Universidad de Concepción

Dirección de Postgrado

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa Magíster en Matemática

Operadores Compactos en espacios de Banach libres.

tesis para optar al grado académico de Magíster en Matemática

CLAUDIO ANDRÉS GALLEGOS CASTRO

CONCEPCIÓN-CHILE

2013

Profesor Guía: José Aguayo G.

Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Concepción

Índice general

Introducción.

En esta tesis trabajaremos el espacio de Banach libre de operadores lineales continuos, sobre el espacio de Hilbert ultramétrico E_ω, que son compactos y admiten adjunta. Denotaremos a este espacio por $C_0(E_\omega) := L_0(E_\omega) \cap C(E_\omega)$, donde $L_0(E_\omega)$ es el espacio de operadores lineales continuos sobre E_ω que admiten adjunta y $C(E_\omega)$ es el espacio de operadores compactos sobre E_ω.

Si consideramos el espacio E_ω con la familia $\omega = (\omega_j)_{j\in I}$ de manera que $\omega_j = 1_{\mathbb{K}}$, $\forall j \in I$, entonces podemos encontrar una caracterización para los elementos de $L_0(E_\omega)$ y para los elementos de $C_0(E_\omega)$, de la siguiente forma

(i). $u \in L_0(E_\omega) \Leftrightarrow \forall y \in E_\omega, \lim_{k\in I} f_\omega(u(e_k), y) = 0$

(ii). $u \in C_0(E_\omega) \Leftrightarrow \lim_{j\in I} \|u(e_j)\| = 0$

Además, con estos resultados se puede definir un producto interno en $C_0(E_\omega)$ el cual es simétrico, no-degenerado e induce la norma de operadores. Los resultados anteriores son generalizaciones directas del trabajo realizado por Aguayo y Nova en [1].

La tesis está estructurada de la siguiente forma: En el capitulo 1 se presentan los conceptos preliminares básicos para el posterior desarrollo de este trabajo. Se presentan las nociones de campos valuados ultramétricos, espacios normados ultramétricos, en particular ejemplos como el espacio $c_0(I, \mathbb{K}, \alpha)$ y $l^\infty(I, \mathbb{K}, \alpha)$ que serán importantes en capitulos posteriores, también un concepto de ortogonalidad válido en cualquier espacio normado y la definición de producto tensorial que entrelazaremos de forma directa con el espacio de los operadores compactos.

En el capítulo 2 se introduce la noción de conjunto compactoide, la cual coincide con la definición de precompacidad cuando $\mathbb{K}$ es localmente compacto, para luego definir el concepto de operador compacto en el contexto no-arquimediano. Se muestra que los operadores compactos corresponden a los operadores secuencialmente compactos(que son el límite, en el sentido de la norma, de operadores de rango finito). Se muestra además que el espacio de los operadores compactos $C(E, F)$ es isomorfo al producto tensorial $E'\widehat{\otimes}F$.

En el capitulo 3 se introduce la definición de un espacio de Banach Libre. Se muestra que todo operador lineal continuo entre espacios de Banach Libres se puede representar como una única suma puntualmente convergente y además lo podemos identificar mediante una matriz infinita. Se muestra una caracterización para operadores compactos entre espacios de Banach Libres, se define el espacio E_ω con sus principales caracteristicas para luego definir los espacios $L_0(E_\omega)$ y $C_0(E_\omega)$. Se definen los subespacios cerrados $\widetilde{E}_\omega$ y $E'_{\omega,0}$ de E'_ω los cuales coinciden y se muestra que $\widetilde{E}_\omega$ es isomorfo a E_ω.

En el capitulo 4 se introduce la definición de un producto interno no-arquimediano. Se muestran caracterizaciones para los elementos de $L_0(E_\omega)$ y $C_0(E_\omega)$ cuando la familia $\omega = (\omega_j)_{j\in I}$ es tal que $\omega_j = 1_{\mathbb{K}}$, $\forall j \in I$. Se define un producto interno en $C_0(E_\omega)$ de la forma $F_\omega(u, v) = \sum_{j\in I} f_\omega(u(e_j), v(e_j))$ cuando el campo residual de $\mathbb{K}$ es formalmente real y donde f_ω es un producto interno en E_ω definido por $f_\omega(x, y) = \sum_{j\in I} x_j y_j$. Se muestra que el producto interno en $C_0(E_\omega)$ es simétrico, no-degenerado y además induce la norma de operadores. Se finaliza mostrando que E_ω es isomorfo a un subespacio cerrado de $C_0(E_\omega)$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos algunos conceptos básicos utilizados de forma permanente en el transcurso de la tesis. Todo lo expuesto aquí se puede complementar y extender con la lectura adicional de [2], [3], [8], [10], [12], [15].

1.1. Campos Ultramétricos

Sea $\mathbb{K}$ un campo. Una aplicación $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_0^+$ es valuación sobre $\mathbb{K}$ si satisface las siguientes condiciones:

(i). $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{K}}$

(ii). $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{K}$

(iii). $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{K}$

Llamaremos campo valuado al par $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Observación 1.1.1. *Una valuación sobre un campo $\mathbb{K}$ induce una métrica de la forma siguiente*

$$d(x, y) := |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}$$

Diremos que el campo valuado $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ es completo, si es completo respecto a la métrica inducida por la valuación.

Ejemplo 1.1.2. *Para un campo* $\mathbb{K}$ *, la aplicación definida por*

$$|x| = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x \neq 0 \end{cases}$$

resulta ser una valuación y se denomina valuación trivial.

Observación 1.1.3. *Si consideramos la unidad* $1_{\mathbb{K}}$ *del campo valuado* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$*, entonces se tiene* $|1_{\mathbb{K}}| = |1_{\mathbb{K}} \cdot 1_{\mathbb{K}}| = |1_{\mathbb{K}}| \cdot |1_{\mathbb{K}}| = |1_{\mathbb{K}}|^2$*, por lo tanto* $|1_{\mathbb{K}}| = 1$*. Además, para* $\lambda \in \mathbb{K}$ *se tiene que* $|\lambda^{-1}| = |\lambda|^{-1}$*.*

Definición 1.1.4. *Sea* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *un campo valuado. Diremos que la valuación es no-arquimediana y* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *se dirá un campo valuado no-arquimediano, si* $|\cdot|$ *satisface la siguiente desigualdad:*

$$|\mu + \lambda| \leq \max\{|\mu|, |\lambda|\} \qquad \forall \mu, \lambda \in \mathbb{K}$$

La desigualdad anterior es conocida como desigualdad triangular fuerte e implica la desigualdad triangular usual expuesta en el ítem (iii) de la definición de valuación.

Observación 1.1.5. *La bola unitaria cerrada es el conjunto* $B_{\mathbb{K}} := \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$ *el cual es un anillo con unidad, en efecto, para* $\mu, \lambda \in B_{\mathbb{K}}$ *se tiene que* $|\lambda + \mu| \leq \max\{|\lambda|, |\mu|\} \leq 1$ *, por lo tanto* $\lambda + \mu \in B_{\mathbb{K}}$*. También notemos que* $|-\lambda| = |-1_{\mathbb{K}}| \cdot |\lambda| = |\lambda| \leq 1$ *, de esta forma* $-\lambda \in B_{\mathbb{K}}$ *y luego* $B_{\mathbb{K}}$ *es un grupo para la adición. Por otro lado, para* $\mu, \lambda \in B_{\mathbb{K}}$ *se tiene* $|\mu \cdot \lambda| = |\mu| \cdot |\lambda| \leq 1$ *por tanto* $\mu \cdot \lambda \in B_{\mathbb{K}}$ *. Pero* $\lambda^{-1} \notin B_{\mathbb{K}}$ *pues* $|\lambda^{-1}| = |\lambda|^{-1} > 1$*.*
La bola unitaria abierta es el conjunto $B_{\mathbb{K}}^{-} := \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}$ *que es un ideal maximal del anillo* $B_{\mathbb{K}}$*.*

Ejemplo 1.1.6. *Cada número primo* p *determina una valuación no-arquimediana* $|\cdot|_p$ *sobre* $\mathbb{Q}$ *definida por:*

$$|q|_p = \begin{cases} p^{-r(q)} & si\ q \neq 0 \\ 0 & si\ q = 0 \end{cases}$$

donde $r(q)$ es el número positivo más grande tal que $p^{r(q)}$ divide a q.
La valuación $|\cdot|_p$ recibe el nombre de valuación p-ádica.

Observación 1.1.7. *El campo $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ no es completo. La completación de $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$, que denotaremos por $\mathbb{Q}_p$, se denomina el campo de los números p-ádicos. $\mathbb{Q}_p$ no es algebraicamente cerrado y el menor cuerpo algebraicamente cerrado que contiene a $\mathbb{Q}_p$, conocido como $\mathbb{Q}_p^{al}$, tiene dimensión infinita como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}_p$ (el campo de los números complejos $\mathbb{C}$ es una extensión de $\mathbb{R}$ de dimensión 2 como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, además es un cuerpo algebraicamente cerrado y completo). Resulta que $\mathbb{Q}_p^{al}$ no es completo con respecto a $|\cdot|_p$. La completación de $\mathbb{Q}_p^{al}$ es algebraicamente cerrada y se conoce como Ω_p ó $\mathbb{C}_p$.*

Para un estudio más completo y acabado del campo de los números p-ádicos, véase por ejemplo [2], [8], [3], [12].
En nuestro trabajo consideraremos un campo valuado no-arquimediano $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ arbitrario.

Teorema 1.1.8. *Sea $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ un campo valuado. Las siguientes son equivalentes:*

(i). *La valuación es no-arquimediana.*

(ii). $|n \cdot 1_{\mathbb{K}}| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iii). *Si $\mu, \lambda \in \mathbb{K}$ y $|\mu| < |\lambda|$, entonces $|\lambda - \mu| = |\lambda|$.*

Demostración. ver [15], página 2. □

Corolario 1.1.9. *Sea $\mathbb{K}$ un campo valuado no-arquimediano completo respecto a la métrica inducida por la valuación y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión a valores en $\mathbb{K}$.*

1. *Sea $x \neq 0$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ de manera que $\forall n \geq N$, $|x_n| = |x|$.*

2. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente en $\mathbb{K}$.*

Demostración.

1. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ con $x \neq 0$. Para $\varepsilon = |x|$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon &\Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon = |x| \\ &\Longrightarrow |x_n| = |(x_n - x) + x| = |x|\end{aligned}$$

lo que muestra la proposición.

2. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Para $\varepsilon > 0$ dado, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |x_n| < \varepsilon.$$

Sea $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Mostraremos que la sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, en efecto, notemos que

$$\begin{aligned}\forall n, m \in \mathbb{N} : n \geq m \geq N_\varepsilon &\Longrightarrow |S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| \\ &\Longrightarrow |S_n - S_m| \leq \max_{m+1\leq k\leq n}\{|x_k|\} \\ &\Longrightarrow |S_n - S_m| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

luego, de la completitud de $\mathbb{K}$, se sigue la convergencia de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en $\mathbb{K}$.

$\square$

Observación 1.1.10. *El conjunto* $|\mathbb{K}^*| := \{|\mu| : \mu \in \mathbb{K}^*\}$*, donde* $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}$*, es un subgrupo del grupo multiplicativo de los reales positivos y es llamado grupo de valores de* $\mathbb{K}$*.*

Tenemos dos posibilidades para $|\mathbb{K}^*|$*:*

(i). 1 no es punto de acumulación de $|\mathbb{K}^*|$*. Entonces* $|\mathbb{K}^*| = \{d^k : k \in \mathbb{Z}\}$*, para algún* $d \geq 1$*. Así* $|\mathbb{K}^*|$ *es un subconjunto discreto de* $\mathbb{R}_+^*$*. En este caso la valuación de* $\mathbb{K}$ *es llamada discreta. En particular si* $d = 1$*, entonces se trata de la valuación trivial.*

(ii). *1 es punto de acumulación de $|\mathbb{K}^*|$. Entonces $|\mathbb{K}^*|$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}^*_+$. En este caso la valuación es llamada densa.*

Definición 1.1.11. *Si consideramos la relación de equivalencia $\sim$ en $B_{\mathbb{K}}$ definida por*

$$\lambda_1 \sim \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \in B^-_{\mathbb{K}}$$

entonces definimos el campo residual de $\mathbb{K}$ como el anillo cociente $B_{\mathbb{K}}/\sim$.

1.2. Espacios Normados Ultramétricos

Desde ahora, salvo especificaciones, consideraremos a $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ un campo valuado no-arquimediano completo respecto a la métrica inducida por la valuación, el cual denotaremos simplemente por $\mathbb{K}$. Además, supondremos que la valuación no es la trivial.

Definición 1.2.1. *Sea E un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$. Una aplicación $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+_0$ es una norma no-arquimediana si satisface las siguientes condiciones*

(i). $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii). $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$

(iii). $\|x + y\| \leq \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} \qquad \forall x, y \in E$

Si podemos definir una norma no-arquimediana sobre un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E, entonces diremos que el par $(E, \|\cdot\|)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado no-arquimediano.

Observación 1.2.2. *Si E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, entonces diremos simplemente que E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*

Observación 1.2.3. *Si $(E, \|\cdot\|)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado no-arquimediano, entonces la norma $\|\cdot\|$ induce una métrica definida por*

$$d(x, y) := \|x - y\| \qquad \forall x, y \in E.$$

Diremos que un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado no-arquimediano es Banach, si es completo respecto a la métrica inducida por la norma.

A partir de ahora, para simplificar la escritura, nos referiremos a un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado no-arquimediano simplemente por un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado o un espacio normado.

Definición 1.2.4. *Si E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado y se consideran dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ sobre él, entonces éstas se dirán equivalentes si existen constantes α y β positivas tales que*

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \qquad \forall x \in E$$

Observación 1.2.5. *Si dos normas son equivalentes, entonces ellas inducen la misma topología*

Definición 1.2.6. *Sea E un espacio normado e I un conjunto arbitrario. Diremos que una familia $(x_j)_{j\in I}$ de elementos de E es sumable, con suma $x \in E$, si $\forall\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $J_0 \subset I$ tal que para cada subconjunto finito $J \subset I$, con $J_0 \subset J \subset I$ se tiene*

$$\left\| x - \sum_{j\in J} x_j \right\| < \varepsilon$$

Definición 1.2.7. *Sea I un conjunto arbitrario. Diremos que una familia $(\beta_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}^*_+$ converge a cero si, y solamente si, $\forall\varepsilon > 0$, existe un subconjunto $J_\varepsilon \subset I$ finito, de manera que $\beta_i < \varepsilon$, $\forall i \in J^c_\varepsilon$. En este caso escribiremos $\lim\limits_{i\in I} \beta_i = 0$.*

Proposición 1.2.8. *Sea E un espacio normado y sea $(x_j)_{j\in I}$ una familia de elementos de E.*

1. *Si $(x_j)_{j\in I}$ es sumable, con suma $x \in E$, entonces existe un conjunto numerable J tal que $x_j = 0$, $\forall j \in J^c$, y*

$$\sum_{j\in I} x_j = \sum_{j\in J} x_j$$

2. *Si E es un espacio de Banach, entonces $(x_j)_{j\in I}$ es sumable si, y solamente si, $\lim_{j\in I} x_j = 0$*

Demostración.

1. Supongamos que $(x_j)_{j\in I}$ es sumable, con suma $x \in E$. Para $\varepsilon > 0$ dado, existe un conjunto finito $H \subset I$ tal que $\forall W \subset I$ finito con $H \subset W \subset I$

$$\left\| \sum_{j\in W} x_j - x \right\| < \varepsilon$$

Si consideramos cualquier otro conjunto finito de índices V tal que $V \cap H = \emptyset$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j\in V} x_j \right\| &= \left\| \sum_{j\in V\cup H} x_j - \sum_{j\in H} x_j \right\| \\
&= \left\| \left(\sum_{j\in V\cup H} x_j - x \right) - \left(\sum_{j\in H} x_j - x \right) \right\| \\
&\leq \max\left\{ \left\| \sum_{j\in V\cup H} x_j - x \right\|, \left\| \sum_{j\in H} x_j - x \right\| \right\} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Ahora, para $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, donde $n \in \mathbb{N}$, existen conjuntos finitos de índices $H_n \subset I$ tales que si V es un conjunto finito de índices con $V \cap H_n = \emptyset$, entonces $\left\| \sum_{j\in V} x_j \right\| < \dfrac{1}{n}$.

Consideremos el conjunto numerable $J := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ y algún índice $j \in I$ tal que $\{j\} \cap J = \emptyset$. Luego, $\{j\} \cap H_n = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\|x_j\| < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Y entonces se sigue que $x_j = 0$.

2. Supongamos que $\lim_{j\in I} x_j = 0$. Notemos que para $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, donde $n \in \mathbb{N}$, existen conjuntos finitos de índices $H_n \subset I$ tales que $\|x_j\| < \varepsilon$, $\forall j \in H_n^c$.
Sea $J := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$. Si $j \in J^c$, entonces se sigue que $j \in H_n^c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$\|x_j\| < \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto $x_j = 0$ para $j \in J^c$.

Así, existe un conjunto numerable, digamos $J := \{j_1, j_2, ...\}$ de manera que $x_j = 0$ para $j \in J^c$, y entonces $\lim_{i\to\infty} x_{j_i} = 0$. Luego, de forma análoga al ítem 2 del Corolario 1.1.9, se sigue que $\sum_{j\in J} x_j$ es sumable y por lo tanto $\sum_{j\in I} x_j$ es sumable.

$\square$

Ejemplo 1.2.9. *Sea I un conjunto arbitrario y $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}_+^*$.*

1. *El espacio $l^\infty(I, \mathbb{K}, \alpha) := \{a = (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I : \|a\|_\alpha = \sup_{i\in I} |a_i|\alpha_i < +\infty\}$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ (con respecto a la norma $\|\cdot\|_\alpha$). En efecto, sea $(a(n))_{n\geq 1}$ una sucesión de cauchy en $l^\infty(I, \mathbb{K}, \alpha)$, es decir, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|a(n) - a(m)\|_\alpha < \varepsilon$$

Así, $|a_j(n) - a_j(m)|\alpha_j < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_\varepsilon$, $\forall j \in I$, por lo tanto , $(a_j(n))_{n\geq 1}$ es una sucesión de cauchy en $\mathbb{K}$, y entonces converge. Digamos $\lim_{n\to\infty} a_j(n) = a_j$, $\forall j \in I$. Luego, $\forall \varepsilon > 0$, existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_j - a_j(n)|\alpha_j < \varepsilon \qquad \forall j \in I.$$

Definimos entonces

$$\begin{aligned} a : & I \to \mathbb{K} \\ & j \mapsto a_j = \lim_{n\to\infty} a_j(n) \end{aligned}$$

Si escogemos $N = \max\{n_\varepsilon, N_\varepsilon\}$, entonces se sigue que

$$\begin{aligned} |a_j - a_j(m)|\alpha_j &\leq \max\{|a_j - a_j(N)|\alpha_j, |a_j(N) - a_j(m)|\alpha_j\} \qquad \forall j \in I \\ &< \varepsilon \qquad \forall m \geq N, \forall j \in I \end{aligned}$$

En particular se tiene

$$\begin{aligned} |a_j|\alpha_j &\leq \max\{|a_j - a_j(N)|\alpha_j, |a_j(N)|\alpha_j\} \qquad \forall j \in I \\ &\leq \max\{\varepsilon, \|a(N)\|_\alpha\} \qquad \forall j \in I \end{aligned}$$

luego se sigue que $\|a\|_\alpha = \sup_{j\in I} |a_j|\alpha_j < +\infty$.

Por otro lado, $\|a - a(m)\|_\alpha = \sup_{j\in I} |a_j - a_j(m)|\alpha_j \leq \varepsilon$, $\forall m \geq n_\varepsilon$. *Y entonces* $\lim_{m\to\infty} \|a - a(m)\|_\alpha = 0$.

- § *Si* $\alpha_i = 1$, $\forall i \in I$, *uno tiene el espacio de funciones acotadas, es decir,* $l^\infty(I,\mathbb{K}) := \{a = (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I : \|a\|_\infty = \sup_{i\in I} |a_i| < +\infty\}$.
- § *Si* $I = \mathbb{N}$ *y* $\alpha_i = 1$, $\forall i \in I$, *entonces estamos en presencia del espacio de sucesiones de elementos de* $\mathbb{K}$ *y que son acotadas. Denotamos a* $l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K},\alpha)$ *simplemente por* l^∞.

2. *El conjunto* $c_0(I,\mathbb{K},\alpha) := \{a = (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I : \lim_{i\in I} |a_i|\alpha_i = 0\}$ *con la norma* $\|\cdot\|_\alpha$ *es un subespacio cerrado de* $l^\infty(I,\mathbb{K},\alpha)$, *por lo tanto* $c_0(I,\mathbb{K},\alpha)$ *es un espacio de Banach. En efecto, sea* $a = \lim_{n\to\infty} a(n)$, *donde* $a(n) \in c_0(I,\mathbb{K},\alpha)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Para* $\varepsilon > 0$ *dado, existe* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_\epsilon &\Longrightarrow \|a - a(n)\|_\alpha < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \sup_{j\in I} |a_j - a_j(n)|\alpha_j < \varepsilon \end{aligned}$$

luego $\forall j \in I$, $\forall n \geq n_\varepsilon$ *se tiene que* $|a_j - a_j(n)|\alpha_j < \varepsilon$. *Además, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe un conjunto finito* $I(n)_\varepsilon \subset I$ *de manera que* $|a_j(n)|\alpha_j < \varepsilon$, $\forall j \in I(n)_\varepsilon^c$. *Luego, se tiene*

$$\begin{aligned} |a_j|\alpha_j &\leq \max\{|a_j(n_\varepsilon) - a_j)|\alpha_j, |a_j(n_\varepsilon)|\alpha_j\} \\ &\leq \max\{\varepsilon, |a_j(n_\varepsilon)|\alpha_j\} \qquad \forall j \in I \\ &< \varepsilon \qquad \forall j \in I(n_\varepsilon)_\varepsilon^c \end{aligned}$$

por lo tanto se sigue que $a \in c_0(I,\mathbb{K},\alpha)$.

- § *Si* $\alpha_i = 1$, $\forall i \in I$, *uno tiene el espacio de familias que convergen a cero, es decir,* $c_0(I,\mathbb{K}) := \{a = (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I : \lim_{i\in I} |a_i| = 0\}$ *provisto de la norma* $\|a\|_\infty = \sup_{i\in I} |a_i|$.
- § *Si* $I = \mathbb{N}$ *y* $\alpha_i = 1$, $\forall i \in I$, *entonces estamos en presencia del espacio de sucesiones de elementos de* $\mathbb{K}$ *que convergen a 0. Denotamos a* $c_0(\mathbb{N},\mathbb{K},\alpha)$ *simplemente por* c_0.

3. *El espacio* $\mathbb{K}^n := \mathbb{K} \times ... \times \mathbb{K}$*(n veces) con la norma* $\|(\lambda_1, ..., \lambda_n)\| = \max_{1\leq j\leq n} |\lambda_j|$ *es un espacio de Banach.*

Observación 1.2.10. *Para un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial normado* E *, la bola unitaria cerrada es el conjunto*

$$B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

y la bola unitaria abierta es el conjunto

$$B_E^- := \{x \in E : \|x\| < 1\}$$

se define también el conjunto $\|E\| := \{\|x\| : x \in E\}$.

Observación 1.2.11. *En general se tiene que* $\|E\| \not\subseteq |\mathbb{K}|$. *Basta considerar la norma sobre* $\mathbb{K}$ *definida por*

$$\|\mu\|_s = |\mu|s$$

donde $s \in (0, \infty) \setminus |\mathbb{K}|$.
Se puede mostrar que en las condiciones anteriores, el conjunto $\{\mu \in \mathbb{K} : \|\mu\|_s = 1\}$ *es vacío.*

Definición 1.2.12. *Sea* E *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial normado y* $X \subset E$. *Se define el subespacio generado de* X *por* $[X] := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j : \alpha_j \in \mathbb{K}, x_j \in X \right\}$. *Denotaremos al espacio* $[\{x\}]$ *simplemente por* $[x]$ *ó* $\mathbb{K}x$, *donde* $x \in E$.

De forma análoga al caso clásico, si $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ son dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados, entonces una aplicación $f : E \to F$ es continua si existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|f(x)\|_F \leq c\|x\|_E \qquad \forall x \in E$$

Diremos también que dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales normados E y F son linealmente homeomorfos si existe un homeomorfismo lineal entre ellos. Por otro lado, diremos que E y F son isomorfos como espacios normados o linealmente isométricos, si existe una isometría lineal entre ellos, es decir, si existe una aplicación lineal $T : E \to F$ que satisface: $\forall x \in E$, $\|T(x)\|_F = \|x\|_E$. En este caso escribiremos $E \sim F$.

Denotaremos por $L(E,F)$ a la colección de todas las aplicaciones lineales continuas de E en F. Además, denotaremos por $L(E)$ al conjunto $L(E,E)$ y por E' al conjunto $L(E,\mathbb{K})$.

Bajo las operaciones de adición y producto por escalar de funciones, el espacio $L(E,F)$ es un espacio normado, con la norma de operadores $\|f\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$.

Observación 1.2.13. *Se puede mostrar que* $\|f\|_0 = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|$ *también define una norma sobre* $L(E,F)$ *y que en general* $\|\cdot\| \neq \|\cdot\|_0$ *, por ejemplo, si consideramos* $F = \mathbb{Q}_3$ *provisto de la valuación 3-ádica y* $E = \mathbb{Q}_3$ *con la norma* $\|q\|^{\sim} = 2|q|$ *, entonces para el operador identidad* $I : E \to F$ *se tiene que* $\|I\| = \frac{1}{2}$ *y* $\|I\|_0 = \frac{1}{3}$.

Sin embargo $\|\cdot\|$ *y* $\|\cdot\|_0$ *son equivalentes, en efecto, si* $\tau = \sup\limits_{|\lambda|<1} |\lambda|$ *, entonces se tiene* $\|f\|_0 \leq \|f\| \leq \dfrac{1}{\tau}\|f\|_0$. *Si* $|\mathbb{K}^*|$ *es denso en* $\mathbb{R}_+^*$, *entonces se tiene la igualdad.*

Observación 1.2.14. *De forma análoga al caso clásico, considerando* E *y* W *dos* $\mathbb{K}$-*espacios vectoriales normados, si* W *es un espacio de Banach, entonces* $L(E,W)$ *es un espacio de Banach. En particular* E' *es un espacio de Banach con la norma de operadores.*

Teorema 1.2.15. *(**Aplicación Abierta**) Sean* E *y* F *espacios de Banach. Si* $T \in L(E,F)$ *es sobreyectiva, entonces la imagen por* T *de cualquier abierto de* E *es un abierto de* F.

Demostración. Análogamente al caso arquimediano, las mismas técnicas son utilizadas para la demostración de este teorema. Más detalles pueden encontrarse en [15], página 64.

$\square$

Se puede definir de manera natural la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \widehat{x} : E' &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto \widehat{x}(f) = f(x) \end{aligned}$$

la cual es continua con $\|\widehat{x}\| \leq \|x\|$.
Por otro lado, la aplicación $J_E : E \to E''$ definida por $J_E(x) = \widehat{x}$, es lineal y además $\|J_E(x)\| = \|\widehat{x}\| \leq \|x\|$, por lo tanto es continua con $\|J_E\| \leq 1$.
Al contrario que en el caso clásico, la aplicación J_E no es una isometría. Para ciertos $\mathbb{K}$ se puede construir un espacio de Banach infinito dimensional E de manera que $E' = \{0\}$ y por lo tanto $E'' = \{0\}$ (ver [15], corolario 4.3 , página 100).

Definición 1.2.16. *Diremos que un espacio normado E es pseudoreflexivo si la aplicación J_E es una isometría. Si en adición J_E es sobreyectiva, se dirá que E es reflexivo.*

1.3. Ortogonalidad

En esta sección introduciremos un concepto de ortogonalidad válido en todo espacio normado. Consideraremos $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ un campo valuado no-arquimediano completo respecto a la métrica inducida por la valuación y $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado no-arquimediano, es decir, la norma satisface la desigualdad triangular fuerte. En este tipo de espacios se cumple la siguiente afirmación: Si $\|x\| \neq \|y\|$, entonces $\|x + y\| = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$.

Teorema 1.3.1. ***(Principio de Van Rooij)*** *Sean $t \in]0, 1]$, x e y elementos de un espacio normado. Si $\|x + y\| \geq t\|x\|$, entonces $\|x + y\| \geq t\|y\|$.*

Demostración. Es claro cuando $\|x\| \geq \|y\|$. Supongamos $\|x\| < \|y\|$, entonces por principio del triángulo isósceles, $\|x + y\| = \|y\| \geq t\|y\|$. □

Definición 1.3.2. *Sean $x, y \in E$, donde E es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado. Diremos que x es ortogonal a y si*

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Denotaremos por $x \perp y$.

Teorema 1.3.3. ***(Simetría)*** *Sean $x, y \in E$, donde E es un espacio normado. Entonces $x \perp y$ si y solamente si, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,*

$$\|\mu y + \lambda x\| = \max\{\|\lambda x\|, \|\mu y\|\} \tag{1.3.1}$$

Demostración. Como E es un espacio normado, de la desigualdad triangular fuerte se tiene que $\|\mu y + \lambda x\| \leq \max\{\|\lambda x\|, \|\mu y\|\}$. Supongamos que $x \perp y$ y $\lambda \neq 0$. Notemos que

$$\|\mu y + \lambda x\| = |\lambda|\|x + \lambda^{-1}\mu y\| \geq |\lambda|\|x\| = \|\lambda x\|$$

luego por Principio de Van Rooij, se sigue que $\|\mu y + \lambda x\| \geq \|\mu y\|$ y así se tiene la igualdad $\|\mu y + \lambda x\| = \max\{\|\lambda x\|, \|\mu y\|\}$.
Recíprocamente, si se cumple (1.3.1), entonces tomando $\lambda = 1$ se sigue la ortogonalidad entre dos elementos de E. $\square$

El concepto de ortogonalidad es generalizado de la siguiente manera:
Sea $x_1, x_2, ..., x_m$ una sucesión finita de elementos de un espacio normado E. Diremos que esta sucesión es ortogonal si

$$\|\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_m x_m\| = \max_{1 \leq i \leq m}\{\|\alpha_i x_i\|\}$$

para todo $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{K}$.
Si la sucesión es infinita, se sigue que

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\right\| = \max_{i \in \mathbb{N}}\{\|\alpha_i x_i\|\}$$

Para todo $\alpha_1, \alpha_2, ... \in \mathbb{K}$ tales que $\lim_{i \to \infty} \alpha_i x_i = 0$.

Definición 1.3.4. *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado y $E_1, E_2 \subset E$. Diremos que E_1 y E_2 son ortogonales si $x \perp y$, $\forall x \in E_1$, $\forall y \in E_2$. Si este es el caso, escribiremos $E_1 \perp E_2$*

Definición 1.3.5. *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado y D_1, D_2 dos subespacios de E. Diremos que D_2 es un complemento de D_1 ó que D_1 es complementado, si $D_1 \cap D_2 = \{\theta\}$ y $E = D_1 + D_2$. Si además $D_1 \perp D_2$, diremos que D_2 es un complemento ortogonal de D_1 ó que D_1 es ortocomplementado.*

Definición 1.3.6. *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado. Diremos que un operador $P \in L(E)$ es una proyección si $P^2 = P$. Si en adición se tiene que $\ker(P) \perp P(E)$, entonces diremos que P es una ortoproyección.*

Proposición 1.3.7.

1. *Si P es una proyección, entonces el operador $(Id - P)$ es también una proyección.*
2. *Si $P \neq 0$ es una proyección, entonces $E = \ker(P) + P(E)$ y además $\|P\| \geq 1$.*
3. *Si $P \neq 0$ y $P \neq Id$, entonces $\|P\| = \|Id - P\|$.*
4. *Si P es una ortoproyección, entonces $\|P\| = 1$.*

Demostración. Mostraremos el ítem 4. Supongamos que P es una ortoproyección, es decir, $\ker(P) \perp P(E)$. Por el ítem 2. basta mostrar que $\|P\| \leq 1$. Sea $x = u + v$ con $u \in \ker(P)$ y $v \in P(E)$. Notemos que

$$\frac{\|P(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|v\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{máx}\{\|v\|, \|u\|\}}{\|x\|} = \frac{\|u + v\|}{\|x\|} = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

luego $\|P\| \leq 1$. □

Definición 1.3.8. *Sea t un número real, $0 < t \leq 1$. Una sucesión finita $x_1, x_2, ..., x_m$ de elementos de E se dice t-ortogonal, si*

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \right\| \geq t \max_{1 \leq i \leq m} \{\|\alpha_i x_i\|\}$$

para todo $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{K}$.

Si la sucesión $x_1 x_2, ...,$ es infinita, se dice t-ortogonal si

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \right\| \geq t \max_{i \in \mathbb{N}} \{\|\alpha_i x_i\|\}$$

para todo $\alpha_1, \alpha_2, ... \in \mathbb{K}$ tales que $\lim_{i \to \infty} \alpha_i x_i = 0$.

Definición 1.3.9. *Sean E un espacio vectorial normado y $t \in]0,1]$. Una sucesión $x_1, x_2, ... \in E$ es una base t-ortogonal si $\{x_1, x_2, ...\}$ es t-ortogonal y todo $x \in E$ tiene una expansión $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$, es decir, $\lim_{n\to\infty} \lambda_i x_i = 0$, donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$. La base $\{x_1, x_2, ...\}$ es ortogonal si $t = 1$, ortonormal si en adición, $\|x_i\| = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Si $x_1, x_2, ... \in E$ es una base t-ortogonal, entonces para $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j \in E$ se tiene

$$\|x\| = \lim_{m\to\infty} \|\sum_{i}^{m} \lambda_i x_i\| \geq t \lim_{m\to\infty} \max_{1\leq i\leq m} \|\lambda_i x_i\| = t \max_{i\in\mathbb{N}} \|\lambda_i x_i\|$$

luego, la expansión de x es única, en efecto, si también $x = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j x_j$ para ciertos $\mu_j \in \mathbb{K}$, entonces $0 = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j - \mu_j) x_j$, asi que $t \max_{j\in\mathbb{N}} \|(\lambda_j - \mu_j)x_j\| = 0$ y por lo tanto $\lambda_j = \mu_j$ para todo j.

Lema 1.3.10. *Sea F un subespacio lineal cerrado de un espacio vectorial normado E y sea $a \in E \setminus F$.*

i. *$[a] + F$ es cerrado. Si F es completo, también lo es $[a] + F$.*

ii. *Para todo $t \in \mathbb{R}$ con $0 < t < 1$, existe un $e \in E$ tal que $[a] + F = [e] + F$ y $dist(e, F) \geq t\|e\|$. Para cada tal e, se tiene $\|\alpha e + x\| \geq t \max\{\|\alpha e\|, \|x\|\}$, con $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in F$.*

Con $\pi \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |\pi| < 1$, podemos elegir e tal que $|\pi| \leq \|e\| \leq 1$.

Demostración. Sea $r := dist(a, F)$, $r > 0$. Existe un $z \in F$ tal que $\|a - z\| \leq t^{-1} r$. Llamando $e_0 = a - z$, entonces claramente $[a] + F = [e_0] + F$ y además, $t\|e_0\| \leq r = dist(e_0 + z, F) = dist(e_0, F)$.

Si e es cualquier elemento no nulo de E tal que $t\|e\| \leq dist(e, F)$, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in F$ se tiene $\|\alpha e + x\| \geq dist(\alpha e, F) \geq t\|\alpha e\|$ y luego por principio de Van Rooij se sigue que $\|\alpha e + x\| \geq t \max\{\|\alpha e\|, \|x\|\}$.

Se define la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{K}\oplus F & \longrightarrow & [a]+F \\ & (\alpha,x) & \mapsto & \varphi(\alpha,x)=\alpha e+x \end{array}$$

donde $\mathbb{K}\oplus F$ es el espacio $\mathbb{K}\times F$ con la norma $\|(\lambda,x)\| = \text{máx}\{|\lambda|, \|x\|_F\}$.

La aplicaión φ es un homeomorfismo lineal de $\mathbb{K}\oplus F$ sobre $[a]+F$. Luego, si F es completo, entonces se sigue que $[a]+F$ es métricamente completo y cerrado en E. La última parte de (ii) es trivial ya que nuestro e tiene un múltiplo escalar cuya norma está entre $|\pi|$ y 1.

$\square$

Definición 1.3.11. *Diremos que un espacio de Banach E es de tipo contable si existe un subconjunto contable $\{x_1, x_2, ...\}\subset E$ de manera que $E=\overline{[\{x_1,x_2,...\}]}$.*

Teorema 1.3.12. *Sea E un espacio de tipo contable infinito dimensional.*

i. Para toda sucesión $t_1, t_2, ...,$ de elementos del intervalo real $]0,1]$, E tiene una base $\{e_i : i\in\mathbb{N}\}$ tal que

$$\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\| \geq \text{máx}\{t_i\|\alpha_i e_i\| : i=1,...,m\}$$

para todo $m\in\mathbb{N}$ y $\alpha_1,...,\alpha_m\in\mathbb{K}$.

ii. Para todo $t\in]0,1[$, E contiene una sucesión t-ortogonal que forma una base para E. E es linealmente homeomorfo a c_0.

iii. Para todo $t\in]0,1[$ existe una función $s:\mathbb{N}\longrightarrow]0,1[$ y una biyección lineal $S: c_0(\mathbb{N}:s)\longrightarrow E$ tal que $t\|x\|\leq\|Sx\|\leq\|x\|$ para todo $x\in c_0(\mathbb{N}:s)$.

iv. E es pseudoreflexivo.

v. Sea D cualquier subespacio lineal cerrado de E. Entonces ambos D y E/D son de tipo contable. D es complementado. Para todo $\varepsilon>0$ existe una proyección de E sobre D de norma menor o igual a $1+\varepsilon$.

vi. Sea D un subespacio lineal de E, sea $f\in D'$ y $\varepsilon>0$. Entonces f puede extenderse a una $\overline{f}\in E'$ con $\|\overline{f}\|\leq(1+\varepsilon)\|f\|$

Demostración.

i. Sea $\pi \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |\pi| < 1$. Podemos asumir que la sucesión $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $]0,1[$ es estrictamente creciente. Como E es de tipo contable, podemos escoger una sucesión $\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ de subespacios lineales de E de manera que cada E_n tiene dimensión n y $\overline{\cup E_n} = E$.

Por el Lema 1.3.10, podemos escoger un $e_n \in E_n$ con $|\pi| \leq \|e_n\| \leq 1$ tal que

$$\|\alpha e_n + x\| \geq \frac{t_n}{t_{n+1}} \max\{\|\alpha e_n\|, \|x\|\}$$

con $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in E_{n-1}$. Se sigue inductivamente que para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$,

$$\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i\| \geq \max\{\frac{t_i}{t_{n+1}}\|\alpha_i e_i\| : i \leq m\} \tag{1.3.2}$$

como $t_{n+1} < 1$ se sigue la desigualdad en (i). Queda por demostrar que $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una base. Sea $s : \mathbb{N} \longrightarrow]0,\infty[$ la función $i \mapsto \|e_i\|$ $(i \in \mathbb{N})$.

Podemos definir la aplicación $S : c_0(\mathbb{N} : s) \to E$, por $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, donde $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in c_0(\mathbb{N} : s)$. S esta bien definida pues $\lim_{i\to\infty} \|\alpha_i e_i\| = \lim_{i\to\infty} |\alpha_i| s(i) = 0$. Es lineal y además $\|S\| \leq 1$. Se sigue de (1.3.2) que

$$\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| \geq t_1 \max\{\|\alpha_i e_i\| : i \leq n\} \tag{1.3.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, asi que $\|Sx\| \geq t_1\|x\|$ $(x \in c_0(\mathbb{N} : s))$. Por lo tanto, S es un homeomorfismo lineal sobre su recorrido. Entonces, su recorrido es cerrado en E. Pero éste contiene todos los e_n y además $\overline{\cup E_n} = E$, donde $e_n \in E_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, asi que S debe ser sobreyectivo y $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una base para E.

ii. Aplicando el resultado anterior a la sucesión $t_i = t^{\frac{1}{i}}$ $(i \in \mathbb{N})$. Por (1.3.3) la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es t-ortogonal. Como $|\pi| \leq s(i) \leq 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, $c_0(\mathbb{N} : s)$ y c_0 son idénticos como conjuntos y la aplicación identidad entre ellos es un homeomorfismo.

iii. Nuevamente aplicando (i) a la sucesión $t_i = t^{\frac{1}{i}}$ $(i \in \mathbb{N})$.

iv. Debemos probar que la aplicación natural $J : E \to E''$ es una isometría, es decir, que cualquiera sea el $x \in E$, $\|J(x)\| = \|x\|$. Hemos visto con anterioridad que $\|J(x)\| \leq \|x\|$, por lo tanto falta ver que $\|J(x)\| \geq \|x\|$. Sea $a \in E \setminus \{0\}$ y sea $t \in]0,1[$. Para demostrar esta afirmación basta construir una $f \in E' \setminus \{0\}$ tal que $|f(a)| \geq t\|f\|\|a\|$. De esta forma

$$\|J(a)\| = \sup_{f \in E' \setminus \{0\}} \frac{|J(a)(f)|}{\|f\|} = \sup_{f \in E' \setminus \{0\}} \frac{|f(a)|}{\|f\|} \geq t\|a\|$$

Ahora, como $0 < t < 1$, se sigue que $\|J(a)\| \geq \|a\|$.

Sea s y S como en (iii). Existe un $b = (\beta_1, \beta_2, ...) \in c_0(\mathbb{N} : s)$ tal que $S(b) = a$ y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|b\| = |\beta_{n_0}| s(n_0)$.

Sea $f : E \to \mathbb{K}$ la función que a cada $x \in E$ le asigna la coordenada n_0 de $S^{-1}x$. Se afirma que $f \in E'$, en efecto, sea $x \in E$ y $S^{-1}x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, entonces

$$|f(x)| = s(n_0)^{-1}|\alpha_{n_0}|s(n_0) = s(n_0)^{-1}\|S^{-1}x\| \leq s(n_0)^{-1}\|S^{-1}\|\|x\|$$

Luego $\|f\| \leq s(n_0)^{-1}\|S^{-1}\| \leq s(n_0)^{-1}t^{-1}$. Por otro lado:

$$\begin{aligned} |f(a)| = |\beta_{n_0}| &= s(n_0)|\beta_{n_0}|s(n_0)^{-1} = s(n_0)^{-1}\|b\| \\ &\geq s(n_0)^{-1}\|Sb\| = s(n_0)^{-1}\|a\| \\ &\geq ts(n_0)^{-1}t^{-1}\|a\| \\ &\geq t\|f\|\|a\| \end{aligned}$$

Lo que se quería mostrar.

v. Sean D un subespacio cerrado de $E = \overline{[\{e_i : i \in \mathbb{N}\}]}$ y $W = \{j \in \mathbb{N} : e_j \notin D\}$. Si $x \in E$, entonces $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ con $\lim_{i \to \infty} \alpha_i e_i = 0$, y luego

$$x = \sum_{j \in W} \alpha_j e_j + \sum_{j \notin W} \alpha_j e_j$$

como D es cerrado se sigue que $\sum_{j \notin W} \alpha_j e_j \in D$ y por lo tanto

$$x + D = \sum_{j \in W} \alpha_j e_j + D = \sum_{j \in W} \alpha_j (e_j + D)$$

Se concluye que E/D es de tipo contable con $E/D = \overline{[\{e_j + D : j \in W\}]}$.
Sean $Q : E \to E/D$ la aplicación cociente, $\varepsilon > 0$ y $t = (1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$. Como E/D es de tipo contable, por (ii) tiene una base t-ortogonal en E/D, digamos $\{b_i+D : i \in \mathbb{N}\}$. Por definición de la norma en el cociente y la sobreyectividad de Q, para cada $i \in \mathbb{N}$ escogemos $a_i \in E$ tal que

1. $Q(a_i) = b_i + D$
2. $\|b_i + D\| \geq t\|a_i\|$.

Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\| \leq \max_{i\leq n}\{\|\alpha_i a_i\|\} \leq t^{-1} \max_{i\leq n}\{|\alpha_i|\|b_i + D\|\} \leq t^{-2}\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(b_i + D)\|$$

Sea $x + D = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(b_i + D) \in E/D$, luego por (b) y la desigualdad anterior podemos concluir que

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i\| \leq t^{-2}\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(b_i + D)\|$$

Podemos hacer entonces $T : E/D \longrightarrow E$ definida por $T(x + D) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i$. Esta T es lineal y continua, además $\|T\| \leq t^{-2} = 1 + \varepsilon$.
Sea $x + D = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(b_i + D) \in E/D$, notemos que

$$QT(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(b_i + D)) = Q(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i Q(a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(b_i + D)$$

Y por tanto se tiene que $QT = Id_{E/D}$.
De lo anterior es fácil ver que $TQ^2 = TQ$, luego $P := Id - TQ$ es una proyección lineal continua y como $\|T\| \leq 1 + \varepsilon$ y $\|Q\| \leq 1$ se sigue que $\|P\| \leq 1 + \varepsilon$. De las identidades

$$QP = Q - QTQ = Q - Id_{E/D}Q = Q - Q = 0$$

Podemos inferir que $P(E)$ está contenido en el kernel de Q, el cual es D. Pero sobre D se tiene que $Q = 0$ y por lo tanto $P = Id$. Se concluye que P es una proyección de E sobre D de norma menor o igual a $1+\varepsilon$.

En particular, P es una sobreyección lineal continua de $E \longrightarrow D$, así D es de tipo contable.

vi. Podemos asumir que D es cerrado. Sea P como en (v) y haciendo $\overline{f} := f \circ P$ se tiene lo pedido.

□

Teorema 1.3.13. *Sea E un espacio normado n-dimensional ($n \in \mathbb{N}$).*

i. E es linealmente homeomorfo a $\mathbb{K}^n$

ii. E es un espacio de Banach. Todas las aplicaciones lineales $E \longrightarrow \mathbb{K}$ son continuas. Todos los subespacios lineales de E son cerrados y complementados.

iii. Para todo $t \in]0,1]$ existe una sucesión t-ortogonal $e_1, ..., e_n$ en E que forma una base para E.

iv. Para todo $t \in]0,1]$ existen números reales positivos $s_1, ..., s_n$ y una biyección lineal $T : \mathbb{K}_{s_1} \oplus ... \oplus \mathbb{K}_{s_n} \to E$ tal que $t\|x\| \leq \|Tx\| \leq \|x\|$, para todo $x \in \mathbb{K}_{s_1} \oplus ... \oplus \mathbb{K}_{s_n}$. Donde $\mathbb{K}_{s_i} := (\mathbb{K}, |.|_{s_i})$ y $|.|_{s_i} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\lambda \mapsto |\lambda|_{s_i} = s_i|\lambda|$ es una norma no arquimediada.

v E es reflexivo

Demostración. La demostración de este teorema es similar a la demostración del teorema anterior, tomando en cuenta que un espacio finito dimensional es en particular un espacio de tipo contable. □

1.4. Producto Tensorial

En esta sección introduciremos el concepto de producto tensorial y presentaremos algunas de sus propiedades fundamentales. Omitiremos las demostraciones de éstas debido a que pueden encontrarse desarrolladas completamente en [15]. El objetivo principal es a posteriori demostrar que existe una conección natural(Isometría lineal) entre el espacio de los operadores compactos con el producto tensorial.

Sean D, E y F espacios de Banach. Una aplicación $T : E \times F \to D$ es bilineal si para cualquier $a \in E$ y $b \in F$, las aplicaciones $y \mapsto T(a, y)$, $(y \in F)$ y $x \mapsto T(x, b)$, $(x \in E)$ son lineales. Una aplicación bilineal T es continua si, y solamente si, existe un número $c > 0$ tal que $\|T(x, y)\| \leq c\|x\|\|y\|$, $\forall x \in E$, $\forall y \in F$.

El espacio de todas las aplicaciones bilineales de $E \times F$ en D forman un espacio de Banach, denotado por $Bil(E, F; D)$, bajo la norma

$$\|T\| := \inf\{c > 0 : \|T(x, y)\| \leq c\|x\|\|y\|, \forall x \in E, \forall y \in F\}$$

Este espacio de Banach es canónicamente isométrico a los espacios $L(E, L(F, D))$ y $L(F, L(E, D))$.

Definición 1.4.1. *Un par consistente de un espacio de Banach $E\widehat{\otimes}F$ y una aplicación bilineal $(x, y) \mapsto x \otimes y$ de $E \times F$ sobre $E\widehat{\otimes}F$ es un producto tensorial de E y F si se tienen las siguientes propiedades:*

(i) $\|x \otimes y\| \leq \|x\|\|y\|$, $\forall x \in E$, $\forall y \in F$.

(ii) Para toda aplicación bilineal continua S de $E \times F$ en cualquier espacio de Banach D, existe una única $S_\otimes \in L(E\widehat{\otimes}F, D)$ tal que $\|S_\otimes\| \leq \|S\|$ y tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\otimes"'] & D \\ E\widehat{\otimes}F \arrow[ur, "S_\otimes"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 1.4.2. *Sean E y F espacios de Banach. Entonces E y F tienen un producto tensorial. Éste es único en el siguiente sentido: Si $<E\widehat{\otimes}F, \otimes>$ y $<E\widehat{\odot}F, \odot>$ son productos tensoriales de E y F, existe una única isometría lineal de $E\widehat{\otimes}F$ sobre $E\widehat{\odot}F$ tal que envía cada $x \otimes y$ $(x \in E,\ y \in F)$ en el correspondiente $x \odot y$.*

Demostración. ver [15], página 124. $\square$

Teorema 1.4.3. *Sean D, E y F espacios de Banach.*

(i) $\|x \otimes y\| = \|x\|\|y\|$, $\forall x \in E$, $\forall y \in F$.

(ii) $\|S_{\otimes}\| = \|S\|$, $\forall S \in Bil(E, F; D)$.

Luego, de manera natural se tienen las siguientes isometrías lineales

$$Bil(E, F; D) \sim L(E\widehat{\otimes}F, D) \sim L(E, L(F, D)) \sim L(F, L(E, D))$$

En particular, para $D = \mathbb{K}$ se tiene

$$(E\widehat{\otimes}F)' \sim L(E, F') \sim L(F, E')$$

(iii) $\forall T \in L(E\widehat{\otimes}F, D)$ *se tiene*

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x \otimes y)\|}{\|x\|\|y\|} : x \in E, y \in F, \|x\|\|y\| \neq 0\right\}$$

Demostración. ver [15], página 126. $\square$

Lema 1.4.4. *Sean E y F espacios de Banach.*

(i) Sea $0 < t \leq 1$. Si $x_1, ..., x_m$ es una sucesión t-ortogonal en E y si $y_1, ..., y_m$ es una sucesión de elementos de F, entonces $x_1 \otimes y_1, ..., x_n \otimes y_n$ es una sucesión t-ortogonal en $E\widehat{\otimes}F$.

(ii) Sea $0 < t \leq 1$. Todo elemento $w \in E\widehat{\otimes}F$ puede escribirse como $w = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \otimes b_j$, donde $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset E$ es una sucesión t-ortogonal y $(b_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset F$ $(\lim_{j\to\infty} \|a_j \otimes b_j\| = 0)$.

Demostración. ver [15], página 128. $\square$

Corolario 1.4.5. *Si E y F son espacios de Banach y si $w \in E\widehat{\otimes}F$, entonces* $\|w\| = \inf\left\{\max_{j\in\mathbb{N}} \|a_j\|\|b_j\| : (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset E; (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset F; w = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \otimes b_j\right\}$.

Demostración. ver [3], página 68. $\square$

Capítulo 2

Operadores Compactos

En este capítulo definiremos la noción de un conjunto compactoide y de operador compacto en el caso no-arquimediano (la cual dista de la definición de operador compacto en el caso clásico). Además, presentaremos los resultados fundamentales acerca de estos operadores y veremos de qué forma se relacionan con el producto tensorial definido en el capitulo anterior. Véase también [15], [10] y [11].

2.1. Conjuntos Compactoides

Recordemos que un subconjunto W de un espacio localmente convexo E es llamado precompacto si para cualquier vecindad de cero U existe un subconjunto finito $V \subset E$ tal que $W \subset U + V$.
Supongamos que E es Hausdorff y que $\mathbb{K}$ no es localmente compacto. Cualquier conjunto convexo en E con dos puntos distintos x e y contiene al conjunto $\{x+\lambda(y-x) : \lambda \in B_{\mathbb{K}}\}$, el cual es homeomorfo a $B_{\mathbb{K}}$ y por lo tanto no es precompacto. Luego, los conjuntos pre(compactos) y convexos en E se reducen a un punto. De esta forma, en un intento de convexificar la noción de precompacidad, se define el concepto de un conjunto compactoide.

Definición 2.1.1. *Sea E un espacio vectorial normado. Diremos que un subconjunto X de E es absolutamente convexo si $\lambda x + \mu y \in X$ para todo $x, y \in X$ y $\lambda, \mu \in B_{\mathbb{K}}$.*

Definición 2.1.2. *Para cualquier $Y \subset E$, se define la cápsula absolutamente convexa cerrada de Y como la intersección de todos los subconjutos cerrados y absolutamente convexos de E que contienen a Y, se detona por $\overline{Co}(Y)$.*

Observación 2.1.3. *$\overline{Co}(Y)$ es el subconjunto cerrado absolutamente convexo más pequeño que contiene a Y.*

§ Si $a_1, ..., a_n \in E$, entonces $\overline{Co}(a_1, ..., a_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : \lambda_i \in B_{\mathbb{K}}\}$.

§ Si $a_1, a_2, ... \in E$ es una sucesión t-ortogonal para algún $t \in]0, 1]$, entonces $\overline{Co}(a_1, a_2, ...) = \{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i : \lambda_i \in B_{\mathbb{K}}, \lim_{i\to\infty} \lambda_i a_i = 0\}$

Definición 2.1.4. *Un subconjunto $A \subset E$ se dice compactoide si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $\{x_1, ..., x_n\} \subset E$ de manera que $A \subset B_\varepsilon(0) + \overline{Co}(\{x_1, ..., x_n\})$*

Proposición 2.1.5. *Sean E y F espacios vectoriales normados*

(i) *$A \subset E$ compactoide $\Rightarrow \overline{A}$ y $\overline{Co}(A)$ son compactoides.*

(ii) *$X, Y \subset E$ compactoides $\Rightarrow X \cup Y$ y $X + Y$ son compactoides.*

(iii) *Si $X \subset E$ es compactoide y $T \in L(E, F)$, entonces $T(X)$ es un compactoide en F.*

(iv) *Todo conjunto compactoide es acotado.*

(v) *Todo conjunto precompacto es compactoide*

(vi) *Si E es finito dimensional, entonces los conjuntos compactoides de E son precisamente los conjuntos acotados.*

(vii) *Si $\mathbb{K}$ es localmente compacto, entonces los compactoides de E son precisamente los conjuntos precompactos.*

(viii) *Si $X \subset E$ es compactoide, entonces $\overline{[X]}$ es de tipo contable*

(ix) Si $a_1, a_2, ... \in E$ *y* $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$, *entonces* $\overline{Co}(a_1, a_2, ...)$ *es un compactoide*

Demostración. Se mostrarán algunas de estas afirmaciones pues las demás son directas de la definición.

(iv). Supongamos $A \subset E$ compactoide y sea $\varepsilon > 0$. Existe un conjunto finito $\{x_1, ..., x_n\} \subset E$ de manera que $A \subset B_\varepsilon(0) + \overline{Co}(\{x_1, ..., x_n\})$. Si $a \in A$, entonces $a = w + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$, para algún $w \in B_\varepsilon(0)$ y $\lambda_j \in B_{\mathbb{K}}$ para todo $j = 1, ..., n$. Notemos que:

$$\begin{aligned} \|a\| = \|w + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\| &\leq \max\{\|w\|, \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\|\} \\ &\leq \max\{\varepsilon, \max_{1\leq j\leq n} |x_j|\} \end{aligned}$$

Luego, se sigue que A es acotado.

(vi). Supongamos que E es un espacio vectorial n-dimensional. Por Teorema 1.3.13 E es linealmente homeomorfo a $\mathbb{K}^n$. Por (iv) sólo falta ver que si $A \subset \mathbb{K}^n$ es acotado, entonces A es un compactoide, en efecto, sea $A \subset \mathbb{K}^n$ acotado con la norma del máximo $\left((\lambda_1, ..., \lambda_n) \mapsto \max\limits_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|\right)$. Existe entonces $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\|a\| < |\lambda|$, $\forall a \in A$. Entonces $A \subset \overline{Co}(\{\lambda e_1, ..., \lambda e_n\})$, donde $(e_k)_{k=1}^n$ es la base canónica en $\mathbb{K}^n$. Se sigue que A es compactoide.

(vii). Supongamos que $\mathbb{K}$ es localmente compacto y $X \subset E$ un compactoide. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un conjunto finito $\{x_1, ..., x_n\} \subset E$ tal que $X \subset B_\varepsilon(0) + \overline{Co}(\{x_1, ..., x_n\})$. Se define la aplicación $\varphi : \mathbb{K}^n \to E$ por $(\lambda_k)_{k=1}^n \mapsto \varphi((\lambda_k)_{k=1}^n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Como $B_{\mathbb{K}}$ es compacto y φ es continua, $\overline{Co}(\{x_1, ..., x_n\})$ es un compacto y entonces existe un conjunto finito $G \subset E$ tal que $\overline{Co}(\{x_1, ..., x_n\}) \subset G + B_\varepsilon(0)$, luego:

$$X \subset B_\varepsilon(0) + G + B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(0) + G$$

Por lo tanto X es precompacto.

$(viii)$. Supongamos $X \subset E$ compactoide y sea $\varepsilon = 1$. Existe $F_1 \subset E$ finito tal que $X \subset \overline{Co}(F_1) + B_1(0)$. Si $x \in X$, entonces $x = u + v$ con $u \in \overline{Co}(F_1)$ y $v \in B_1(0)$, se define $X_1 := (X + \overline{Co}(F_1)) \cap B_1(0)$. Notar que $X_1 \subset X + \overline{Co}(F_1)$, por lo tanto es compactoide y además $X \subset X_1 + \overline{Co}(F_1)$.

Ahora, si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $F_2 \subset E$ finito de manera que $X_1 \subset \overline{Co}(F_2) + B_{\frac{1}{2}}(0)$. Analogamente definimos $X_2 := (X_1 + \overline{Co}(F_2)) \cap B_{\frac{1}{2}}(0)$ que es compactoide y $X_1 \subset X_2 + \overline{Co}(F_2)$.

Inductivamente, para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ tendremos que $X \subset X_n + \overline{Co}(\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k)$. Para un n suficientemente grande, el conjunto X_n se reduce al 0 y luego $X \subset \overline{Co}(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k)$, por lo tanto:

$$X \subset \overline{Co}(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) \subset \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right]$$

de esta forma se sigue que $\overline{[X]} \subset \overline{[\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k]}$ y así $\overline{[X]}$ es de tipo contable.

$\square$

Lema 2.1.6. *Sea $\pi \in \mathbb{K}$, $0 < |\pi| < 1$. Sea E un espacio de Banach de tipo contable y X un subconjunto distinto de vacío, acotado y absolutamente convexo de E.*

(A) Si $0 < t < 1$ y toda sucesión t-ortogonal de elementos de X tiende a 0, entonces existe una sucesión t-ortogonal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \pi^{-1}X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$ y $X \subset \overline{Co}(e_1, e_2, ...)$.

(B) Asumamos que todo subespacio lineal uno dimensional de E es ortocomplementado. Si toda sucesión ortogonal de X tiende a 0, entonces existe una sucesión ortogonal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \pi^{-1}X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$ y $X \subset \overline{Co}(e_1, e_2, ...)$.

(C) Asumamos que la valuación de $\mathbb{K}$ es discreta. Si toda sucesión ortogonal de X tiende a 0, entonces existe una sucesión ortogonal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$ y $\overline{X} = \overline{Co}(e_1, e_2, ...)$.

Demostración. ver en [15], página 137. $\square$

Teorema 2.1.7. *Sea X un subconjunto acotado y absolutamente convexo de un espacio de Banach E y $0 < t < 1$. Las siguientes son equivalentes:*

(α) *X es compactoide.*

(β) *Todo subconjunto contable de X es compactoide.*

(γ) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un subespacio de dimensión finita de E, digamos D, de manera que* $X \subset D + B_\varepsilon(0)$.

(δ) *Existe un conjunto precompacto* $Y \subset E$ *tal que* $X \subset \overline{Co}(Y)$

(ϵ) *Existe una sucesión t-ortogonal* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *y* $X \subset \overline{Co}(a_1, a_2, ...)$.

(ζ) *Toda sucesión t-ortogonal de elementos de X tiende a 0.*

(η) *El subespacio generado por* $\overline{X}$ *no contiene subespacios lineales cerrados de dimensión infinita.*

(θ) *Si D es un subespacio lineal de E tal que* $\overline{X} \cap D$ *es abierto en D, entonces D es finito dimensional*

Demostración. Las implicaciones $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ y $(\epsilon) \Rightarrow (\delta)$ son directas. Probaremos $(\delta) \Rightarrow (\alpha)$, $(\beta) \Rightarrow (\gamma) \Rightarrow (\zeta) \Rightarrow (\beta)$, $(\gamma) \Rightarrow (\epsilon)$ y $(\zeta) \Rightarrow (\theta) \Rightarrow (\eta) \Rightarrow (\zeta)$. Además, sea $\pi \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |\pi| < 1$.

$(\delta) \Rightarrow (\alpha)$ Sea Y como en (δ). Tomando $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $Z \subset Y$ tal que $Y \subset Z + B_\varepsilon(0)$. Luego, se sigue que

$$X \subset \overline{Co}(Y) \subset \overline{Co}(Z) + B_\varepsilon(0)$$

por lo tanto, X es compactoide.

$(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ Por contradicción, supongamos (β) y que no sucede (γ), es decir, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier subespacio lineal D de dimensión finita de E, $X \nsubseteq D + B_\varepsilon(0)$. Entonces podemos hacer una sucesión $x_1, x_2, x_3, ... \in X$ de manera que $\forall n > 1$, $x_n \notin [x_1, ..., x_{n-1}] + B_\varepsilon(0)$. Luego, por (β), existe un conjunto finito $Y \subset E$ tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{Co}(Y) + B_\delta(0)$, donde $\delta = \varepsilon|\pi|$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, escogemos un $y_n \in \overline{Co}(Y)$ tal que $\|x_n - y_n\| < \delta$.

Si Y_0 es el subconjunto más pequeño absolutamente convexo de E que contiene a $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces Y_0 es un conjunto acotado, absolutamente convexo del espacio finito dimensional $[Y]$. Por el caso (A) del Lema 2.1.6, existe $e_1, ..., e_n \in Y_0$ tal que $Y_0 \subset \pi^{-1}\overline{Co}\{e_1, ..., e_n\}$. Pero entonces $Y_0 \subset \overline{Co}\{y_1, ..., y_m\}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, y luego, se sigue de la elección de los y_n que

$$Y_0 \subset \pi^{-1}\overline{Co}\{x_1, ..., x_n\} + \pi^{-1}B_\delta(0) \subset [\{x_1, ..., x_n\}] + B_\varepsilon(0)$$

asi que $x_{m+1} \in y_{m+1} + B_\delta(0) \subset [\{x_1, ..., x_n\}] + B_\varepsilon(0)$. Lo que contradice la elección de x_{m+1}.

$(\gamma) \Rightarrow (\zeta)$ Por contradicción, supongamos que existe una sucesión t-ortogonal $a_1, a_2, ... \in X$ y un $\varepsilon > 0$ tal que $t\|a_j\| > \varepsilon$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Para este $\varepsilon > 0$ existe un subespacio lineal D de E, de dimensión finita, tal que $X \subset D + B_\varepsilon(0)$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ escogemos un $d_n \in D$ de manera que $\|a_n - d_n\| < \varepsilon$. De esta forma, se tiene

$$\|a_n - d_n\| < \varepsilon < t\|a_n\| \qquad , \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego, del Teorema de perturbación (ver [10], Teorema 2.3.16), se sigue que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión t-ortogonal. Por lo tanto es linealmente independiente, lo que contradice la finitud de la dimensión del subespacio lineal D.

$(\zeta) \Rightarrow (\beta)$ Supongamos (ζ) y sea D un subespacio lineal cerrado de E que es de tipo contable. Por el Lema 2.1.6, parte (A), existe una sucesión t-ortogonal $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en D tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $X \cap D \subset \overline{Co}\{a_1, a_2, ...\}$. Luego, por las implicaciones $(\epsilon) \Rightarrow (\delta) \Rightarrow (\alpha)$ se tiene que $X \cap D$ es compactoide, y entonces se sigue (β).

$(\gamma) \Rightarrow (\epsilon)$ Supongamos (γ). De forma análoga a la demostración de $(viii)$ de la Proposición 2.1.5, se puede mostrar que $\overline{[X]}$ es de tipo contable. Ahora, como $(\gamma) \Rightarrow (\zeta)$, se sigue (ϵ) del Lema 2.1.6 parte (A).

$(\zeta) \Rightarrow (\theta)$ Por contradicción, supongamos que D es un subespacio lineal de E, de dimensión infinita tal que $\overline{X} \cap D$ contiene una bola $B_\varepsilon(0)$ de D. Por el Teorema 1.3.12, $B_\varepsilon(0)$

contiene una sucesión t-ortogonal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que no converge a 0, es decir, existe un $\delta > 0$ tal que $\|x_n\| \geq \delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escogemos $y_n \in X$ de manera que $\|y_n - x_n\| < \frac{\delta}{2}$. Se sigue entonces que

$$\|y_n\| = \|(y_n - x_n) + x_n\| = \text{máx}\{\|(y_n - x_n)\|, \|x_n\|\} = \|x_n\|$$

Luego, la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es t-ortogonal y no converge a 0, lo que contradice (ζ).

$(\eta) \Rightarrow (\zeta)$ Por contrarecíproco, supongamos que existe una sucesión t-ortogonal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un $\varepsilon > 0$ tal que $\|x_n\| \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como X es acotado, existe un $\mu \in \mathbb{K}$ de manera que $\|x_n\| \leq |\mu|$. Ahora, notemos que para $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ se tiene

$$t \cdot \varepsilon\|\lambda\| \leq t \cdot \max_{n\in\mathbb{N}}\{\|\lambda_n x_n\|\} \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n\right\| \leq \max_{n\in\mathbb{N}}\{\|\lambda_n x_n\|\} \leq |\mu|\|\lambda\|$$

por lo tanto, la aplicación T definida por $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto T(\lambda) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ es un homeomorfismo lineal de c_0 sobre su recorrido, que es un subespacio infinito dimensional cerrado de E, digamos D. Si denotamos por B_{c_0} a la bola unitaria en c_0, entonces $T(B_{c_0}) \subset \overline{X}$. Como $[T(B_{c_0})] = T(c_0) = D$, se sigue que D es un subespacio cerrado de dimensión infinita del subespacio generado por $\overline{X}$.

$(\theta) \Rightarrow (\eta)$ Supongamos (θ) y sea D un subespacio lineal cerrado del subespacio generado por $\overline{X}$. Como $\pi \in \mathbb{K}$ es tal que $0 < |\pi| < 1$, se sigue que

$$D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\pi^{-n} \cdot \overline{X}\}$$

Así, $int\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\pi^{-n} \cdot \overline{X}\}\right) \neq \emptyset$, por lo tanto, del Teorema de Categoría de Baire, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $int\left(\{\pi^{-N} \cdot \overline{X}\}\right) \neq \emptyset$, de esta forma se sigue que $\overline{X}$ contiene un abierto de D y entonces $\overline{X} \cap D$ es abierto en D, luego por (θ) se sigue que D es de dimensión finita.

□

2.2. Operador Compacto

Recordemos que en el caso clásico, es decir, cuando el espacio vectorial se considera sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, un operador es compacto si envía la bola unitaria en un conjunto precompacto y es completamente continuo si es el límite de operadores lineales continuos de rango finito. Es un hecho conocido que todos los operadores completamente continuos son compactos, pero no todo operador compacto es completamente continuo (esto fue mostrado por Enflo en [6]). Sin embargo, todo operador compacto entre espacios de Hilbert es completamente continuo.
Ahora bien, en el contexto no-arquimediano si consideramos las definiciones análogas al caso clásico, entonces para un campo $\mathbb{K}$ localmente compacto fue probado por Serre en [13] que los dos conceptos coincidían. Sin embargo cuando $\mathbb{K}$ no es localmente compacto, el único operador compacto se reduce a la aplicación nula. Por lo tanto, con el fin de extender el teorema de Serre, se utiliza una definición apropiada para operador compacto (ver Definición 2.2.1), la cual es enviar la bola unitaria en un conjunto compactoide (ver Definición 2.1.4).

Definición 2.2.1. *Sean E y F espacios de Banach. Un operador lineal $T : E \to F$ se dice compacto si $T(B_E)$ es un compactoide.*

Observación 2.2.2. *Si T es un operador compacto, entonces es continuo. Si $\mathbb{K}$ es localmente compacto, entonces T es un operador compacto, si y solamente si, $T(B_E)$ es un precompacto (ver Proposición 2.1.5 , ítem (vii)).*

Teorema 2.2.3. *Sean E, F espacios de Banach y $T \in L(E, F)$. T es un operador compacto, si y solamente si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $S \in L(E, F)$ tal que $S(E)$ es finito dimensional y $\|T - S\| \leq \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos que T es un operador compacto y sea $\varepsilon > 0$. Como $T(B_E)$ es un compactoide, por Teorema 2.1.7 existe un subespacio de dimensión finita $D \subset \overline{T(E)}$ tal que $T(B_E) \subset D + B_\varepsilon(0)$. Como $\overline{T(E)}$ es de tipo contable (Proposición 2.1.5 , ítem (viii)), existe una proyección $P : \overline{T(E)} \to D$ tal que $\|P\| \leq 1+\varepsilon$ (Teorema

1.3.12 , ítem (v)).

Hacemos $S := P \circ T$, y entonces $S \in L(E, F)$ y $S(E)$ es finito dimensional pues D lo es. Si $x \in B_E$, entonces existe un $y \in D$ tal que $\|T(x) - y\| \leq \varepsilon$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\|(S - T)(x)\| &= \|(P \circ T - T)(x)\| = \|(P - I)T(x)\| \\ &= \|(P - I)(T(x) - y)\| \\ &\leq \|(P - I)\|\|(T(x) - y)\| = \|P\|\|(T(x) - y)\| \\ &\leq (1 + \varepsilon)\varepsilon\end{aligned}$$

Se sigue de las desigualdades anteriores que $\|S - T\| \leq (1 + \varepsilon)\varepsilon$, como se quería.

Recíprocamente, supongamos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $S_\varepsilon \in L(E, F)$ de manera que $S_\varepsilon(E)$ es finito dimensional y $\|S_\varepsilon - T\| \leq \varepsilon$. Si $x \in B_E$, entonces $\|S_\varepsilon(x) - T(x)\| \leq \varepsilon$, es decir, $T(x) \in S_\varepsilon(x) + B_\varepsilon(0)$. Por lo tanto se tiene $T(B_E) \subset S_\varepsilon(B_E) + B_\varepsilon(0) \subset S_\varepsilon(E) + B_\varepsilon(0)$, y entonces por Teorema 2.1.7 se sigue que $T(B_E)$ es compactoide y luego T es un operador compacto. $\square$

Para espacios de Banach E y F denotamos por $C(E, F)$ al conjunto de todos los operadores compactos de E en F. Denotamos por $C(E)$ al conjunto $C(E, E)$.

Observación 2.2.4. *Por el Teorema 2.2.3 se sigue que $C(E, F)$ es un subespacio lineal cerrado de $L(E, F)$. De hecho, $C(E, F)$ es la clausura del conjunto de todos los elementos de $L(E, F)$ cuyo rango es finito dimensional.*

Proposición 2.2.5. *Sean E y F espacios de Banach. Si $T \in C(E, F)$ y si D es cualquier espacio de Banach, entonces:*

(i) $T \circ U \in C(D, F)$, $\forall U \in L(D, E)$.

(ii) $S \circ T \in C(E, D)$, $\forall S \in L(F, D)$.

Demostración. La demostración es directa del Teorema 2.2.3. $\square$

Observación 2.2.6. *Todo $a \in l^\infty$ determina un operador $M_a \in L(l^\infty)$ por $M_a(x) = (x_j a_j)_{j \in \mathbb{N}}$, donde $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ y $a = (a_j)_{j \in \mathbb{N}}$.*

§. *Si* $a \in c_0$, *entonces* $M_a \in C(l^\infty, c_0)$.

§. *El operador compacto* M_a *resulta ser una especie de operador "genérico". Todo operador compacto* $T \in L(E,F)$, *donde* E *y* F *son espacios de Banach, tiene una escritura* $T = S \circ M_a \circ U$, *para ciertos operadores lineales* S *y* U.

Teorema 2.2.7. *Sean* E *y* F *espacios de Banach y* $T \in L(E,F)$. *Las siguientes son equivalentes:*

(α) T *es compacto.*

(β) *Para todo subespacio cerrado de tipo contable* $D \leqslant E$, *La restricción* $T|D$ *es compacto.*

(γ) $T(E)$ *no contiene subespacios cerrados de dimensión infinita.*

(δ) *Existe* $a \in c_0$, $U \in L(E, l^\infty)$ *y* $S \in L(c_0, F)$ *de manera que* $T = S \circ M_a \circ U$.

(ϵ) *Existen* $a_1, a_2, \ldots \in F$ *y* $g_1, g_2, \ldots \in E'$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n\|\|g_n\| = 0$ *y* $T(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(x) a_n$,$(x \in E)$.

(ζ) *Para* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *sea* $\nu_n(T) := \{\|T_{|D}\| : D \leqslant E, dim(E/D) \leq n\}$. *Entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_n(T) = 0$.

(η) *Si* $D \subset E$ *es cualquier subespacio de dimensión infinita, entonces* $\inf\limits_{x\in D\setminus\{0\}} \left\{ \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \right\} = 0$.

Demostración. La implicación $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ es trivial.

$(\gamma) \Rightarrow (\eta)$. Sea $D \leqslant E$ tal que D es infinito dimensional y supongamos que $d := \inf\limits_{x\in D\setminus\{0\}} \left\{ \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \right\} > 0$. Entonces se tiene $\|T(x)\| \geq d\|x\|$, $\forall x \in \overline{D}$. Así, T es un homeomorfismo de $\overline{D}$ sobre $T(\overline{D})$, entonces $T(\overline{D})$ es un subespacio infinito dimensional de $T(E)$, cerrado en F.

$(\eta) \Rightarrow (\alpha)$. Por contrarecíproco, supongamos que T no es un operador compacto. Mostraremos que (η) es falso. Como $T(B_E)$ no es compactoide, por Teorema 2.1.7 existe

$\delta > 0$ y una sucesión $\frac{1}{2}$-ortogonal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(B_E)$ tal que $\|e_n\| \geq \delta$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escogemos $a_n \in B_E$ tal que $T(a_n) = e_n$. Como $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\frac{1}{2}$-ortogonal, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es linealmente independiente y haciendo $D := [\{a_1, a_2, ...\}]$, se sigue que D es infinito dimensional. Notemos que para $y \in D$ se tiene:

$$\|T(y)\| = \|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j\| \geq \frac{1}{2} \max_{1\leq j\leq m} \{\|\lambda_j e_j\|\} \geq \frac{\delta}{2} \max_{1\leq j\leq m} \{|\lambda_j|\} \geq \frac{\delta}{2}\|y\|$$

y luego la restricción de T es un homeomorfismo de D sobre $[\{e_1, e_2, ...\}]$, por lo tanto $\inf_{x\in D\setminus\{0\}} \left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right\} \neq 0$.

$(\delta) \Rightarrow (\epsilon)$. Sean $a = (\alpha_1, \alpha_2, ...) \in c_0$, $U \in L(E, l^\infty)$, $S \in L(c_0, F)$ como en (δ) y $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base natural en c_0. Sea $f_n : c_0 \to \mathbb{K}$ definida por $f_n((\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \lambda_n$, para $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$. Luego, haciendo $a_n := \alpha_n S(e_n)$ y $g_n := f_n \circ U$ se sigue (ϵ), en efecto, se tiene:

1. Como $a_n \to 0$ y $U \in L(E, l^\infty)$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|a_n\|\|g_n\| = 0$
2. Para $x \in E$ se tiene:

$$\begin{aligned}
T(x) = SM_aU(x) &= S((\alpha_i \cdot f_i \circ U(x))_{i\in\mathbb{N}}) \\
&= S(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot f_i \circ U(x) \cdot e_i) \\
&= \lim_{N\to\infty} S(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot f_i \circ U(x) \cdot e_i) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot f_i \circ U(x) S(e_i) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} g_i(x) a_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) a_i
\end{aligned}$$

$(\zeta) \Rightarrow (\eta)$. Sea $\varepsilon > 0$ y $D \subset E$ un subespacio de dimensión infinita. Por (ζ), E tiene un subespacio H de codimensión finita tal que $\|T_{|H}\| \leq \varepsilon$. Notar que $D \cap H \neq \{0\}$, pues de no ser así, como D es de dimensión infinita, si B es una base, entonces $B \cap H = \emptyset$, y luego el conjunto $\{[x] : x \in B\} \subset E/H$, lo que contradice la finitud de la dimensión de E/H. Ahora, si $x \in D \cap H \setminus \{0\}$, entonces $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon$.

$(\alpha) \Rightarrow (\delta)$. Supongamos que T es compacto. Como $[T(B_E)] = T(E)$, se sigue del ítem *viii* de la Proposición 2.1.5 que $\overline{T(E)}$ es de tipo contable. Por el Lema 2.1.6, existe una sucesión $\dfrac{1}{2}$-ortogonal $e_1, e_2, ...$ en $\overline{T(E)}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$ y $T(B_E) \subset \overline{Co}\{e_1, e_2, ...\}$.

Como $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una suceción $\dfrac{1}{2}$-ortogonal, se sigue que cada elemento $z \in \overline{[\{e_1, e_2, ...\}]}$ tiene una única representación $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, con $\lambda_n \in \mathbb{K}$. Luego, podemos definir funcionales lineales $g_1, g_2, ...$ de E en $\mathbb{K}$ por

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) e_n \qquad \forall x \in E$$

Mostraremos que $\|g_n\| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

Sea $x \neq 0$. Si la valuación de $\mathbb{K}$ es densa, entonces existe una sucesión de escalares $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\|x\| \leq |\lambda_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \|x\|$. Como $T(B_E) \subset \overline{Co}\{e_1, e_2, ...\}$, se sigue que

$$T\left(\frac{x}{\lambda_j}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\left(\frac{x}{\lambda_j}\right) e_n \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

y $\left|g_n\left(\dfrac{x}{\lambda_j}\right)\right| \leq 1$, $\forall j, n \in \mathbb{N}$. Así, se sigue que $|g_n(x)| \leq |\lambda_j|$, $\forall j, n \in \mathbb{N}$. Y por lo tanto $|g_n(x)| \leq \|x\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora, si la valuación es discreta, entonces tomando el escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ más pequeño tal que $\|x\| \leq |\lambda|$, se muestra de forma análoga que $|g_n(x)| \leq \|x\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\|g_n\| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} U :& E \to l^{\infty} \\ & x \mapsto U(x) = (g_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

la cual es lineal y además $\|U(x)\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |g_n(x)| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|\|x\| \leq \|x\|$, $\forall x \in E$. Por lo tanto $U \in L(E, l^{\infty})$.

Por otro lado, sea $\pi \in \mathbb{K}$ con $0 < |\pi| < 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escogemos $\alpha_n \in \mathbb{K}$ de manera que $|\pi| \leq \|\alpha_n^{-1} \cdot e_n\| \leq 1$. Luego, haciendo $a := (\alpha_1, \alpha_2, ...)$, se sigue que $a \in c_0$, pues $|\alpha_n||\pi| \leq \|e_n\|$ y $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$.

Por último, sea

$$\begin{aligned} S :& c_0 \to F \\ \mu = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto S(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \alpha_n^{-1} e_n \end{aligned}$$

S es bien definida pues $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mu_n \alpha_n^{-1} e_n\| = 0$ y es una aplicación lineal. Además se tiene que

$$\|S(\mu)\| = \|\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \alpha_n^{-1} e_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|\mu_n \alpha_n^{-1} e_n\|\} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|\mu_n|\} = \|\mu\|$$

por lo tanto S es continua. Así, $S \in L(c_0, F)$.

Ahora, para $x \in E$ se tiene:

$$\begin{aligned} S \circ M_a \circ U(x) &= S \circ M_a((g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= S((g_n(x) \cdot \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \alpha_n \alpha_n^{-1} e_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) e_n \\ &= T(x) \end{aligned}$$

$(\epsilon) \Rightarrow (\zeta)$. Bastaría mostrar que para un $\varepsilon > 0$ dado, existe un subespacio de codimensión finita, digamos H, tal que $\|T_{|H}\| \leq \varepsilon$.

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en (ϵ) y sea $\varepsilon > 0$ dado. Existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $\|g_n\|\|a_n\| \leq \varepsilon$. Se define el conjunto $D_N := \{x \in E : g_1(x) = ... = g_N(x) = 0\}$ que tiene codimensión finita. Ahora, si $d \in D_N \setminus \{0\}$, entonces:

$$\|T(d)\| = \|\sum_{n=1}^{\infty} g_n(d) a_n\| = \|\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n(d) a_n\| \leq \max_{n>N}\{\|g_n\|\|d\|\|a_n\|\}$$

Por lo tanto se tiene $\dfrac{\|T(d)\|}{\|d\|} \leq \max\limits_{n>N}\{\|g_n\|\|a_n\|\} \leq \varepsilon$, y luego $\|T_{|D_N}\| \leq \varepsilon$.

$(\beta) \Rightarrow (\gamma)$. Asumamos (β) y sea D un subespacio lineal de dimensión infinita de $T(E)$ que es cerrado en F. Aplicando el Teorema 1.2.15(Aplicación Abierta) a la restricción de T sobre $T^{-1}(D)$, uno obtiene un $\varepsilon > 0$ tal que $\{x \in D : \|x\| \leq \varepsilon\} \subset T(B_E)$.

Por el Teorema 1.3.12 se puede escoger una suceción $\frac{1}{2}$-ortogonal $x_1, x_2, ...$ en $\{x \in D : \|x\| \leq \varepsilon\}$ que no converge a 0.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $y_n \in B_E$ tal que $y_n = T(x_n)$. Luego, la restricción de T sobre $[\{y_1, y_2, ...\}]$ es compacto, lo que contradice la implicación $(\alpha) \Rightarrow (\zeta)$ del Teorema 2.1.7.

□

Como una consecuencia, se puede encontrar una conección natural entre el espacio de los operadores compactos y el producto tensorial.

Teorema 2.2.8. *Sean E y F espacios de Banach. Entonces $E'\widehat{\otimes}F \sim C(E,F)$, La aplicación bilineal $\otimes$ de $E' \times F$ en $C(E,F)$ viene dada por $(g \otimes b)(x) = g(x)b$, en donde $g \in E', b \in F$ y $x \in E$.*

Demostración. Sea

$$
\begin{aligned}
S : E' \times F &\to C(E,F) \\
(g,b) &\mapsto S(g,b) : E \to F \\
&\qquad\qquad x \mapsto S(g,b)(x) = g(x)b
\end{aligned}
$$

S es una aplicación bilineal bien definida pues $S(g,b)$ es un operador compacto para todo $g \in E'$ y todo $b \in F$ ($S(g,b)$ es un operador de rango finito), además se tiene que $\|S(g,b)\| = \|g\|\|b\|$. Como S es continua, induce una $S_\otimes \in L(E\widehat{\otimes}F, C(E,F))$ la cual satisface $\|S_\otimes\| = \|S\| = 1$ y también $S_\otimes(g \otimes b) = S(g,b)$, $\forall g \in E'$ y $\forall b \in F$.

Si $w \in E\widehat{\otimes}F$ y $0 < t < 1$, entonces por Lema 1.4.4 se tienen una sucesión t-ortogonal $(b_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset F$ y $(g_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset E'$ tal que $w = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \otimes b_i$.

Existen $j \in \mathbb{N}$ con $\|w\| \leq \|g_j\|\|b_j\|$ y $x \neq 0$ tal que $|g_j(x)| \geq t\|g_j\|\|x\|$, luego se sigue que $\|S_\otimes w\| \geq t^2\|w\|$. Por lo tanto, ya que $0 < t < 1$, se tiene que $\|S_\otimes w\| = \|w\|$.

Luego, $S_{\otimes}$ es una Isometría. Mostraremos ahora que $S_{\otimes}$ es sobreyectiva, supongamos que $T \in C(E,F)$. Del Teorema 2.2.7, ítem (ϵ) , existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n\|\|g_n\| = 0$ y $T(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)a_n$.

Como $\|g_n \otimes a_n\| \leq \|a_n\|\|g_n\|$, se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} \|g_n \otimes a_n\| = 0$ y luego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n \otimes a_n$ converge. Ahora bien, llamando $w := \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n \otimes a_n$, se tiene que $S_{\otimes}(w) = T$.

$\square$

Capítulo 3

Espacios de Banach libres

En este capítulo se introducirá el concepto de un espacio de Banach libre, además de algunas propiedades sobre dichos espacios. Trabajaremos también la forma que adopta el espacio de operadores lineales continuos entre espacios de Banach libres, caracterizaciones para operadores compactos entre estos espacios y operadores que admiten adjunta en un particular espacio de Banach libre. Véase también [4] y [5].

3.1. Espacios de Banach Libres

Definición 3.1.1. *Sea E un espacio de Banach sobre un campo $\mathbb{K}$. Se dice que E es un espacio de Banach libre si existe una familia $(e_j)_{j\in I} \subset E \setminus \{0\}$ de manera que todo $x \in E$ puede escribirse de forma única como $x = \sum_{j\in I} x_j e_j$ (e.d , $\lim_{j\in I} |x_j|\|e_j\| = 0$) y $\|x\| = \sup_{j\in I} |x_j|\|e_j\|$.*
La familia $(e_j)_{j\in I}$ es llamada una base ortogonal de E. Si $\|e_j\| = 1$, $\forall j \in I$, entonces $(e_j)_{j\in I}$ es llamada una base ortonormal.

Proposición 3.1.2. *Sea E un espacio de Banach libre con base $(e_j)_{j\in I}$. La forma lineal $e'_j : E \to \mathbb{K}$ definida por $< e'_j, x >= x_j$, donde $x = \sum_{j\in I} x_j e_j$, es continua con norma $\|e'_j\| = \|e_j\|^{-1}$.*

Demostración. Notemos que para $x \in E$, donde $x = \sum_{j \in I} x_j e_j$, se tiene:

$$| < e'_j, x > | = |x_j| = |x_j| \|e_j\| \|e_j\|^{-1} \leq \|e_j\|^{-1} \sup_{j \in I} |x_j| \|e_j\| \leq \|e_j\|^{-1} \|x\|$$

entonces $\|e'_j\| \leq \|e_j\|^{-1}$.
Por otro lado, como $\|e'_j\| = \sup_{x \neq 0} \frac{| < e'_j, x > |}{\|x\|} \geq \frac{| < e'_j, e_j > |}{\|e_j\|} = \|e_j\|^{-1}$, se tiene la igualdad $\|e'_j\| = \|e_j\|^{-1}$. □

Observación 3.1.3. *Para cualquier $x' \in E'$ y $x = \sum_{j \in I} x_j e_j \in E$, se tiene que $< x', x >= \sum_{j \in I} x_j < x', e_j >$, en otras palabras, $x' = \sum_{j \in I} < x', e_j > e'_j$ es una suma puntualmente convergente. Además, $\|x'\| = \sup_{j \in I} \frac{| < x', e_j > |}{\|e_j\|}$. Esto lo podemos ver como sigue:*

$$\begin{aligned} | < x', x > | = |\sum_{j \in I} x_j < x', e_j > | &\leq \sup_{j \in I} |x_j| | < x', e_j > | \\ &= \sup_{j \in I} |x_j| \|e_j\| \frac{| < x', e_j > |}{\|e_j\|} \\ &\leq \|x\| \sup_{j \in I} \frac{| < x', e_j > |}{\|e_j\|} \end{aligned}$$

y entonces $\|x'\| \leq \sup_{j \in I} \frac{| < x', e_j > |}{\|e_j\|}$.
Ahora bien, ya que $\forall j \in I$, $\|x'\| \geq \frac{| < x', e_j > |}{\|e_j\|}$, se tiene que $\|x'\| = \sup_{j \in I} \frac{| < x', e_j > |}{\|e_j\|}$.

Teorema 3.1.4. *Si E es un espacio de Banach libre con base ortogonal $(e_j)_{j \in I}$, entonces $E \simeq c_0(I, \mathbb{K}, (\|e_j\|)_{j \in I})$ y $E' \simeq l^\infty(I, \mathbb{K}, (\frac{1}{\|e_j\|})_{j \in I})$.*

Demostración. Supongamos que E es un espacio de Banach libre con base ortogonal $(e_j)_{j \in I}$.
Sea

$$\begin{aligned} \phi : & E \longrightarrow c_0(I, \mathbb{K}, (\|e_j\|)_{j \in I}) \\ & x = \sum_{j \in I} x_j e_j \mapsto \phi(x) = (x_j)_{j \in I} \end{aligned}$$

ϕ está bien definida pues $\lim\limits_{j\in I}|x_j|\|e_j\| = 0$ y es lineal. Además, se tiene que $\|\phi(x)\| = \|(x_j)_{j\in I}\| = \sup\limits_{j\in I}|x_j|\|e_j\| = \|x\|$, y luego se sigue que E y $c_0(I,\mathbb{K},(\|e_j\|)_{j\in I})$ son isomorfos.

Por otro lado, sea

$$\begin{aligned} B :& E \times l^\infty\left(I,\mathbb{K},\left(\frac{1}{\|e_j\|}\right)_{j\in I}\right) \to \mathbb{K} \\ & (x = \sum_{j\in I} x_j e_j, y = (y_j)_{j\in I}) \mapsto B(x,y) = \sum_{j\in I} x_j y_j \end{aligned}$$

B está bien definida pues

$$|x_j y_j| = |x_j|\|e_j\||y_j|\|e_j\|^{-1} \leq |x_j|\|e_j\|\|y\|$$

luego, como $\|y\| < \infty$ y $\lim\limits_{j\in I}|x_j|\|e_j\| = 0$, se sigue que $\lim\limits_{j\in I} x_j y_j = 0$.
La aplicación B es bilineal y además $|B(x,y)| = |\sum\limits_{j\in I} x_j y_j| \leq \sup\limits_{j\in I}|x_j||y_j| \leq \|x\|\|y\|$, por lo tanto es continua.
Para cada $y \in l^\infty\left(I,\mathbb{K},\left(\frac{1}{\|e_j\|}\right)_{j\in I}\right)$ se define la función $f_y : E \to \mathbb{K}$ por $f_y(x) = B(x,y)$.
La función f_y es lineal y continua, en efecto, para $x \in E$ se tiene $|f_y(x)| = |B(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$, luego se sigue que $\|f_y\| \leq \|y\|$. Por otro lado, $\forall j \in I$, $\|f_y\| \geq \frac{|f_y(e_j)|}{\|e_j\|} = \frac{|y_j|}{\|e_j\|}$, así $\|f_y\| \geq \|y\|$ y por lo tanto $\|f_y\| = \|y\|$.
Sea

$$\begin{aligned} \varphi :& l^\infty\left(I,\mathbb{K},\left(\frac{1}{\|e_j\|}\right)_{j\in I}\right) \to E' \\ & y \mapsto \varphi(y) = f_y \end{aligned}$$

Notemos que la aplicación φ es lineal y además $\|\varphi(y)\| = \|f_y\| = \|y\|$. Para ver que φ es un isomorfismo, falta mostrar que φ es sobreyectiva, en efecto:
Sea $g \in E'$. Haciendo $z := (g(e_j))_{j\in I}$, se tiene que $z \in l^\infty\left(I,\mathbb{K},\left(\frac{1}{\|e_j\|}\right)_{j\in I}\right)$, en efecto, $|g(e_j)| \leq \|g\|\|e_j\|$ y luego, $\|z\| = \sup\limits_{j\in I}\dfrac{|g(e_j)|}{\|e_j\|} \leq \|g\| < +\infty$.

Ahora bien, para $x = \sum_{j\in I} x_j e_j \in E$ se tiene:

$$f_z(x) = \sum_{j\in I} x_j g(e_j) = g\left(\sum_{j\in I} x_j e_j\right) = g(x)$$

por lo tanto $f_z = g$. De esta forma, se sigue que $\varphi(z) = f_z = g$, y luego, φ es sobreyectiva.

□

Definición 3.1.5. *Sean E y F espacios de Banach libres con bases $(e_j)_{j\in I}$ y $(f_l)_{l\in L}$ respectivamente. Si $x' \in E'$ e $y \in F$, se define el operador $x' \otimes y : E \to F$ por $(x' \otimes y)(x) =< x', x > y$.*

El operador definido anteriormente es lineal, continuo y además $\|x' \otimes y\| = \|x'\|\|y\|$.

Proposición 3.1.6. *Sean E y F espacios de Banach libre con bases $(e_j)_{j\in I}$ y $(f_l)_{l\in L}$ respectivamente. Entonces cualquier operador $u \in L(E,F)$ se puede escribir como una única suma puntualmente convergente $u = \sum_{j,l} \alpha_{lj} e'_j \otimes f_l$, tal que $\forall j \in I$, $\lim_{l\in L} |\alpha_{lj}|\|f_l\| = 0$. Además $\|u\| = \sup_{j,l} \frac{|\alpha_{lj}|\|f_l\|}{\|e_j\|}$.*

Demostración. Para $u \in L(E,F)$ y para $j \in I$, se tiene $u(e_j) = \sum_{l\in L} \alpha_{lj} f_l$, y así $\lim_{l\in L} |\alpha_{lj}|\|f_l\| = 0$. Luego, para $x = \sum_{j\in I} x_j e_j \in E$, se tiene:

$u(x) = \sum_{j\in I} x_j u(e_j) = \sum_{j\in I}\sum_{l\in L} \alpha_{lj} x_j f_l = \sum_{j\in I}\sum_{l\in L} \alpha_{lj} < e'_j, x > f_l = (\sum_{j,l} \alpha_{lj} e'_j \otimes fl)(x)$.

Por lo tanto $u = \sum_{j,l} \alpha_{lj} e'_j \otimes f_l$ es una suma puntualmente convergente.

Además, $\|u\| = \sup_{j\in I} \frac{\|u(e_j)\|}{\|e_j\|} = \sup_{j\in I}\sup_{l\in L} \frac{|\alpha_{lj}|\|f_l\|}{\|e_j\|}$. En efecto, $\|u\| \geq \frac{\|u(e_j)\|}{\|e_j\|}$, $\forall j \in I$, por otro lado, para todo $x \in E$ se tiene:

$$\|u(x)\| = \|\sum_{j\in I} x_j u(e_j)\| \leq \sup_{j\in I} |x_j|\|u(e_j)\| \leq \sup_{j\in I} \frac{\|u(e_j)\|}{\|e_j\|}\|x\|$$

y así, $\|u\| \leq \sup_{j\in I} \frac{\|u(e_j)\|}{\|e_j\|}$. De esta forma se conluye la igualdad.

□

Ejemplo 3.1.7.

1. *El espacio* $l^{\infty}\left(L\times I,\mathbb{K},\left(\dfrac{\|f_l\|}{\|e_j\|}\right)_{(l,j)\in L\times I}\right)$ *que consiste de todas las familias dobles* $A=(\alpha_{lj})_{(l,j)\in L\times I}\in\mathbb{K}^{L\times I}$ *tales que* $\|A\|=\sup\limits_{j,l}\dfrac{|\alpha_{lj}|\|f_l\|}{\|e_j\|}<+\infty$ *, es un espacio de Banach con la norma* $\|A\|$*. En efecto, sea* $(A(n))_{n\geq 1}$ *una sucesión de cauchy en* $l^{\infty}\left(L\times I,\mathbb{K},\left(\dfrac{\|f_l\|}{\|e_j\|}\right)_{(l,j)\in L\times I}\right)$*, es decir,* $\forall\varepsilon>0$*,* $\exists n_{\varepsilon}\in\mathbb{N}$ *tal que*

$$\begin{aligned}\forall n,m\in\mathbb{N}:n,m\geq n_{\varepsilon}&\Rightarrow\|A(n)-A(m)\|<\varepsilon\\&\Rightarrow\sup_{j,l}\frac{|\alpha_{lj}(n)-\alpha_{lj}(m)|\|f_l\|}{\|e_j\|}<\varepsilon\end{aligned}$$

Así, $\dfrac{|\alpha_{lj}(n)-\alpha_{lj}(m)|\|f_l\|}{\|e_j\|}<\varepsilon$ *,* $\forall n,m\geq n_{\varepsilon}$*,* $\forall(l,j)\in L\times I$*, por lo tanto,* $(\alpha_{lj}(n))_{n\geq 1}$ *es una sucesión de cauchy en* $\mathbb{K}$ *, y entonces converge. Digamos que* $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{lj}(n)=\alpha_{lj}$ *,* $\forall(l,j)\in L\times I$*. Luego,* $\forall\varepsilon>0$ *, existe un* $N_{\varepsilon}\in\mathbb{N}$ *tal que*

$$\forall n\in\mathbb{N}:n\geq N_{\varepsilon}\Rightarrow|\alpha_{lj}-\alpha_{lj}(n)|\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|}<\varepsilon\qquad\forall(l,j)\in L\times I.$$

Definimos

$$\begin{aligned}A:&L\times I\to\mathbb{K}\\&(l,j)\mapsto\alpha_{lj}=\lim_{n\to\infty}\alpha_{lj}(n)\end{aligned}$$

Si escogemos $N=\max\{n_{\varepsilon},N_{\varepsilon}\}$*, entonces se sigue que*

$$\begin{aligned}|\alpha_{lj}-\alpha_{lj}(m)|\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|}&\leq\max\{|\alpha_{lj}-\alpha_{lj}(N)|\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|},|\alpha_{lj}(N)-\alpha_{lj}(m)|\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|}\}\qquad\forall(l,j)\in L\times I\\&<\varepsilon\qquad\forall m\geq N,\forall(l,j)\in L\times I\end{aligned}$$

En particular se tiene

$$\begin{aligned}|\alpha_{lj}|\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|}&\leq\max\left\{|\alpha_{lj}-\alpha_{lj}(N)|\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|},|\alpha_{lj}(N)|\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|}\right\}\qquad\forall(l,j)\in L\times I\\&\leq\max\{\varepsilon,\|\alpha_{lj}(N)\|\}\qquad\forall(l,j)\in L\times I\end{aligned}$$

luego se sigue que $\|A\| = \sup\limits_{j,l} |\alpha_{lj}| \dfrac{\|f_l\|}{\|e_j\|} < +\infty$.

Por otro lado, $\|A - \alpha_{lj}(m)\| = \sup\limits_{j,l} |\alpha_{lj} - \alpha_{lj}(m)| \dfrac{\|f_l\|}{\|e_j\|} \leq \varepsilon$, $\forall m \geq n_\varepsilon$. *Y entonces* $\lim\limits_{m\to\infty} \|A - \alpha_{lj}(m)\| = 0$.

2. *El espacio* $l^{\infty,0_c}\left(L \times I, \mathbb{K}, \left(\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|}\right)_{(l,j)\in L\times I}\right)$ *que consiste de todas las familias dobles* $A = (\alpha_{lj})_{(l,j)\in L\times I} \in \mathbb{K}^{L\times I}$ *tales que* $\forall j \in I$, $\lim\limits_{l\in L} |\alpha_{lj}| \|f_l\| = 0$, *es un subespacio cerrado de* $l^{\infty}\left(L \times I, \mathbb{K}, \left(\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|}\right)_{(l,j)\in L\times I}\right)$, *y por lo tanto es un espacio de Banach. En efecto, sea* $A = \lim\limits_{n\to\infty} A(n)$, *donde* $A(n) \in l^{\infty,0_c}\left(L \times I, \mathbb{K}, \left(\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|}\right)_{(l,j)\in L\times I}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Sea $\varepsilon > 0$ *y* $j \in I$ *fijo. De la convergencia, existe un* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_\epsilon &\Longrightarrow \|A - A(n)\|_\alpha < \frac{\varepsilon}{\|e_j\|} \\ &\Longrightarrow \sup_{l\in L} \frac{|\alpha_{lj} - \alpha_{lj}(n)| \|f_l\|}{\|e_j\|} < \frac{\varepsilon}{\|e_j\|} \end{aligned}$$

   luego, $\forall l \in L$ *y* $\forall n \geq n_\varepsilon$ *se tiene que* $|\alpha_{lj} - \alpha_{lj}(n)| \|f_l\| < \varepsilon$ *. Además, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe un conjunto finito* $L_\varepsilon(n) \subset L$ *de manera que* $|\alpha_{lj}(n)| \|f_l\| < \varepsilon$, $\forall l \in L_\varepsilon^c(n)$.

   Luego, se tiene:

$$\begin{aligned} |\alpha_{lj}| \|f_l\| &\leq \text{máx}\{|\alpha_{lj}(n_\varepsilon) - \alpha_{lj})| \|f_l\|, |\alpha_{lj}(n_\varepsilon)| \|f_l\|\} \\ &\leq \text{máx}\{\varepsilon, |\alpha_{lj}(n_\varepsilon)| \|f_l\|\} \qquad \forall l \in L \\ &< \varepsilon \qquad \forall l \in L_\varepsilon^c(n_\varepsilon) \end{aligned}$$

   por lo tanto se sigue que $A \in l^{\infty,0_c}\left(L \times I, \mathbb{K}, \left(\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|}\right)_{(l,j)\in L\times I}\right)$.

Teorema 3.1.8. *Sean* E *y* F *espacios de Banach libre con bases* $(e_j)_{j\in I}$ *y* $(f_l)_{l\in L}$ *respectivamente. Entonces, la correspondencia que asocia a cualquier* $u \in L(E,F)$ *la matriz infinita* $A = (\alpha_{lj})_{(l,j)\in L\times I}$ *con coeficientes en* $\mathbb{K}$ *dados por* $u(e_j) = \sum\limits_{l\in L} \alpha_{lj} f_l$ *establece una isometría lineal entre* $L(E,F)$ *y* $l^{\infty,0_c}\left(L \times I, \mathbb{K}, \left(\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|}\right)_{(l,j)\in L\times I}\right)$.

Demostración. Sea

$$\Phi : L(E,F) \longrightarrow l^{\infty,0_c}\left(L \times I, \mathbb{K}, \left(\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|}\right)_{(l,j)\in L\times I}\right)$$
$$u = \sum_{j,l} \alpha_{lj} e_j' \otimes f_l \mapsto \Phi(u) = (\alpha_{lj})_{(l,j)\in L\times I}$$

De la Proposición 3.1.6 se sigue que Φ es bien definida. Notemos que $\|\Phi(u)\| = \|(\alpha_{lj})_{(l,j)\in L\times I}\| = \sup_{j,l} \dfrac{|\alpha_{lj}|\|f_l\|}{\|e_j\|} = \|u\|$ y además Φ es sobreyectiva. En efecto, sea $A = (\alpha_{lj})_{(l,j)\in L\times I} \in l^{\infty,0_c}\left(L \times I, \mathbb{K}, \left(\frac{\|f_l\|}{\|e_j\|}\right)_{(l,j)\in L\times I}\right)$. Se tiene que $\|A\| = \sup_{j,l} \dfrac{|\alpha_{lj}|\|f_l\|}{\|e_j\|} < +\infty$ y $\forall j \in I$, $\lim_{l\in L} |\alpha_{lj}|\|f_l\| = 0$, luego definimos para cada $j \in I$, $u(e_j) = \sum_{l\in L} \alpha_{lj} f_l$. Por otro lado, para $x = \sum_{j\in I} x_j e_j \in E$ se tiene que $|x_j|\|u(e_j)\| = |x_j| \sup_{l\in L} |\alpha_{lj}|\|f_l\| \leq \|A\||x_j|\|e_j\|$. Luego, para $x \in E$ hacemos $u(x) = \sum_{j\in I} x_j u(e_j)$ y así obtenemos una aplicación lineal tal que $\|u(x)\| \leq \|A\|\|x\|$. Se concluye entonces que u es continua con $\|u\| = \|A\|$ y $\Phi(u) = A$. □

Observación 3.1.9. *El teorema anterior nos proporciona una forma de identificar los operadores lineales continuos entre espacios de Banach libres como familias dobles infinitas. Si los espacios tuvieran bases ortogonales numerables, entonces los operadores lineales continuos entre ellos los podriamos asociar con matrices infinitas donde sus columnas tienden a 0.*

La siguiente proposición establecerá una equivalencia para operadores compactos entre espacios de Banach libres.

Proposición 3.1.10. *Sean E y F espacios de Banach libre con bases $(e_j)_{j\in I}$ y $(f_l)_{l\in L}$ respectivamente. Un operador lineal continuo $u = \sum_{j,l} \alpha_{lj} e_j' \otimes f_l \in L(E,F)$ es compacto, si y solamente si,* $\lim_{l\in L} \sup_{j\in I} \dfrac{|\alpha_{lj}|}{\|e_j\|} \|f_l\| = 0$

Demostración. Sea $u = \sum_{j,l} \alpha_{lj} e_j' \otimes f_l \in L(E,F)$ y supongamos que u es compacto. Del Teorema 2.2.8 se sigue que u puede escribirse como una única suma convergente

$u = \sum_{l\in L} x_l' \otimes f_l$ con $x_l' \in E'$, $\lim_{l\in L} \|x_l'\| \|f_l\| = 0$ y $\|u\| = \sup_{l\in L} \|x_l'\|\|f_l\|$.

Para $x = \sum_{j\in I} < e_j', x > e_j \in E$ se tiene $x_l'(x) = \sum_{j\in I} < e_j', x > x_l'(e_j)$. Luego, x_l' converge puntualmente a la suma $x_l' = \sum_{j\in I} x_l'(e_j)e_j'$ y $\|x_l'\| = \sup_{j\in I} \frac{|x_l'(e_j)|}{\|e_j\|}$.

Se sigue que:

$$
\begin{aligned}
u(x) = \sum_{l\in L}(x_l' \otimes f_l)(x) &= \sum_{l\in L} < x_l', x > f_l = \sum_{l\in L}\sum_{j\in I} x_l'(e_j) < e_j', x > f_l \\
&= \sum_{l\in L}\sum_{j\in I} x_l'(e_j)(e_j' \otimes f_l)(x)
\end{aligned}
$$

luego, se tiene que $x_l'(e_j) = \alpha_{lj}$, por lo tanto $\|x_l'\| = \sup_{j\in I} \frac{|\alpha_{lj}|}{\|e_j\|}$ y entonces $\lim_{l\in L} \sup_{j\in I} \frac{|\alpha_{lj}|}{\|e_j\|}\|f_l\| = 0$.

Supongamos ahora que $\lim_{l\in L} \sup_{j\in I} \frac{|\alpha_{lj}|}{\|e_j\|}\|f_l\| = 0$, mostraremos que podemos escribir $u = \sum_{l\in L} \widetilde{x_l}' \otimes f_l$, donde $\widetilde{x_l}' \in E'$. Notemos que $\sup_{j\in I} \frac{|\alpha_{lj}|}{\|e_j\|}$ es finito cualquiera sea $l \in L$.

Para $l \in L$, definimos el funcional lineal $\widetilde{x_l}' : [\{e_j : j \in I\}] \to \mathbb{K}$ por $\widetilde{x_l}'(e_j) = \alpha_{lj}$.

Si $x \in [\{e_j : j \in I\}]$, entonces:

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{x_l}'(x)| = \left|\widetilde{x_l}'(\sum_{i=1}^{n} x_i e_{j_i})\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{l j_i}\right| \\
&\le \text{máx}\{|x_i||\alpha_{l j_i}| : i = 1, ..., n\} \\
&= \text{máx}\{\frac{|x_i||\alpha_{l j_i}|\|e_{j_i}\|}{\|e_{j_i}\|} : i = 1, ..., n\} \\
&\le \|x\| \sup_{j\in I} \frac{|\alpha_{lj}|}{\|e_j\|}
\end{aligned}
$$

Así, $\widetilde{x_l}'$ es continua con $\|\widetilde{x_l}'\| \le \sup_{j\in I} \frac{|\alpha_{lj}|}{\|e_j\|}$. Como $\overline{[\{e_j : j \in I\}]} = E$, el funcional lineal $\widetilde{x_l}'$ puede extenderse de manera única a su clausura. Concluimos entonces que $\widetilde{x_l}' \in E'$ y además satisface $\widetilde{x_l}'(x) = \sum_{j\in I} x_j \alpha_{lj} = \sum_{j\in I} < e_j', x > \alpha_{lj}$.

Como $\|\widetilde{x_l}'\|\|f_l\| \le \sup_{j\in I} \frac{|\alpha_{lj}|}{\|e_j\|}\|f_l\|$, entonces se sigue que $\lim_{l\in L} \|\widetilde{x_l}' \otimes f_l\| = 0$ y por lo tanto

$v := \sum_{l\in L} \widetilde{x}_l{}' \otimes f_l \in E'\widehat{\otimes}F \simeq C(E,F)$, así v es compacto y $v(x) = \sum_{l\in L}(\widetilde{x}_l{}' \otimes f_l)(x) = \sum_{l\in L} \widetilde{x}_l{}'(x) f_l = \sum_{l\in L}\sum_{j\in I} \alpha_{lj} < e'_j, x > f_l = \sum_{l,j} \alpha_{lj}(e'_j \otimes f_l)(x) = u(x)$.

□

3.2. Espacio de Hilbert Ultramétrico

Sea I un conjunto y $\omega = (\omega_j)_{j\in I} \in \mathbb{K}^I$ una familia de elementos no nulos de $\mathbb{K}$. Denotaremos por E_ω al espacio:

$$c_0\left(I, \mathbb{K}, (|\omega_j|^{\frac{1}{2}})_{j\in I}\right) = \left\{x = (x_j)_{j\in I} \in \mathbb{K}^I : \lim_{j\in I} |x_j||\omega_j|^{\frac{1}{2}} = 0\right\}$$

E_ω es un espacio de Banach libre con base ortogonal $(e_j)_{j\in I}$, donde $e_j = (\delta_{i,j})_{i\in I}$ (Delta de Kronecker).

Observación 3.2.1.

§ $x = (x_j)_{j\in I} \in E_\omega \Leftrightarrow \lim_{j\in I} x_j^2\omega_j = 0$.

§ $\|e_j\| = |\omega_j|^{\frac{1}{2}}$ y $\|e'_j\| = |\omega_j|^{-\frac{1}{2}}$, $\forall j \in I$.

Definición 3.2.2. *Se define la aplicación*

$$f_\omega : E_\omega \times E_\omega \to \mathbb{K}$$
$$(x,y) \mapsto f_\omega(x,y) = \sum_{j\in I} x_j y_j \omega_j$$

Observación 3.2.3. *La aplicación f_ω es bilineal, simétrica y además se tiene*

$$|f_\omega(x,y)| = \left|\sum_{j\in I} x_j y_j \omega_j\right| \le \sup_{j\in I} |x_j y_j \omega_j| = \sup_{j\in I} |x_j||\omega_j|^{\frac{1}{2}}|y_j||\omega_j|^{\frac{1}{2}} \le \|x\|\|y\|$$

por lo tanto es continua.

La aplicación f_ω es no-degenerada, es decir, si $f_\omega(x,y) = 0$, $\forall y \in E_\omega$, entonces $x = 0$. En efecto, si suponemos que $f_\omega(x,y) = 0$, $\forall y \in E_\omega$, entonces en particular para $y = e_j$ se tiene la igualdad. Por lo tanto, como $f_\omega(x,e_j) = x_j$, se sigue que $x = 0$.

El Espacio E_ω fue llamado Espacio de Hilbert ultramétrico por Bertin Diarra.

Observación 3.2.4. *Un espacio de Banach libre E con base ortogonal $(e_j)_{j\in I} \subset E$ tiene una estructura de espacio Hilbert ultramétrico si, y solamente si, existe una familia $\omega = (\omega_j)_{j\in I} \subset \mathbb{K}^*$ tal que $\|e_j\| = |\omega_j|^{\frac{1}{2}}$, $\forall j \in I$.*

3.3. Adjunto de un Operador

Dado $u \in L(E_\omega)$, se define

$$D(u^*) = \{y \in E_\omega : \exists y^* \in E_\omega, f_\omega(u(x), y) = f_\omega(x, y^*), \forall x \in E_\omega\}$$

el cual es un subespacio de E_ω. Para cada $y \in E_\omega$ se tiene que y^* es único, en efecto, supongamos que para $y \in E_\omega$ fijo existen z_1^* y z_2^* en E_ω tales que $f_\omega(u(x), y) = f_\omega(x, z_1^*) = f_\omega(x, z_2^*) = 0$, $\forall x \in E_\omega$. Por la bilinealidad de f_ω se sigue que $f_\omega(x, z_1^* - z_2^*) = 0$, $\forall x \in E_\omega$. Luego, como f_ω es no-degenerada se tiene que $z_1^* = z_2^*$. Ahora bien, si $D(u^*) = E_\omega$, entonces podemos definir el operador lineal

$$\begin{aligned} u^* :&E_\omega \to E_\omega \\ &y \mapsto u^*(y) = y^* \end{aligned}$$

que satisface la siguiente relación

$$f_\omega(u(x), y) = f_\omega(x, u^*(y)), \forall x, y \in E_\omega$$

Proposición 3.3.1. *Sea $u \in L(E_\omega)$. Si $D(u^*) = E_\omega$, entonces $u^* \in L(E_\omega)$*

Demostración. Sea $u \in L(E_\omega)$ y supongamos que $D(u^*) = E_\omega$. Se puede definir entonces el operador lineal $u^* : E_\omega \to E_\omega$ por $u^*(y) = y^*$.
Sea $y \in E_\omega$, luego $u^*(y) = y^* = (y_j^*)_{j\in I} \in E_\omega$ es tal que:

$$f_\omega(u(x), y) = f_\omega(x, u^*(y)) \qquad \forall x \in E_\omega$$

Notemos que para cada $j \in I$ se tiene:

$$\begin{aligned} |y_j^*||\omega_j| = |f_\omega(e_j, y^*)| &= |f_\omega(u(e_j), y)| \\ &\leq \|u(e_j)\|\|y\| \\ &\leq \|u\|\|e_j\|\|y\| \\ &= \|u\||\omega_j|^{\frac{1}{2}}\|y\| \end{aligned}$$

por lo tanto $|y_j^*||\omega_j|^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|\|y\|$.

Así, $\|u^*(y)\| = \|y^*\| = \sup\limits_{j\in I} |y_j^*||\omega_j|^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|\|y\|$. Luego, se sigue que u^* es continua.

$\square$

Definición 3.3.2. *Dado $u \in L(E_\omega)$, se dice que u admite un operador adjunto si existe $v \in L(E_\omega)$ tal que*

$$f_\omega(u(x), y) = f_\omega(x, v(y)), \forall x, y \in E_\omega$$

En este caso decimos que v es un adjunto de u.

Observación 3.3.3.

§ *Por la simetría de f_ω, si v es un adjunto de u, entonces u es un adjunto para v*

§ *Como f_ω es no-degenerada, si u admite un adjunto, entonces éste es único, en efecto, si v y w son dos adjuntos para el operador u , se tiene*

$$\begin{aligned}
& f_\omega(x, v(y)) = f_\omega(x, w(y)) \qquad \forall x, y \in E_\omega \\
& \Leftrightarrow f_\omega(v(y), x) = f_\omega(w(y), x) \qquad \forall x, y \in E_\omega \\
& \Leftrightarrow f_\omega((v-w)(y), x) = 0 \qquad \forall x, y \in E_\omega \\
& \Rightarrow (v-w)(y) = 0 \qquad \forall y \in E_\omega \\
& \Rightarrow v(y) = w(y) \qquad \forall y \in E_\omega
\end{aligned}$$

Por lo tanto $v = w$.

Por esta razón, si v es un operador adjunto de u, entonces lo denotamos por u^*.

El siguiente teorema nos permitirá caracterizar los operadores lineales continuos que admiten adjunto.

Proposición 3.3.4. *Sea $u = \sum\limits_{l,j} \alpha_{lj} e'_j \otimes e_l \in L(E_\omega)$. Entonces, u tiene un adjunto $v = u^* \in L(E_\omega)$ si, y solamente si, $\lim\limits_{j\in I} |\alpha_{lj}||\omega_j|^{\frac{1}{2}} = 0$, $\forall l \in I$. En esta condición, $u^* = \sum\limits_{l,j} \omega_l^{-1}\omega_j\alpha_{jl} e'_j \otimes f_l$.*

Demostración. Sean $u, v \in L(E_\omega)$, entonces tenemos las siguientes representaciones $u = \sum_{l,j} \alpha_{lj} e'_j \otimes e_l$, $v = \sum_{l,j} \beta_{lj} e'_j \otimes e_l$ y además $\lim_{l \in L} |\omega_l|^{\frac{1}{2}} |\alpha_{lj}| = 0 = \lim_{l \in L} |\omega_l|^{\frac{1}{2}} |\beta_{lj}|$, $\forall j \in I$. Ya que $(e_j)_{j\in I}$ es una base ortogonal de E_ω, uno tiene que v es una adjunta de u si, y solamente si, $f_\omega(u(e_l), e_j) = f_\omega(e_l, v(e_j))$, $\forall l, j \in I$. Esto es

$$f_\omega(\sum_{k\in I} \alpha_{kl} e_k, e_j) = f_\omega(e_l, \sum_{k\in I} \beta_{kj} e_k), \forall l, j \in I$$

es decir

$$\alpha_{jl}\omega_j = \beta_{lj}\omega_l, \forall l, j \in I.$$

Por lo tanto se tiene que $\beta_{lj} = \alpha_{jl}\omega_j\omega_l^{-1}$, $\forall l, j \in I$.

Como $\lim_{l\in I} |\omega_l|^{\frac{1}{2}} |\beta_{lj}| = 0$, $\forall j \in I$, entonces tenemos la siguiente igualdad $\lim_{l \in L} |\alpha_{jl}||\omega_j|\omega_l|^{-1}|\omega_l|^{\frac{1}{2}} = |\omega_j| \lim_{l\in I} |\alpha_{jl}||\omega_l|^{-\frac{1}{2}} = 0$, $\forall j \in I$. Luego, se sigue que $u = \sum_{l,j} \alpha_{lj} e'_j \otimes e_l \in L(E_\omega)$ admite un adjunto si, y solamente si, $\lim_{l\in I} |\alpha_{jl}||\omega_l|^{-\frac{1}{2}} = 0$, $\forall j \in I$.

$\square$

Observación 3.3.5. *Del teorema anterior podemos concluir que no todo operador lineal continuo sobre E_ω admite un adjunto. En efecto, basta considerar el operador*

$$\begin{aligned} u :& c_0(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \to c_0(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \\ & x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mapsto u(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right) e_1 \end{aligned}$$

el cual es claramente lineal y continuo. Notemos que para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $u(e_j) = e_1$, y luego su matriz asociada $(\alpha_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es tal que

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = 1 \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

por lo tanto, se tiene que $\lim_{j\to\infty} |\alpha_{1j}| = 1$.

Así, el operador u definido, no satisface la Proposición 3.3.4.

Definición 3.3.6. *Denotaremos por $L_0(E_\omega)$ al espacio de todos los operadores lineales continuos sobre E_ω que admiten adjunta, es decir:*

$$L_0(E_\omega) := \left\{ u = \sum_{l,j} \alpha_{lj} e'_j \otimes e_l \in L(E_\omega) : \lim_{j\in I} |\alpha_{lj}||\omega_j|^{\frac{1}{2}} = 0, \forall l \in I \right\}$$

Proposición 3.3.7. *$L_0(E_\omega)$ es una subalgebra unitaria cerrada de $L(E_\omega)$. Además, si $u, v \in L_0(E_\omega)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces:*

(i) $(u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^*$

(ii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

(iii) $u^{**} = u^*$ *y* $\|u^*\| = \|u\|$

Demostración. Mostraremos el ítem (ii) y (iii), ya que (i) es directo de probar.

(ii) Sean $u = \sum\limits_{l,j} \alpha_{lj} e'_j \otimes e_l$ y $v = \sum\limits_{l,j} \beta_{lj} e'_j \otimes e_l$ elementos de $L_0(E_\omega)$, es decir, satisfacen:

(1) $\lim\limits_{l\in I} |\alpha_{lj}||\omega_l|^{\frac{1}{2}} = 0 = \lim\limits_{l\in I} |\beta_{lj}||\omega_l|^{\frac{1}{2}} \qquad \forall j \in I$

(2) $\lim\limits_{j\in I} |\alpha_{lj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}} = 0 = \lim\limits_{j\in I} |\beta_{lj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}} \qquad \forall l \in I$

Se tiene que $u \circ v = \sum\limits_{l,j} \left(\sum\limits_{k\in I} \alpha_{lk}\beta_{kj} \right) e'_j \otimes e_l$. Mostraremos que $u \circ v$ admite adjunta:

Sea $\varepsilon > 0$ y $l \in I$ fijo. Del ítem (2) se sigue que existe $J_\varepsilon(l) \subset I$ finito, tal que $|\alpha_{lk}||\omega_k|^{-\frac{1}{2}} < \varepsilon$, $\forall k \in J^c_\varepsilon(l)$.

Por otro lado, recordemos que $\|u\| = \sup\limits_{j,l} \dfrac{|\alpha_{lj}| \cdot \|e_l\|}{\|e_j\|} = \sup\limits_{j,l} |\alpha_{lj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}}|\omega_l|$ y que $\|v\| = \sup\limits_{j,l} \dfrac{|\beta_{lj}| \cdot \|e_l\|}{\|e_j\|} = \sup\limits_{j,l} |\beta_{lj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}}|\omega_l|$.

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{k\in I} \alpha_{lk}\beta_{kj} \right| |\omega_j|^{-\frac{1}{2}} &= \left| \sum_{k\in J_\varepsilon(l)} \alpha_{lk}\beta_{kj} + \sum_{k\in J^c_\varepsilon(l)} \alpha_{lk}\beta_{kj} \right| |\omega_j|^{-\frac{1}{2}} \\
&\leq \max\left\{ \left| \sum_{k\in J_\varepsilon(l)} \alpha_{lk}\beta_{kj} \right| |\omega_j|^{-\frac{1}{2}}, \left| \sum_{k\in J^c_\varepsilon(l)} \alpha_{lk}\beta_{kj} \right| |\omega_j|^{-\frac{1}{2}} \right\} \\
&\leq \max\left\{ \max_{k\in J_\varepsilon(l)} |\alpha_{lj}||\beta_{kj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}}, \sup_{k\in J^c_\varepsilon(l)} |\alpha_{lj}||\beta_{kj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \max\left\{\max_{k\in J_\varepsilon(l)} |\alpha_{lj}||\beta_{kj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}}, \sup_{k\in J_\varepsilon^c(l)} |\alpha_{lj}||\beta_{kj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}}|\omega_k|^{\frac{1}{2}}|\omega_k|^{-\frac{1}{2}}\right\}\\
&\leq \max\left\{\max_{k\in J_\varepsilon(l)} |\alpha_{lj}||\beta_{kj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}}, \varepsilon\|v\|\right\}\\
&= \max\left\{\max_{k\in J_\varepsilon(l)} |\alpha_{lj}||\omega_k|^{\frac{1}{2}}|\omega_k|^{-\frac{1}{2}}|\beta_{kj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}}|\omega_l|^{\frac{1}{2}}|\omega_l|^{-\frac{1}{2}}, \varepsilon\|v\|\right\}\\
&\leq \left\{\|u\|\cdot \max_{k\in J_\varepsilon(l)} |\beta_{kj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}}|\omega_k|^{\frac{1}{2}}|\omega_l|^{-\frac{1}{2}}, \varepsilon\|v\|\right\}
\end{aligned}
$$

Ahora, ya que $\lim_{j\in I} |\beta_{kj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}} = 0$, $\forall k \in J_\varepsilon(l)$, se sigue que $\lim_{j\in I} \left|\sum_{k\in I} \alpha_{lk}\beta_{kj}\right| |\omega_j|^{-\frac{1}{2}} = 0$, $\forall l \in I$. Luego, de la Proposición 3.3.4 se sigue que $u \circ v \in L_0(E_\omega)$.

Notemos que $\forall x, y \in E_\omega$ se tiene:

$$f_\omega((u\circ v)(x), y) = f_\omega(v(x), u^*(y)) = f_\omega(x, v^*(u^*(x)))$$

por lo tanto, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

(*iii*) Sea $u = \sum_{l,j} \alpha_{lj} e'_j \otimes e_l \in L_0(E_\omega)$ y $u^* = \sum_{l,j} \omega_j\omega_l^{-1}\alpha_{jl} e'_j \otimes e_l$.
Notemos que $\forall x, y \in E_\omega$ se tiene:

$$f_\omega(u(x), y) = f_\omega(x, u^*(y)) = f_\omega(u^*(y), x) = f_\omega(y, u^{**}(x)) = f_\omega(u^{**}(x), y)$$

luego, como f_ω es no-degenerada, se sigue que $u = u^{**}$.

Por otro lado,

$$\|u^*\| = \sup_{l,j} \frac{|\omega_l|^{\frac{1}{2}}}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}} |\omega_j||\omega_l^{-1}||\alpha_{jl}| = \sup_{l,j} \frac{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}}{|\omega_l|^{\frac{1}{2}}}|\alpha_{jl}| = \|u\|.$$

La aplicación Identidad viene dada por $I_d = \sum_{j\in I} e'_j \otimes e_j$ y se tiene que

$$\alpha_{lj} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = j \\ 0 & \text{si } l \neq j \end{cases}$$

luego, $\lim_{l\in I} |\alpha_{lj}||\omega_l|^{\frac{1}{2}} = 0$, $\forall j \in I$ y $\lim_{j\in I} |\alpha_{lj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}} = 0$, $\forall l \in I$. Por lo tanto, $I_d \in L_0(E_\omega)$.

$\square$

Corolario 3.3.8. *El operador* $u = \sum_{l,j} \alpha_{lj} e'_j \otimes e_l \in L_0(E_\omega)$ *es autoadjunto, es decir,* $u = u^*$ *si, y solamente si,* $\omega_j \alpha_{jl} = \omega_l \alpha_{lj}$, $\forall j, l \in I$.

Demostración. Es directo de la Proposición 3.3.4. □

Si asumimos que la familia $(\omega_j)_{j\in I}$ es tal que $|\omega_j| = 1$, $\forall j \in I$. Entonces $(e_j)_{j\in I}$ es una base ortonormal de E_ω.

Corolario 3.3.9. *Sea* $(\omega_j)_{j\in I} \subset \mathbb{K}$ *tal que* $|\omega_j| = 1$, $\forall j \in I$. *Entonces, una familia doble* $(\alpha_{lj})_{(l,j)\in L\times I}$ *define un elemento de* $L_0(E_\omega)$ *si, y solamente si, ésta es acotada, con* $\lim_{l\in I} |\alpha_{lj}| = 0$, $\forall j \in I$ *y* $\lim_{j\in I} |\alpha_{lj}| = 0$, $\forall l \in I$.

3.4. Subespacios Cerrados de E'_ω

A continuación presentaremos unos ejemplos de subespacios cerrados de E'_ω.

Definición 3.4.1. *Sea* $E'_{\omega,0}$ *el subespacio de elementos* $x' = \sum_{j\in I} < x', e_j > e'_j \in E'_\omega$ *tales que* $\lim_{j\in I} \frac{|< x', e_j >|}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}} = 0$.

$$E'_{\omega,0} := \left\{ x' \in E'_\omega : \lim_{j\in I} \frac{|< x', e_j >|}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}} = 0 \right\}$$

Observación 3.4.2. $E'_{\omega,0}$ *es un subespacio cerrado de* E'_ω*, en efecto, sea* $x' \in \overline{E'_{\omega,0}}$ *y* $\varepsilon > 0$. *Existe una sucesión* $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E'_{\omega,0}$ *tal que* $x'_n \to x'$ *en norma, es decir,* $\|x'_n - x'\| \to 0$. *Notemos que cualquiera sea el* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene* $\lim_{j\in I} \frac{|< x'_n, e_j >|}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}} = 0$. *Para* $\varepsilon > 0$ *dado, existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n \geq N : \|x'_n - x'\| < \varepsilon$ *y también un conjunto finito* $J_\varepsilon(n) \subset I$ *de manera que* $\frac{|< x'_n, e_j >|}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon$, $\forall j \in J^c_\varepsilon(n)$. *Se tiene entonces:*

$$
\begin{aligned}
\frac{|<x',e_j>|}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}} &= \frac{|<x'-x'_N+x'_N,e_j>|}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{|<x'-x'_N,e_j>+<x'_N,e_j>|}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}}\\
&\leq \text{máx}\left\{\frac{|<x'-x'_N,e_j>|}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}},\frac{|<x'_N,e_j>|}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}}\right\}\\
&< \varepsilon, \forall j\in J^c_\varepsilon(N)
\end{aligned}
$$

Luego, $x'\in E'_{\omega,0}$ y entonces $E'_{\omega,0}$ es cerrado en E'_ω.

Observación 3.4.3. *$E'_{\omega,0}$ es un espacio de Banach libre con base ortogonal $(e'_j)_{j\in I}$. En efecto, si consideramos $x'\in E'_{\omega,0}$ e $y=\sum_{j\in I} y_je_j$, entonces:*

$$x'(y)=x'\left(\sum_{j\in I} y_je_j\right)=\sum_{j\in I} y_jx'(e_j)=\sum_{j\in I} x'(e_j)e'_j(y)$$

Es decir, x' converge puntualmente a la suma $x'=\sum_{j\in I} x'(e_j)e'_j$ y además se tiene que $\|x'\|=\sup_{j\in I}|x'(e_j)|\|e'_j\|$.

Para $x\in E_\omega$ fijo, sea

$$
\begin{aligned}
\widetilde{x}:&E_\omega\to\mathbb{K}\\
&y\mapsto\widetilde{x}(y)=f_\omega(x,y)
\end{aligned}
$$

Notemos que $\widetilde{x}$ es lineal y $|\widetilde{x}(y)|=|f_\omega(x,y)|\leq\|x\|\|y\|$, por lo tanto $\widetilde{x}\in E'_\omega$.

La aplicación $\widetilde{x}$ es tal que

$$\|\widetilde{x}\|=\sup_{j\in I}\frac{|f_\omega(x,e_j)|}{\|e_j\|}=\sup_{j\in I}\frac{|x_j||\omega_j|}{\|e_j\|}=\sup_{j\in I}|x_j||\omega_j|^{\frac{1}{2}}=\|x\|$$

Además se tiene $\|\widetilde{e_j}\|=\|e_j\|=|\omega_j|^{\frac{1}{2}}$ y $\widetilde{e_j}=\omega_je'_j$, $\forall j\in I$.

Podemos definir la aplicación:

$$
\begin{aligned}
\phi:&E_\omega\to E'_\omega\\
&x\mapsto\phi(x)=\widetilde{x}
\end{aligned}
$$

la cual resulta ser una isometría lineal, pues $\|\phi(x)\|=\|\widetilde{x}\|=\|x\|$.

Definición 3.4.4. *Se define el espacio $\widetilde{E}_\omega$ como el recorrido de la isometría lineal ϕ.*

$$\widetilde{E}_\omega := \{x' \in E'_\omega : \exists x \in E_\omega, f_\omega(x,y) = x'(y), \forall y \in E_\omega\}$$

a cada elemento de $\widetilde{E}_\omega$ lo llamaremos un funcional de Riesz y en consecuencia, llamaremos a $\widetilde{E}_\omega$ el espacio de todos los funcionales de Riesz de E'_ω.

Observación 3.4.5. *El espacio $\widetilde{E}_\omega$ es isometricamente homeomorfo a E_ω*

Observación 3.4.6. *$\widetilde{E}_\omega$ es un subespacio cerrado de E'_ω y es Banach libre con base ortogonal $(\widetilde{e_j})_{j\in I}$. En efecto, si consideramos $\widetilde{x} \in E'_\omega$ e $y = \sum_{j\in I} y_j e_j$, entonces:*

$$\widetilde{x}(y) = \widetilde{x}(\sum_{j\in I} y_j e_j) = \sum_{j\in I} y_j \widetilde{x}(e_j) = \sum_{j\in I} y_j \omega_j x_j = \sum_{j\in I} x_j \widetilde{e_j}(y)$$

Es decir, $\widetilde{x}$ converge puntualmente a la suma $\widetilde{x} = \sum_{j\in I} x_j \widetilde{e_j}$ y además se tiene que $\|\widetilde{x}\| = \|x\| = \sup_{j\in I} |x_j| \|e_j\| = \sup_{j\in I} |x_j| \|\widetilde{e_j}\|$.

Lema 3.4.7. *Los subespacios cerrados $\widetilde{E}_\omega$ y $E'_{\omega,0}$ de E'_ω son iguales.*

Demostración. Sea $\widetilde{y} \in \widetilde{E}_\omega$. Entonces $\widetilde{y} = f_\omega(y, \cdot)$ para algún $y = \sum_{j\in I} y_j e_j \in E_\omega$.

Notar que

$$0 = \lim_{j\in I} |y_j||\omega_j|^{\frac{1}{2}} = \lim_{j\in I} \frac{|y_j||\omega_j|}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}} = \lim_{j\in I} \frac{|f_\omega(y, e_j)|}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}} = \lim_{j\in I} \frac{|<\widetilde{y}, e_j>|}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}}$$

y luego $\widetilde{y} \in E'_{\omega,0}$.

Por otro lado, sea $x' \in E'_{\omega,0}$, mostraremos que $x' \in \widetilde{E}_\omega$:

Como $x' \in E'_{\omega,0}$ se tiene que $\lim_{j\in I} \frac{|<x', e_j>|}{|\omega_j|^{\frac{1}{2}}} = 0$. Luego, se sigue que $\lim_{j\in I} \frac{|<x', e_j>|^2}{|\omega_j|} = 0$. Ahora bien, como $\lim_{j\in I} \frac{|<x', e_j>|^2}{|\omega_j|} = \lim_{j\in I} \left|<x', \frac{e_j}{\omega_j}>\right|^2 |\omega_j|$, podemos definir un $x := \left(<x', \frac{e_j}{\omega_j}>\right)_{j\in I} \in E_\omega$ de manera que:

$$f_\omega(x, e_k) = <x', \frac{e_k}{\omega_k}> \omega_k = <x', e_k>$$

cualquiera sea el $e_k \in (e_j)_{j\in I}$. Esto muestra que $x' \in \widetilde{E}_\omega$. $\square$

3.5. El Espacio $C_0(E_\omega)$

Definición 3.5.1. *Sea $C_0(E_\omega)$ el espacio de operadores lineales continuos que admiten adjunta y son compactos, esto es $C_0(E_\omega) = L_0(E_\omega) \cap C(E_\omega)$.*

Lema 3.5.2. *Sea $(\beta_{lj})_{(l,j)\in L\times I}$ una familia doble de reales positivos. El hecho que $\displaystyle\lim_{(l,j)\in L\times I} \beta_{lj} = 0$ es equivalente a cualquiera de las siguientes condiciones:*

(i) $\forall j \in I$, $\displaystyle\lim_{l\in L} \beta_{lj} = 0$ y $\displaystyle\lim_{j\in I} \sup_{l\in L} \beta_{lj} = 0$

(ii) $\forall l \in L$, $\displaystyle\lim_{j\in I} \beta_{lj} = 0$ y $\displaystyle\lim_{l\in L} \sup_{j\in I} \beta_{lj} = 0$

Demostración. Supongamos que $\displaystyle\lim_{(l,j)\in L\times I} \beta_{lj} = 0$. Es directo que $\forall j \in I$, $\displaystyle\lim_{l\in L} \beta_{lj} = 0$. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Existe un conjunto finito $L_\varepsilon \times I_\varepsilon \subset L \times I$ tal que $\beta_{lj} < \varepsilon$, $\forall (l,j) \in (L_\varepsilon \times I_\varepsilon)^c$. Notemos que si $l \in L_\varepsilon^c$, entonces $\beta_{lj} < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall j \in I$. Luego, $\displaystyle\sup_{l\in L_\varepsilon^c} \beta_{lj} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $\forall j \in I$. Por otro lado, si $l \in L_\varepsilon$, entonces $\beta_{lj} < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall j \in I_\varepsilon^c$. Luego, $\displaystyle\sup_{l\in L_\varepsilon} \beta_{lj} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $\forall j \in I_\varepsilon^c$. Por lo tanto se sigue que $\displaystyle\sup_{l\in L} \beta_{lj} < \varepsilon$, $\forall j \in I_\varepsilon^c$, es decir, $\displaystyle\lim_{j\in I} \sup_{l\in L} \beta_{lj} = 0$.
Supongamos ahora que $\forall j \in I$, $\displaystyle\lim_{l\in L} \beta_{lj} = 0$ y $\displaystyle\lim_{j\in I} \sup_{l\in L} \beta_{lj} = 0$.
Para $\varepsilon > 0$ dado, existe un conjunto finito $L_\varepsilon(j) \subset L$ tal que $\beta_{lj} < \varepsilon$, $\forall l \in L_\varepsilon^c(j)$ y además existe $I_\varepsilon \subset I$ finito de manera que $\displaystyle\sup_{l\in L} \beta_{lj} < \varepsilon$, $\forall j \in I_\varepsilon^c$.
Sea $j_0 \in I$, si consideremos el conjunto finito $L_\varepsilon(j_0) \times I_\varepsilon \subset L \times I$, entonces notemos que:

1. $(l,j) \in (L_\varepsilon^c(j_0) \times I_\varepsilon) \Rightarrow \beta_{lj} < \varepsilon$.
2. $(l,j) \in (L_\varepsilon(j_0) \times I_\varepsilon^c) \Rightarrow \beta_{lj} < \varepsilon$.
3. $(l,j) \in (L_\varepsilon^c(j_0) \times I_\varepsilon^c) \Rightarrow \beta_{lj} < \varepsilon$

de lo anterior podemos concluir que $\displaystyle\lim_{(l,j)\in L\times I} \beta_{lj} = 0$.
La otra equivalencia se puede demostrar de forma analoga, por esta razón la omitiremos. $\square$

Teorema 3.5.3. *El espacio $C_0(E_\omega)$ es un ideal bilateral cerrado del algebra unitaria de Banach $L_0(E_\omega)$. Además, $C_0(E_\omega)$ puede identificarse isometricamente con el producto tensorial $E'_{\omega,0}\widehat{\otimes}E_\omega = \widetilde{E}_\omega\widehat{\otimes}E_\omega$ y es estable por la operación de adjunta.*

Demostración. Sea $u = \sum_{j\in I}\sum_{l\in I} \alpha_{lj}e'_j\otimes e_l \in C_0(E_\omega)$. Entonces se tiene $\lim_{l\in I}\sup_{j\in I}\frac{|\alpha_{lj}|}{\|e_j\|}\|e_l\| = 0$ y $\lim_{j\in I}|\alpha_{lj}||\omega_j|^{-\frac{1}{2}} = 0$, $\forall l \in I$. Esto es $\lim_{l\in I}\sup_{j\in I}|\alpha_{lj}|\|e'_j\|\|e_l\| = 0$ y $\lim_{j\in I}|\alpha_{lj}|\|e'_j\| = 0$, $\forall l \in I$.

Se deduce del Lema 3.5.2 que $\lim_{(l,j)\in I\times I}|\alpha_{lj}|\|e'_j\|\|e_l\| = 0$ y entonces $u = \sum_{(l,j)\in I\times I}\alpha_{lj}e'_j\otimes e_l$, luego se tiene $u \in E'_{\omega,0}\widehat{\otimes}E_\omega = \widetilde{E}_\omega\widehat{\otimes}E_\omega$.

Es inmediato ver que $(e'_j\otimes e_l)_{(l,j)\in I\times I}$ es una base ortogonal de $E'_{\omega,0}\widehat{\otimes}E_\omega = \widetilde{E}_\omega\widehat{\otimes}E_\omega$. Por lo tanto, si $(\alpha_{lj})_{(l,j)\in I\times I} \subset \mathbb{K}$ es tal que $\lim_{l,j}|\alpha_{lj}|\|e'_j\|\|e_l\| = 0$, entonces uno puede definir, como en la Proposición 3.1.10, un elemento $\sum_{(l,j)\in I\times I}\alpha_{lj}e'_j\otimes e_l$ de $E'_{\omega,0}\widehat{\otimes}E_\omega$ el cual corresponde a un operador $u = \sum_{(l,j)\in I\times I}\alpha_{lj}e'_j\otimes e_l$ que pertenece a $C_0(E_\omega)$. Por lo tanto uno obtiene la identificación de $C_0(E_\omega)$ con $E'_{\omega,0}\widehat{\otimes}E_\omega = \widetilde{E}_\omega\widehat{\otimes}E_\omega$.

Por otro lado, $(\widetilde{e}_j\otimes e_l)_{(l,j)\in I\times I}$ es una base ortogonal para $\widetilde{E}_\omega\widehat{\otimes}E_\omega = E'_{\omega,0}\widehat{\otimes}E_\omega$. Entonces, si $(\beta_{lj})_{(l,j)\in I\times I} \subset \mathbb{K}$ es tal que $\lim_{l,j}|\beta_{lj}|\|\widetilde{e}_j\|\|e_l\| = 0$, uno puede definir, como en la Proposición 3.1.10, un elemento $\sum_{(l,j)\in I\times I}\beta_{lj}\widetilde{e}_j\otimes e_l$ en $\widetilde{E}_\omega\widehat{\otimes}E_\omega$ que corresponde a un operador $u = \sum_{(l,j)\in I\times I}\beta_{lj}\widetilde{e}_j\otimes e_l$ que pertenece a $C_0(E_\omega)$.

Para $x, y, \zeta, \nu \in E_\omega$ se tiene

$$f_\omega((\widetilde{x}\otimes y)(\zeta),\nu) = f_\omega(f_\omega(x,\zeta)y,\nu) = f_\omega(x,\zeta)f_\omega(y,\nu) = f_\omega(f_\omega(y,\nu)x,\zeta) = f_\omega((\widetilde{y}\otimes x)(\nu),\zeta)$$

Y ya que f_ω es simétrica, se puede ver que la adjunta $(\widetilde{x}\otimes y)^*$ de $\widetilde{x}\otimes y$ es igual a $\widetilde{y}\otimes x$. Como la operación de adjunta es lineal y norma-continua, entonces para cualquier $u = \sum_{(l,j)\in I\times I}\beta_{lj}\widetilde{e}_j\otimes e_l \in \widetilde{E}_\omega\widehat{\otimes}E_\omega = C_0(E_\omega)$, uno tiene que $u^* = \sum_{(l,j)\in I\times I}\beta_{jl}\widetilde{e}_j\otimes e_l$ que pertenece a $C_0(E_\omega)$.

Recordemos que $C(E_\omega)$ es un ideal bilateral cerrado del algebra de Banach $L(E_\omega)$. Se sigue entonces que $C_0(E_\omega) = L_0(E_\omega)\cap C(E_\omega)$ es un ideal bilateral cerrado de

$L_0(E_\omega)$. $\square$

Corolario 3.5.4. *Sea $x' \in E'_\omega$ e $y \in E_\omega$, con $y \neq 0$. El operador $x' \otimes y$ admite adjunta si, y solamente si, $x' \in E'_{\omega,0} = \widetilde{E}_\omega$.*

Demostración. Supongamos que $x' \in E'_{\omega,0} = \widetilde{E}_\omega$, entonces existe $x \in E_\omega$ tal que $x' = \widetilde{x}$. Por lo tanto $\widetilde{x} \otimes y$ es un elemento de $\widetilde{E}_\omega \widehat{\otimes} E_\omega = C_0(E_\omega)$, con adjunta $\widetilde{y} \otimes x$.

Sea $x' \in E'_\omega$ escrito como una suma puntualmente convergente $x' = \sum_{j \in I} \lambda_j e'_j$ e $y = \sum_{l \in I} y_l e_l \in E_\omega$. Entonces el operador compacto $x' \otimes y$ puede escribirse como una suma puntualmente convergente $x' \otimes y = \sum_{l,j} \lambda_j y_l e'_j \otimes e_l$.

Supongamos que $x' \otimes y$ admite adjunta, es decir, $\lim_{j \in I} |\lambda_j||y_l||\omega_j|^{-\frac{1}{2}}$, $\forall l \in I$. Además, como $x' \otimes y$ es compacto, se tiene que $\lim_{l \in I} \sup_{j \in I} \dfrac{|\lambda_j||y_l|\|e_l\|}{\|e_j\|} = 0$. Luego, del Lema 3.5.2 se sigue que

$$0 = \lim_{j \in I} \sup_{l \in I} \frac{|\lambda_j||y_l|\|e_l\|}{\|e_j\|} = \lim_{j \in I} \|y\||\lambda_j|\|e'_j\|.$$

Pero $\|y\| \neq 0$; por lo tanto $\lim_{j \in I} |\lambda_j|\|e'_j\| = 0$. Esto muestra que $x' \in E'_{\omega,0}$.

$\square$

Capítulo 4

Un Producto Interno en $C_0(E_\omega)$

En el siguiente capitulo consideraremos al espacio E_ω cuando la familia $\omega = (\omega_j)_{j \in I}$ es tal que $\omega_j = 1_{\mathbb{K}}$, $\forall j \in I$. Definiremos un producto interno en $C_0(E_\omega)$ el cual es no-degenerado e induce la norma de operadores.

4.1. Producto Interior

Definición 4.1.1. *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se define el producto interior o producto interno no-arquimediano como una aplicación $<,>: E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ que satisface las siguientes propiedades:*

(i) $x \neq 0 \Longrightarrow < x, x > \neq 0$

(ii) $< ax + by, z > = a < x, z > + b < y, z > \; \forall x, y, z \in X \;, \forall a, b \in \mathbb{K}$

(iii) $| < x, y > |^2 \leq | < x, x > || < y, y > | \; \forall x, y \in E$

La condición (iii) se conoce como desigualdad de Cauchy-Schwarz.
Si $< x, y > = < y, x >$, $\forall x, y \in E$, decimos que $< \cdot, \cdot >$ es un producto interior simétrico.

Observación 4.1.2. *Nos referiremos al par $(E, < \cdot, \cdot >)$ como un espacio con producto interior no-arquimediano o un espacio con producto interno no-arquimediano.*

En adelante, nos referiremos a un producto interior no-arquimediano simplemente por producto interno.

Teorema 4.1.3. *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un producto interno $< \cdot, \cdot >$ induce una norma no-arquimediana. De la siguiente forma:*

$$\|x\| = |< x, x >|^{\frac{1}{2}}$$

Demostración. Sea $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ y $x \in E \setminus \{0\}$. Notemos que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\|\mu x\|^2 = |< \mu x, \mu x >| = |\mu < x, \mu x >| = |\mu|| < x, \mu x >| \leq |\mu|\|x\|\|\mu x\|$$

luego, se sigue que $\|\mu x\| \leq |\mu|\|x\|$.
Utilizando el hecho anterior, podemos hacer

$$\|x\| = \left\| \left(\frac{1}{\mu}\right) \mu x \right\| \leq \left|\frac{1}{\mu}\right| \|\mu x\|$$

y así, $|\mu|\|x\| \leq \|\mu x\|$. Por lo tanto se sigue la igualdad $\|\mu x\| = |\mu|\|x\|$.
Mostraremos ahora la desigualdad triangular fuerte. Supongamos que $\|x + y\| \neq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 = |< x + y, x + y >| &= |< x, x + y > + < y, x + y >| \\ &\leq \max\{|< x, x + y >|, |< y, x + y >|\}\end{aligned}$$

Por otro lado, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que $|< x, x + y >| \leq \|x\|\|x + y\|$ y $|< y, x + y >| \leq \|y\|\|x + y\|$. Luego, se sigue que

$$\|x + y\|^2 \leq \|x + y\| \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

por lo tanto, $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

□

Definición 4.1.4. *Un campo $\mathscr{F}$ se dice formalmente real si para cualquier subconjunto finito $\{a_1, ..., a_n\}$ de $\mathscr{F}$ tal que $\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 0$, se tiene que $a_j = 0, \forall j = 1, ..., n$*

De la definición anterior podemos deducir que $\mathbb{R}$ es formalmente real, sin embargo el campo de los números complejos $\mathbb{C}$ no lo es. Para campos no-arquimedianos, el campo Levi-Civita(ver [14]) es formalmente real y tanto $\mathbb{Q}_p$ como $\mathbb{C}_p$ no lo son.

Lema 4.1.5. *El campo residual de $\mathbb{K}$ es formalmente real (ver Definición 1.1.11) si, y solamente si, para cada subconjunto finito $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ de $\mathbb{K}$ se tiene*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2\right| = \max\{|\lambda_1^2|, ..., |\lambda_n^2|\}$$

Demostración. Supongamos que el campo residual de $\mathbb{K}$ es formalmente real. Sea $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$ un conjunto finito, mostraremos que $\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2\right| = \max\{|\lambda_1^2|, ..., |\lambda_n^2|\}$. Definimos $\|\lambda\| := \max_{1\leq j\leq n}\{|\lambda_j|\}$ e $I := \{j \in \{1, ..., n\} : |\lambda_j| = \|\lambda\|\}$. Luego, se tiene:

(1) $j \in I \Rightarrow |\lambda_j| = \|\lambda\|$

(2) $j \in I^c \Rightarrow |\lambda_j| < \|\lambda\|$

Ahora, supongamos que $\|\lambda\| = 1$. Por lo tanto, si $j \in I$, entonces $|\lambda_j| = 1$ y $\overline{\lambda_j} \neq \overline{0}$. Luego, como el campo residual de $\mathbb{K}$ es formalmente real, se tiene que

$$\overline{\sum_{j\in I} \lambda_j^2} = \sum_{j\in I} \overline{\lambda_j^2} \neq \overline{0}$$

y por lo tanto, $\left|\sum_{j\in I} \lambda_j^2\right| = 1.$

Por otro lado, como $|\lambda_j| < 1$ para $j \in I^c$, se tiene:

$$\left|\sum_{j\in I^c} \lambda_j^2\right| < 1 = \left|\sum_{j\in I} \lambda_j^2\right|$$

De esta forma, se sigue

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2\right| = \left|\sum_{j\in I} \lambda_j^2 + \sum_{j\in I^c} \lambda_j^2\right| = \left|\sum_{j\in I} \lambda_j^2\right| = 1 = \|\lambda\|^2$$

Ahora, si $\|\lambda\| \neq 0$ y $\|\lambda\| \neq 1$, entonces escogemos un $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $|\mu| = \|\lambda\|$ y aplicamos el procedimiento anterior al conjunto finito $\{\mu^{-1}\lambda_1, ..., \mu^{-1}\lambda_n\} \subset \mathbb{K}$.

Recíprocamente, supongamos ahora que para cada conjunto finito $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$ se tiene que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2\right| = \text{máx}\{|\lambda_1^2|, ..., |\lambda_n^2|\}$$

Mostraremos que el campo residual de $\mathbb{K}$ es formalmente real, es decir, para cada subconjunto finito $\{\overline{\lambda_1}, ..., \overline{\lambda_n}\} \subset B_{\mathbb{K}}/B_{\mathbb{K}}^-$, se tiene: $\sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j}^2 = \overline{0} \Longrightarrow \overline{\lambda_j} = \overline{0}, \forall j = 1, ..., n.$

En efecto, sea $\{\overline{\lambda_1}, ..., \overline{\lambda_n}\} \subset B_{\mathbb{K}}/B_{\mathbb{K}}^-$ un conjunto finito y supongamos que $\sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j}^2 = \overline{0}.$

Notemos que

$$\overline{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j^2} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j}^2 = \overline{0}$$

luego, se tiene que $\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2\right| < 1.$

Ahora, como

$$|\lambda_j^2| \leq \underset{1\leq j\leq n}{\text{máx}}\{|\lambda_j|^2\} = \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2\right| < 1$$

se sigue que $|\lambda_j| < 1$, $\forall j = 1, ..., n$. Por lo tanto $\overline{\lambda_j} = \overline{0}$, $\forall j = 1, ..., n$.

$\square$

Teorema 4.1.6. *La aplicación f_ω es un producto interno sobre E_ω si, y solamente si, el campo residual de $\mathbb{K}$ es formalmente real. Además se tiene $|f_\omega(x, x)| = \|x\|_\infty^2$, $\forall x \in E_\omega$, donde $\|x\|_\infty = \sup_{j\in I} |x_j|$ es la norma original en E_ω.*

Demostración. Supongamos que el campo residual de $\mathbb{K}$ es formalmente real. Como $|f_\omega(x, y)| \leq \|x\|_\infty\|y\|_\infty$, para ver que f_ω es un producto interno, bastaría mostrar que $\forall x \in E_\omega$, $|f_\omega(x, x)| = \|x\|_\infty^2$. En efecto, sean $x \in E_\omega \setminus \{0\}$ y $\varepsilon = \dfrac{\|x\|_\infty^2}{2}$. Como $\lim_{j\in I} x_j^2 = 0$, entonces para este ε dado, existe un conjunto finito $I_\varepsilon \subset I$ de manera que $|x_j|^2 < \frac{\|x\|_\infty^2}{2}$, $\forall j \in I_\varepsilon^c$.

Notemos que:

(1). $$\left|\sum_{j\in I_\varepsilon^c} x_j^2\right| \leq \sup_{j\in I_\varepsilon^c} |x_j|^2 \leq \frac{\|x\|_\infty^2}{2} < \|x\|_\infty^2$$

(2). $\left|\sum_{j\in I_\varepsilon} x_j^2\right| = \max_{j\in I_\varepsilon} |x_j|^2 = \|x\|_\infty^2$

el ítem (2) se sigue del Lema 4.1.5 . Luego, se tiene:

$$|f_\omega(x,x)| = \left|\sum_{j\in I} x_j^2\right| = \left|\sum_{j\in I_\varepsilon} x_j^2 + \sum_{j\in I_\varepsilon^c} x_j^2\right| = \max\left\{\left|\sum_{j\in I_\varepsilon} x_j^2\right|, \left|\sum_{j\in I_\varepsilon^c} x_j^2\right|\right\} = \left|\sum_{j\in I_\varepsilon} x_j^2\right| = \|x\|_\infty^2$$

donde la tercera igualdad se concluye de los incisos (1) y (2).

Supongamos ahora que f_ω es un producto interno que induce la norma original en E_ω. Mostraremos que el campo residual de $\mathbb{K}$ es formalmente real:

Sea $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$. Para $j_1, ..., j_n \in I$ definimos

$$x = \begin{cases} x_{j_i} = \lambda_i & \text{si } i = 1, ..., n \\ x_j = 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Notemos que $x \in E_\omega$, y así:

$$|\lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2| = |f_\omega(x,x)| = |\sum_{j\in I} x_j^2| = \max_{j\in I}\{|x_j^2|\} = \max_{1\leq j\leq n}\{|\lambda_j^2|\}$$

luego, por el Lema 4.1.5 se sigue que el campo residual de $\mathbb{K}$ es formalmente real.

□

Observación 4.1.7. *El teorema anterior nos dice que cuando f_ω es un producto interno, induce la norma original de E_ω, con la cual éste espacio es completo. Es decir, el espacio E_ω es Banach con la norma inducida por el producto interno.*

En adelante supondremos que el campo residual de $\mathbb{K}$ es formalmente real.

Lema 4.1.8. *Sean $x, y \in E_\omega$. Se tiene*

$$|f_\omega(x,x) + f_\omega(y,y)| = \max\{|f_\omega(x,x)|, |f_\omega(y,y)|\}$$

Demostración. ver en [9], página 8. □

Corolario 4.1.9. *Sean $x_1, ..., x_n \in E_\omega$. Se tiene*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f_\omega(x_j, x_j)\right| = \max_{1\leq j\leq n}\{|f_\omega(x_j,x_j)|\}$$

Demostración. El Lema 4.1.8 es el caso para $n = 2$. Supongamos que se satisface la igualdad para $n-1$, es decir, se tiene

$$\left|\sum_{j=1}^{n-1} f_\omega(x_j, x_j)\right| = \max_{1\leq j\leq n-1}\{|f_\omega(x_j, x_j)|\}$$

Mostraremos la igualdad para n elementos. Notemos que:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f_\omega(x_j, x_j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n-1} f_\omega(x_j, x_j) + f_\omega(x_n, x_n)\right|$$

Si $\left|\sum_{j=1}^{n-1} f_\omega(x_j, x_j)\right| \neq |f_\omega(x_n, x_n)|$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} f_\omega(x_j, x_j)\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n-1} f_\omega(x_j, x_j) + f_\omega(x_n, x_n)\right| \\
&= \max\left\{\left|\sum_{j=1}^{n-1} f_\omega(x_j, x_j)\right|, |f_\omega(x_n, x_n)|\right\} \\
&= \max\{\max_{1\leq j\leq n-1}\{|f_\omega(x_j, x_j)|\}, |f_\omega(x_n, x_n)|\} \\
&= \max_{1\leq j\leq n}\{|f_\omega(x_j, x_j)|\}
\end{aligned}$$

Luego, se satisface la igualdad.

Ahora, supongamos que $\left|\sum_{j=1}^{n-1} f_\omega(x_j, x_j)\right| = |f_\omega(x_n, x_n)|$, es decir,

$$\left|\sum_{j=1}^{n-1} f_\omega(x_j, x_j)\right| = \max_{1\leq j\leq n-1}\{|f_\omega(x_j, x_j)|\} = \max_{1\leq j\leq n-1}\{\|x_j\|^2\} = |f_\omega(x_n, x_n)| = \|x_n\|^2.$$

Para cada $\varepsilon_j = \dfrac{\|x_j\|^2}{2} > 0$, con $j = 1, ..., n$, existe un conjunto finito $I_{\varepsilon_j}(j) \subset I$ tal que $|x_j(i)|^2 < \dfrac{\|x_j\|^2}{2}$, $\forall i \in I^c_{\varepsilon_j}(j)$. Por lo tanto se tiene

$$(1) \quad \left|\sum_{i\in I^c_{\varepsilon_j}(j)} x_j^2(i)\right| \leq \sup_{i\in I^c_{\varepsilon_j}(j)}\{|x_j(i)|^2\} \leq \frac{\|x_j\|^2}{2} < \|x_j\|^2$$

$$(2) \quad \left|\sum_{i\in I_{\varepsilon_j}(j)} x_j^2(i)\right| = \max_{i\in I_{\varepsilon_j}(j)}\{|x_j^2(i)|\} = \|x_j\|^2$$

Y entonces se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} f_\omega(x_j,x_j)\right| &= \left|\sum_{i\in I} x_1^2(i) + \ldots + \sum_{i\in I} x_n^2(i)\right| \\ &= \left|\left(\sum_{i\in I_{\varepsilon_1}(1)} x_1^2(i) + \ldots + \sum_{i\in I_{\varepsilon_n}(n)} x_n^2(i)\right) + \left(\sum_{i\in I^c_{\varepsilon_1}(1)} x_1^2(i) + \ldots + \sum_{i\in I^c_{\varepsilon_n}(n)} x_n^2(i)\right)\right|\end{aligned}$$

Pero, como

$$\begin{aligned}\left|\left(\sum_{i\in I^c_{\varepsilon_1}(1)} x_1^2(i) + \ldots + \sum_{i\in I^c_{\varepsilon_n}(n)} x_n^2(i)\right)\right| &\leq \text{máx}\left\{\left|\sum_{i\in I^c_{\varepsilon_1}(1)} x_1^2(i)\right|, \ldots, \left|\sum_{i\in I^c_{\varepsilon_n}(n)} x_n^2(i)\right|\right\} \\ &\leq \text{máx}\left\{\frac{\|x_1\|^2}{2}, \ldots, \frac{\|x_n\|^2}{2}\right\} \\ &< \text{máx}\{\|x_1\|^2, \ldots, \|x_n\|^2\}\end{aligned}$$

y

$$\left|\left(\sum_{i\in I_{\varepsilon_1}(1)} x_1^2(i) + \ldots + \sum_{i\in I_{\varepsilon_n}(n)} x_n^2(i)\right)\right| = \text{máx}\{\|x_1\|^2, \ldots, \|x_n\|^2\}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} f_\omega(x_j,x_j)\right| &= \left|\sum_{i\in I} x_1^2(i) + \ldots + \sum_{i\in I} x_n^2(i)\right| \\ &= \left|\left(\sum_{i\in I_{\varepsilon_1}(1)} x_1^2(i) + \ldots + \sum_{i\in I_{\varepsilon_n}(n)} x_n^2(i)\right) + \left(\sum_{i\in I^c_{\varepsilon_1}(1)} x_1^2(i) + \ldots + \sum_{i\in I^c_{\varepsilon_n}(n)} x_n^2(i)\right)\right| \\ &= \left|\left(\sum_{i\in I_{\varepsilon_1}(1)} x_1^2(i) + \ldots + \sum_{i\in I_{\varepsilon_n}(n)} x_n^2(i)\right)\right| \\ &= \text{máx}\{\|x_1\|^2, \ldots, \|x_n\|^2\} \\ &= \underset{1\leq j\leq n}{\text{máx}}\{|f_\omega(x_j,x_j)|\}\end{aligned}$$

$\square$

4.2. Operador Adjunto en E_ω

Recordemos que para $u \in L(E_\omega)$, se define

$$D(u^*) = \{y \in E_\omega : \exists y^* \in E_\omega, f_\omega(u(x), y) = f_\omega(x, y^*), \forall x \in E_\omega\}$$

el cual es un subespacio de E_ω. Para cada $y \in E_\omega$, y^* es único.
Si $D(u^*) = E_\omega$, podemos definir el operador lineal

$$\begin{aligned} u^* : & E_\omega \to E_\omega \\ & y \mapsto u^*(y) = y^* \end{aligned}$$

que satisface la siguiente relación

$$f_\omega(u(x), y) = f_\omega(x, u^*(y)), \forall x, y \in E_\omega$$

Además

$$\|u^*(y)\|^2 = |f_\omega(u^*(y), u^*(y))| = |f_\omega(u(u^*(y)), y)| \leq \|u(u^*(y))\|\|y\| \leq \|u\|\|u^*(y)\|\|y\|$$

por lo tanto $u^* \in L(E_\omega)$.

Observación 4.2.1. *En el capitulo 3, Teorema 3.3.4, se mostró una caracterización de los operadores lineales continuos sobre E_ω que admiten adjunta. La siguiente proposición nos otorgará una nueva equivalencia para este tipo de operadores.*

Proposición 4.2.2. *Sea $u \in L(E_\omega)$. El operador $u \in L_0(E_\omega)$ si, y solamente si, $\forall y \in E_\omega$, $\lim\limits_{k \in I} f_\omega(u(e_k), y) = 0$*

Demostración. Supongamos que u admite adjunta u^*, es decir, $u \in L_0(E_\omega)$. Entonces se tiene que $f_\omega(u(x), y) = f_\omega(x, u^*(y)), \forall x, y \in E_\omega$. En particular $f_\omega(u(e_k), y) = f_\omega(e_k, u^*(y))$, $\forall k \in I$, $\forall y \in E_\omega$. Así, para $y \in E_\omega$ dado, se tiene:

$$f_\omega(u(e_k), y) = f_\omega(e_k, u^*(y)) = f_\omega(e_k, y^*) = y_k^*$$

Luego, $\lim\limits_{k \in I} |f_\omega(u(e_k), y)| = \lim\limits_{k \in I} |y_k^*| = 0$.
Por otro lado, supongamos que $\forall y \in E_\omega$, $\lim\limits_{k \in I} f_\omega(u(e_k), y) = 0$. Sea $y \in E_\omega$, si hacemos

$z_k = f_\omega(u(e_k), y)$, entonces $z := (z_k) \in E_\omega$, de esta forma, para cada $x = \sum_{j\in I} x_j e_j \in E_\omega$ se tiene:

$$f_\omega(u(x), y) = \sum_{k\in I} x_k f_\omega(u(e_k), y) = \sum_{k\in I} x_k z_k = f_\omega(x, z)$$

luego, $y \in D(u^*)$, por lo tanto $D(u^*) = E_\omega$. Lo que implica que $u \in L_0(E_\omega)$. □

Observación 4.2.3. *Podemos reescribir al espacio $L_0(E_\omega)$ de la siguiente forma*

$$L_0(E_\omega) = \{u \in L(E_\omega) : \lim_{k\in I} f_\omega(u(e_k), y) = 0, \forall y \in E_\omega\}$$

Proposición 4.2.4. *$L_0(E_\omega)$ es un subespacio cerrado de $L(E_\omega)$*

Demostración. Sea $u \in \overline{L_0(E_\omega)}$, luego existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L_0(E_\omega)$ de manera que $u_n \to u$ en norma. Debemos probar que $\forall y \in E_\omega$,

$$\lim_{k\in I} |f_\omega(u(e_k), y)| = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$ e $y \in E_\omega \setminus \{\theta\}$. Para éste $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $\|u_n(e_k) - u(e_k)\| \leq \|u_n - u\| < \dfrac{\varepsilon}{\|y\|}$, $\forall k \in I$.
Por otro lado, para el y dado, existe $I_\varepsilon \subset I$ finito tal que $|f_\omega(u_N(e_k), y)| < \varepsilon$, $\forall k \in I_\varepsilon^c$.
Luego,

$$\begin{aligned}
|f_\omega(u(e_k), y)| &= |f_\omega(u(e_k) - u_N(e_k) + u_N(e_k), y)| \\
&= |f_\omega(u(e_k) - u_N(e_k), y) + f_\omega(u_N(e_k), y)| \\
&\leq \text{máx}\{|f_\omega(u(e_k) - u_N(e_k), y)|, |f_\omega(u_N(e_k), y)|\} \\
&\leq \text{máx}\{\|u(e_k) - u_N(e_k)\|\|y\|, |f_\omega(u_N(e_k), y)|\} \\
&< \varepsilon, \forall k \in I_\varepsilon^c
\end{aligned}$$

Luego, $\lim_{k\in I} |f_\omega(u(e_k), y)| = 0$. Por lo tanto $u \in L_0(E_\omega)$.

□

4.3. Operadores Compactos en $L_0(E_\omega)$

Con anterioridad hemos visto que un operador $u = \sum_{l,j} \alpha_{lj} e'_j \otimes e_l \in L(E_\omega)$ es compacto si, y solamente si, $\lim_{l\in I} \sup_{j\in I} |\alpha_{lj}| = 0$.

La siguiente proposición nos entrega una caracterización de los operadores que admiten adjunta y que son compactos, es decir, de los operadores que pertenecen a $C_0(E_\omega)$.

Proposición 4.3.1. *Un operador $u \in C_0(E_\omega)$ si, y solamente si, $\lim\limits_{j\in I} \|u(e_j)\| = 0$*

Demostración. Sea $u \in L(E_\omega)$ y supongamos que $\lim\limits_{j\in I} \|u(e_j)\| = 0$. Notemos que cualquiera sea el $y \in E_\omega$, se tiene

$$|f_\omega(u(e_j), y)| \leq \|u(e_j)\|\|y\|$$

Por lo tanto se tiene que $\lim\limits_{j\in I} |f_\omega(u(e_j), y)| = 0$, y entonces u admite adjunta.
Además, $\|u(e_j)\| = \|\sum\limits_{l\in I} \alpha_{lj} e_l\| = \sup\limits_{l\in I} |\alpha_{lj}|\|e_l\| = \sup\limits_{l\in I} |\alpha_{lj}|$, por lo tanto $\lim\limits_{j\in I} \sup\limits_{l\in I} |\alpha_{lj}| = 0$ y $\lim\limits_{l\in I} |\alpha_{lj}| = 0$, $\forall j \in I$. Entonces por el Lema 3.5.2 se sigue que $u \in C_0(E_\omega)$.
Por otro lado, supongamos que $u = \sum\limits_{l,j} \alpha_{lj} e'_j \otimes e_l \in C_0(E_\omega)$. Se tiene entonces:

(1) $\lim\limits_{l\in I} \sup\limits_{j\in I} |\alpha_{lj}| = 0$

(2) $\lim\limits_{j\in I} |\alpha_{lj}| = 0$, $\forall l \in I$

Por el Lema 3.5.2 es equivalente a decir que u satisface

(1') $\lim\limits_{j\in I} \sup\limits_{l\in I} |\alpha_{lj}| = 0$

(2') $\lim\limits_{l\in I} |\alpha_{lj}| = 0$, $\forall j \in I$

Y como $\|u(e_j)\| = \sup\limits_{l\in I} |\alpha_{lj}|$, se sigue de (1') que $\lim\limits_{j\in I} \|u(e_j)\| = 0$.

$\square$

Observación 4.3.2. *Con la proposición anterior podemos denotar al espacio $C_0(E_\omega)$ de la forma siguiente*

$$C_0(E_\omega) = \{u \in L(E_\omega) : \lim_{j\in I} \|u(e_j)\| = 0\}$$

4.4. Producto Interno en $C_0(E_\omega)$

Sea

$$\begin{aligned} F_\omega : & C_0(E_\omega) \times C_0(E_\omega) \longrightarrow \mathbb{K} \\ & (u, v) \mapsto F_\omega(u, v) = \sum_{j \in I} f_\omega(u(e_j), v(e_j)) \end{aligned}$$

La aplicación F_ω está bien definida pues como $u, v \in C_0(E_\omega)$ y se tiene la desigualdad

$$|f_\omega(u(e_j), v(e_j))| \leq \|u(e_j)\| \|v(e_j)\|$$

entonces $\lim_{j \in I} |f_\omega(u(e_j), v(e_j))| = 0$. Además, de la bilinealidad y simetría de f_ω, se sigue que F_ω es bilineal y simétrica.

Teorema 4.4.1. *F_ω es un producto interno sobre $C_0(E_\omega)$*

Demostración. Los ítem (i) y (ii) de la Definición 4.1.1 se obtienen de forma directa. Enseguida mostraremos que se satisface la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
Sean $u \in C_0(E_\omega) \setminus \{\theta\}$ y $\varepsilon = \dfrac{\|u\|^2}{2}$, analizaremos primeramente $F_\omega(u, u)$. Como $\lim_{j \in I} |f_\omega(u(e_j), u(e_j))| = 0$ y $|f_\omega(u(e_j), u(e_j))| = \|u(e_j)\|^2$, existe $I_\varepsilon \subset I$ finito tal que $\|u(e_j)\|^2 < \varepsilon$, $\forall j \in I_\varepsilon^c$. Notemos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in I_\varepsilon^c} f_\omega(u(e_j), u(e_j)) \right| & \leq \sup_{j \in I_\varepsilon^c} \{|f_\omega(u(e_j), u(e_j))|\} \\ & \leq \frac{\|u\|^2}{2} \\ & < \|u\|^2 \\ & = \max_{j \in I_\varepsilon} \{\|u(e_j)\|^2\} \\ & = \max_{j \in I_\varepsilon} \{|f_\omega(u(e_j), u(e_j))|\} \\ & = \left| \sum_{j \in I_\varepsilon} f_\omega(u(e_j), u(e_j)) \right| \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se sigue del Corolario 4.1.9. Y entonces se tiene

$$\begin{aligned}
|F_\omega(u,u)| &= \left|\sum_{j\in I} f_\omega(u(e_j),u(e_j))\right| \\
&= \left|\sum_{j\in I_\varepsilon} f_\omega(u(e_j),u(e_j)) + \sum_{j\in I_\varepsilon^c} f_\omega(u(e_j),u(e_j))\right| \\
&= \left|\sum_{j\in I_\varepsilon} f_\omega(u(e_j),u(e_j))\right| \\
&= \max_{j\in I_\varepsilon}\{|f_\omega(u(e_j),u(e_j))|\} \\
&= \max_{j\in I}\{|f_\omega(u(e_j),u(e_j))|\} \\
&= \max_{j\in I}\{\|u(e_j)\|^2\} \\
&= \|u\|^2
\end{aligned}$$

Por otro lado, para $u, v \in C_0(E_\omega)$ se tiene :

$$\begin{aligned}
|F_\omega(u,v)|^2 &= \left|\sum_{j\in I} f_\omega(u(e_j),v(e_j))\right|^2 \\
&\leq \sup_{j\in I} |f_\omega(u(e_j),v(e_j))|^2 \\
&\leq \sup_{j\in I}\{\|u(e_j)\|^2\|v(e_j)\|^2\} \\
&\leq \|u\|^2\|v\|^2 \\
&= |F_\omega(u,u)||F_\omega(v,v)|
\end{aligned}$$

Luego, F_ω es un producto interno sobre $C_0(E_\omega)$.

□

Proposición 4.4.2. *F_ω es un producto interno no degenerado*

Demostración. Supongamos que $F_\omega(u,v) = 0$, $\forall v \in C_0(E_\omega)$. En particular para

$B_{lj} := e'_j \otimes e_l$ que pertenece a $C_0(E_\omega)$, pues $\lim\limits_{k\in I} \|B_{lj}(e_k)\| = 0$. Luego, se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 = F_\omega(u, B_{lj}) &= \sum_{k\in I} f_\omega(u(e_k), B_{lj}(e_k)) \\
&= f_\omega(u(e_j), e_l) \\
&= \alpha_{lj}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se concluye que $u \equiv 0$

□

Observación 4.4.3. *Del Teorema 4.4.1 se deduce que la norma inducida por el producto interno F_ω coincide con la norma original de operadores en $C_0(E_\omega)$, esto es, $|F_\omega(u,u)|^{\frac{1}{2}} = \|u\|$, para $u \in C_0(E_\omega)$.*

Observación 4.4.4. *Para $a \in E_\omega$ se puede definir la aplicación*

$$
\begin{aligned}
M_a : &E_\omega \longrightarrow E_\omega \\
&x \mapsto M_a(x) = \sum_{j\in I} a_j x_j e_j
\end{aligned}
$$

Observación 4.4.5. *$M_a \in C_0(E_\omega)$ pues se tiene que $\lim\limits_{j\in I} \|M_a(e_j)\| = 0$*

Teorema 4.4.6. *E_ω es isométricamente homeomorfo a un subespacio cerrado de $C_0(E_\omega)$. Aún más, la restricción del producto interno de $C_0(E_\omega)$ en este subespacio cerrado coincide con el producto interno definido en E_ω.*

Demostración. Por la Observación 4.4.5 se puede definir el operador

$$
\begin{aligned}
\varphi : &E_\omega \longrightarrow C_0(E_\omega) \\
&a \mapsto \varphi(a) = M_a
\end{aligned}
$$

notemos que para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $a, b \in E_\omega$, se tiene:

$$\varphi(a + \lambda b) = M_{a+\lambda\cdot b} = M_a + M_{\lambda\cdot b} = M_a + \lambda \cdot M_b = \varphi(a) + \lambda \cdot \varphi(b)$$

luego, el operador φ es lineal. Además, para $x = \sum\limits_{j\in I} x_j e_j \in E_\omega$, se tiene:

$$\|M_a(x)\| = \left\| \sum_{j\in I} x_j a_j e_j \right\| = \sup_{j\in I} |x_j||a_j| \leq \|x\|\|a\|$$

y entonces $\|M_a\| \leq \|a\|$. Pero $\|M_a(a)\| = \left\| \sum_{j\in I} a_j^2 e_j \right\| = \sup_{j\in I} |a_j|^2 \|e_j\| = \sup_{j\in I} |a_j|^2 = \|a\|^2$. Así, se sigue que $\|M_a\| = \|a\|$, luego φ es una isometría. Por lo tanto, el subespacio $\{M_a : a \in E_\omega\}$ es cerrado en $C_0(E_\omega)$.

Por otro lado, sean $a = \sum_{j\in I} a_j e_j$ y $b = \sum_{j\in I} b_j e_j$ elementos de E_ω. Entonces

$$F_\omega(M_a, M_b) = \sum_{j\in I} f_\omega(M_a(e_j), M_b(e_j)) = \sum_{j\in I} a_j b_j = f_\omega(a, b)$$

□

En el análisis clásico, la importancia de los espacios de Hilbert y de sus álgebras de operadores acotados juegan un rol fundamental en Matemática y Física. Este es el motivo que ha llevado a muchos investigadores tratar de extender el concepto de espacio de Hilbert sobre campos valuados no-arquimedianos. Uno de los primeros intentos por definir un producto interno no-arquimediano fue hecho por G.K. Kalisch en [7]. Bertin Diarra definió el espacio de Hilbert ultramétrico E_ω , considerando una especie de producto interno que llamó f_ω. Dos de los más recientes trabajos acerca de espacios de Hilbert no-arquimedianos fueron realizados por L. Narici y E. Beckenstein en [9] y J. Aguayo y M. Nova en [1]. En estos trabajos se define un producto interno no-arquimediano (ver Definición 4.1.1), el cual, en cierta medida se asemeja a la definición del caso clásico.

Los resultados que se han expuestos particularmente en este capítulo, son generalizaciones directas del trabajo realizado por J. Aguayo y M. Nova en [1]. tales generalizaciones se encuentran en las Proposiciones 4.2.2 y 4.3.1 , como en los Teoremas 4.4.1 y 4.4.6.

Las proyecciones que se observan a futuro de este trabajo son, por ejemplo, el estudio de álgebras de Banach de operadores, la teoría espectral, la transformación de Gelfand, isometrías isomorfas con espacios de funciones continuas y medidas vectoriales. Además, bajo ciertas propiedades de los campos con valuación no-arquimedeana, como por ejemplo campos ordenados, se podría desarrollar una teoría de operadores positivos.

Bibliografía

[1] AGUAYO J. Y NOVA M. “Compact operators and a non-archimedean inner product".

[2] BACHMAN, G., “Introduction to p-adic numbers and valuation theory", Academic Press, New York(1964).

[3] DIARRA, B.,“Analyse p-adique", Cours de DEA-Algèbre Commutative, FAST-Université du Mali, Décembre 1999.

[4] DIARRA, B.“Geometry of the p-adic Hilbert spaces",(pre print).

[5] DIARRA, B. “Bounded linear operators on ultrametric Hilbert spaces", African Diaspora Journal of Mathematics, Volumen 8, Number 2, pp.173-181 (2009).

[6] ENFLO,P., “A counter example to the approximation problem in Banach spaces", Acta Math, 130(1973),309-317.

[7] KALISCH, G. K., “On p-Adic Hilbert spaces", Annals of Mathematics, 48(1): 180-192, 1947.

[8] KOBLITZ, N., “p-Adic Numbers, p-Adic Analysis and Zeta Functions", second edition, Springer-Verlag(1984).

[9] NARICI L. Y BECKENSTEIN E., “A Non-Archimedean inner product", Contemporary Mathematics, vol.384(2005), 187-202.

[10] PEREZ-GARCÍA C. Y SCHIKHOF W.H., “Locally Convex Spaces over Non-archimedean Valued Fields", Cambridge University press, (2010).

[11] OCHSENIUS H. Y SCHIKHOF W.H., “Banach spaces over fields with on infinite rank valuation", Report N° 9801(January 1998) Departament of Mathematics, University of Nijmegen, The Netherlands.

[12] SCHNEIDER,P., “Nonarchimedean Functional Analysis", Springer,2000.

[13] SERRE, J.P., “Endomorphisms complètement continus des espaces de Banach p-adiques", Inst.Hautes Études Sci.Publ.Math.,12(1962), 69-85.

[14] SHAMSEDDINE, K. “New elements of Analysis on the Levi-Civita Field", Phd. dissertation, departament of Mathematics and departament of Physics and Astronomy, Michigan state University, December 1999.

[15] VAN ROOIJ, A.C.M. “Non-Archimedean Functional Analysis", Marcel Dekker Inc., 1978.