha_0 (\eta_{ad} \eta_{bc} - \eta_{ac} \eta_{bd}) \quad (6.106)$$

$$\langle \mathbf{J}_{ab} \mathbf{P}_c \rangle = \beta_0 \epsilon_{abc} \quad (6.107)$$

$$\langle \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{P}_c \rangle = \beta_0 \epsilon_{abc} \quad (6.108)$$

$$\langle \mathbf{P}_a \mathbf{P}_b \rangle = \alpha_0 \eta_{ab} \quad (6.109)$$

$$\langle \mathbf{Q}_\alpha \mathbf{Q}_\beta \rangle = (\alpha_0 - \beta_0) C_{\alpha\beta} , \quad (6.110)$$

Donde nuevamente α_0 , α_1 y β_0 son constantes arbitrarias.

6.1.7. Superálgebra de Maxwell vía contracción de IW de la superálgebra $SSEPS$

Rescalamiento de los generadores de la superálgebra de Maxwell

Consideraremos los rescalamientos presentados en la referencia [29] para la contracción de Inönü-Wigner, estos son

$$Z_{ab} \rightarrow \lambda^2 Z_{ab} , \quad P_a \rightarrow \lambda P_a , \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}_\alpha \rightarrow \lambda \mathbf{Q}_\alpha . \quad (6.111)$$

Con estos reescalamientos la superálgebra $SSEPS$ en las ecuaciones (-) toma la siguiente estructura

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] = \eta_{bc}\mathbf{J}_{ad} - \eta_{bd}\mathbf{J}_{ac} - \eta_{ac}\mathbf{J}_{bd} + \eta_{ad}\mathbf{J}_{bc}, \quad (6.112)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \eta_{cb}\mathbf{P}_a - \eta_{ca}\mathbf{P}_b, \quad (6.113)$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] = \mathbf{Z}_{ab}, \quad (6.114)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \lambda^{-2}(\eta_{bc}\mathbf{Z}_{ad} - \eta_{bd}\mathbf{Z}_{ac} - \eta_{ac}\mathbf{Z}_{bd} + \eta_{ad}\mathbf{Z}_{bc}), \quad (6.115)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{bc}\mathbf{Z}_{ad} - \eta_{bd}\mathbf{Z}_{ac} - \eta_{ac}\mathbf{Z}_{bd} + \eta_{ad}\mathbf{Z}_{bc}, \quad (6.116)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \lambda^{-2}(\eta_{cb}\mathbf{P}_a - \eta_{ca}\mathbf{P}_b), \quad (6.117)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Q}_\alpha] = -(\sigma_{ab}\mathbf{Q})_\alpha, \quad (6.118)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Q}_\alpha] = -\lambda^{-2}(\sigma_{ab}\mathbf{Q})_\alpha, \quad (6.119)$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}_\alpha] = -\frac{\lambda^{-1}}{2}(\gamma_a\mathbf{Q})_\alpha, \quad (6.120)$$

$$\{\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta\} = \frac{1}{2} \left[(\sigma^{ab}C)_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{ab} - \lambda^{-1} (\gamma^a C)_{\alpha\beta} \mathbf{P}_a \right]. \quad (6.121)$$

la cual en el límite $\lambda^{-1} \rightarrow 0$ ⁷ nos conduce a la superálgebra de Maxwell (6.1.5-6.1.5). Al igual que en el caso no supersimétrico el límite en el parámetro λ no será tomado hasta después de la construcción del lagrangeano Chern-Simons.

Reescalamiento en los tensores invariantes

Al igual que en el caso anterior los tensores invariantes serán reescalados, además de por los generadores, por las constantes α_0 y β_0 , el reescalamiento en las constantes es el mismo aplicado en el caso no supersimétrico (6.49, 6.50), junto al reescalamiento en los generadores (6.111) los tensores invariantes toman la siguiente estructura

$$\langle \mathbf{J}_{ab}\mathbf{J}_{cd} \rangle = \alpha_1 (\eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}) \quad (6.122)$$

$$\langle \mathbf{Z}_{ab}\mathbf{Z}_{cd} \rangle = \lambda^{-2}\alpha_0 (\eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}) \quad (6.123)$$

$$\langle \mathbf{J}_{ab}\mathbf{Z}_{cd} \rangle = \alpha_0 (\eta_{ad}\eta_{bc} - \eta_{ac}\eta_{bd}) \quad (6.124)$$

$$\langle \mathbf{J}_{ab}\mathbf{P}_c \rangle = \beta_0 \epsilon_{abc} \quad (6.125)$$

$$\langle \mathbf{Z}_{ab}\mathbf{P}_c \rangle = \lambda^{-2}\beta_0 \epsilon_{abc} \quad (6.126)$$

$$\langle \mathbf{P}_a\mathbf{P}_b \rangle = \alpha_0 \eta_{ab} \quad (6.127)$$

$$\langle \mathbf{Q}_\alpha\mathbf{Q}_\beta \rangle = (\alpha_0 - \lambda^{-1}\beta_0)C_{\alpha\beta}, \quad (6.128)$$

Al comparar la estructura de los tensores invariantes en función del parámetro λ en (6.122-6.128) se puede apreciar, al igual que en el caso no supersimétrico, una especie de resonancia con la estructura del álgebra en (6.112-6.121).

⁷Este límite es equivalente al límite $a \rightarrow 0$ introducido en la referencia [5]

6.1.8. Acción Chern-Simons para el álgebra de Maxwell en $D = 3$

Para la construcción de un lagrangeano con simetría local la superálgebra de Maxwell se comienza introduciendo la 1-forma conexión A valuada en el álgebra

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}\mathbf{J}_{ab} + \frac{1}{2}B^{ab}\mathbf{Z}_{ab} + \frac{1}{l}e^a\mathbf{P}_a + \psi^\alpha Q_\alpha . \quad (6.129)$$

Donde $\omega^{ab} = \omega_\mu^{ab}dx^{\mu}$ es la 1-forma conexión de espín, $e^a = e_\mu^a dx^\mu$ el vielbein, $\psi^\alpha = \psi_\mu^\alpha dx^\mu$ el campo gravitino y $B^{ab} = B_\mu^{ab}dx^{\mu}$ el campo de gauge correspondiente al generador Z_{ab} . Considerando esta conexión junto a la superálgebra (6.112-6.121) en el lagrangeano Chern-Simons $D = 3$

$$L_{CS}^{2+1} = k \left\langle A \left(dA + \frac{2}{3}A^2 \right) \right\rangle \quad (6.130)$$

Y utilizando los tensores invariantes (6.122-6.128) se obtiene

$$\begin{aligned} S_{CS}^{(2+1)} = \int L_{CS}^{(2+1)} = k \int \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} \left[\left(R^{ab} + \frac{\lambda^{-2}}{3l^2} e^a e^b \right) e^c + \lambda^{-2} (dB^{ab} + \lambda^{-2} B_a^d B^{db} + 2\omega_a^d B^{db}) e^c \right] \\ + \alpha_0 \left[B_a^b (R_a^b + \lambda^{-2} \omega_c^b B_a^c) + \frac{1}{l^2} e^a (T_a + \lambda^{-2} B_a^b e^b) \right. \\ \left. + \frac{\lambda^{-2}}{2} \left(B_b^a dB_a^b + \frac{2\lambda^{-2}}{3} B_b^a B_c^b B_a^c \right) \right] + \frac{\alpha_1}{2} \left(\omega_b^a d\omega_a^b + \frac{2}{3} \omega_b^a \omega_c^b \omega_a^c \right) \\ + (\lambda^{-1} \beta_0 - \alpha_0) \psi^\alpha \left(d\psi_\alpha + \frac{1}{4} \omega^{ab} (\Gamma_{ab})_\alpha^\beta \psi_\beta + \frac{\lambda^{-2}}{4} B^{ab} (\Gamma_{ab})_\alpha^\beta \psi_\beta + \frac{\lambda^{-1}}{2l} e^a (\Gamma_a)_\alpha^\beta \psi_\beta \right) \\ - \frac{1}{2} d \left(\alpha_0 \omega_b^a B_a^b + \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} \omega^{ab} e^c + \frac{\lambda^{-2} \beta_0}{l} \epsilon_{abc} B^{ab} e^c \right) . \end{aligned} \quad (6.131)$$

donde

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega_a^d \omega^{db} , \quad (6.132)$$

$$T^a = de_a + \omega_a^b e_b . \quad (6.133)$$

Tomando el límite $\lambda \rightarrow 1$ se obtiene una acción para gravedad invariante bajo la superálgebra $SSEPS$ en su base original, explícitamente

$$\begin{aligned} S_{CS}^{2+1} = k \int \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} \left(R^{ab} + F^{ab} + \frac{1}{3l^2} e^a e^b \right) e^c \\ + \alpha_0 \left[B_a^b (R_a^b + \omega_c^b B_a^c) + \frac{1}{l^2} e^a (T_a + B_a^b e^b) + \frac{1}{2} \left(B_b^a dB_a^b + \frac{2}{3} B_b^a B_c^b B_a^c \right) \right] \\ + (\beta_0 - \alpha_0) \psi^\alpha D\psi_\alpha + \frac{\alpha_1}{2} \left(\omega_b^a d\omega_a^b + \frac{2}{3} \omega_b^a \omega_c^b \omega_a^c \right) \\ - \frac{1}{2} d \left(\alpha_0 \omega_b^a B_a^b + \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} \omega^{ab} e^c + \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} B^{ab} e^c \right) . \end{aligned} \quad (6.134)$$

donde

$$F^{ab} \equiv dB^{ab} + B_a^d B^{db} + 2\omega_a^d B^{db} \quad (6.135)$$

$$D \equiv d + \frac{1}{4} \omega^{ab} \Gamma_{ab} + \frac{1}{4} B^{ab} \Gamma_{ab} + \frac{1}{2l} e^a \Gamma_a . \quad (6.136)$$

Finalmente tomando el $\lambda^{-1} \rightarrow 0$ obtenemos la acción invariante para la superálgebra de Maxwell

$$S_{CS}^{2+1} = k \int \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} R^{ab} e^c + \alpha_0 \left(B_b^a R_a^b + \frac{1}{l^2} e^a T_a - \psi^\alpha D_\omega \psi_\alpha \right) \\ + \frac{\alpha_1}{2} \left(\omega_b^a d\omega_a^b + \frac{2}{3} \omega_b^a \omega_c^b \omega_a^c \right) - \frac{1}{2} d \left(\alpha_0 \omega_b^a B_a^b + \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} \omega^{ab} e^c \right) .$$

donde

$$D_\omega = d + \frac{1}{4} \omega^{ab} \Gamma_{ab} . \quad (6.137)$$

6.2. Superálgebra de Maxwell $\mathcal{N}=2$ a partir de $\mathfrak{osp}(4|1)$ en $D=4$

En esta sección se obtiene la superálgebra de Maxwell $\mathcal{N}=2$ para $D=4$ propuesta en la referencia [22] a partir de la superálgebra de Anti-de-Sitter $\mathcal{N}=1$ en la misma dimensión

6.2.1. Superálgebra de AdS $\mathfrak{osp}(4|1)$

Para el caso en $D=4$ se utilizará como punto de partida la superálgebra de AdS $\mathfrak{osp}(4|1)$ dada por ⁸

$$\begin{aligned} [\tilde{J}_{ab}, \tilde{J}_{cd}] &= \eta_{bc} \tilde{J}_{ad} - \eta_{bd} \tilde{J}_{ac} - \eta_{ac} \tilde{J}_{bd} + \eta_{ad} \tilde{J}_{bc}, \\ [\tilde{J}_{ab}, \tilde{P}_c] &= \eta_{cb} \tilde{P}_a - \eta_{ca} \tilde{P}_b, \\ [\tilde{P}_a, \tilde{P}_b] &= \tilde{J}_{ab}, \\ [\tilde{J}_{ab}, \tilde{Q}] &= -\sigma_{ab} \tilde{Q}, \\ [\tilde{P}_a, \tilde{Q}] &= -\frac{1}{2} \Gamma_a \tilde{Q}, \\ \{\tilde{Q}_\alpha, \tilde{Q}^\beta\} &= (\Gamma^a)_\alpha{}^\beta \tilde{P}_a - (\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta \tilde{J}_{ab}. \end{aligned}$$

Introduciendo los generadores espinoriales derecho e izquierdo

$$\tilde{Q}_\alpha^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm i\Gamma_*) \tilde{Q}_\alpha , \quad (6.138)$$

$$\tilde{Q}^{\pm, \alpha} = \frac{1}{2} \tilde{Q}^\alpha (1 \mp i\Gamma_*) , \quad (6.139)$$

⁸El anticonmutador se diferencia de aquel utilizado en la sección anterior (??) solo en un factor $-\frac{1}{2}$ al lado derecho.

en esta base la superálgebra de Anti-de-Sitter toma la forma

$$\begin{aligned}
[\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{J}}_{cd}] &= \eta_{bc}\tilde{\mathbf{J}}_{ad} - \eta_{bd}\tilde{\mathbf{J}}_{ac} - \eta_{ac}\tilde{\mathbf{J}}_{bd} + \eta_{ad}\tilde{\mathbf{J}}_{bc}, \\
[\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{P}}_c] &= \eta_{cb}\tilde{\mathbf{P}}_a - \eta_{ca}\tilde{\mathbf{P}}_b, \\
[\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{P}}_b] &= \tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \\
[\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^+] &= -\sigma_{ab}\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^+, \\
[\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^-] &= -\sigma_{ab}\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^-, \\
[\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^+] &= -\frac{1}{2}\Gamma_a\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^-, \\
[\tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^-] &= -\frac{1}{2}\Gamma_a\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^+, \\
\{\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^-, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^{-,\beta}\} &= (\Gamma^{a,-})_\alpha^\beta \tilde{\mathbf{P}}_a, \\
\{\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^+, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^{+,\beta}\} &= (\Gamma^{a,+})_\alpha^\beta \tilde{\mathbf{P}}_a, \\
\{\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^+, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^{-,\beta}\} &= -(\sigma^{ab,+})_\alpha^\beta \tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \\
\{\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^-, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^{+,\beta}\} &= -(\sigma^{ab,+})_\alpha^\beta \tilde{\mathbf{J}}_{ab}.
\end{aligned}$$

6.2.2. S -expansión de la superálgebra AdS

Para la obtención de la superálgebra de Maxwell se utilizará el semigrupo $S_E^{(4)}$, con tabla de multiplicación

	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
λ_0	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
λ_1	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_5
λ_2	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_5	λ_5
λ_3	λ_3	λ_4	λ_5	λ_5	λ_5	λ_5
λ_4	λ_4	λ_5	λ_5	λ_5	λ_5	λ_5
λ_5						

(6.140)

y partición

$$S_0 = \{\lambda_0, \lambda_4, \lambda_5\}, \quad (6.141)$$

$$S_1 = \{\lambda_1, \lambda_5\}, \quad (6.142)$$

$$S_2 = \{\lambda_2, \lambda_5\}, \quad (6.143)$$

$$S_3 = \{\lambda_3, \lambda_5\}. \quad (6.144)$$

Para la superálgebra AdS la separación en subespacios es de la siguiente manera: $SAdS = G = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, donde V_0 corresponde a la subálgebra de Lorentz $\mathfrak{so}(3,1)$ generada por $\tilde{\mathbf{J}}_{ab}$, V_1 corresponde a las traslaciones de supersimetría derechas generadas por $\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^+$, V_2 corresponde a los boosts de AdS generados por $\tilde{\mathbf{P}}_a$ y V_3 corresponde a las traslaciones de supersimetría izquierdas generadas por $\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^-$. Con esta partición en subespacios la superálgebra de AdS está en resonancia con la partición (6.141-6.144) del semigrupo $S_E^{(4)}$.

Luego

$$\mathfrak{G}_R = W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3, \quad (6.145)$$

es una subálgebra resonante de $S_E^{(4)} \times \mathfrak{g}$,⁹ donde

$$W_0 = (S_0 \times V_0) = \{\lambda_0, \lambda_4, \lambda_5\} \otimes \{\tilde{\mathbf{J}}_{ab}\} = \{\lambda_0 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \lambda_4 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \lambda_5 \tilde{\mathbf{J}}_{ab}\}, \quad (6.146)$$

$$W_1 = (S_1 \times V_1) = \{\lambda_1, \lambda_5\} \otimes \{\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^+\} = \{\lambda_1 \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^+, \lambda_5 \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^+\}, \quad (6.147)$$

$$W_2 = (S_2 \times V_2) = \{\lambda_3, \lambda_5\} \otimes \{\tilde{\mathbf{P}}_a\} = \{\lambda_3 \tilde{\mathbf{P}}_a, \lambda_5 \tilde{\mathbf{P}}_a\}, \quad (6.148)$$

$$W_3 = (S_3 \times V_3) = \{\lambda_3, \lambda_5\} \otimes \{\tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^-\} = \{\lambda_3 \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^-, \lambda_5 \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^-\}. \quad (6.149)$$

Finalmente sobre la subálgebra resonante \mathfrak{G}_R aplicamos 0_S -reducción $\lambda_5 \times \mathfrak{g} = 0_{\mathfrak{G}_R}$, y realizamos la siguiente identificación

$$\lambda_0 \tilde{\mathbf{J}}_{ab} \rightarrow \mathbf{J}_{ab} \quad (6.150)$$

$$\lambda_4 \tilde{\mathbf{J}}_{ab} \rightarrow \mathbf{Z}_{ab} \quad (6.151)$$

$$\lambda_1 \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^+ \rightarrow \mathbf{Q}_\alpha \quad (6.152)$$

$$\lambda_2 \tilde{\mathbf{P}}_a \rightarrow \mathbf{P}_a \quad (6.153)$$

$$\lambda_3 \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha^- \rightarrow \Sigma_\alpha. \quad (6.154)$$

La que nos conduce a la superálgebra de Maxwell $\mathcal{N}=2$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] = \eta_{ad} \mathbf{J}_{bc} + \eta_{bc} \mathbf{J}_{ad} - \eta_{ac} \mathbf{J}_{bd} - \eta_{bd} \mathbf{J}_{ac} \quad (6.155)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_c] = \eta_{bc} \mathbf{P}_a - \eta_{ac} \mathbf{P}_b \quad (6.156)$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] = \mathbf{Z}_{ab} \quad (6.157)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = \eta_{ad} \mathbf{Z}_{bc} + \eta_{bc} \mathbf{Z}_{ad} - \eta_{ac} \mathbf{Z}_{bd} - \eta_{bd} \mathbf{Z}_{ac} \quad (6.158)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_c] = 0 \quad (6.159)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_{cd}] = 0 \quad (6.160)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Q}] = -\sigma_{ab} \mathbf{Q} \quad (6.161)$$

$$[\mathbf{J}_{ab}, \Sigma] = -\sigma_{ab} \Sigma \quad (6.162)$$

$$[\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}] = -\frac{1}{2} \Gamma_a \Sigma \quad (6.163)$$

$$[\mathbf{P}_a, \Sigma] = 0 \quad (6.164)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Q}] = 0 \quad (6.165)$$

$$[\mathbf{Z}_{ab}, \Sigma] = 0 \quad (6.166)$$

$$\{\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}^\beta\} = (\Gamma^{a,+})_\alpha^\beta \mathbf{P}_a \quad (6.167)$$

$$\{\Sigma_\alpha, \Sigma^\beta\} = (0)_\alpha^\beta \quad (6.168)$$

$$\{\mathbf{Q}_\alpha, \Sigma^\beta\} = -(\sigma^{ab,+})_\alpha^\beta \mathbf{Z}_{ab} \quad (6.169)$$

$$\{\Sigma_\alpha, \mathbf{Q}^\beta\} = -(\sigma^{ab,-})_\alpha^\beta \mathbf{Z}_{ab} \quad (6.170)$$

$$(6.171)$$

⁹Ver Teorema IV.2 de la referencia [12]

Capítulo 7

Conclusiones y comentarios

En este capítulo además de presentar las conclusiones y de resumir los resultados principales se plantearán algunas de las posibles direcciones y líneas a seguir a futuro a partir del trabajo aquí mostrado.

En el capítulo [4] se consiguió obtener la extensión semisimple del álgebra de Poincaré utilizando el método de S -expansión sobre el álgebra Anti-de-Sitter, fueron reobtenidos los operadores de Casimir presentados en la referencia [5] y se construyeron tensores invariantes que permitieron la construcción de un lagrangeano CS en $D = 3$ invariante bajo el álgebra semisimple extendida de Poincaré. Este lagrangeano mantiene naturalmente separadas las partes provenientes de $\mathfrak{so}(D - 1, 1)$, primera línea en (5.113), de aquellas provenientes de $\mathfrak{so}(D - 1, 2)$, segunda y tercera línea en (5.113). Parece prudente afirmar que un CS construido a partir de un álgebra que es suma directa de dos o más subálgebras ¹ dará como resultado un lagrangeano que es una suma lagrangeanos menores e independientes de cada subálgebra. Por supuesto existe la opción de manipular las constantes presentes en el lagrangeano, aquellas arbitrarias, con el fin de generar interacción entre los términos en el lagrangeano.

En el capítulo [5] se realiza la generalización supersimétrica del trabajo realizado en el capítulo anterior, una vez más en la construcción del lagrangeano CS quedan sectorizados los términos asociados al álgebra de Lorentz y aquellos asociados a la superálgebra de Anti-de-Sitter. Los operadores de Casimir que se obtuvieron en este caso difieren de aquellos obtenidos en la referencia [5].

En el capítulo [6] se consigue obtener nuevamente el álgebra $SSEP$ a partir del álgebra AdS , con la diferencia de que el álgebra $SSEP$ se encuentra en su forma original, dependiendo de los generadores tensoriales Z_{ab} y no explícitamente como la suma directa $\mathfrak{so}(D - 1, 1) \oplus \mathfrak{so}(D - 1, 2)$. El lagrangeano obtenido en (6.62), invariante bajo el álgebra $SSEP$, presenta una estructura que combina no trivialmente la conexión de espín y el vielbein con el campo B^{ab} , asociado con el generador Z_{ab} , en particular si se considera por separado la contribución del invariante de Euler se obtiene

$$S_{CS}^{(2+1)} = k \int \frac{\beta_0}{l} \epsilon_{abc} \left(R^{ab} + F^{ab} + \frac{1}{3l^2} e^a e^b \right) e^c, \quad (7.1)$$

el cual modifica la acción de EH con constante cosmológica por la presencia del campo de gauge B^{ab} . Un trabajo a considerar sería utilizar las relaciones de conmutación (1) – (6) propuestas en la referencia [28] para el álgebra $SSEP$ ², con tales relaciones la acción (7.1) sería afectada

¹Es decir de la forma ($\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \dots$)

²que se diferencia de la utilizada en esta tesis en constantes

solo en el término de constante cosmológica y sería una propuesta para solucionar el problema de la constante cosmológica. Otro camino a seguir sería construir una acción CS invariante bajo el álgebra (6.27-6.32) en mayores dimensiones, por ejemplo estudiar el caso en $D = 5$ y considerar una compactificación dimensional para obtener una acción en $D = 4$.

En el capítulo [6] se introdujo una nueva forma de aplicar la contracción de Inönü-Wigner en la construcción del lagrangeano invariante bajo el álgebra y superálgebra de Maxwell, realizando un reescalamiento no solo en los generadores del (super)-álgebra sino además en los tensores invariantes a través de las constantes. Es importante hacer la observación de que la elección del reescalamiento en las constantes es única si se desea construir un lagrangeano con una estructura simple, que permita entre otras cosas “sumar términos semejantes”.

En este capítulo se presentó también una acción invariante bajo la superálgebra de Maxwell $\mathcal{N}=1$ y se obtuvo a través del procedimiento de S -expansión la superálgebra de Maxwell $\mathcal{N}=2$ presentada en la referencia [6] para dimensión $D = 4$. Un trabajo en proceso es la obtención de un lagrangeano en $D = 3$ invariante bajo la superálgebra de Maxwell propuesta en la referencia [6]. A futuro sería interesante buscar generalizaciones a $D = 5$ (o mayores dimensiones) de acciones invariantes bajo superálgebras de Maxwell.



Apéndice A

Convenciones

A.1. Generalidades

La dimensión del espaciotiempo es denotada con la letra D , para los lagrangeanos en esta tesis $D = 3$ en todos los casos. Para las álgebras, D rotula la dimensión de las álgebras de acuerdo a las dimensiones del espaciotiempo del cual son simetría.

A lo largo de la tesis los índices rotulan de la siguiente manera:

- Las letras mayúsculas (A, B, C, \dots) denotan índices de un álgebra general en los capítulos [2] y [3], e índices del álgebra AdS en los capítulos [4] y [5].
- Las letras minúsculas (a, b, c, \dots) denotan índices del álgebra de Lorentz.
- Las letras griegas (μ, ν, λ, \dots) denotan índices espaciotemporales, con la componente $\mu = 0$ la coordenada temporal. En el capítulo [2] denotan también los índices de las coordenadas la variedad base.
- Las letras latinas minúsculas (i, j, k, \dots) denotan índices espaciales. En el capítulo [2] rotulan además vecindades sobre la variedad base.
- Las letras griegas ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) denotan índices de los elementos de un semigrupo.

La métrica del espaciotiempo AdS viene dada por

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Con $A, B = 0, \dots, 3$.

A partir del capítulo [??] los generadores de cualquier (super)-álgebra son denotados con **negrita**.

Los generadores para las álgebras que aparecen en esta tesis son denotados como ¹

¹En orden de aparición en la tesis.

- $\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_a$ son los generadores de la extensión semisimple del álgebra de Poincaré ($SSEP$) en su forma original.
- $\mathbf{N}_{ab}, \mathbf{L}_{AB}$ son los generadores de la extensión semisimple del álgebra de Poincaré en su forma $ssep = \mathfrak{so}(D-1, 1) \oplus \mathfrak{so}(D-1, 2)$.
- $\bar{\mathbf{J}}_{ab}, \bar{\mathbf{P}}_a$ son los generadores del álgebra AdS .
- $\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{P}_a, \mathbf{Q}_\alpha$ (ó \mathbf{Q}'_α) son los generadores de la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré ($SSEPS$) $\mathcal{N} = 1$ en su forma original.
- $\mathbf{N}_{ab}, \mathbf{L}_{ab}, \mathbf{L}_a, \mathbf{Q}'_\alpha$ son los generadores de la extensión semisimple de la superálgebra de Poincaré para $\mathcal{N} = 1, D = 3$ en su forma $sseps = \mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{osp}(2|1) \otimes \mathfrak{sp}(2)$.
- $\tilde{\mathbf{J}}_{ab}, \tilde{\mathbf{P}}_a, \tilde{\mathbf{Q}}_\alpha$ son los generadores de la superálgebra AdS .

El símbolo de Levi-Civita ϵ toma el valor $+1$ para

$$\epsilon_{012} = +1 = -\epsilon^{012} \tag{A.2}$$



Apéndice B

Matrices Gamma

B.1. Definiciones y propiedades generales

Las matrices gamma en cualquier dimensión $D = t + s$, con t dimensiones temporales y s dimensiones espaciales satisfacen el álgebra de Clifford

$$\Gamma_a \Gamma_b + \Gamma_b \Gamma_a = 2\eta_{ab} , \quad (\text{B.1})$$

Donde la métrica es $\eta = \text{diag}(-1 \dots -1 + 1 \dots + 1)$, con t elementos diagonales -1 y luego s elementos diagonales $+1$.

Una representación de las matrices gamma en un espacio con signatura euclidiana es dado por el siguiente conjunto

$$\Gamma_1 = \sigma_x \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \quad (\text{B.2})$$

$$\Gamma_2 = \sigma_y \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma_3 = \sigma_z \otimes \sigma_x \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \quad (\text{B.4})$$

$$\Gamma_4 = \sigma_z \otimes \sigma_y \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \quad (\text{B.5})$$

$$\Gamma_5 = \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_x \otimes \dots \quad (\text{B.6})$$

$$\Gamma_6 = \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_y \otimes \dots \quad (\text{B.7})$$

$$\vdots \quad \vdots \quad (\text{B.8})$$

Donde σ_x , σ_y y σ_z son las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (\text{B.9})$$

las cuales son hermíticas y satisfacen

$$(\sigma_x)^2 = (\sigma_y)^2 = (\sigma_z)^2 = -i\sigma_x\sigma_y\sigma_z = \mathbb{1} \quad (\text{B.10})$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\epsilon_{ijk}\sigma_k . \quad (\text{B.11})$$

Las matrices gamma en (B.2-B.7) son hermíticas. En dimensiones pares son una representación $2^{D/2}$ -dimensional y en dimensiones impares una representación $2^{(D-1)/2}$ -dimensional. Para dimensiones impares la última matriz (por ej. Γ_5 para $D = 5$) debe considerarse sin el último σ_x .

Para una representación en espacios con signatura no euclideana, de dimensión $D = t + s$, cada una de las t matrices gamma asociadas a coordenadas temporales se multiplica por i . Así las matrices tipo tiempo se vuelven antihermíticas y las tipo espacio se mantienen hermíticas

$$\Gamma_t^\dagger = -\Gamma_t^\dagger \quad , \quad \Gamma_s^\dagger = \Gamma_s^\dagger . \quad (\text{B.12})$$

En dimensiones pares es posible construir un set completo de matrices gamma de $2^{D/2} \times 2^{D/2}$ $\{\Gamma^{(n)}\}$ con $n = 0, 1, \dots, D$ con

$$\Gamma^{(n)} = \Gamma_{a_1 a_2 \dots a_n} = \Gamma_{[a_1} \Gamma_{a_2} \dots \Gamma_{a_n]} , \quad (\text{B.13})$$

con la última matriz conocida como Γ_{D+1} ó Γ_* , explícitamente

$$\Gamma_* = \Gamma_{D+1} = (-i)^{D/2+t} \Gamma_1 \dots \Gamma_D , \quad (\text{B.14})$$

la cual conmuta con todas las matrices gamma Γ_a . En dimensiones impares la matriz Γ_{D+1} , definida como (B.14) es proporcional a la identidad $\mathbb{1}$. En dimensiones pares es posible definir dos proyecciones espinoriales a través de la matriz Γ_* . Dado un espinor λ se definen sus espinores izquierdo (L) y derecho (R) de la siguiente manera

$$\lambda_L = \frac{1}{2} (1 + \Gamma_*) \lambda \quad \text{y} \quad \lambda_R = \frac{1}{2} (1 - \Gamma_*) \lambda . \quad (\text{B.15})$$

Se define la matriz *conjugación de carga* como

$$C^T = \varepsilon C , \quad (\text{B.16})$$

con $\varepsilon = \pm 1$ y donde

$$\Gamma_a^T = -\rho C \Gamma_a C^{-1} \quad , \quad \text{y} \quad (C \Gamma^{(n)})^T = -\varepsilon (-1)^{n(n-1)/2} (-\rho)^n C \Gamma^{(n)} , \quad (\text{B.17})$$

La regla de simetría de las matrices $C \Gamma^n$ es *mod 4*, es decir, es igual para caso $(n + 4)$ que para el caso (n) . Los valores de ε y ρ son definidos según las matrices $C \Gamma^n$ sean simétricas (S) o antisimétricas (A) en cada dimensión. Estos valores son resumidos en la referencia [39] en la siguiente tabla

$D \pmod{8}$	S	A	ε	ρ
0	0, 3	2, 1	-1	+1
	0, 1	2, 3	-1	-1
1	0, 1	2, 3	-1	-1
2	1, 0	3, 2	-1	-1
	1, 2	3, 0	+1	+1
3	1, 2	0, 3	+1	+1
4	2, 1	0, 3	+1	+1
	2, 3	0, 1	+1	-1
5	2, 3	0, 1	+1	-1
6	3, 2	1, 0	+1	-1
	3, 0	1, 2	-1	+1
7	0, 3	1, 2	-1	+1

(B.18)

B.2. Índices espinoriales

Las componentes del espinor son definidas con el índice abajo, es decir, las componentes del espinor λ vienen dadas por λ_α . Las componentes del espinor de Majorana conjugado estarán definidas con el índice arriba, es decir $\bar{\lambda} \rightarrow \lambda^\alpha$. Luego la acción de las matrices gamma sobre espinores: $\Gamma_a \lambda$, viene dada por

$$(\Gamma_a \lambda)_\alpha = (\Gamma_a)_\alpha^\beta \lambda_\beta, \quad (\text{B.19})$$

y por lo tanto el producto entre dos matrices gamma respeta el mismo orden de los índices

$$(\Gamma_a \Gamma_b)_\alpha^\beta = (\Gamma_a)_\alpha^\sigma (\Gamma_b)_\sigma^\beta. \quad (\text{B.20})$$

Para describir la simetría o antisimetría de una matriz gamma, ésta debe ser representada con ambos índices abajo o arriba, para esto es necesario utilizar la matriz conjugación de carga

$$(\Gamma_a)_\alpha^\beta \rightarrow (C\Gamma_a)^{\alpha\beta} = C^{\alpha\sigma} (\Gamma_a)_\sigma^\beta. \quad (\text{B.21})$$

La matriz conjugación de carga hace el papel de métrica para los índices espinoriales, pero debido a que puede ser antisimétrica, se debe respetar el siguiente orden para subir y bajar los índices

$$\lambda^\alpha = C^{\alpha\beta} \lambda_\beta \quad \lambda^\alpha = \lambda_\beta C_{\beta\alpha}^1. \quad (\text{B.22})$$

Además se satisface

$$C^{\alpha\beta} C_{\sigma\beta} = \delta_\sigma^\alpha. \quad (\text{B.23})$$

Se utilizará también la matriz σ_{ab} definida como

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{2} \Gamma_{ab} = \frac{1}{4} [\Gamma_a, \Gamma_b] \quad (\text{B.24})$$

B.3. Caso $D = 2 + 1$

De acuerdo con (B.2-B.4) en $D = 3$ las matrices gamma son

$$\Gamma_1 = \sigma_x \quad (\text{B.25})$$

$$\Gamma_2 = \sigma_y \quad (\text{B.26})$$

$$\Gamma_3 = \sigma_z \quad (\text{B.27})$$

se dejará tipo tiempo a Γ_2 , luego renombrando²

$$i\Gamma_2 \rightarrow \gamma_0 = i\sigma_y \quad (\text{B.28})$$

$$\Gamma_1 \rightarrow \gamma_1 = \sigma_x \quad (\text{B.29})$$

$$\Gamma_3 \rightarrow \gamma_2 = \sigma_z. \quad (\text{B.30})$$

En $D = 3$ es útil la identidad

$$\gamma_{ab} = -2\epsilon_{abc} \gamma^c. \quad (\text{B.31})$$

¹Estrictamente la matriz $C^{\alpha\beta}$ es C^T y la matriz $C_{\alpha\beta}$ es C^{-1}

²Para el caso $D = 3$ la notación de las matrices gamma es con minúscula(γ).

La matriz conjugación de carga es

$$C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = C_{\alpha\beta} . \quad (\text{B.32})$$

Además

$$C^T = -C \quad (\text{B.33})$$

$$\gamma_a^T = -C^{-1}\gamma_a C . \quad (\text{B.34})$$



Apéndice C

Métrica de Cartan y forma de Killing

Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} con base $\{T_a\}$ y constantes de estructura $C_{ab}{}^c$,

$$[T_a, T_b] = C_{ab}{}^c T_c, \quad (\text{C.1})$$

la *métrica de Killing-Cartan* g_{ab} es definida como la contracción

$$g_{ab} = g_{ba} \equiv C_{ad}{}^e C_{be}{}^d. \quad (\text{C.2})$$

Esta métrica puede ser utilizada para subir y bajar los índices del álgebra, por ejemplo

$$C_{abc} = C_{ab}{}^d g_{dc}, \quad (\text{C.3})$$

las cuales se puede demostrar, a través de las identidades de Jacobi, son totalmente antisimétricas en sus índices.

La métrica de Killing es singular para álgebras abelianas, en cuyo caso no es posible definir una inversa. En los casos en que la métrica sea regular es posible definir su inversa g^{ab} de forma que

$$g^{ab} g_{bc} = \delta_c^a. \quad (\text{C.4})$$

A partir de la métrica de Killing-Cartan se puede definir un producto entre los elementos del álgebra, en particular entre dos elementos de la base:

$$\langle \mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b \rangle = g_{ab}. \quad (\text{C.5})$$

El producto entre dos elementos arbitrarios del álgebra $\mathbf{M} = M^a \mathbf{T}_a$, $\mathbf{N} = N^a \mathbf{T}_a$ viene dado por

$$\langle \mathbf{M}, \mathbf{N} \rangle = \langle M^a \mathbf{T}_a, N^b \mathbf{T}_b \rangle = g_{ab} M^a N^b. \quad (\text{C.6})$$

y es conocido como *forma de Killing*. Este producto, también es denotado $\mathbf{B}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ ó solo (\mathbf{M}, \mathbf{N}) . La forma de Killing es una forma bilineal simétrica pero no es definida positiva y por lo tanto tampoco un producto escalar usual.

En la representación adjunta \mathbf{R} , donde

$$\mathbf{R}(\mathbf{T}_a)_b{}^c \equiv C_{ab}{}^c, \quad (\text{C.7})$$

la forma de Killing toma la forma

$$\langle \mathbf{M}, \mathbf{N} \rangle = g_{ab} M^a N^b \quad (\text{C.8})$$

$$= C_{ad}{}^e C_{be}{}^d M^a N^b \quad (\text{C.9})$$

$$= \mathbf{R}(\mathbf{T}_a)_d{}^e M^a \mathbf{R}(\mathbf{T}_b)_e{}^d N^b \quad (\text{C.10})$$

$$= \mathbf{R}(\mathbf{M})_d{}^e \mathbf{R}(\mathbf{N})_e{}^d, \quad (\text{C.11})$$

ó

$$\langle \mathbf{M}, \mathbf{N} \rangle = \text{Tr}(\mathbf{R}(\mathbf{M}) \mathbf{R}(\mathbf{N})) \quad (\text{C.12})$$



Bibliografía

- [1] L. O’Raifeartaigh & N. Straumann, *Gauge theory: Historical origins and some modern developments*, Rev. Mod. Phys. 72 (2000) 1.
- [2] S. Chern, J. Simons, *Characteristic Forms and Geometric Invariants*, Ann.of Math. (2) 99 (1974) 48.
- [3] D. V. Soroka & V. A. Soroka, Phys. Lett. B607 (2005) 302; hep-th/0410012.
- [4] S.A. Duplij, D. V. Soroka & V. A. Soroka, J. Kharkov National Univ. No.664 (2005), Physical series "Nuclei, Particles, Fields", Issue 2/27/, p. 12.
- [5] D. V. Soroka & V. A. Soroka, Adv. High Energy Phys. 2009 (2009) 234147; hep-th/0605251
- [6] S. Bonanos, J. Gomis, K. Kamimura & J. Lukierski *Maxwell Superalgebra and Superparticles in Constant Gauge Backgrounds*, Phys. Rev. Lett. 104 (2010) 090401; hep-th/0911.5072
- [7] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, 2nd edition (2003).
- [8] T. Eguchi, P.B. Gilkey, A. J. Hanson., *Gravitation, gauge theories and differential geometry*, Phys.Rept. 66 (1980) 213.
- [9] R. L. Mills & C. N. Yang, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. 96 (1954) 191.
- [10] Chern, Shiing-Shen, *On the curvatura integra in Riemannian manifold*, Annals of Mathematics 46 (1945): 674-684.
- [11] J. A. de Azcárraga & J. M. Izquierdo, *Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology and Some Applications in Physics*, Camb. Univ. Press, 1995.
- [12] F. Izaurieta, E. Rodríguez & P. Salgado, *Expanding Lie (Super)Algebras through Abelian Semigroups*, J. Math. Phys. 47 (2006) 123512; hep-th/0606215
- [13] F. Izaurieta, E. Rodríguez, A. Perez & P. Salgado, *Dual Formulation of the Lie Algebra S-expansion Procedure*, J. Math. Phys. 50 (2009) 073511.
- [14] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Minning, P. Salgado & A. Perez, *Standard General Relativity from Chern-Simons Gravity* Phys.Lett. B678 (2009) 213.

- [15] L. Castellani, R. D'Áuria & P. Fre, *Supergravity and Superstrings, a geometric perspective*, World Scientific, Singapore 1991.
- [16] R. D'Áuria & P. Fre, *Geometric Supergravity in $D = 11$ and its Hidden Supergroup*, Nucl. Phys. B 201 (1982) 101. Erratum-ibid. B 206 (1982) 496.
- [17] L. Castellani, *Free differential algebras: their use in field theory and dual formulation*, Lett. Math. Phys. 38 (1996) 321-330 .
- [18] L.Castellani, *Group geometric methods in supergravity and superstring theories*, Int. J. Mod. Phys. A7 (1992) 1583-1626.
- [19] D. Sullivan, *Infinitesimal Computations in Topology*, Publ. Math. IHÉS 47 (1977) 269.
- [20] H. Bacry, P. Combe & J. L. Richard, *Group-theoretical analysis of elementary particles in an external electromagnetic field*, Nuovo Cim. A67 (1970) 267-299.
- [21] R. Schrader, *The maxwell group and the quantum theory of particles in classical homogeneous electromagnetic fields*, Fortsch. Phys. 20 (1972) 701-734.
- [22] J.A.de Azcarraga, K.Kamimura & J.Lukierski, *Generalized cosmological term from Maxwell symmetries*, Phys. Rev. D83 (2011) 124036; hep-th/1012.4402
- [23] R. Durka, J. Kowalski-Glikman & M. Szczachor, *Gauged AdS-Maxwell algebra and gravity*, Mod.Phys.Lett. A26 (2011) 2689; hep-th/1107.4728
- [24] A. Borowiec, J. Kowalski-Glikman & M. Szczachor, *AdS-Maxwell Bf Theory As A Model Of Gravity And Bi-Gravity*; gr-qc/1212.6661v1
- [25] J. S. Bagla, T. Padmanabhan & J. V. Narlikar *Crisis in cosmology: Observational constraints on omega and h(0)*, Comments Astrophys. 18 (1996) 275.
- [26] T. Padmanabhan, *Dark energy and its implications for gravity*, Adv. Sci. Lett. 2 (2009) 174; hep-th/0807.2356
- [27] R. Bousso, *The Cosmological Constant Problem, Dark Energy, and the Landscape of String Theory*; hep-th/1203.0307
- [28] D. V. Soroka & V. A. Soroka, Phys. Lett. B707 (2005) 160; hep-th/1101.1591
- [29] J. Lukierski, *Generalized Wigner-Inönü Contractions and Maxwell (Super)Algebras*, Proc.Steklov Inst.Math. 272 (2011) 1-8; hep-th/1007.3405
- [30] E. Witten, *(2 + 1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System*. Nucl. Phys. B 311 (1988) 46.
- [31] J. Zanelli, *Lecture Notes on Chern-Simons (Super-)Gravities*; hep-th/0502193.
- [32] P. Mora, R. Olea, R. Troncoso & J. Zanelli, *Finite Action Principle for Chern-Simons AdS Gravity* JHEP 0406 (2004) 036; arXiv: hep-th/0405267.

- [33] A. Achúcarro & P. K. Townsend, *A Chern-Simons Action for threedimensional Anti-de-Sitter Supergravity Theories*, Phys. Lett. B 180 (1986) 89.
- [34] A.H. Chamseddine, *Topological gauge theory of gravity in five and all odd dimensions*, Phys. Lett. B 233 (1989) 291
- [35] A.H. Chamseddine, *Topological gravity and supergravity in various dimensions*, Nucl. Phys. B 346 (1990) 213
- [36] S. Carlip, *Lectures in (2 + 1)-Dimensional Gravity*, gr-qc/9503024
- [37] A. Giacomini, R. Troncoso & S. Willison, *Three-dimensional supergravity reloaded*, Class. Quantum Grav. 24 (2007) 2845; hep-th/0610077
- [38] R. Troncoso & J. Zanelli, *Lectures in (2 + 1)-Dimensional Gravity*, Int.J.Theor.Phys. 38 (1999) 1181.
- [39] A. Van Proeyen, *Tools for Supersymmetry*, lectures given at Spring School on Quantum Field Theory: Supersymmetry and Superstrings, Romania 1998; hep-th/9910030.
- [40] A. R. Poole, *Finite ova*, doctoral dissertation, California Institute of Technology, 1935.
- [41] G. E. Forsythe, *SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 443-447.
- [42] P. Salgado & S. Salgado, $\mathfrak{so}(D-1, 1) \oplus \mathfrak{so}(\mathcal{D}-1, 2)$ algebras and gravity, Phys.Lett. B728 (2014) 5-10.
- [43] J. Díaz, O. Fierro, F. Izaurieta, N. Merino, E. Rodriguez, P. Salgado & O. Valdivia, *A generalized action for (2 + 1)-dimensional Chern-Simons gravity*, J.Phys. A45 (2012) 255207.
- [44] O. Fierro, F. Izaurieta, P. Salgado & O. Valdivia, *(2+1)-dimensional supergravity invariant under AdS-Lorentz superalgebra*, Enviado a Phys. Lett. B, hep-th/1401.3697.
- [45] P. Concha, O. Fierro, E. Rodriguez & P. Salgado, *Chern-Simons Maxwell supergravity*, Por enviar a Eur.Phys.J.