Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa de Magíster en Matemática

La Topología Perfecta sobre espacios de funciones continuas a valores vectoriales

Tesis para optar al grado de Magíster en Matemática

SOVENY SORAYA SOLÍS GARCÍA
CONCEPCIÓN-CHILE
2015

Profesor Guía: José Aguayo Garrido
Dpto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa de Magíster en Matemática

La Topología Perfecta sobre espacios de funciones continuas a valores vectoriales

Comisión de Evaluación de Tesis:

José Aguayo (Director de Tesis)
Jacqueline Ojeda (Evaluadora Interna)
Carlos Martínez (Evaluador Interno)
Jorge Vielma (Evaluador Externo)

SOVENY SORAYA SOLÍS GARCÍA
CONCEPCIÓN-CHILE
2015

Dpto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Dedicado a

mi familia

Agradecimientos

Al profesor José Aguayo quien me orientó desde mi ingreso al magíster hasta la culminación de esta tesis.

A todos quienes hicieron posible la realización de esta tesis.

Introducción

A lo largo del tiempo han surgido interrogantes respecto a qué topología puede definirse sobre el espacio de funciones continuas y acotadas $C_b(X,E)$, con X espacio Hausdorff completamente regular y E normado, de tal forma que su dual pueda ser representado por algún subespacio de medidas.

La presente tesis responde parte de estas interrogantes a través del estudio de la topología perfecta definida sobre $C_b(X,E)$ y el subespacio de medidas perfectas, la dualidad entre ellos así como algunas propiedades topológicas.

El Capítulo 1 reúne los conceptos y resultados que aportan al desarrollo de la tesis mientras que en el Capítulo 2 se demuestran las propiedades más importantes de la topología perfecta, tales como:

Es la topología localmente convexa y sólida más fina que coincide con sí misma sobre los subconjuntos acotados en norma de $C_b(X,E)$.

Si $C_b(X)\otimes E$ es denso en $C_b(X,E)$ respecto a la topología perfecta, el dual de $C_b(X,E)$ se identifica con cierto espacio de medidas perfectas, definido previamente en el Capítulo 1.

Si E es Banach, la condición X es pseudocompacto equivale a que la topología perfecta sobre $C_b(X,E)$ sea normable, metrizable, barrelada y bornológica. Estas dos últimas propiedades se describen en el Apéndice A.

Si X es P-espacio y $C_b(X) \otimes E$ es denso en $C_b(X, E)$ respecto a la topología perfecta, entonces esta topología es Mackey; si además E es Banach, es fuertemente Mackey.

Si X es metrizable y E es normado separable, la topología perfecta sobre $C_b(X, E)$ es separable si y sólo si la cardinalidad de X es menor o igual que la de $\mathbb{R}$.

En el Capítulo 3 se estudia la representación de un operador lineal continuo definido del espacio $C_b(X, E)$ provisto de la topología perfecta, a un espacio de Banach F. Al inicio del capítulo se describe la construcción de una medida de representación del operador y se demuestran las propiedades más importantes que posee esta medida, a fin de poder enunciar y demostrar un teorema de representación.

En el Capítulo 4 se presentan las conclusiones sobre el trabajo realizado.

Un índice de los símbolos utilizados es presentado al final del documento de tesis, con la finalidad de facilitar la comprensión de la lectura.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Nociones topológicas

Comenzaremos esta sección dando las definiciones, notaciones y resultados básicos que necesitaremos sobre espacios topológicos. Si X es un conjunto no vacío sobre el cual se ha definido una topología τ, denotaremos esto por (X, τ) y diremos que X es un *espacio topológico*. Si la topología está sobreentendida simplemente nombraremos a X como un espacio topológico.

Si E es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, provisto de una topología Hausdorff τ que hace continuas las operaciones de suma y multiplicación por escalar, diremos que E es un *espacio vectorial topológico*. En este caso definimos su espacio dual topológico como $(E, \tau)'$, o simplemente E', dado por:

$$E' = \{\phi : E \to \mathbb{K}/\phi \; es \; funcional \; lineal \; y \; continuo\}.$$

Si un espacio vectorial topológico E posee una base local de vecindades de 0 formada por conjuntos convexos, diremos que E es un espacio localmente convexo. En esta parte es importante precisar que el concepto de vecindad de un punto que estamos usando, es el de un conjunto que contiene un abierto tal que el punto pertenece a dicho abierto.

Puesto que en un espacio vectorial topológico es suficiente contar con una base local de 0, de aquí en adelante sólo nos referiremos a vecindades que pertenezcan a dicha base.

Por la continuidad de las operaciones en un espacio vectorial topológico, es conocido que toda vecindad de 0 posee una vecindad cerrada y equilibrada.

Si además el espacio es localmente convexo, toda vecindad de 0 posee una vecindad cerrada, equilibrada y convexa.

Esto permite inferir que todo espacio localmente convexo posee una base local de conjuntos cerrados y absolutamente convexos.

También es conocido que una familia $\mathcal{P}$, de seminormas que separa puntos sobre un espacio vectorial E, induce una topología localmente convexa en E.

Una subbase local de vecindades está dada por conjuntos de la forma

$V = \{x \in E : p(x) \leq \varepsilon\}$; con $\varepsilon > 0$ y $p \in \mathcal{P}$. Estas serán las vecindades que se utilizarán frecuentemente a lo largo de toda la tesis ya que será suficiente mostrar los resultados para los elementos de la subbase.

Otra definición que será requerida es la de *dualidad*.

Recordemos que si E y F son dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$, se dice que E y F forman una dualidad, denotado por $\langle E, F\rangle$, si existe una forma bilineal $\begin{array}{rccc} b: & E \times F & \to & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \mapsto & \langle x,y\rangle \end{array}$ tal que:

1. $\{b(\cdot, y) : y \in F\}$ separa puntos de E.

2. $\{b(x, \cdot) : x \in E\}$ separa puntos de F.

Si E y F están en dualidad, para cada $y \in F$ se define una seminorma p_y sobre E dada por $p_y(x) = |\langle x, y\rangle|$; $x \in E$. La topología localmente convexa generada por estas seminormas sobre E se denomina la *topología débil* de E respecto a la dualidad $\langle E, F\rangle$, denotada por $\sigma(E, F)$.

Similarmente se define la topología débil sobre F respecto a la dualidad $\langle E, F\rangle$, la cual se denota por $\sigma(F, E)$.

Si E es espacio localmente convexo con dual E', estos espacios forman una dualidad respecto a la aplicación bilineal natural $\begin{array}{rccc} b: & E \times E' & \to & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \mapsto & \langle x, y\rangle = y(x) \end{array}$.

Por lo expuesto, denotamos por $\sigma(E, E')$ la *topología débil* que induce E' sobre E, esta topología es la menos fina que preserva el dual E'.

Si otra topología localmente convexa sobre E preserva el dual, se dice que es *compatible* con la dualidad $\langle E, E'\rangle$ y es más fina que $\sigma(E, E')$.

Una base de vecindades para esta topología en E está dada por:

$\{x \in E : |y_i'(x)| < \varepsilon; i = 1, ..., N; y_i' \in E'; \varepsilon > 0\}$.

Por la misma dualidad entre E y E', E induce una topología sobre E' la cual se denomina *topología débil ** y es la topología menos fina que hace continuas las funciones $\Lambda_x : E' \to \mathbb{R}$ definidas por $\Lambda_x(y') = y'(x)$; para cada $x \in E$. A esta topología la denotamos por $\sigma(E', E)$.

Una base de vecindades para esta topología en E' está dada por:

$\{y' \in E' : |y'(x_i)| < \varepsilon; i = 1, ..., N; x_i \in E; \varepsilon > 0\}$.

Un resultado conocido es que dos topologías que son compatibles con una dualidad, tienen los mismos conjuntos acotados (Swartz, [**21** Teorema 15 p. 194]). De esto se deduce que (E, τ), con dual $(E, \tau)'$, tiene los mismos conjuntos acotados que $(E, \sigma(E, E'))$.

Si $A \subseteq E$ se definen el conjunto polar y bipolar de A, respectivamente por:

$$A^{\circ} = \{f \in E' : |\langle f, a\rangle| = |f(a)| \leq 1; \forall a \in A\}.$$

$$A^{\circ\circ} = \{a \in E : |\langle f, a\rangle| = |f(a)| \leq 1; \forall f \in A^{\circ}\}.$$

Algunas propiedades de estos conjuntos que emplearemos se enumeran a continuación, para todo $A, B, A_{\alpha} \subseteq E$ (Swartz, [**21** p. 200, 201, 208]).

1. Si $A \subseteq B$, entonces $B^{\circ} \subseteq A^{\circ}$.
2. $A \subseteq A^{\circ\circ}$.
3. A° es absolutamente convexo y $\sigma(E', E)-$cerrado.
4. Si A es absolutamente convexo y $\sigma(E, E')-$cerrado, entonces $A = A^{\circ\circ}$.
5. $(\cup A_{\alpha})^{\circ} = \cap A_{\alpha}^{\circ}$
6. A es $\sigma(E, E')-$acotado si y sólo si A° es absorbente en E'.

Con estos conceptos se define la topología Mackey.

Sea $\langle E, E'\rangle$ una dualidad y consideremos $\mathcal{F}$ la familia de los subconjuntos absolutamente convexos $\sigma\left(E', E\right)-$compactos de E'. La topología polar $\tau_{\mathcal{F}}$ sobre E, inducida por los funcionales de Minkowski de $F^{\circ}; F \in \mathcal{F}$, se denomina la topología Mackey sobre E denotada por $\tau\left(E, E'\right)$.

Una base de vecindades de esta topología es $\{F^{\circ} : F \in \mathcal{F}\}$.

El Teorema de Mackey-Arens establece que si τ es una topología Hausdorff localmente convexa sobre E, τ es compatible con la dualidad $\langle E, E' \rangle$ si y sólo si $\sigma(E, E') \subseteq \tau \subseteq \tau(E, E')$ (Swartz, [**21** p. 239 Teorema 7]). Así, la topología Mackey es la más fina de todas las topologías Hausdorff localmente convexas que es compatible con la dualidad entre E y E'.

E se dice *Mackey* si su topología es Mackey. Es conocido que E es Mackey si y sólo si todo subconjunto absolutamente convexo $\sigma(E', E)$ $-$compacto de E' es equicontinuo y E es *fuertemente Mackey* si y sólo si todo subconjunto $\sigma(E', E)$ $-$relativamente contablemente compacto de E' es equicontinuo (Choo, [**3** p. 14]).

También se puede definir la topología Mackey sobre E', respecto a la misma dualidad entre E y E', considerando $\mathcal{F}$ como la familia de los subconjuntos absolutamente convexos $\sigma(E, E')$ $-$compactos de E. La topología Mackey sobre E' es la inducida por los funcionales de Minkowski de $F^\circ; F \in \mathcal{F}$, denotada por $\tau(E', E)$.

Si consideramos $\mathcal{B}$ la familia de los subconjuntos $\sigma(E, E')$ $-$acotados de E, la topología polar $\tau_{\mathcal{B}}$ sobre E', inducida por los funcionales de Minkowski de $B^\circ; B \in \mathcal{B}$, se denomina la topología fuerte sobre E' denotada por $\beta(E', E)$. Una base de vecindades de esta topología es $\{B^\circ : B \in \mathcal{B}\}$.

Es conocido que $\sigma(E', E) \subseteq \tau(E', E) \subseteq \beta(E', E)$ (Swartz, [**21** p. 244 Proposición 3]) y si E es un espacio normado, entonces la topología fuerte sobre E' coincide con la topología de la norma (Swartz, [**21** p. 243]).

E se dice metrizable si su topología es compatible con una métrica y se dice normable si existe una norma sobre E tal que la métrica inducida por esta norma es compatible con la topología de E.

El Teorema de Kolmogorov establece que E espacio vectorial topológico Hausdorff es normable si y sólo si 0 posee una vecindad abierta, convexa y acotada.

También es un resultado conocido que E es metrizable si y sólo si posee una base local numerable.

El `Apéndice A` resume los resultados más importantes que emplearemos acerca de espacios *tonelados* y *bornológicos*.

Las siguientes definiciones también serán utilizadas en la presente tesis.

Definición 1.1.1 *X espacio Hausdorff completamente regular es submetrizable separable si existe un espacio métrico separable Y y una función continua inyectiva f de X en Y. Si f puede escogerse de tal forma que f^{-1} es Baire medible, entonces X se dice submetrizable Baire-separable.*

Definición 1.1.2 *Para X un espacio Hausdorff completamente regular, se definen:*

- *βX como la **compactificación de Stone-Cech** de X, dada por la completitud de X respecto a la $C_b(X)-$uniformidad.*
- *νX como la **realcompactificación Hewitt** de X, dada por la completitud de X respecto a la $C(X)-$uniformidad.*
- *ΘX como la **completitud Dieudonné** de X, dada por la completitud de X respecto a la uniformidad fina.*

De (Wheeler, [**23** p. 104-105]) son conocidas las siguientes propiedades:

- $X \subseteq \Theta X \subseteq \nu X \subseteq \beta X$.
- βX es el espacio compacto más pequeño en el cual X es denso y $C_b(X)-$embebido.
- νX es el espacio realcompacto más pequeño en el cual X es denso y $C(X)-$embebido.
- ΘX es el espacio completo más pequeño que contiene a X.

El espacio vectorial que será objeto de nuestro estudio es el espacio de las funciones continuas y acotadas de X en E, con X Hausdorff completamente regular y E espacio normado. A este espacio lo denotaremos por $C_b\,(X, E)$.

Por $C_{rc}(X, E)$ denotaremos los elementos de $C_b\,(X, E)$ cuya imagen es relativamente compacta en E y $C_b(X)$ denotará el espacio de funciones continuas y acotadas de X en $\mathbb{R}$.

$C_b(X) \otimes E$ denota el producto tensor estándar entre $C_b(X)$ y E. Es un hecho conocido que $C_b(X) \otimes E \subseteq C_{rc}(X, E)$.

Para $f \in C_b(X, E)$ denotaremos por $\|f\|$ su función norma de X en $\mathbb{R}$, dada por $\|f\|(x) = \|f(x)\|$, mientras que la norma de f será denotada por $\|f\|_\infty = \underset{x \in X}{sup}\|f(x)\|$.

En $C_b\,(X, E)$ definiremos algunas topologías localmente convexas, las que serán inducidas por familias de seminormas que separan puntos.

La mayoría de estas topologías son llamadas estrictas por ser estrictamente menos finas que la de la norma. Una de las más estudiadas se denomina β_0.

La topología β_0 sobre $C_b\,(X, E)$ está inducida por las seminormas

$$f \mapsto ||f||_h = \underset{x \in X}{sup}||h(x)f(x)||,$$

cuando h recorre el conjunto de funciones de X a valores reales que se desvanecen al infinito, esto es, para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x : |h(x)| \geq \varepsilon\}$ es relativamente compacto en X.

De (Khurana, [**11** Teorema 1.1]), es conocido que β_0 y la topología de la norma tienen los mismos conjuntos acotados de $C_b\,(X, E)$, con X espacio Hausdorff completamente regular y E normado.

A continuación definimos ciertos conjuntos que servirán para construir otras topologías localmente convexas sobre $C_b(X, E)$.

Definición 1.1.3 *Sea X un espacio Hausdorff completamente regular y sea $Z \subseteq X$. Se dice que Z es zero set si existe $f \in C_b(X)$ tal que $Z = f^{-1}(\{0\})$.*

Definición 1.1.4 *Sea X un espacio Hausdorff completamente regular y sea Y un espacio métrico separable. Sea $D \subseteq X$. Se dice que D es distinguido si existe una función continua f de X en Y tal que $D = f^{-1}(f(D))$.*

De estas definiciones se deduce que todo zero set es distinguido pues si Z es zero set, entonces existe una función $f \in C_b(X)$ tal que $Z = f^{-1}(\{0\})$, es decir, $f(Z) = \{0\}$ y por tanto $Z = f^{-1}(f(Z))$, con f continua de X en $\mathbb{R}$, el cual es un espacio métrico separable.

Dado $Q \subseteq \beta X - X$, *zero set* o *distinguido*, podemos definir el conjunto

$\mathcal{H}_Q = \left\{h \in C_b(X) : \overline{h}\mid_Q = 0\right\}$, donde $\overline{h}$ denota la única extensión de Stone-Cech de h.

Como cada Q induce el conjunto $\mathcal{H}_Q$, las seminormas $f \longmapsto ||f||_h$, con $h \in \mathcal{H}_Q$, generan una topología localmente convexa sobre $C_b(X, E)$, la cual la denotamos por β_Q.

Con estas topologías generamos una topología límite inductivo, inducida por los espacios $(C_b(X, E), \beta_Q)$ y las aplicaciones identidad.

Tal como se explica en el `Apéndice B`, esta topología límite está dada por $\underline{ind(C_b(X, E), \beta_Q, Id_Q)} = \cap \beta_Q$ y tiene una base local de vecindades de 0 dada por los conjuntos absolutamente convexos W de $C_b(X, E)$, tales que W es una β_Q-vecindad de 0, para todo Q.

Si los conjuntos Q son zero sets, esta topología se denomina β_1.

Estos son algunos ejemplos de como generar topologías localmente convexas sobre $C_b(X, E)$ pero nos enfocaremos en una topología estricta en particular, denominada topología perfecta β_p, la misma que está inducida por conjuntos distinguidos de $\beta X - X$.

Definición 1.1.5 *Se dice que $V \subseteq C_b(X, E)$ es localmente sólido si para cada $f \in V$ y $g \in C_b(X, E)$ tal que $\|g\| \leq \|f\|$, se tiene que $g \in V$.*

En este estudio mostramos que β_p es una topología localmente sólida.

Definición 1.1.6 *Sea X un espacio Hausdorff completamente regular. X es un $P-$espacio si y sólo si todo zero set de X es abierto.*

Es conocido que X es $P-$espacio si y sólo si νX es $P-$espacio (Gillman, [**5** p. 125 ejercicio 5]).

1.2. Nociones de medida

Uno de los temas mayormente estudiados por diversos investigadores es como relacionar un espacio de medidas definido sobre X con el dual de un espacio de funciones continuas sobre X, provisto de alguna topología en particular.

Dentro de este contexto es conocido el Teorema de Representación de Riesz-Markov: "si ϕ es un funcional lineal continuo sobre el espacio de funciones reales continuas definidas sobre un espacio compacto X con la topología uniforme, puede ser representado por una medida μ regular acotada de Borel sobre X".

Es decir, $\phi(f) = \int_X f \, d\mu$; $f \in C(X)$.

Del Teorema de Alexandrov, también es un hecho conocido que si X es Hausdorff completamente regular, entonces $(C_b(X), \|.\|)'$ está representado por un espacio de medidas.

La presente sección provee de las definiciones, notaciones y resultados más relevantes que utilizaremos de la Teoría de la Medida.

Comenzaremos definiendo el álgebra de Baire (Borel) denotada por $Ba^*(X)$ ($Bo^*(X)$), como el álgebra más pequeña que contiene los zero sets (abiertos) de X.

Similar definición es para la σ-álgebra denotada por $Ba(X)$ ($Bo(X)$).

A los elementos de estas σ-álgebras se los conoce como conjuntos de Baire y conjuntos de Borel, respectivamente.

Puesto que todo zero set es cerrado, se verifica que $Ba(X) \subseteq Bo(X)$. Similar relación cumplen las álgebras respectivas. La igualdad se da si X es un espacio métrico.

Una medida positiva de Baire sobre un espacio completamente regular X, es una función conjunto $\mu : Ba^*(X) \to \mathbb{R}$, no negativa, finita y finitamente aditiva, la cual es *zero set regular*, es decir:

$$\forall A \in Ba^*(X), \mu(A) = sup\{\mu(Z) : Z \subseteq A, Z\, zero\, set\}.$$

Similar definición para una medida positiva de Borel y en este caso

$$\forall E \in Bo^*(X), \mu(E) = sup\{\mu(C) : C \subseteq E, C\, closed\, set\}.$$

De esta definición se deduce que estas funciones son monótonas, es decir, si $A \subseteq B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Una medida de Baire (Borel) es la diferencia de dos medidas positivas de Baire (Borel) y debido a esta definición, estas medidas también son conocidas como medidas signadas.

Al espacio de todas las medidas de Baire se lo denota por $M(X)$ y al de las medidas positivas de Baire por $M^+(X)$.

Si $\mu \in M^+(X)$, se define la función conjunto $\mu^* : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por:

$\mu^*(A) = inf\,\{\mu(Z) : A \subseteq Z,\, Z\, Baire\, set\, en\, X\};\ A \in P(X)$,

donde $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

μ^* se denomina *medida exterior* sobre X y es finitamente subaditiva, es decir, si $\{A_n; 1 \leq n \leq N; N \in \mathbb{N}\}$ es una colección finita de conjuntos de X, entonces $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n)$.

Similarmente, $\mu_*(A) = sup\,\{\mu(Z) : Z \subseteq A,\, Z\, Baire\, set\, en\, X\};\ A \in P(X)$, define una medida interior sobre X.

Además, si A es un conjunto de Baire, verifica que $\mu_*(A) = \mu(A) = \mu^*(A)$. En general la medida interior es menor o igual que la exterior.

También se verifica que la medida exterior y la interior son crecientes.

En $M(X)$ estudiaremos tres subespacios de medidas en particular, denotados por $M_t(X)$, $M_\sigma(X)$ y $M_p(X)$, denominados medidas: tight, σ-aditivas y perfectas, respectivamente. Es conocido que $M_t(X) \subseteq M_p(X) \subseteq M_\sigma(X)$.

Para definir estas medidas se requiere definir la *variación total* de una medida de Baire.

Sea $\mu \in M(X)$ y sea $A \in Ba^*(X)$. Las funciones μ^+ y μ^- son miembros de $M^+(X)$ y están dadas por:

$$\mu^+(A) = sup\{\mu(B) : B \in Ba^*(X) \wedge B \subseteq A\}$$

$$\mu^-(A) = -inf\{\mu(B) : B \in Ba^*(X) \wedge B \subseteq A\}$$

La variación total de μ se define por $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

Es un hecho conocido que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ y que para cada $A \in Ba^*(X)$,

$$|\mu|(A) = sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(B_i)| : B_i \in Ba^*(X), A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} B_i\right\}.$$

De estas definiciones se deduce que para toda $\mu \in M(X)$, se tiene que $\mu \leq |\mu|$. También es conocido que $\mu \mapsto \|\mu\| = |\mu|(X)$ constituye una norma sobre $M(X)$.

A continuación definimos los tres subespacios de medidas referidos.

Definición 1.2.1 *Sea $\mu \in M(X)$. Se dice que μ es una medida:*

- *tight, si dado $\delta > 0$ existe un compacto $K \subseteq X$ tal que $|\mu|(X - K) < \delta$.*
- *σ-aditiva, si para toda sucesión $Z_n \downarrow \phi$ de zero sets, $|\mu|(Z_n) \to 0$. Esto equivale a ser contablemente aditiva sobre $Ba^*(X)$.*
- *perfecta, si para toda función Baire medible $g : X \to \mathbb{R}$, existe un boreliano B tal que $B \subseteq g(X)$ y $|\mu|(g^{-1}(B)) = |\mu|(X)$.*

Las medidas perfectas fueron introducidas por Gnedenko y Kolmogorov en 1949 y verifican el siguiente lema.

Lema 1.2.1 *Sea $f : X \to Y$ una función Baire medible. Entonces*

1. *f induce la aplicación $f_* : M_\sigma(X) \to M_\sigma(Y)$ definida por $f_*(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B))$; para todo $B \in Ba^*(Y)$.*

2. *f_* preserva las medidas perfectas positivas.*

3. *Si $\mu \in M_p(X)^+$, para cada función continua f de X en un espacio métrico separable Y se tiene que $f_*(\mu)$ es una medida tight.*

Demostración:

1. Sea $\{B_n\}$ una colección contable de conjuntos disjuntos dos a dos de $Ba^*(Y)$. Sea $\mu \in M_\sigma(X)$. Por definición

$$f_*(\mu)(\dot{\cup} B_n) = \mu(f^{-1}(\dot{\cup} B_n)) = \mu(\dot{\cup} f^{-1}(B_n)) = \sum \mu(f^{-1}(B_n)) = \sum f_*(\mu)(B_n).$$

   Por tanto $f_*(\mu) \in M_\sigma(Y)$.

2. Sea $\mu \in M_p(X)^+$. Mostraremos que $f_*(\mu) \in M_p(Y)^+$.

   Sea $h : Y \to \mathbb{R}$ una función Baire medible. Entonces $h \circ f$ es Baire medible de X en $\mathbb{R}$. Como μ es perfecta existe un boreliano B tal que $B \subseteq (h \circ f)(X)$ y $|\mu|((h \circ f)^{-1}(B)) = |\mu|(X)$.

   Esto implica que $B \subseteq h(Y)$ y $\mu(f^{-1}(h^{-1}(B))) = \mu(f^{-1}(Y))$.

   Reescribiendo la última igualdad, obtenemos $f_*(\mu)(h^{-1}(B)) = f_*(\mu)(Y)$.

   Además notemos que $f_*(\mu)$ es positiva pues μ es positiva.

3. Sea $\mu \in M_p(X)^+$. Sea f función continua de X en un espacio métrico separable Y. Por la parte 2 se tiene que $f_*(\mu)$ es una medida perfecta sobre el espacio métrico separable Y y por tanto es tight (Koumoullis, [**9** p. 467]).

□

Ahora introduciremos un nuevo concepto de medida que emplearemos para definir el espacio $M(X, E')$.

Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de subconjuntos de X, sean E y F espacios Hausdorff localmente convexos, sea $L(E, F)$ el conjunto de las aplicaciones lineales continuas de E en F. Sea $S(X, \mathcal{A}, E)$ el conjunto de las funciones simples $E-$valuadas sobre X.

Una función conjunto finitamente aditiva $\mu : \mathcal{A} \to L(E, F)$ se dice que es una *medida*, si la correspondiente aplicación lineal $\lambda_\mu : S(X, \mathcal{A}, E) \to F$, es continua con la topología de la convergencia uniforme sobre $S(X, \mathcal{A}, E)$. (Schuchat, [**16** p. 375]).

Esta aplicación está dada por $\lambda_\mu(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(e_i)$; donde $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i$ es función simple en su forma canónica, con $A_i \in \mathcal{A}$, $e_i \in E$. La norma de φ es la del supremo que en este caso es $\|\varphi\|_\infty = \underset{x \in X}{sup} \|\varphi(x)\| = \underset{1 \leq i \leq n}{max} \|e_i\|$.

Denotaremos por $B(X, \mathcal{A}, E)$ la clausura de $S(X, \mathcal{A}, E)$ en el espacio de las funciones acotadas de X en E provisto de la topología de la convergencia uniforme. Es conocido que la aplicación λ_μ puede ser extendida de manera única a una aplicación lineal continua $\overline{\lambda_\mu} : B(X, \mathcal{A}, E) \to \overline{F}$, donde $\overline{F}$ es la completitud de F.

Los elementos de $B(X, \mathcal{A}, E)$ son denominados *funciones totalmente integrables* y se verifica que $C_b(X) \otimes E \subseteq B(X, \mathcal{A}, E)$.

En este estudio consideramos E como espacio normado, $F = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A} = Ba^*(X)$.

Así, para que $\mu : Ba^*(X) \to E'$ sea una medida es necesario que su correspondiente aplicación $\lambda_\mu : S(X, Ba^*(X), E) \to \mathbb{R}$ sea continua.

En este caso, esto equivale a $sup \sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| < \infty$, donde el supremo recorre todas las Ba^*-particiones finitas $\{A_i\}$ de X (Schuchat, [**16** p. 375-6]).

Es conocido que toda $f \in C_b(X)$ es $Baire-$medible (Wheeler, [**23** p. 108]) y es alcanzada por una sucesión de funciones simples (Berberian, [**2** p. 49 Teorema 3]). Por tanto $C_b(X) \subseteq B(X, Ba^*(X), \mathbb{R})$. En este caso, si $\mu \in M(X)$, entonces $\overline{\lambda_\mu}$ está definida para toda $f \in C_b(X)$.

Con lo expuesto, podemos definir el espacio de medidas

$$M\left(X, E'\right) = \{\mu : Ba^*\left(X\right) \to E',\, \mu\; medida / \forall e \in E\; [\mu_e \in M\left(X\right)]\},$$

donde $\mu_e(B) = \langle \mu\left(B\right), e\rangle = \mu(B)(e)$.

En este estudio es de especial interés el subespacio

$$M_p\left(X, E'\right) = \{\mu : Ba^*\left(X\right) \to E',\, \mu\; medida / \forall e \in E\; [\mu_e \in M_p\left(X\right)]\}.$$

Similares definiciones se dan para los casos $M_t\left(X, E'\right)$ y $M_\sigma\left(X, E'\right)$.

Para cada $\mu \in M(X, E')$, se define su variación en $A \in Ba^*(X)$ por:

$\left|\mu\right|(A) = sup \left|\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(e_i)\right|$, donde el supremo es tomado sobre todas las Ba^*-particiones finitas $\{A_i\}$ de A y sobre todos los $e_i \in E$ tales que $\|e_i\| \leq 1$.

Si E es normado, $\left|\mu\right|(A) = sup \left\{\sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| : A_i \in Ba^*(X), A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i\right\}$.

A continuación demostramos esta afirmación.

- $\left|\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(e_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)(e_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| \|(e_i)\|$

  Tomando el supremo sobre todos los $e_i \in E$ tal que $\|e_i\| \leq 1$ y sobre todas las particiones finitas de A, se obtiene una desigualdad.

- Dado $\varepsilon > 0$ existe una partición finita $\{P_i\}$ de A tal que $sup \sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| < \sum_{i=1}^{N} \|\mu(P_i)\| + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

  Para $\dfrac{\varepsilon}{2N}$ existe $e_i \in E$ tal que $\|e_i\| \leq 1$ y $\|\mu(P_i)\| < |\mu(P_i)(e_i)| + \dfrac{\varepsilon}{2N}$.

  Por tanto, $sup \sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| < \sum_{i=1}^{N} |\mu(P_i)(e_i)| + \varepsilon$.

  Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mu(P_i)(e_i) \geq 0$ pues de no ser así tenemos que $|\mu(P_i)(e_i)| = -\mu(P_i)(e_i) = \mu(P_i)(-e_i)$. Por tanto

  $$sup \sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\| < \left|\sum_{i=1}^{N} \mu(P_i)(e_i)\right| + \varepsilon < sup \left|\sum_{i=1}^{n} \mu(P_i)(e_i)\right| + \varepsilon.$$

  Como ε fue arbitrario se obtienen la otra desigualdad.

□

Otras propiedades que emplearemos se resumen a continuación.

1. Para cualquiera de los tres subespacios de medidas de $M(X)$ de la Definición 1.2.1, denotado de manera genérica por M_z, las siguientes son equivalentes (Wheeler, [**23** Corolario 7.3]):

   a) $\mu \in M_z$.

   b) $\mu^+ \in M_z$ y $\mu^- \in M_z$.

   c) $|\mu| \in M_z$.

2. Cada $\mu \in M(X)$ posee una extensión denotada por $\widetilde{\mu}$, la cual es una medida regular de Borel sobre βX. Si además $\mu \in M_\sigma(X)$, para todo conjunto de Baire $B \subseteq \beta X$ se tiene que $\widetilde{\mu}(B) = \mu(B \cap X)$ (Wheeler, [**23** p. 123]).

3. $\mu \in M_\sigma(X)$ si y sólo si $\widetilde{|\mu|}(Q) = 0$ para todo zero set $Q \subseteq \beta X - X$. (Koumoullis, [**9** p. 468]).

4. μ es perfecta si y sólo si $\widetilde{|\mu|}^*(G) = 0$ para todo $G \in \mathcal{D}(\beta X)$.(Koumoullis, [**9** Teorema 2.1]).

5. $\mu \in M_t(X)$ si y sólo si $\widetilde{|\mu|}^*(\beta X - X) = 0$. (Koumoullis, [**9** p. 468]).

6. Si $\mu \in M(X, E')$ y $e \in E$ tal que $\|e\| \leq 1$, entonces $|\mu_e| \leq |\mu|$.

7. Si $\mu \in M(X, E')$ entonces $|\mu| \in M(X)$ y si $\mu \in M_t(X, E')$ $(M_\sigma(X, E'))$ entonces $|\mu| \in M_t(X)$ $(M_\sigma(X))$ (Fontenot, [**4** Proposición 3.9]).

8. Si $X \subseteq Y \subseteq \beta X$, entonces la aplicación $T : C_b(X) \to C_b(Y)$ dada por $T(f) = \widetilde{f}|Y$ es un isomorfismo reticular isométrico.
   Su adjunta $T^* : M(Y) \to M(X)$ es una aplicación con las mismas propiedades (Wheeler, [**23** p. 124]).

1.3. Resultados clásicos

En 1940, P. Alexandroff demostró que la aplicación $T : M(X) \to C_b(X)'$ definida por $T(\mu)(f) = \int_X f d\mu$ es un isomorfismo isométrico, siendo X un espacio Hausdorff completamente regular.

En 1952, Buck definió la topología estricta β_0 sobre $C_b(X)$, siendo X un espacio Hausdorff localmente compacto, e identificó el dual $(C_b(X), \beta_0)'$ como el espacio de las medidas regulares de Borel sobre X.

En 1965, Wells extendió el trabajo de Buck al espacio $C_b(X, E)$ con X Hausdorff localmente compacto y E espacio Hausdorff localmente convexo.

En 1972, Fremlin y Sentilles muestran que si X es Hausdorff completamente regular, $(C_b(X), \beta_0)' = M_t(X)$ y $(C_b(X), \beta_1)' = M_\sigma(X)$.

En 1974, Fontenot probó que si X es completamente regular Hausdorff y E es un espacio normado, entonces $(C_b(X,E), \beta_0)' = M_t(X, E')$ y si $C_b(X) \otimes E$ es β_1-denso en $C_b(X,E)$ entonces $(C_b(X,E), \beta_1)' = M_\sigma(X, E')$.

En 1976, Choo probó que si X es Hausdorff completamente regular y E es Hausdorff localmente convexo, entonces $(C_b(X,E), \beta_0)' = M_t(X, E')$.

Si en $C_b(X)$ denotamos por τ_{pw} la topología de la convergencia puntual, β_K la del compacto abierto, β_τ la inducida por los compactos de $\beta X - X$ y $\|.\|$ la de la norma, es conocido que

$\tau_{pw} \leq \beta_K \leq \beta_0 \leq \beta_\tau \leq \beta_1 \leq \|.\|$ y $\beta_0 \leq \beta_p \leq \beta_1$ (Wheeler, [**23** Definición 7.8, Teorema 11.1]).

Cabe destacar el trabajo realizado por Varadarajan (1965), identificando dos clases de funcionales lineales sobre $C_b(X)$, con X espacio Hausdorff completamente regular.

Un funcional real ϕ sobre $C_b(X)$ se dice:

(a) tight, si toda red f_α en $C_b(X)$ con $||f_\alpha|| \leq 1$ tal que $f_\alpha \to 0$ uniformemente sobre los subconjuntos compactos de X, se tiene que $\phi(f_\alpha) \to 0$.

(b) σ-aditivo, si toda sucesión decreciente puntualmente f_n en $C_b(X)$ tal que $f_n(x) \to 0$ para cada $x \in X$, se tiene que $\phi(f_n) \to 0$.

Posteriormente Sentilles (1972) probó que si ϕ es un funcional positivo sobre $C_b(X)$, entonces:

(a) ϕ es tight si y sólo si ϕ es β_0-continuo.

(b) ϕ es $\sigma-$aditivo si y sólo si ϕ es β_1-continuo.

Además demostró que estos funcionales son representables mediante integración sobre X con respecto a una medida tight y a una medida $\sigma-$aditiva, según corresponda.

1.4. Funciones integrables

En esta sección explicaremos como se origina el espacio de las funciones integrables, de X en E, respecto a una medida $\sigma-$aditiva $\mu \in M_\sigma(X, E')$.

Principalmente utilizaremos estos conceptos para demostrar la relación entre $(C_b(X, E), \beta_p)'$ y $M_p(X, E')$.

Sea $\mu \in M_\sigma(X, E')$. De lo expuesto en secciones anteriores sabemos que μ induce la aplicación lineal continua $\lambda_\mu : S(X, Ba^*(X), E) \to \mathbb{R}$.

De Fontenot, $|\mu| \in M_\sigma(X)$. Por tanto $|\mu|$ también induce una aplicación continua $\lambda_{|\mu|} : S(X, Ba^*(X), \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Ahora mostramos que $|\lambda_\mu(f)| \leq \lambda_{|\mu|}(\|f\|)$, para toda $f \in S(X, Ba^*(X), E)$.

En efecto, sea $\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i$; $A_i \in Ba^*(X)$, $e_i \in E$, función simple de X en E. Por definición, $\lambda_\mu(\varphi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(e_i)$. Llamemos $x_i = \dfrac{e_i}{\|e_i\|}$; $1 \leq i \leq n$.

$$|\lambda_\mu(\varphi)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)(e_i)| = \sum_{i=1}^{n} \left|\mu(A_i)\left(\frac{e_i}{\|e_i\|}\right)\right| \|e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |\mu_{x_i}(A_i)| \, \|e_i\|.$$

Puesto que $|\mu_{x_i}(A_i)| = |\mu_{x_i}|\,(A_i)$ y $|\mu_{x_i}| \leq |\mu|$ cuando $\|x_i\| \leq 1$, tenemos

$$|\lambda_\mu(\varphi)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mu|\,(A_i)\|e_i\| = \lambda_{|\mu|}\,(\|\varphi\|).$$

Esta última igualdad se da puesto que la función norma de φ tiene la forma de una función simple de X en $\mathbb{R}$, dada por $\|\varphi\| = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|\chi_{A_i}$.

Con $\mu \in M_\sigma(X, E')$ fijada anteriormente, definiremos a continuación un espacio vectorial P seminormado, en el cual tomaremos la clausura de $S(X, Ba^*(X), E)$. Dicha clausura será denotada por $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(\mu, X, E)$ y sus elementos son las funciones integrables de X en E respecto a μ.

Sea $G = \{g : X \to [0, +\infty] : g = sup\,\{g_n\}\,, g_n \;sucesion\; en\; C_b(X); g_n \geq 0, \forall n\}$.

Para $g \in G$ definimos $\widehat{|\mu|}(g) = sup\left\{\overline{\lambda_{|\mu|}}(h) : 0 \leq h \leq g; h \in C_b(X)\right\}$.

Para una función $\delta : X \to [0, +\infty]$ se define $|\mu|^*(\delta) = inf\left\{\widehat{|\mu|}(g) : g \in G, g \geq \delta\right\}$.

Esta última función verifica las siguientes propiedades, consecuencia de lo mostrado en (Sondermann, [**19** p. 58]).

Sean $\delta_j : X \to [0, +\infty]; j = 1, 2$. Entonces:

1. $|\mu|^*(\delta_1 + \delta_2) \leq |\mu|^*(\delta_1) + |\mu|^*(\delta_2)$.

2. Si $\delta_1 \leq \delta_2$, entonces $|\mu|^*(\delta_1) \leq |\mu|^*(\delta_2)$.

3. Si $\delta_1 \in G$, entonces $\widehat{|\mu|}(\delta_1) = |\mu|^*(\delta_1)$.

4. Si $\alpha \geq 0$, entonces $|\mu|^*(\alpha\delta_1) = \alpha|\mu|^*(\delta_1)$.

Ahora definimos $P = \{f : X \to E / |\mu|^*(\|f\|) < \infty\}$ y en P la seminorma

$p(f) = |\mu|^*(\|f\|)$.

Con ayuda de las propiedades de $|\mu|^*$ se puede verificar que (P, p) es un espacio vectorial seminormado.

Notemos que $S(X, Ba^*(X), E) \subseteq P$ por lo que definiremos $\mathcal{L}_1$ como la clausura de $S(X, Ba^*(X), E)$ en (P, p).

Si $f \in S(X, Ba^*(X), E)$ entonces $\|f\| : X \to [0, +\infty]$ es función simple de X en $\mathbb{R}$ y por tanto es alcanzada por una sucesión en $C_b(X)$. Así $\|f\| \in G$ y en este caso $|\mu|^*(\|f\|) = \overline{\lambda_{|\mu|}}(\|f\|) = \lambda_{|\mu|}(\|f\|)$.

De aquí y dado que ya mostramos que para toda $f \in S(X, Ba^*(X), E)$ se tiene que $|\lambda_\mu(f)| \leq \lambda_{|\mu|}(\|f\|)$, concluimos que $|\lambda_\mu(f)| \leq p(f)$.

Por la densidad de $S(X, Ba^*(X), E)$ en $\mathcal{L}_1$, podemos extender de manera única λ_μ sobre $\mathcal{L}_1$. A este funcional lo denotamos por $\widetilde{\lambda_\mu} : \mathcal{L}_1 \to \mathbb{R}$ y verifica $\left|\widetilde{\lambda_\mu}(f)\right| \leq p(f)$, para toda $f \in \mathcal{L}_1$.

Si $f \in \mathcal{L}_1$ entonces $\|f\| \in \mathcal{L}_1(|\mu|)$. Además $B(X, Ba^*(X), E)$ y $C_b(X) \otimes E$ son subconjuntos de $\mathcal{L}_1$ (Khurana, [**11** p. 197]).

Para el caso de una función simple $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i$; $A_i \in Ba^*(X)$, $e_i \in E$, sabemos que $\widetilde{\lambda_\mu}(\varphi) = \lambda_\mu(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(e_i)$ lo cual representa la integral de φ sobre X respecto a la medida μ.

En este caso denotamos $\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(e_i)$.

Por otra parte, dado que $|\mu|$ se corresponde con un funcional $\phi_{|\mu|}$, el cual es $\beta_\sigma-$continuo sobre $C_b(X)$ (Wheeler, [**23** Teorema 11.8]), se puede realizar un procedimiento similar al anteriormente empleado para construir la función $|\mu|^*$, pero usando $\phi_{|\mu|}$ en lugar de $\overline{\lambda_{|\mu|}}$.

De lo observado anteriormente, siempre que $f \in \mathcal{L}_1$ se tiene que $\|f\| \in \mathcal{L}_1(|\mu|)$. Por tanto, en $\mathcal{L}_1$ podemos definir la seminorma $f \mapsto |\mu|(\|f\|)$, es decir, para cada $f \in \mathcal{L}_1$ se define $p(f) = |\mu|\,(\|f\|)$, donde $|\mu|$ reemplaza a $|\mu|^*$ para distinguir su construcción.

Si $\mathcal{L}_1$ está provisto con la seminorma $|\mu|$, se verifica que contiene a $C_b(X) \otimes E$ y $S(X, Ba^*(X), E)$ como subespacios densos (Khurana, [**11** p. 197]).

Definición 1.4.1 *Sea $\mu \in M(X, E')$ y sea f una función de X en E. Se dice que la integral de f respecto a μ, denotada por $\int\limits_X f d\mu$, es el número real r si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de X en elementos de $Ba^*(X)$ tal que si $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq Ba^*(X)$ es un refinamiento de P_ε y $\{x_i\}_{i=1}^n$ es una selección arbitraria de puntos $x_i \in A_i$, se tiene que $\left|\sum\limits_{i=1}^n \mu(A_i)(f(x_i)) - r\right| < \varepsilon$.*

Es decir, $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} \sum\limits_{i=1}^n \mu(P_i)(f(x_i)) = r$, donde $\mu(P)$ denota la medida de una partición P de X, dada por $\mu(P) = \max\limits_{1\le i\le n} |\mu|(P_i)$.

Teorema 1.4.1 *Si $\mu \in M(X, E')$ y $f \in C_{rc}(X, E)$, entonces $\int\limits_X f d\mu$ existe y verifica $\left|\int\limits_X f d\mu\right| \le \int\limits_X \|f\| d|\mu|$.*

Demostración:

- La existencia de $\int\limits_X f d\mu$ está garantizada por (Katsaras, [**7** p. 14-15]).

- Cota para $\left|\int\limits_X f d\mu\right|$:

Como $\int\limits_X f d\mu$ existe, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $P_{\varepsilon/2}$ de X tal que si $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq Ba^*(X)$ es un refinamiento de $P_{\varepsilon/2}$ y $\{x_i\}_{i=1}^n$ es una selección arbitraria de $x_i \in A_i$, entonces $\left|\sum\limits_{i=1}^n \mu(A_i)(f(x_i)) - \int\limits_X f d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

Además $\int\limits_X \|f\| d|\mu|$ existe por Alexandrov (Wheeler, [**23** Teorema 5.1]). Similar a lo anterior, $\left|\sum\limits_{i=1}^n |\mu|(A_i)\|f(x_i)\| - \int\limits_X \|f\| d|\mu|\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Por tanto, se toma P_ε como un refinamiento de las particiones correspondientes a (1) y (2).

Para $P = \{P_i\}_{i=1}^n$ un refinamiento de P_ε y $x_i \in P_i$ arbitrarios, se tiene:

$$\left|\sum_{i=1}^n \mu(P_i)(f(x_i))\right| \leq \sum_{i=1}^n |\mu(P_i)(f(x_i))| = \sum_{i=1}^n \left|\mu(P_i)\left(\frac{f(x_i)}{\|f(x_i)\|}\right)\right| \|f(x_i)\|.$$

Denominando $e_i = \dfrac{f(x_i)}{\|f(x_i)\|}$, sigue que:

$$\left|\sum_{i=1}^n \mu(P_i)(f(x_i))\right| \leq \sum_{i=1}^n |\mu_{e_i}(P_i)|\,\|f(x_i)\| \leq \sum_{i=1}^n |\mu|(P_i)\|f(x_i)\| \qquad (3)$$

Esta última suma corresponde a una aproximación de $\int\limits_X \|f\| d|\mu|$.

Empleando desigualdad triangular en (1) y (2) y luego usando (3), se obtiene $\left|\int\limits_X f d\mu\right| < \varepsilon + \int\limits_X \|f\| d|\mu|$.

Como ε fue arbitrario se concluye que $\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leq \int\limits_X \|f\| d|\mu|$.

$\square$

Capítulo 2

La Topología Perfecta β_p

En este capítulo demostraremos propiedades del espacio $C_b(X, E)$ provisto de la topología perfecta, siendo X un espacio Hausdorff completamente regular y E un espacio vectorial real normado.

Sea D un conjunto distinguido de $\beta X - X$. La colección de estos conjuntos la denotamos como $\mathcal{D}(\beta X)$.

Por cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$, generamos una topología localmente convexa β_D sobre $C_b(X, E)$, inducida por la familia de seminormas:

$$f \mapsto ||f||_h = \sup_{x \in \beta X} (|h(x)|\widetilde{||f||}(x)),$$

donde $\widetilde{||f||}$ denota la única extensión de $||f||$ a la compactificación de Stone-Cech de X y h recorre el conjunto $B_D(X)$, de todas las funciones escalares acotadas sobre βX que se anulan en D y se desvanecen en el infinito, esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subseteq \beta X - D$ tal que $\{x : |h(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq K$.

Se define la **topología perfecta** β_p, como la topología límite inductivo de las topologías β_D.

Por lo expuesto en el `Apéndice B`, $\beta_p = \underline{ind(C_b(X, E), \beta_D, Id_D)} = \cap \beta_D$; para todo $D \in \mathcal{D}(\beta X)$.

Tiene una base local de vecindades dada por los conjuntos absolutamente convexos W de $C_b(X,E)$, tales que W es una β_D-vecindad, para cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$.

De (Wheeler, [**23** Teorema 11.6]), se deduce que estos conjuntos tienen la forma explícita dada por:

$W = \textbf{abco}\left(\bigcup_{D\in\mathcal{D}(\beta X)}\left\{f \in C_b(X,E) : \underset{x\in\beta X}{sup}\,(\widetilde{||f||}(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}\right)$; con alguna $h_D \in B_D(X)$.

De las propiedades de la cápsula absolutamente convexa también tenemos:

$$W \supseteq \bigcup_{D\in\mathcal{D}(\beta X)} \textbf{abco}\left\{f \in C_b(X,E) : \underset{x\in\beta X}{sup}\,(\widetilde{||f||}(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}.$$

2.1. β_p en conjuntos norma-acotados

En esta sección emplearemos una topología sobre $C_b(X,E)$ que definimos a continuación.

Definición 2.1.1 *Sea $D \in \mathcal{D}(\beta X)$. Sea $\mathcal{K}_D = \{K \subseteq \beta X - D : K \text{ compacto}\}$. Se define τ^* a la topología sobre $C_b(X,E)$ generada por la familia $\mathcal{K}$. Tiene una subbase local de vecindades en 0 dada por los conjuntos*

$$Z = \left\{f \in C_b(X,E) : \underset{x\in K}{sup}\widetilde{\|f\|}(x) < \varepsilon\right\};\ K \in \mathcal{K}_D; \varepsilon > 0.$$

Esta topología se denomina la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos de $\beta X - D$ ya que una red $f_\alpha \to 0$ para τ^* en $C_b(X,E)$, si y sólo si para $K \in \mathcal{K}_D$, $f_\alpha \to 0$ uniformemente en K.

Lema 2.1.1 *Para cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$, la topología β_D es la topología localmente convexa más fina que coincide con la topología τ^*, de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de $\beta X - D$, en los subconjuntos acotados en norma de $C_b(X, E)$.*

Demostración:

Sea τ_D la topología localmente convexa más fina sobre $C_b(X, E)$ que coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de $\beta X - D$, en los subconjuntos acotados en norma de $C_b(X, E)$.

Es conocido (Wiweger, [**5** Teorema 2.2, Teorema 3.1.1]) que la topología τ_D tiene una base local de vecindades de la forma

$$V = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ f \in C_b(X, E) : \sup_{x \in K_n} \widetilde{||f||}(x) \leq a_n \right\}$$

donde $\{K_n\}$ es una colección contable de subconjuntos compactos de $\beta X - D$ y $0 < a_n \to \infty$.

Ahora mostramos que $\tau_D = \beta_D$.

- Se afirma que $\tau_D \subseteq \beta_D$.

  Sea V una τ_D vecindad como la descrita anteriormente.

  Definamos la función $h : \beta X \to \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

  Si $x \in D$, $h(x) = 0$.

  Si $x \in \beta X - D$, $h(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{a_n} \chi_{K_n}(x) \right\}$.

Notemos que, por construcción, y dado que $0 < a_n \to \infty$, h es acotada y no negativa.

Además se verifica que si $x \notin \bigcup K_n$, entonces $h(x) = 0$, mientras que si $x \in \bigcup K_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $h(x) > \dfrac{1}{a_n}$.

Ahora mostraremos que h se desvanece en el infinito. Sea $\varepsilon > 0$ y sea el conjunto $A = \{x : |h(x)| \geq \varepsilon\}$.

Dado que $\dfrac{1}{a_n} \to 0$, para el ε dado existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{a_n} < \varepsilon$ si $n \geq n_0$.

Tenemos que si $x \in A$, $h(x) > 0$ y por tanto x debe pertenecer a algún K_n. De la condición precedente, se deduce que $1 \leq n \leq n_0$ porque de lo contrario el supremo tomado sobre $n > n_0$ sería menor que ε, con lo cual se obtiene que $h(x) < \varepsilon$ y esto contradice que $x \in A$.

Luego, $A = \{x : |h(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \displaystyle\bigcup_{n=1}^{n_0} K_n$. Como esta unión es compacta en $\beta X - D$, se verifica que h se desvanece en el infinito.

Con esta función h construimos la β_D vecindad dada por:

$$W = \left\{ f \in C_b(X, E) : \sup_{x \in \beta X} (\widetilde{||f||}(x)|h(x)|) \leq 1 \right\}.$$

Ahora mostramos que $W \subseteq V$. Si $f \in W$, $\displaystyle\sup_{x \in \beta X} (\widetilde{||f||}(x)|h(x)|) \leq 1$.
Luego, $\displaystyle\sup_{x \in K_n} (\widetilde{||f||}(x)|h(x)|) \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De lo observado anteriormente sabemos que $\dfrac{1}{a_n} < h(x)$; para todo $x \in K_n$.

De estas dos últimas desigualdades y dado que $h(x)$ es distinto de 0 sobre cada K_n, tenemos que $\sup\limits_{x\in K_n} \widetilde{||f||}(x) \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $f \in V$.

- Finalmente mostramos que $\beta_D \subseteq \tau_D$. Sea W una β_D vecindad dada por:

$$W = \left\{ f \in C_b\,(X, E) : \sup_{x\in\beta X} (\widetilde{||f||}(x)|h(x)|) \leq \delta \right\};\ \delta > 0.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que la cota de h es menor que 1.

Dado que h es una función que se desvanece en el infinito, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un compacto K_n tal que $\left\{ x : |h(x)| \geq \dfrac{1}{n} \right\} \subseteq K_n$. Notemos que por construcción los conjuntos $\left\{ x : |h(x)| \geq \dfrac{1}{n} \right\}$; $n \in \mathbb{N}$, están encajados.

La clausura de estos conjuntos es compacta y a estas clausuras las podemos considerar como los nuevos K_n y de esta forma obtenemos $K_n \subseteq K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definamos la τ_D vecindad dada por:

$$V = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ f \in C_b\,(X, E) : \sup_{x\in K_n} \widetilde{||f||}(x) \leq \frac{\delta\, n}{2} \right\}.$$

Notemos que $0 < \dfrac{\delta\, n}{2} \to \infty$. Mostramos a continuación que $V \subseteq W$.

Sea $f \in V$. Tenemos los siguientes casos para $x \in \beta X$:

Si $h(x) = 0$, entonces $\widetilde{||f||}(x)|h(x)| \leq \delta$.

Si $h(x) \neq 0$, por Arquímedes existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|h(x)| \geq \dfrac{1}{n_0}$, con lo cual $x \in K_{n_0}$. En esta parte debemos analizar los siguientes subcasos:

Si $x \in K_1$, puesto que $f \in V$, $\widetilde{||f||}(x) \leq \dfrac{\delta}{2}$. Además hemos supuesto que $|h(x)| < 1$ y por tanto $\widetilde{||f||}(x)|h(x)| \leq \delta$.

De lo contrario: elijamos $n_0 \geq 2$ de tal forma que $x \notin K_{n_0-1}$.

Como $f \in V$ se tiene que $\widetilde{||f||}(x) \leq \dfrac{\delta\, n_0}{2}$ y dado que $x \notin K_{n_0-1}$ se tiene que $|h(x)| < \dfrac{1}{n_0 - 1}$.

Multiplicando ambas desigualdades se concluye que $\widetilde{||f||}(x)|h(x)| \leq \delta$, puesto que $n_0 \leq 2(n_0 - 1)$.

En todos estos casos se tiene que $\widetilde{||f||}(x)|h(x)| \leq \delta$ para $x \in \beta X$, por lo tanto esto es válido para el supremo tomado sobre βX. Luego, $f \in W$.

□

A partir de este lema se verifica el siguiente Corolario.

Corolario 2.1.1 *Para cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$, se cumple que:*

1. *β_D es la topología localmente convexa más fina que coincide consigo mismo sobre los conjuntos acotados en norma de $C_b(X, E)$.*
2. *Si (F, τ) es un espacio vectorial topológico localmente convexo, una aplicación lineal $T : C_b(X, E) \to F$ es $\beta_D - \tau$ continua, si y sólo si su restricción sobre conjuntos acotados de $(C_b(X, E); ||.||)$ es $\beta_D - \tau$ continua.*

Demostración:

- Sabemos que β_D induce una topología de subespacio sobre los conjuntos acotados en norma de $C_b(X,E)$. Esa misma topología de subespacio es inducida por la de Wiweger, denominada τ_D en la demostración del Lema 2.1.1 y además mostramos que $\beta_D = \tau_D$. Pero τ_D es la topología localmente convexa más fina que induce esa topología de subespacio sobre los conjuntos acotados en norma de $C_b(X,E)$. Luego β_D verifica el corolario.

- Sabemos que si T es $\beta_D - \tau$ continua, toda restricción a un subespacio topológico de su dominio lo es.

Para la otra implicación debemos mostrar que si cada restricción de T sobre conjuntos acotados en norma de $C_b(X,E)$ es $\beta_D - \tau$ continua, entonces T es $\beta_D - \tau$ continua.

Consideremos la colección $\mathcal{B} = \{B_r; r > 0\}$ de bolas abiertas, centradas en 0 y radio r, en $C_b(X,E)$. Los elementos de esta colección cubren $C_b(X,E)$ y son acotados en norma. De la hipótesis tenemos que la restricción de T sobre cada B_r es $\beta_D - \tau$ continua, por tanto se concluye que T es $\beta_D - \tau$ continua.

□

Con estos resultados estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1 *β_p es la topología localmente convexa más fina que coincide consigo mismo sobre los conjuntos acotados en norma de $C_b(X,E)$.*

Demostración:

Recordemos que $\beta_p = \underline{ind(C_b\,(X,E)\,,\,\beta_D,\,Id_D)} = \cap\beta_D;\ D \in \mathcal{D}(\beta X)$.

Supongamos ahora que existe otra topología τ localmente convexa sobre $C_b\,(X,E)$, que induce la misma topología de subespacio que la inducida por β_p sobre los conjuntos acotados en norma de $C_b\,(X,E)$.

Si esto es así, sea B un conjunto acotado en norma de $C_b\,(X,E)$ y sea $D \in \mathcal{D}(\beta X)$. Definamos la aplicación inyección canónica $T_B : (B,\beta_D) \to (C_b(X,E),\tau)$. Ahora mostramos que T_B es $\beta_D - \tau$ continua.

En efecto, si W es abierto en $(C_b(X,E),\tau)$ entonces $T_B^{-1}(W) = W \cap B$ es un β_p abierto en B por el supuesto realizado, por tanto también es β_D- abierto en B. Como B fue arbitrario se concluye que todas las aplicaciones T_B son $\beta_D - \tau$ continuas.

Del corolario anterior se concluye que $T : (C_b(X,E),\beta_D) \to (C_b(X,E),\tau)$ es continua, para todo $D \in \mathcal{D}(\beta X)$. Luego T es $\beta_p - \tau$ continua. Como T es la aplicación identidad se verifica que $\tau \subseteq \beta_p$.

$\square$

Finalizamos esta sección demostrando el siguiente corolario.

Corolario 2.1.2 *Sean X, Y espacios Hausdorff completamente regulares y E un espacio normado. Sea $\phi : X \to Y$ continua.*

Entonces la aplicación canónica $T_\phi : (C_b\,(Y,E)\,,\beta_p) \to (C_b\,(X,E)\,,\beta_p)$ definida por $T_\phi(f) = f o \phi$ es continua.

Demostración:

Sea $\tilde{\phi} : \beta X \to \beta Y$ la única extensión continua de ϕ a la compactificación Stone-Cech de X y de Y, respectivamente. Sea $D_0 \in \mathcal{D}(\beta Y)$. Tenemos que $D = \tilde{\phi}^{-1}(D_0) \in \mathcal{D}(\beta X)$.

En efecto, como D_0 es un conjunto distinguido de $\beta Y - Y$, existe un función continua f de βY a algún espacio métrico separable tal que $D_0 = f^{-1}(f(D_0))$.

Luego $D = \tilde{\phi}^{-1}(f^{-1}(f(D_0))) = (f \circ \tilde{\phi})^{-1}(f(D_0))$.

Por otra parte $\tilde{\phi}(D) \subseteq D_0$. Entonces $(f \circ \tilde{\phi})(D) \subseteq f(D_0)$. Con lo cual $(f \circ \tilde{\phi})^{-1}((f \circ \tilde{\phi})(D)) \subseteq (f \circ \tilde{\phi})^{-1}(f(D_0)) = D$.

Además $D \subseteq (f \circ \tilde{\phi})^{-1}((f \circ \tilde{\phi})(D))$. De ambas contenciones se tiene que $(f \circ \tilde{\phi})^{-1}((f \circ \tilde{\phi})(D)) = D$.

Como $f \circ \tilde{\phi}$ es continua de βX a un espacio métrico separable y D yace en $\beta X - X$, se concluye que D es distinguido de $\beta X - X$.

A continuación mostramos que $T_\phi : (C_b(Y, E), \beta_{D_0}) \to (C_b(X, E), \beta_D)$ es una aplicación continua.

Por el Corolario 2.1.1 es suficiente mostrar la continuidad de T_ϕ restringida a los conjuntos acotados en norma de $(C_b(Y, E), \beta_{D_0})$. Sin pérdida de generalidad sólo consideraremos las bolas B_r, de $C_b(Y, E)$ centradas en 0 y con radio $r > 0$.

Sea $r > 0$ fijo y sea f_α una red en B_r tal que $f_\alpha \overset{\beta_{D_0}|_{B_r}}{\longrightarrow} 0$. Por el Lema 2.1.1 sabemos que β_{D_0} induce sobre B_r la misma topología de subespacio que la que induce la topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos de $\beta Y - D_0$.

Por tanto, para toda red f_α de B_r se verifica que $f_\alpha \overset{\beta_{D_0}}{\to} 0$ si y sólo si $\widetilde{||f_\alpha||} \to 0$ uniformemente sobre los subconjuntos compactos de $\beta Y - D_0$.

Por otra parte, $\widetilde{||f_\alpha \circ \phi||} = \widetilde{||f_\alpha||} \circ \widetilde{\phi}$ es una red que converge uniformemente sobre conjuntos compactos de $\beta X - D$, pues $\widetilde{\phi}$ lleva un compacto de $\beta X - D$ a un compacto de $\beta Y - D_0$.

Con este resultado y dado que $f_\alpha \circ \phi$ es una red de la bola S_r, en $C_b(X, E)$ centrada en 0 con radio r, se concluye que $f_\alpha \circ \phi \overset{\beta_D|S_r}{\to} 0$. Por tanto T_ϕ es $\beta_{D_0} - \beta_D$ continua sobre B_r. Dado que r fue tomado de manera arbitraria se concluye la $\beta_{D_0} - \beta_D$ continuidad de T_ϕ.

También sabemos que β_p es menos fina que β_D, luego T_ϕ es $\beta_{D_0} - \beta_p$ continua.

Finalmente, recordemos que $D_0 \in \mathcal{D}(\beta Y)$ fue tomado de manera arbitraria, por tanto T_ϕ es $\beta_p - \beta_p$ continua.

$\square$

2.2. Solidez de β_p

Teorema 2.2.1 $(C_b(X, E), \beta_p)$ *tiene una base local de vecindades absolutamente convexas y sólidas.*

Para demostrar este teorema es necesario probar el siguiente lema.

Lema 2.2.1 *Si* $\mu \in (C_b(X, E), ||.||)'$, *la aplicación* $\lambda_\mu : C_b(X)^+ \to [0, +\infty)$ *dada por* $\lambda_\mu(f) = sup\{|\mu(h)| : h \in C_b(X, E), ||h|| \leq f\}$, *es aditiva, homogéneamente positiva y monótona.*

Demostración:

- **Aditividad**

Sean $f, g \in C_b(X)^+$. Sea $h \in C_b(X, E)$ tal que $||h|| \leq f + g$. Para todo $x \in X$ $\dfrac{||h(x)||}{f(x)+g(x)} \leq 1$, por lo cual $\dfrac{||h(x)||f(x)}{f(x)+g(x)} \leq f(x)$ e igualmente $\dfrac{||h(x)||g(x)}{f(x)+g(x)} \leq g(x)$, para todo $x \in X$.

Luego, $\left\|\dfrac{hf}{f+g}\right\| \leq f$ y $\left\|\dfrac{hg}{f+g}\right\| \leq g$. De la definición de λ_μ tenemos que $\left|\mu\left(\dfrac{hf}{f+g}\right)\right| \leq \lambda_\mu(f)$ y $\left|\mu\left(\dfrac{hg}{f+g}\right)\right| \leq \lambda_\mu(g)$.

Además $\mu(h) = \mu\left(\dfrac{hf}{f+g}\right) + \mu\left(\dfrac{hg}{f+g}\right)$. Aplicando valor absoluto y de las desigualdades anteriores obtenemos $|\mu(h)| \leq \lambda_\mu(f) + \lambda_\mu(g)$.

Tomando supremo sobre h se concluye que $\lambda_\mu(f+g) \leq \lambda_\mu(f) + \lambda_\mu(g)$.

Para la otra desigualdad sea $\varepsilon > 0$ y sean h_1, h_2 en $C_b(X, E)$ tales que:

$\|h_1\| \leq f$, $\|h_2\| \leq g$, $\lambda_\mu(f) < |\mu(h_1)| + \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $\lambda_\mu(g) < |\mu(h_2)| + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Con esto tenemos que $\|h_1 + h_2\| \leq \|h_1\| + \|h_2\| \leq f + g$ y por tanto $|\mu(h_1 + h_2)| \leq \lambda_\mu(f+g)$. Similarmente $|\mu(h_1 - h_2)| \leq \lambda_\mu(f+g)$.

Por otra parte $\lambda_\mu(f) + \lambda_\mu(g) < |\mu(h_1)| + |\mu(h_2)| + \varepsilon$. De aquí tenemos los siguientes casos:

1. $\mu(h_1), \mu(h_2) \geq 0$
   $\lambda_\mu(f) + \lambda_\mu(g) < \mu(h_1) + \mu(h_2) + \varepsilon = \mu(h_1 + h_2) + \varepsilon \leq \lambda_\mu(f+g) + \varepsilon.$

2. $\mu(h_1), \mu(h_2) < 0$

   $\lambda_\mu(f) + \lambda_\mu(g) < -\mu(h_1) - \mu(h_2) + \varepsilon = -\mu(h_1 + h_2) + \varepsilon$

   $\leq \lambda_\mu(f + g) + \varepsilon.$

3. $\mu(h_1) \geq 0, \mu(h_2) < 0$

   $\lambda_\mu(f) + \lambda_\mu(g) < \mu(h_1) - \mu(h_2) + \varepsilon = \mu(h_1 - h_2) + \varepsilon \leq \lambda_\mu(f + g) + \varepsilon.$

En cualquier caso se obtiene $\lambda_\mu(f) + \lambda_\mu(g) < \lambda_\mu(f + g) + \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Por tanto $\lambda_\mu(f) + \lambda_\mu(g) \leq \lambda_\mu(f + g)$.

- **Homogeneidad**

Si $\alpha = 0$ la igualdad es inmediata pues $\lambda_\mu(0) = 0$.

Sean $f \in C_b(X)^+$ y $\alpha > 0$. Sea $h \in C_b(X, E)$ tal que $||h|| \leq \alpha f$. Luego $\left\|\dfrac{h}{\alpha}\right\| \leq f$ y así $\left|\mu\left(\dfrac{h}{\alpha}\right)\right| \leq \lambda_\mu(f)$. Por tanto $|\mu\,(h)| \leq \alpha\lambda_\mu(f)$.

Tomando supremo sobre h se concluye que $\lambda_\mu(\alpha f) \leq \alpha\lambda_\mu(f)$.

Para la otra desigualdad tomemos $h \in C_b(X, E)$ tal que $||h|| \leq f$. Para $\alpha > 0$ obtenemos $||\alpha h|| \leq \alpha f$ y así $|\mu\,(\alpha h)| \leq \lambda_\mu(\alpha f)$. Dado que μ es lineal nos queda que $|\mu\,(h)| \leq \dfrac{\lambda_\mu(\alpha f)}{\alpha}$.

Tomando supremo sobre h se concluye que $\alpha\lambda_\mu(f) \leq \lambda_\mu(\alpha f)$.

- **Monotonía**

Sean $f, g \in C_b(X)^+$ tal que $f \leq g$. Sea $h \in C_b(X, E)$ tal que $||h|| \leq f$. Entonces $||h|| \leq g$.

Esto implica que $\{h \in C_b(X,E) : ||h|| \leq f\} \subseteq \{h \in C_b(X,E) : ||h|| \leq g\}$.

Luego, el supremo tomado sobre el primer conjunto es menor o igual que el del segundo. Por tanto $\lambda_\mu(f) \leq \lambda_\mu(g)$.

Demostración del Teorema 2.2.1:

Es suficiente mostrar que toda β_p-vecindad en $C_b(X,E)$ contiene una β_p-vecindad absolutamente convexa y sólida.

Consideremos una β_D-vecindad en $C_b(X,E)$, con $D \in \mathcal{D}(\beta X)$, dada por $V_D = \left\{ f \in C_b(X,E) : \underset{x \in \beta X}{sup} \left(\widetilde{||f||}(x) |h_D(x)| \right) \leq 1 \right\}$.

Notemos que V_D es una vecindad sólida pues si $f \in V_D$ y $g \in C_b(X,E)$ tal que $\|g\| \leq \|f\|$, entonces $g \in V_D$.

Definamos $V = \bigcup_{D \in \mathcal{D}(\beta X)} V_D$. Consideremos el conjunto polar $V^\circ = \bigcap V_D^\circ$ respecto a la dualidad entre $(C_b(X,E), \beta_p)$ y $(C_b(X,E), \beta_p)'$.

Empleando el lema precedente, vamos a demostrar que $\mu \in V^\circ$ si y sólo si $\lambda_\mu(\|g\|) \leq 1$, para cada $g \in V_D$, para cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$.

- En efecto, $\mu \in V^\circ$ si y sólo si $\mu \in V_D^\circ$, para todo $D \in \mathcal{D}(\beta X)$. Esto equivale a que $|\mu(f)| \leq 1$; para toda $f \in V_D$; para todo $D \in \mathcal{D}(\beta X)$.

  Sea $D \in \mathcal{D}(\beta X)$, sea $g \in V_D$ y sea $h \in C_b(X,E)$ tal que $\|h\| \leq \|g\|$. Por la solidez de V_D se tiene que $h \in V_D$. De la hipótesis tenemos que $|\mu(h)| \leq 1$. Tomando el supremo sobre h se concluye que $\lambda_\mu(\|g\|) \leq 1$.

- Recíprocamente, supongamos que $\lambda_\mu(\|g\|) \leq 1$, para cada $g \in V_D$ y para cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$. Puesto que $\|g\| \leq \|g\|$, $|\mu(g)| \leq \lambda_\mu(\|g\|) \leq 1$, para cada $g \in V_D$ y para cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$.

  Por definición de conjunto polar, $\mu \in V_D^\circ$, para cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$. Así, $\mu \in V^\circ$.

Con V° construimos el conjunto

$$W = \{f \in C_b(X, E) : \lambda_\mu(\|f\|) \leq 1 \textit{ para todo } \mu \in V^\circ\}.$$

Por la propiedades de λ_μ demostradas en el lema precedente, se verifica que W es convexo, equilibrado y localmente sólido.

Ahora mostramos que W también contiene a V y es subconjunto de $V^{\circ\circ}$.

- En efecto, sea $f \in V$. Entonces $f \in V_D$ para algún D. Sea $\mu \in V^\circ$. Por lo mostrado anteriormente $\lambda_\mu(\|f\|) \leq 1$. Como μ fue arbitrario se concluye que $f \in W$.

- Recordemos que $V^{\circ\circ} = \{f \in C_b(X, E) : |\mu(f)| \leq 1 \textit{ para todo } \mu \in V^\circ\}$.

  Sea $f \in W$. Entonces $\lambda_\mu(\|f\|) \leq 1$ para todo $\mu \in V^\circ$. Nuevamente, puesto que $\|f\| \leq \|f\|$ tenemos que $|\mu(f)| \leq \lambda_\mu(\|f\|) \leq 1$, para todo $\mu \in V^\circ$. Por tanto $f \in V^{\circ\circ}$.

Ahora consideremos una β_p-vecindad Ω en $C_b(X, E)$, absolutamente convexa y cerrada. Puesto que Ω contiene un β_p-abierto, entonces Ω también es una β_D-vecindad, para todo $D \in \mathcal{D}(\beta X)$. Por tanto, para cada D, existe una vecindad de la forma V_D contenida en Ω.

Con estas vecindades V_D se construye W de acuerdo al procedimiento descrito y así tenemos que $V \subseteq W \subseteq V^{\circ\circ}$. Luego $V^{\circ\circ} \subseteq \Omega^{\circ\circ}$ y dado que Ω es absolutamente convexo y cerrado, se tiene que $\Omega = \Omega^{\circ\circ}$.

Por lo expuesto tenemos que $V \subseteq W \subseteq \Omega$. La inclusión $V \subseteq W$ indica que W es una β_D-vecindad, para todo $D \in \mathcal{D}(\beta X)$ y por tanto W es una β_p-vecindad.

Con esto probamos que toda β_p-vecindad Ω en $C_b(X,E)$ contiene una β_p-vecindad W, absolutamente convexa y sólida.

Consecuentemente $(C_b(X,E), \beta_p)$ es localmente sólido.

$\square$

2.3. Convergencia en β_p

Teorema 2.3.1 *Sea $\{f_\alpha\}$ una red en $C_b(X,E)$. $f_\alpha \to 0$ en β_p de $C_b(X,E)$ si y sólo si $\|f_\alpha\| \to 0$ en β_p de $C_b(X)$.*

Demostración:

- Supongamos que la red $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X,E), \beta_p)$. Hay que mostrar que $\|f_\alpha\| \to 0$ en $(C_b(X), \beta_p)$.

  Sea W una β_p-vecindad absolutamente convexa y sólida en $C_b(X)$. De lo mostrado al inicio del capítulo sabemos que para cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$ existe una $h_D \in B_D(X)$ tal que

$$W = \mathbf{abco}\left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}(\beta X)} \left\{ g \in C_b(X) : \sup_{x \in \beta X} (\widetilde{|g|}(x)|h_D(x)|) \leq 1 \right\} \right)$$

$$W \supseteq \bigcup_{D \in \mathcal{D}(\beta X)} \mathbf{abco} \left\{ g \in C_b(X) : \sup_{x \in \beta X} (\widetilde{|g|}(x)|h_D(x)|) \leq 1 \right\}.$$

Con cada una de las h_D construyamos los conjuntos
$V_D = \textbf{abco}\left\{g \in C_b(X,E) : \sup_{x\in\beta X} (\widetilde{||g||}(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}$

lo cual permite definir la β_p-vecindad, absolutamente convexa y sólida, en $C_b(X,E)$ dada por:

$$V = \textbf{abco} \bigcup_{D\in\mathcal{D}(\beta X)} V_D$$

$$V = \textbf{abco}\left(\bigcup_{D\in\mathcal{D}(\beta X)} \left\{g \in C_b(X,E) : \sup_{x\in\beta X} (\widetilde{||g||}(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}\right).$$

Se afirma que si $f \in V$, entonces $\|f\| \in W$.

En efecto, si $f \in V$ existe algún D tal que $f \in V_D$, por tanto existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y $g_i \in \left\{g \in C_b(X,E) : \sup_{x\in\beta X} (\widetilde{||g||}(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}$; $1 \leq i \leq n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, tales que $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ y $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1$.

Además $\sup_{x\in\beta X} (\widetilde{||g_i||}(x)|h_D(x)|) \leq 1$. Notemos que esto implica que $||g_i|| \in \left\{g \in C_b(X) : \sup_{x\in\beta X} (\widetilde{|g|}(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}$; para todo $1 \leq i \leq n$, por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\|g_i\| \in \textbf{abco}\left\{g \in C_b(X) : \sup_{x\in\beta X} (\widetilde{|g|}(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}$. Es importante observar que este último conjunto es sólido.

De lo expuesto tenemos que $\|f\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\|g_i\|$ y por la observación precedente $\|f\| \in \textbf{abco}\left\{g \in C_b(X) : \sup_{x\in\beta X} (\widetilde{|g|}(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}$. Por lo tanto $\|f\| \in W$.

Como consecuencia de esto tenemos que dada la β_p-vecindad W en $C_b(X)$, hemos construido la β_p-vecindad V en $C_b(X,E)$ y por la hipótesis sabemos que para V existe un índice α_0 tal que $f_\alpha \in V$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Por tanto $\|f_\alpha\| \in W$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Esto prueba que $\|f_\alpha\| \to 0$ en $(C_b(X), \beta_p)$.

- Recíprocamente, supongamos que $\|f_\alpha\| \to 0$ en $(C_b(X), \beta_p)$. Debemos mostrar que $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X,E), \beta_p)$.

Sea V una β_p-vecindad absolutamente convexa y sólida en $C_b(X,E)$. Para cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$ existe una $h_D \in B_D(X)$ tal que

$$V = \textbf{abco}\left(\bigcup_{D\in\mathcal{D}(\beta X)} \left\{g \in C_b(X,E) : \sup_{x\in\beta X} (\widetilde{\|g\|}(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}\right).$$

Similar al procedimiento anterior, con estas h_D construimos los conjuntos $W_D = \textbf{abco}\left\{g \in C_b(X) : \sup_{x\in\beta X} (\widetilde{|g|}(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}$, con los cuales se define la β_p-vecindad, absolutamente convexa y sólida, en $C_b(X)$ dada por $W = \textbf{abco} \bigcup_{D\in\mathcal{D}(\beta X)} W_D$.

A continuación mostraremos que si $\|f_\alpha\| \to 0$ en $(C_b(X), \beta_p)$, entonces $\|f_\alpha\| \otimes e \to 0$ en $(C_b(X,E), \beta_p)$, con $e \in E$ tal que $\|e\| = 1$.

Se afirma que si $\|f\| \in W$ entonces $\|f\| \otimes e \in V$.

En efecto, $\|f\| \in W$ implica que $\|f\| \in \textbf{abco} \bigcup_{D\in\mathcal{D}(\beta X)} W_D$, es decir,
$\|f\| \in \textbf{abco}\bigcup\left\{g \in C_b(X) : \sup_{x\in\beta X} (\widetilde{|g|}(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}$.

Por tanto existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y $g_i \in \left\{g \in C_b(X) : \sup_{x\in\beta X} (\widetilde{|g|}(x)|h_{D_i}(x)|) \leq 1\right\}$; $1 \leq i \leq n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, tales que $\|f\| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ y $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1$.

Es decir, $\|f\| \otimes e = (\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i) \otimes e = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \otimes e$.

Esto implica que $\|f\| \otimes e$ es una combinación absolutamente convexa de las funciones $g_i \otimes e$, tales que $\|g_i \otimes e\| = |g_i|$, por tanto ellas pertenecen a

$\left\{g \in C_b(X,E) : \underset{x \in \beta X}{sup}\,(\widetilde{\|g\|}(x)|h_{D_i}(x)|) \leq 1\right\}$. Así,

$\|f\| \otimes e \in \mathbf{abco} \bigcup \left\{g \in C_b(X,E) : \underset{x \in \beta X}{sup}\,(\widetilde{\|g\|}(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\}$ y por tanto a V.

Como consecuencia de esto tenemos que dada la β_p-vecindad V en $C_b(X,E)$, hemos construido la β_p-vecindad W en $C_b(X)$ y por la hipótesis sabemos que para W existe un índice α_0 tal que $\|f_\alpha\| \in W$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Por tanto $\|f_\alpha\| \otimes e \in V$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Ahora notemos que $\|f_\alpha\| \leq \| \, \|f_\alpha\| \otimes e \, \|$ y como V es sólida, $f_\alpha \in V$, para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Esto prueba que $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X,E), \beta_p)$.

□

A partir de este teorema se demuestra el siguiente corolario.

Corolario 2.3.1 *En $C_b(X,E)$:*

1. $\beta_0 \leq \beta_p \leq \beta_1$.

2. β_p *y* $\|.\|$ *poseen los mismos conjuntos acotados.*

Demostración:

1. Mostramos cada desigualdad.

   - $\beta_0 \leq \beta_p$
     Sea f_α una red arbitraria tal que $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X,E), \beta_p)$.
     Del teorema anterior se tiene que $\|f_\alpha\| \to 0$ en $(C_b(X), \beta_p)$. Cuando $E = \mathbb{R}$ es conocido que $\beta_0 \leq \beta_p$ (Koumoullis, [**9** p. 470]), por tanto

$\|f_\alpha\| \to 0$ en $(C_b(X),\beta_0)$. En (Khurana, [**11** Lema 2.4]) se muestra el resultado del teorema anterior para β_0. Por tanto $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X,E),\beta_0)$. Así $\beta_0 \leq \beta_p$.

- $\beta_p \leq \beta_1$

  Sea f_α una red arbitraria tal que $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X,E),\beta_1)$. De Khurana, el resultado del teorema anterior es válido para β_1. Por tanto $\|f_\alpha\| \to 0$ en $(C_b(X),\beta_1)$. Cuando $E=\mathbb{R}$ es conocido que $\beta_p \leq \beta_1$ (Koumoullis, [**9** p. 470]), por tanto $\|f_\alpha\| \to 0$ en $(C_b(X),\beta_p)$. Del Teorema anterior se tiene que $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X,E),\beta_p)$. Así $\beta_p \leq \beta_1$.

2. De (Khurana, [**11** Teorema 1.1]) sabemos que β_0 y $\|.\|$ tienen los mismos conjuntos acotados en $C_b(X,E)$. Por la parte (1), $\beta_0 \leq \beta_p \leq \beta_1 \leq \|.\|$. Así, todas estas topologías tienen los mismos conjuntos acotados en $C_b(X,E)$.

$\square$

2.4. Dual de $(C_b(X,E),\beta_p)$

En esta sección daremos condiciones suficientes bajo las cuales el dual de $C_b(X,E)$, provisto de la topología perfecta β_p, es el espacio de medidas perfectas $M_p(X,E')$, el cual fue definido en el Capítulo 1.

Además de los resultados mostrados en secciones anteriores, necesitamos demostrar el siguiente teorema y lema, respectivamente.

Teorema 2.4.1 *Para cada $\mu \in M_p(X,E')$, $|\mu| \in M_p(X)$.*

Demostración:

De acuerdo a las propiedades de los espacios de medidas presentadas en el Capítulo 1, es suficiente mostrar que $\widetilde{|\mu|}^*(D) = 0$ para todo $D \in \mathcal{D}(\beta X)$.

Sea D un conjunto distinguido de $\beta X - X$. De la definición de medida interior se tiene que $\widetilde{|\mu|}^*(D) = inf\left\{\widetilde{|\mu|}(V) : D \subseteq V,\, V\, Baire\, set\, en\, \beta X\right\}$. Escojamos un conjunto de Baire V_0 tal que $\widetilde{|\mu|}^*(D) = \widetilde{|\mu|}(V_0)$ y tal que para todo conjunto de Baire $B \subseteq V_0 - D$ se tiene que $\widetilde{|\mu|}(B) = 0$.

En este caso y considerando cualquier $e \in E$ tal que $\|e\| \leq 1$, sabemos que $|\mu_e| \leq |\mu|$, por lo tanto $\widetilde{|\mu_e|} \leq \widetilde{|\mu|}$. Así tenemos que $\widetilde{|\mu_e|}(B) = 0$, para todo conjunto de Baire $B \in V_0 - D$.

Por otra parte $\mu_e \in M_p(X)$ y por tanto $|\mu_e| \in M_p(X)$. Consecuentemente $|\mu_e|$ es $\sigma-$aditiva. Esto equivale a que $\widetilde{|\mu_e|}(Q) = 0$, para todo conjunto de Baire $Q \in \beta X - X$.

Luego, $\widetilde{|\mu_e|}(V_0) = sup\left\{\widetilde{|\mu_e|}(Z) : Z \subseteq V_0,\, Z\, zero\, set\, en\, \beta X\right\} = 0$, pues el zero set Z puede estar en D o en $V_0 - D$ y en cualquier caso $\widetilde{|\mu_e|}(Z) = 0$.

Por las propiedades de extensión sabemos que $|\mu_e|\,(V_0 \cap X) = \widetilde{|\mu_e|}(V_0)$. Así $|\mu_e|\,(V_0 \cap X) = 0$, para todo $e \in E$ tal que $\|e\| \leq 1$.

Afirmamos que $|\mu|\,(V_0 \cap X) = 0$. En efecto, por definición:

$|\mu|\,(V_0 \cap X)$

$$= sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \|\mu(V_i)\| : V_i \in Ba^*(X), V_0 \cap X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} V_i\right\}.$$

$$= sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \sup_{\|e\| \leq 1} |\mu(V_i)(e)| : V_i \in Ba^*(X), V_0 \cap X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} V_i\right\}.$$

$$= sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \sup_{\|e\|\leq 1} |\mu_e(V_i)| : V_i \in Ba^*(X), V_0 \cap X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} V_i\right\}.$$

Puesto que cada V_i está contenido en $V_0 \cap X$, $|\mu_e|(V_i) \leq |\mu_e|(V_0 \cap X) = 0$. De aquí se concluye que $|\mu|(V_0 \cap X) = 0$. Por tanto, $\widetilde{|\mu|}(V_0) = 0$.

Luego, $\widetilde{|\mu|}^*(D) = 0$. Como D fue arbitrario, $|\mu|$ es medida perfecta.

□

Lema 2.4.1 *Si $e \in E$, entonces la aplicación $T : (C_b(X), \beta_p) \to (C_b(X,E), \beta_p)$ definida por $T(f) = f \otimes e$, es continua.*

Demostración:

Por definición $f \otimes e : \begin{array}{ccc} X & \to & E \\ x & \mapsto & f(x)e \end{array}$.

Si $e = 0$ tenemos que $f \otimes e$ es la función nula para toda $f \in C_b(X)$. Por tanto T es continua.

Supongamos $e \neq 0$. Sea f_α una red en $C_b(X)$ tal que $f_\alpha \overset{\beta_p}{\to} 0$. Ahora mostramos que $T(f_\alpha) \to 0$ en $(C_b(X,E), \beta_p)$.

Sea Ω una β_p-vecindad en $(C_b(X,E), \beta_p)$. Para algún $D \in \mathcal{D}(\beta X)$ y alguna $h_D \in B_D$ se tiene que el conjunto $W_D = \textbf{abco}\left\{g \in C_b(X,E) : \sup_{x\in\beta X}(\widetilde{\|g\|}(x)|h_D(x)|) \leq 1\right\} \subseteq \Omega$.

Para esta h_D definimos una β_p-vecindad Ω_0 en $C_b(X)$, dada por:

$$\Omega_0 = \textbf{abco}\left\{g \in C_b(X) : \sup_{x\in\beta X}(\widetilde{|g|}(x)|h_D(x)|) \leq \frac{1}{\|e\|}\right\}.$$

Como $f_\alpha \stackrel{\beta_p}{\to} 0$, dada Ω_0 existe α_0 tal que $f_\alpha \in \Omega_0$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Es decir, $\sup\limits_{x \in \beta X} (\widetilde{|f_\alpha|}(x)|h_D(x)|) \leq \dfrac{1}{\|e\|}$ ó $\sup\limits_{x \in \beta X} (\widetilde{|f_\alpha|}(x)\|e\||h_D(x)|) \leq 1$.

Esto último implica que $f_\alpha \otimes e \in \Omega$. Luego $T(f_\alpha) \to 0$ en $(C_b(X,E), \beta_p)$.

$\square$

Con estos resultados demostramos el siguiente teorema.

Teorema 2.4.2 *Si $C_b(X) \otimes E$ es denso en $(C_b(X,E), \beta_p)$, entonces:*

1. *Para toda $\mu \in M_p(X,E')$, $\mathcal{L}_1(\mu, X, E) \supseteq C_b(X,E)$.*

2. *$(C_b(X,E), \beta_p)' = M_p(X,E')$.*

3. *Para $F \in (C_b(X,E), \beta_p)'$ relacionado con su correspondiente $\mu \in M_p(X,E')$, se tiene que $F(f) = \mu(f)$, para toda $f \in C_b(X,E)$.*

Demostración:

1. Sea $\mu \in M_p(X,E')$. Por Teorema 2.4.1 sabemos que $|\mu| \in M_p(X) \subseteq M_\sigma$ y de lo expuesto en el Capítulo 1, induce el espacio seminormado $(\mathcal{L}_1, |\mu|(\|f\|))$.

   Sea $f \in C_b(X,E)$. Por hipótesis $C_b(X) \otimes E$ es denso en $(C_b(X,E), \beta_p)$ y por tanto existe una red $f_\alpha \in C_b(X) \otimes E$ tal que $f_\alpha \to f$ en $(C_b(X,E), \beta_p)$, con lo cual $f_\alpha - f \to 0$ en $(C_b(X,E), \beta_p)$.

   Del Teorema 2.3.1 tenemos que $\|f_\alpha - f\| \to 0$ en $(C_b(X), \beta_p)$ y por lo tanto $|\mu|(\|f_\alpha - f\|) \to 0$. Esto implica que $f_\alpha \to f$ en el espacio seminormado $(P, |\mu|(\|f\|))$ y de lo expuesto en el Capítulo 1 sabemos que $C_b(X) \otimes E$ es denso en $(\mathcal{L}_1, |\mu|(\|f\|))$. De esto se tiene que $f \in \mathcal{L}_1$.

2. Sea $\mu \in M_p(X,E')$. Por la parte (1) se tiene que $\widetilde{\lambda_\mu}$ está definida para toda $f \in C_b(X,E)$. Llamemos F_μ la restricción de $\widetilde{\lambda_\mu}$ sobre $C_b(X,E)$. Sea una red $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X,E),\beta_p)$. Entonces $\|f_\alpha\| \to 0$ en $(C_b(X),\beta_p)$ y así $|\mu|(\|f_\alpha\|) \to 0$.

   Puesto que $\left|\widetilde{\lambda_\mu}(f)\right| \leq |\mu|(\|f\|)$ se tiene que $|F_\mu(f_\alpha)| \to 0$. Esto implica que $F_\mu \in (C_b(X,E),\beta_p)'$.

   Inversamente, sea $F \in (C_b(X,E),\beta_p)'$. Esto implica que F es continuo con la topología de la norma sobre $C_b(X,E)$. Para $e \in E$ definamos la aplicación $F_e : C_b(X) \to \mathbb{R}$ definida por $F_e(f) = F(f \otimes e)$. Ahora mostramos que esta aplicación es β_p-continua.

   En efecto, sea la red $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X),\beta_p)$, por el lema precedente se tiene que $f_\alpha \otimes e \to 0$ en $(C_b(X,E),\beta_p)$. De la β_p-continuidad de F se verifica que $F(f_\alpha \otimes e) \to 0$. Esto prueba que F_e es β_p-continua.

   Ahora, como $F_e \in (C_b(X),\beta_p)'$ puede identificarse con una única medida $\mu_e : Ba^*(X) \to \mathbb{R} \in M_p(X)$ tal que $\|F_e\| = \|\mu_e\|$, definamos una medida $\mu \in M_p(X,E')$ de la siguiente forma:

   Sea $\mu : Ba^*(X) \to E'$ dada por $\mu(A) : E \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(A)(x) = \mu_x(A)$.

   Notemos que $\mu(A)$ es lineal pues $\mu_{x+y} = \mu_x + \mu_y$ y $\mu_{\alpha x} = \alpha\mu_x$. Esto se deduce dado que $F_{x+y} = F_x + F_y$, $F_{\alpha x} = \alpha F_x$ y de la correspondencia biunívoca entre F_x y μ_x; $x,y \in E; \alpha \in \mathbb{R}$.

   Para la continuidad de $\mu(A)$ tenemos que:
   $|\mu(A)(x)| = |\mu_x(A)| = |\mu_x|(A) \leq \|\mu_x\| = \|F_x\| \leq \|F\|\|x\|$

Finalmente mostramos que μ satisface ser una medida en el sentido de Schuchat, es decir, la aplicación $\lambda_\mu : S(X, Ba^*(X), E) \to \mathbb{R}$ es continua con la topología de la convergencia uniforme sobre $S(X, Ba^*(X), E)$.

Como $F : C_b(X, E) \to \mathbb{R}$ es norma continuo, su restricción sobre $C_b(X) \otimes E$ también lo es. Del Capítulo 1, $C_b(X) \otimes E \subseteq B(X, Ba^*(X), E)$ y la restricción puede extenderse sobre $B(X, Ba^*(X), E)$.

De aquí, haciendo la restricción sobre $S(X, Ba^*(X), E)$ se concluye que λ_μ es continua.

3. De (2) sabemos que $F \in (C_b(X, E), \beta_p)'$ induce una medida $\mu \in M_p(X, E')$. Ahora esta medida induce un funcional $\Phi \in (C_b(X, E), \beta_p)'$. Se afirma que $F(f) = \Phi(F)$ para toda $f \in C_b(X, E)$.

De la hipótesis $C_b(X) \otimes E$ es β_p-denso en $C_b(X, E)$, así basta que F y Φ sean iguales en $C_b(X) \otimes E$ para concluir su igualad en $C_b(X, E)$.

Sea $f \otimes e \in C_b(X) \otimes E$. Como $(\mathcal{L}_1, |\mu|(\|f\|))$ contiene a $S(X, Ba^*(X), E)$ y a $C_b(X) \otimes E$ como subespacios densos, existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ en $S(X, Ba^*(X), E)$ tal que $\varphi_n \to f \otimes e$. Del Capítulo 1 tenemos:

$$F(f \otimes e) = \int_X f \otimes e \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \lambda_\mu(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\lambda_\mu}(\varphi_n)$$

$$= \widetilde{\lambda_\mu}(\lim_{n\to\infty} \varphi_n) = \widetilde{\lambda_\mu}(f \otimes e) = \Phi(f \otimes e).$$

$\square$

2.5. Otras propiedades topológicas de β_p

2.5.1. Condiciones de normabilidad

Teorema 2.5.1 *Sea X espacio completamente regular Hausdorff y E un espacio de Banach. Las siguientes son equivalentes:*

1. *X es pseudocompacto.*
2. *$\beta_p = \|.\|$.*
3. *$(C_b(X,E),\beta_p)$ es normable.*
4. *$(C_b(X,E),\beta_p)$ es metrizable.*
5. *$(C_b(X,E),\beta_p)$ es bornológico.*
6. *$(C_b(X,E),\beta_p)$ es tonelado.*

Demostración:

- $(1) \to (2)$.
  Son resultados conocidos que X es un espacio pseudocompacto si y sólo si todo conjunto zero set no vacío en βX interseca a X (Gillman, [**5** p. 95]) y que todo conjunto distinguido es la unión de zero sets (Wheeler, [**23** Definición 7.10]).

  De esto se deduce que si X es pseudocompacto, el único distinguido de $\beta X - X$ es el conjunto vacío.

  En este caso $\|.\| \leq \beta_D = \beta_p$ pues dada una bola B_r es suficiente construir una β_D-vecindad tomando h_D como la función constante 1 en βX. Así $\|.\| = \beta_p$.

- $(2) \to (1)$.
  Consideremos $e \in E$ tal que $\|e\| = 1$.

Del Lema 2.4.1 la aplicación $T : (C_b(X), \beta_p) \to (C_b(X, E), \beta_p)$ dada por $T(f) = f \otimes e$, es continua. Esto implica que dada una red $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X), \beta_p)$ entonces $f_\alpha \otimes e \to 0$ en $(C_b(X, E), \beta_p)$.

Por hipótesis $\beta_p = \|.\|$ en $C_b(X, E)$ y así $f_\alpha \otimes e \to 0$ en $(C_b(X, E), \|.\|)$. Con esto $\|f_\alpha \otimes e\|_\infty \to 0$ y esto equivale a $\|f_\alpha\|_\infty \to 0$ en $(C_b(X), \|.\|)$. Esto implica que $\|.\| \leq \beta_p$ y así $\|.\| = \beta_p$ en $C_b(X)$.

Consecuentemente $(C_b(X), \|.\|)' = (C_b(X), \beta_p)'$, esto es, $M(X) = M_p(X)$ y por tanto X es pseudocompacto (Wheeler, [**23** Teorema 8.1]).

- (2) $\to$ (3) $\to$ (4) $\to$ (5) son resultados topológicos conocidos.

- (5) $\to$ (2).
  Sea $Id : (C_b(X, E), \beta_p) \to (C_b(X, E), \|.\|)$ la aplicación identidad. Del Corolario 2.3.1 β_p y $\|.\|$ tienen los mismos conjuntos acotados y por tanto Id es acotada. Como $(C_b(X, E), \beta_p)$ es bornológico se concluye que Id es continua y así $\|.\| \leq \beta_p$.

- (2) $\to$ (6).
  Puesto que $(C_b(X, E), \beta_p) = (C_b(X, E), \|.\|)$ y E es Banach, se tiene que $(C_b(X, E), \beta_p)$ es Banach, por tanto es tonelado.

- (6) $\to$ (2).
  Sea $B = \{f \in C_b(X, E) : \|f\| \leq 1\}$. Notemos que B es absolutamente convexo.
  Se afirma que B es β_p-cerrado.
  En efecto, si $f \in \overline{B}$ respecto a β_p, existe una red f_α en B tal que $f_\alpha \xrightarrow{\beta_p} f$.
  Puesto que $p \leq \beta_0 \leq \beta_p$ (Choo, [**3** p. 12]), donde p denota la topología de la convergencia puntual, tenemos que $f_\alpha - f \xrightarrow{p} 0$.

Luego $p_x(f_\alpha - f) = \|(f_\alpha - f)(x)\| \to 0$, para todo $x \in X$. Empleando desigualdad triangular obtenemos $\|f_\alpha(x)\| \to \|f(x)\|$, para todo $x \in X$. Esto implica que $\|f(x)\| = lim\|f_\alpha(x)\| \leq 1$, para todo $x \in X$. Por lo cual $\|f\| \leq 1$ y así $f \in B$.

Como B es absolutamente convexo y β_p cerrado, por definición es un tonel de $(C_b(X,E), \beta_p)$. De la hipótesis este espacio es tonelado y por tanto B es una β_p-vecindad. De esto se concluye que $\|.\| = \beta_p$.

$\square$

2.5.2. Condiciones Mackey y Mackey Fuerte

Lema 2.5.1 *Sea X un $P-$ espacio y sea E un espacio normado. Sean $F = C_b(X,E)$ y $F' = (C_b(X,E), \beta_p)'$. Si $C_b(X) \otimes E$ es β_p-denso en F y A es subconjunto de $(F', \sigma(F', F))$ relativamente contablemente compacto acotado en norma, entonces A es β_p-equicontinuo.*

Demostración:

Sea A un subconjunto de $(F', \sigma(F', F))$ relativamente contablemente compacto acotado en norma. Como X es un $P-$ espacio, del Capítulo 1 tenemos que νX también es $P-$ espacio y es topológicamente completo, por tanto $M_\tau(\nu X) = M_s(\nu X)$ (Wheeler [**24**, p. 469]), donde M_τ y M_s denotan los espacios de medidas $\tau-$aditivas y separables de $M(\nu X)$.

Por otra parte, $M_\tau(\nu X) = M_t(\nu X)$ (Wheeler [**24**, Teorema 2.1]).Usando el hecho que νX es realcompacto y del Capítulo 1, $\Theta(\nu X) = \nu(\nu X)$. Por (Wheeler [**23**, Teorema 8.20]) esto equivale a que $M_p(\nu X) \subseteq M_s(\nu X)$.

Por lo expuesto en estos párrafos, obtenemos que $M_p(\nu X) \subseteq M_t(\nu X)$. Puesto que la otra contención es conocida, se concluye que $M_p(\nu X) = M_t(\nu X)$. Con lo cual,

$M_p(\nu X, E') = M_t(\nu X, E')$. Luego, $(C_b(\nu X, E), \beta_0)' = (C_b(\nu X, E), \beta_p)'$.

Por (Choo, [**3** Teorema 5.9]), $(C_b(\nu X, E), \beta_0)$ es Mackey y por tanto $\beta_p \leq \beta_0$. Del Corolario 2.3.1 tenemos la otra desigualdad y esto implica que $\beta_0 = \beta_p$ en $C_b(\nu X, E)$. $\quad (a)$

Sea $i_\nu : X \to \nu X$ el embebimiento canónico y definamos la aplicación $T : (C_b(\nu X, E), \beta_p) \to (C_b(X, E), \beta_p)$ dada por $\hat{f} \mapsto \hat{f} \circ i_\nu$. Notemos que $\hat{f} \circ i_\nu = \hat{f}|_X$ y por el Corolario 2.1.2 tenemos que T es continua.

Sea $T^* : (C_b(X, E), \beta_p)' \to (C_b(\nu X, E), \beta_p)'$ el operador adjunto de T, dado por $\Phi \mapsto \hat{\Phi} \circ T$. Esto implica que $\mu \in M_p(X, E')$ se corresponde con una medida $\hat{\mu} \in M_p(\nu X, E')$.

Ahora, sabemos que X es embebido en νX y νX es embebido en βX, por tanto $\widetilde{|\hat{\mu}|} = \widetilde{|\mu|}$.

Esto implica que $\hat{A} = \{\hat{\mu}; \mu \in A\}$ es norma acotado pues tenemos que $|\hat{\mu}|\,(\nu X) = \widetilde{|\hat{\mu}|}(\beta X) = \widetilde{|\mu|}(\beta X) = |\mu|(X)$. Además, por la continuidad de T^*, $\hat{A}$ es $\sigma\left((C_b(\nu X, E), \beta_p)', C_b(\nu X, E)\right)$ relativamente contablemente compacto de $(C_b(\nu X, E), \beta_p)'$.

De (a) y de (Choo, [**3** Lema 5.8]) se concluye que $\hat{A}$ es conjunto β_0-equicontinuo de $(C_b(\nu X, E), \beta_0)'$.

En este mismo lema, Choo muestra que existe una sucesión creciente de conjuntos compactos $\{K_n; n \in \mathbb{N}\}$ de νX, tales que

$$|\hat{\mu}|\,(\nu X - K_n) < \frac{1}{(n+1)2^{n+1}};\ \text{para cada } \mu \in A.$$

También $|\hat{\mu}|\,(\nu X - K_n) = \widetilde{|\mu|}(\beta X - K_n)$ y los zero set's de $\beta X - X$ no cortan a νX (Koumoullis, [**9** p. 470]).

Por lo expuesto, si D es conjunto distinguido de $\beta X - X$, entonces D es conjunto distinguido de $\beta X - \nu X$.

Para D definamos $g_D : \beta X \to \mathbb{R}$ dada por $g_D = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}\chi_{(K_n - K_{n-1})}$.

Por construcción g_D es acotada y se anula en D. Esta última afirmación es cierta por cuanto D es disjunto con νX y $K_n \subseteq \nu X$; para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, se afirma que g_D se desvanece en el infinito. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Sea $x \in K_{n_0-1}^C$. Entonces $g_D(x)$ es 0 o $\frac{1}{n}$; $n \geq n_0$. En cualquier caso $g_D(x) < \varepsilon$. Esto implica que $K_{n_0-1}^C \subseteq \{x \in \beta X : g_D(x) < \varepsilon\}$.

Por tanto $\{x \in \beta X : g_D(x) \geq \varepsilon\} \subseteq K_{n_0-1}$.

Ahora definamos la β_D-vecindad en $C_b(X, E)$ dada por:

$$V = \left\{ f \in C_b(X, E) : \sup_{x \in \beta X} \left(\widetilde{\|f\|} g_D \right)(x) \leq 1 \right\}$$

De aquí y por la definición de g_D, se deduce que $\sup_{x \in (K_n - K_{n-1})} \widetilde{\|f\|}(x) \leq n$.

Sea $f \in V$ y $\|f\|_\infty = M$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > M$. Sea $\Phi_\mu \in A$.

$$|\Phi_\mu(f)| \leq \phi_{|\mu|}(\|f\|) = \int_{\beta X} \widetilde{\|f\|} d\widetilde{|\mu|} = \sum_{n=1}^{N} \int_{K_n - K_{n-1}} \widetilde{\|f\|} d\widetilde{|\mu|} + \int_{\beta X - K_N} \widetilde{\|f\|} d\widetilde{|\mu|}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} n.\frac{1}{n2^n} + \frac{N}{(N+1)2^{N+1}} \leq 1.$$

Esto prueba que A es β_D-equicontinuo para todo $D \in \mathcal{D}(\beta X)$ y por tanto es β_p-equicontinuo.

$\square$

Teorema 2.5.2 *Sea X un $P-$espacio y E un espacio normado. Si $C_b(X)\otimes E$ es denso en $(C_b(X,E),\beta_p)$, entonces $(C_b(X,E),\beta_p)$ es Mackey.*

Demostración:

Sean $F=(C_b(X,E),\beta_p)$ y $G=(C_b(X,E),\|.\|)$. Del Corolario 2.3.1 F y G tienen los mismos conjuntos acotados. De las dualidades $\langle F,F'\rangle$ y $\langle G,G'\rangle$, sabemos que $\sigma(F,F')$ y $\sigma(G,G')$ son topologías compatibles con β_p y $\|.\|$, respectivamente.

De lo expuesto se deduce que $(C_b(X,E),\sigma(F,F'))$ y $(C_b(X,E),\sigma(G,G'))$ tienen los mismos conjuntos acotados. Además G es normado y por tanto la topología fuerte $\beta(G',G)$ sobre G' es igual a la de la norma.

Como $\beta_p\leq\|.\|$, $F'\subseteq G'$ y por tanto la topología fuerte $\beta(F',F)$ sobre F' es igual a la que hereda de $(G',\beta(G',G))$. Luego la topología fuerte sobre F' es la de la norma.

Sea $A\subseteq F'$ absolutamente convexo y $\sigma(F',F)-$compacto.

Es conocido que todo conjunto absolutamente convexo y compacto de $(F',\sigma(F',F))$ es acotado en $(F',\beta(F',F))$ (Schaefer, [**15** Teorema 5.1 p. 141]). Por tanto A es acotado en norma.

Además A es compacto y por tanto es contablemente compacto. También es relativamente compacto pues es compacto del espacio Hausdorff $(F',\sigma(F',F))$ y por tanto es cerrado, luego su clausura es compacta.

De lema anterior se concluye que A es β_p-equicontinuo, luego F es Mackey.

□

Teorema 2.5.3 *Sea X $P-$espacio y E espacio de Banach. Si $C_b(X)\otimes E$ es denso en $(C_b(X,E),\beta_p)$, entonces $(C_b(X,E),\beta_p)$ es fuertemente Mackey.*

Demostración:

Denotemos $F = (C_b(X,E), \beta_p)$ y $G = (C_b(X,E), \|.\|)$. Sea A relativamente contablemente compacto de $(F', \sigma(F',F))$, entonces A es relativamente contablemente compacto de $(G', \sigma(G',G))$.

Puesto que E es un espacio de Banach tenemos que G es Banach y por tanto es un espacio de Fréchet. Entonces G' es completo bajo la topología Mackey de la dualidad $\langle G, G' \rangle$ (Köthe, [**12** p. 265]). Consecuentemente la cápsula convexa cerrada de A es completa en $(G', \tau(G',G))$.

De un resultado conocido, si X es un espacio localmente convexo y H es un subconjunto de X cuya cápsula convexa cerrada es completa, H es relativamente débilmente compacto si y sólo si toda sucesión en H tiene un punto de adherencia débil en X. (Schaefer, [**15** Teorema 11.2 p. 187]).

Aplicando este resultado a A subconjunto de $(G', \sigma(G',G))$, se concluye que A es relativamente débilmente compacto en $(G', \sigma(G',G))$. Por tanto, $\overline{A}$ es débilmente compacta en $(G', \sigma(G',G))$.

Otro resultado conocido es que si B es un subconjunto compacto de un espacio localmente convexo X y C es la cápsula absolutamente convexa cerrada de B, entonces C es compacto si y sólo si C es completo para $\tau(X,X')$. (Schaefer, [**15** Teorema 11.5 p. 189]).

Aplicando este resultado a $\overline{A}$ en $(G', \sigma(G',G))$ se concluye que la cápsula absolutamente convexa cerrada de $\overline{A}$ es compacta en $(G', \sigma(G',G))$. Ahora aplicamos un resultado usado en la prueba del Teorema anterior con el cual se concluye que la cápsula absolutamente convexa cerrada de $\overline{A}$ es acotada en $(G', \beta(G',G))$.

De esto tenemos que A es acotado en norma y del lema anterior A es β_p-equicontinuo.

Esto prueba que F es fuertemente Mackey.

$\square$

2.5.3. Condiciones de Separabilidad

En el Capítulo 1 se definió espacio submetrizable separable y espacio submetrizable Baire-separable. Ahora mostramos dos propiedades de $(C_b(X,E),\beta_p)$ cuando X posee las cualidades mencionadas.

Teorema 2.5.4 *Si X es un espacio submetrizable Baire-separable y E es un espacio normado separable, entonces $(C_b(X,E),\beta_p)$ es separable. Recíprocamente, si $(C_b(X,E),\beta_p)$ es separable entonces X es submetrizable separable.*

Demostración:

- Supongamos que X es un espacio submetrizable Baire-separable. Por definición existe una función Φ de X en un espacio métrico separable Y tal que Φ^{-1} es Baire medible. A continuación mostramos que $(C_b(Y,E),\beta_p)$ es separable.

  De (Wheeler, [**23** p. 153]), si β_p es separable entonces β_0 es separable. Inversamente, si β_0 es separable y $M_p = M_t$, entonces β_p es separable. Esta última afirmación es por cuanto las topologías compatibles preservan la separabilidad o la no separabilidad.

  Por (Koumoullis, [**9** p. 467]), si X es separable metrizable $M_p(X) = M_t(X)$.

  Por (Choo, [**3** Teorema 6.2]) tenemos que si X es Hausdorff completamente regular y E es localmente convexo separable, entonces $(C_b(X,E),\beta_0)$ es separable si y sólo si X es separable submetrizable.

En este caso tenemos que Y es separable metrizable, por tanto submetrizable, y además E es normado separable, por tanto localmente convexo separable. Por Choo, $(C_b(Y,E),\beta_0)$ es separable.

De Koumoullis $M_p(Y) = M_t(Y)$ y por tanto $M_p(Y,E') = M_t(Y,E')$. Aplicando los resultados de Wheeler y Choo, concluimos que $(C_b(Y,E),\beta_p)$ es separable.

Por otra parte, del Corolario 2.1.2 $T_\Phi : (C_b\,(Y,E)\,,\beta_p) \to (C_b\,(X,E)\,,\beta_p)$ definida por $T_\Phi(f) = f \mathtt{o} \Phi$ es una aplicación continua.

De un resultado conocido, si una aplicación lineal es continua respecto a las topologías originales, también es continua respecto a las débiles (Swartz, [**21** Teorema 11 p. 193]). Por tanto $T_\Phi : C_b(Y,E) \to C_b(X,E)$ es débilmente continua.

De otro resultado conocido esto implica que la correspondiente aplicación adjunta $T_\Phi^* : M_p(X,E') \to M_p(Y,E)$ es débilmente* continua (Schaefer, [**15** Teorema 7.4 p. 158]). Afirmamos que T_Φ^* es inyectiva.

En efecto, sean $\mu_1, \mu_2 \in M_p(X,E')$ tales que $T_\Phi^*(\mu_1) = T_\Phi^*(\mu_2)$. Esto implica que $T_\Phi^*(\mu_1)(B) = T_\Phi^*(\mu_2)(B)$, para todo $B \in Ba(X)$.

Puesto que $M_p(X,E') \subseteq M_\sigma(X,E')$, μ_i es sigma aditiva y se verifica que $T_\Phi^*(\mu_i)(B) = \mu_i(\Phi^{-1}(B))$; con $i = 1,2$ (Wheeler, [**23** Teorema 7.15]). Por tanto $\mu_1(\Phi^{-1}(B)) = \mu_2(\Phi^{-1}(B))$, para todo $B \in Ba(Y)$.

Sea $A \in Ba(X)$. Por hipótesis Φ^{-1} es Baire medible que equivale a que $\Phi(A) \in Ba(Y)$.

De lo expuesto, $\mu_1(\Phi^{-1}(\Phi(A))) = \mu_2(\Phi^{-1}(\Phi(A)))$, para todo $A \in Ba(X)$. Por la inyectividad de Φ, $\mu_1(A) = \mu_2(A)$, para todo $A \in Ba(X)$, con lo cual $\mu_1 = \mu_2$.

Puesto que T_Φ^* es inyectiva, esto equivale a que la imagen de $C_b(Y,E)$ bajo T_Φ es un subespacio débilmente denso de $C_b(X,E)$ (Schaefer, [**15** Corolario 2.3 p. 129]).

Como anteriormente se justificó, $(C_b(Y,E), \beta_p)$ es separable y así $C_b(Y,E)$ es débilmente separable.

Afirmamos que $C_b(X,E)$ también es débilmente separable.

En efecto, sea S un subconjunto numerable y denso débilmente de $C_b(Y,E)$. Denotemos por $\overline{S}$ la clausura débil de S en $C_b(Y,E)$. Luego,

$\overline{S} = C_b(Y,E)$, $T_\Phi(\overline{S}) = T_\Phi(C_b(Y,E))$ y $\overline{T_\Phi(\overline{S})} = C_b(X,E)$.

Pero T_Φ es continua y por tanto $T_\Phi(\overline{S}) \subseteq \overline{T_\Phi(S)}$. Tomando clausura débil a esta contención y del resultado precedente sigue que $C_b(X,E) \subseteq \overline{T_\Phi(S)} \subseteq C_b(X,E)$.

Esto prueba que $C_b(X,E)$ es débilmente separable pues contiene a $T_\Phi(S)$, el cual es subconjunto denso y numerable.

Como las topologías débil y β_p son compatibles, entonces $(C_b(X,E), \beta_p)$ es separable.

- Recíprocamente, supongamos que $(C_b(X,E), \beta_p)$ es separable. Como $\beta_0 \leq \beta_p$, $(C_b(X,E), \beta_0)$ es separable. Esto implica que X es separable submetrizable.

□

Teorema 2.5.5 *Si X es un espacio métrico y E es un espacio normado separable, entonces $(C_b(X,E),\beta_p)$ es separable si y sólo si la cardinalidad de X es menor o igual que la de $\mathbb{R}$.*

Demostración:

- Supongamos que $(C_b(X,E),\beta_p)$ es separable. Por el Teorema anterior X es submetrizable separable. Entonces existe un espacio métrico separable Y y una función continua inyectiva f de X en Y. Es conocido que la cardinalidad de un espacio métrico separable es menor o igual que la de $\mathbb{R}$.

  Por otra parte f es inyectiva y por tanto cardinalidad de X es menor o igual que la de Y. Esto prueba que la cardinalidad de X es menor o igual que la de $\mathbb{R}$.

- Recíprocamente, supongamos que la cardinalidad de X es menor o igual que la de $\mathbb{R}$. Entonces existe un subconjunto contable $\{f_n\}$ de $C(X)$ que separa puntos de X (Summers, [**20** Teorema 3.2 p. 511]).

  Definamos la aplicación $F : X \to \mathbb{R}^\omega$, dada por $F(x) = (f_1(x), f_2(x), ...)$; donde ω denota la cardinalidad de $\mathbb{N}$. Dotando a $\mathbb{R}^\omega$ de la topología producto, tenemos que este espacio es separable. Además F es continua e inyectiva por construcción.

  Esto implica que X es separable submetrizable. Por un resultado usado en la prueba del teorema anterior, $(C_b(X,E),\beta_0)$ es separable.

  Por otra parte, dado que F es inyectiva, continua y $\mathbb{R}^\omega$ es real compacto, se concluye que X es real compacto (Gillman, [**5** Teorema 8.18]).

  Si X es metrizable se verifica que $M_p(X) = M_t(X)$ si y sólo si X es realcompacto (Wheeler, [**23** Teorema 8.19]).

Por hipótesis X es metrizable y de lo expuesto $M_p(X, E') = M_t(X, E')$.

Dado que $(C_b(X, E), \beta_0)$ es separable se concluye que $(C_b(X, E), \beta_p)$ es separable.

$\square$

Capítulo 3

Representación de Operadores Lineales

3.1. Introducción

En este capítulo establecemos condiciones para representar un operador lineal continuo $T : (C_b(X, E), \beta_p) \to F$, siendo X Hausdorff completamente regular, E y F espacios normados.

Para ello empleamos resultados expuestos en los Capítulos anteriores y propiedades del espacio $C_{rc}(X, E)$, formado por los elementos de $C_b(X, E)$ cuya imagen es relativamente compacta, provisto de la topología en norma.

Por (Katsaras, [**7** Lema 2.2]), $C_b(X) \otimes E$ es $\|.\|-$denso en $C_{rc}(X, E)$.

Del trabajo realizado por Katsaras en ese mismo artículo, Lemas 2.1 y 2.3, es conocido que $(C_{rc}(X, E), \|.\|)'$ es el espacio $M(X, E')$. Estos espacios son isométricamente isomorfos, relacionados por:

$$M(X, E') \ni \mu \mapsto \Phi_\mu \in C_{rc}(X, E)'; \ \Phi_\mu(h) = \int_X h d\mu; \text{ para } h \in C_{rc}(X, E).$$

Del Capítulo 1, $B(X, Ba^*(X), E)$ es la clausura de $S(X, Ba^*(X), E)$ en el espacio de las funciones acotadas de X en E provisto de la topología de la convergencia uniforme.

Con lo expuesto, definamos la aplicación $\pi : B(X, Ba^*(X), E) \to C_{rc}(X, E)''$,

$g \mapsto \pi(g)$ tal que $\pi(g)(\Phi_\mu) := \int\limits_X g d\mu$; para $\mu \in M(X, E')$.

Por construcción π está bien definida, es decir, $\pi(g) \in C_{rc}(X, E)''$:

- Sean $\mu, \mu_1, \mu_2 \in M(X, E')$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

  $\pi(g)(\Phi_{\mu_1} + \Phi_{\mu_2}) = \pi(g)(\Phi_{\mu_1+\mu_2}) = \int\limits_X g d(\mu_1 + \mu_2) = \int\limits_X g d\mu_1 + \int\limits_X g d\mu_2$
  $= \pi(g)(\Phi_{\mu_1}) + \pi(g)(\Phi_{\mu_2})$.

  $\pi(g)(\alpha\Phi_\mu) = \pi(g)(\Phi_{\alpha\mu}) = \int\limits_X g d(\alpha\mu) = \alpha\int\limits_X g d\mu = \alpha\pi(g)(\Phi_\mu)$.

  Esto prueba la linealidad de $\pi(g)$ en $C_{rc}(X, E)'$.

- Sea $\Phi_\alpha \to 0$ una sucesión en $C_{rc}(X, E)'$ y sea $\mu_\alpha \in M(X, E')$ la medida que identifica a Φ_α.
  $|\pi(g)(\Phi_\alpha)| = \left|\int\limits_X g d\mu_\alpha\right| \leq \int\limits_X \|g\| d|\mu_\alpha| \leq \|g\|_\infty |\mu_\alpha|(X) = \|g\|_\infty \|\Phi_\alpha\| \to 0$

  Esto prueba la continuidad de $\pi(g)$ en $C_{rc}(X, E)'$.

$\square$

π es lineal por la linealidad de la integral.

π es continua: sea $g \in B(X, Ba^*(X), E)$.

$|\pi(g)(\Phi_\mu)| = \left|\int_X g d\mu\right| \leq \int_X \|g\| d|\mu| \leq \|g\|_\infty |\mu|(X) = \|g\|_\infty \|\Phi_\mu\|$. Luego,

$\dfrac{|\pi(g)(\Phi_\mu)|}{\|\Phi_\mu\|} \leq \|g\|_\infty$. Tomando supremo respecto a $\mu \in M(X, E')$, tenemos

$\|\pi(g)\| \leq \|g\|_\infty$. Esto prueba la continuidad de π.

$\square$

Sea $\mathcal{L}(E, F'')$ el espacio de los operadores lineales y continuos de E en F''. Sea $m : Ba^*(X) \to \mathcal{L}(E, F'')$ una función conjunto.

Para cada $y' \in F'$, sea $m_{y'} : Ba^*(X) \to E'$ la función conjunto dada por $m_{y'}(A)(e) = m(A)(e)(y')$; para todo $A \in Ba^*(X)$ y todo $e \in E$.

Sea $\widetilde{m}(A) = sup \left\|\sum_{i=1}^{n} m(A_i)(e_i)\right\|_{F''}$, donde el supremo es tomado sobre todas las Ba^*-particiones finitas $\{A_i\}$ de A y sobre todos los $e_i \in E$ tales que $\|e_i\| \leq 1$.

Denotaremos por $M(X, \mathcal{L}(E, F''))$ como el espacio de todas las medidas finitamente aditivas $m : Ba^*(X) \to \mathcal{L}(E, F'')$ tales que:

- $m_{y'} \in M(X, E')$ para cada $y' \in F'$.
- $\widetilde{m}(X) < \infty$.

En este caso, se afirma que $\widetilde{m}(A) = sup\{|m_{y'}|(A); \|y'\| \leq 1\}$; para todo $A \in Ba^*(X)$. En efecto,

$$\underset{\|e_i\|\leq 1}{sup}\ \underset{\{A_i\}}{sup} \left\|\sum_{i=1}^{n} m(A_i)(e_i)\right\|_{F''} = \underset{\|e_i\|\leq 1}{sup}\ \underset{\{A_i\}}{sup}\ \underset{\|y'\|\leq 1}{sup} \left|\sum_{i=1}^{n} m(A_i)(e_i)(y')\right|$$

$$= \underset{\|y'\|\leq 1}{sup}\ \underset{\|e_i\|\leq 1}{sup}\ \underset{\{A_i\}}{sup} \left|\sum_{i=1}^{n} m_{y'}(A_i)(e_i)\right| = \underset{\|y'\|\leq 1}{sup} |m_{y'}|(A).$$

$\square$

Por otra parte, definimos el subespacio de las medidas

$$M_p(X, \mathcal{L}(E, F'')) = \{m \in M(X, \mathcal{L}(E, F''))/m_{y'} \in M_p(X, E'); \forall y' \in F'\}.$$

3.2. Resultados Previos

Sea $T : C_b(X, E) \to F$ un operador lineal y norma-continuo. Para $T|_{C_{rc}(X,E)}$ se definen:

- $\left(T|_{C_{rc}(X,E)}\right)' : F' \to C_{rc}(X, E)'$ dado por $f \mapsto f \circ T|_{C_{rc}(X,E)}; f \in F'$.
- $\left(T|_{C_{rc}(X,E)}\right)'' : C_{rc}(X, E)'' \to F''$ dado por $g \mapsto g \circ \left(T|_{C_{rc}(X,E)}\right)'$; $g \in C_{rc}(X, E)''$.

Para cada $A \in Ba^*(X)$ y cada $e \in E$, definamos

$$m(A)(e) := \left(\left(T|_{C_{rc}(X,E)}\right)'' \circ \pi\right)(\chi_A \otimes e)$$

Notemos que $m(A)(e)$ es un elemento de F''.

A continuación mostramos que $m(A) \in \mathcal{L}(E, F'')$, para todo $A \in Ba^*(X)$.

- $m(A)$ es una aplicación lineal de E en F'' por construcción.
- $m(A)$ es una aplicación continua de E en F''.

$$\forall e \in E,\ |m(A)(e)| = |(T'' \circ \pi)(\chi_A \otimes e)| \leq \|T'' \circ \pi\| \|\chi_A \otimes e\|_\infty = \|T'' \circ \pi\| \|e\|.$$

□

En el siguiente teorema mostramos que m es un elemento de $M(X, \mathcal{L}(E, F''))$.

Teorema 3.2.1 *Sea $T : C_b(X, E) \to F$ un operador lineal y norma-continuo. Sea*

$$\begin{array}{rcccccc} m: & Ba^*(X) & \to & \mathcal{L}(E, F'') & & & \\ & A & \mapsto & m(A): & E & \to & F'' \\ & & & & e & \mapsto & m(A)(e) \end{array}$$

Entonces m es un elemento de $M(X, \mathcal{L}(E, F''))$ y se denomina la ***medida representación*** *de T.*

Demostración:

A lo largo de la demostración, denotaremos $\left(T|_{C_{rc}(X,E)}\right)''$ por T''.

1. m es finitamente aditiva.

   Sean $A_1, A_2 \in Ba^*(X)$ conjuntos disjuntos y sea $e \in E$, tenemos

   $m(A_1 \dot{\cup} A_2)(e) = (T'' \mathsf{o} \pi)(\chi_{A_1 \dot{\cup} A_2} \otimes e) = (T'' \mathsf{o} \pi)((\chi_{A_1} + \chi_{A_2}) \otimes e)$

   $= (T'' \mathsf{o} \pi)(\chi_{A_1} \otimes e) + (T'' \mathsf{o} \pi)(\chi_{A_2} \otimes e) = m(A_1)(e) + m(A_2)(e)$

   $= (m(A_1) + m(A_2))(e)$.

   Luego $m(A_1 \dot{\cup} A_2) = m(A_1) + m(A_2)$ y esto prueba que m es finitamente aditiva.

2. m es una medida en el sentido de Schuchat (Capítulo 1, sección 1.2).

Hay que mostrar que la aplicación $\lambda_m : S(X, Ba^*(X), E) \to F''$, que induce m y dada por $\lambda_m\left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)(e_i)$, es continua con la topología de la convergencia uniforme sobre $S(X, Ba^*(X), E)$.

En este caso, dado que $T''\text{o}\pi$ es lineal y norma-continuo, tenemos que

$$\lambda_m\left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (T''\text{o}\pi)(\chi_{A_i} \otimes e_i) = (T''\text{o}\pi)\left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e_i\right).$$

Esto prueba que $\lambda_m = T''\text{o}\pi$ y por tanto λ_m es norma-continua.

3. $m_{y'} \in M(X, E')$, para todo $y' \in F'$.

En el Capítulo 1, sección 1.2, se definió el conjunto $M(X, E')$. Ahora mostramos que $m_{y'}$ satisface tales condiciones, para cada $y' \in F'$.

- $m_{y'}$ es función conjunto de $Ba^*(X)$ en E'.

  Sea $A \in Ba^*(X)$ y sean $e_1, e_2 \in E$.

  $m_{y'}(A)(e_1 + e_2) = m(A)(e_1 + e_2)(y') = (T''\text{o}\pi)(\chi_A \otimes (e_1 + e_2))(y')$
  $= (T''\text{o}\pi)(\chi_A \otimes e_1 + \chi_A \otimes e_2)(y')$
  $= ((T''\text{o}\pi)(\chi_A \otimes e_1) + (T''\text{o}\pi)(\chi_A \otimes e_2))(y')$
  $= (T''\text{o}\pi)(\chi_A \otimes e_1)(y') + (T''\text{o}\pi)(\chi_A \otimes e_2)(y')$
  $= m(A)(e_1)(y') + m(A)(e_2)(y') = m_{y'}(A)(e_1) + m_{y'}(A)(e_2)$.

  Sea $e \in E$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$.
  $m_{y'}(A)(\alpha e) = m(A)(\alpha e)(y') = (T''\text{o}\pi)(\chi_A \otimes (\alpha e))(y')$
  $= \alpha(T''\text{o}\pi)(\chi_A \otimes e)(y')$
  $= \alpha m(A)(e)(y') = \alpha m_{y'}(A)(e)$.

Esto prueba la linealidad de $m_{y'}(A)$.

Para la continuidad tenemos que:

$|m_{y'}(A)(e)| = |(T''\circ\pi)(\chi_A \otimes e)(y')| \leq \|(T''\circ\pi)(\chi_A \otimes e)\|_{F''}\|y'\|$
$\leq \|T''\|\|\pi\|\|e\|\|y'\|.$

Tomando $K = \|T''\|\|\pi\|\|y'\| > 0$ se prueba la continuidad de $m_{y'}$.
Si $\|y'\| = 0$, entonces $m_{y'}$ es la medida nula y está en $M(X, E')$.

- $m_{y'}$ es finitamente aditiva.

  Dado que anteriormente mostramos que m es finitamente aditiva, se verifica que $m_{y'}$ también lo es.

- $m_{y'}$ es medida.

  Por lo expuesto en el Capítulo 1, sección 1.2, cuando E es normado se cumple que $m_{y'}$ es medida si y sólo si $sup\sum_{i=1}^{n}\|m_{y'}(A_i)\| < \infty$, donde el supremo recorre todas las Ba^*-particiones finitas $\{A_i\}$ de X; también $sup\sum_{i=1}^{n}\|m_{y'}(A_i)\| = sup\left|\sum_{i=1}^{n} m_{y'}(A_i)(e_i)\right|$, donde este último supremo es tomado sobre todas las Ba^*-particiones finitas $\{A_i\}$ de X y sobre todos los $e_i \in E$ tales que $\|e_i\| \leq 1$.

  Ahora mostramos que $sup\left|\sum_{i=1}^{n} m_{y'}(A_i)(e_i)\right| < \infty$.

  $\left|\sum_{i=1}^{n} m_{y'}(A_i)(e_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} m(A_i)(e_i)(y')\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^{n} m(A_i)(e_i)\right)(y')\right|$

  $= \left|\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left(T|_{C_{rc}(X,E)}\right)''\circ\pi\right)(\chi_{A_i}\otimes e)\right)(y')\right|$

$$= \left|(T''\text{o}\pi)\left(\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}\otimes e\right)(y')\right| \leq \left\|T''\text{o}\pi\left(\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}\otimes e\right)\right\|_{F''}\|y'\|$$

$$\leq \|T''\text{o}\pi\|\|y'\|.$$

Esta última expresión se obtiene del hecho que $T''\text{o}\pi$ es lineal y norma-continuo; y, que $\left\|\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}\otimes e\right\| \leq 1$.

Como esto es válido para cualquier partición finita de X y toda colección $\{e_i\}$, se concluye que $sup\left|\sum_{i=1}^{n} m_{y'}(A_i)(e_i)\right| < \infty$.

- $m_{y',e} \in M(X)$, para todo $e \in E$.

Por definición, $m_{y',e}(A) = m_{y'}(A)(e) = m(A)(e)(y')$, para todo $A \in Ba^*(X)$. De lo visto anteriormente $m_{y',e}(A)$ está en $\mathbb{R}$ y $m_{y',e}$ es finitamente aditiva.

Esto prueba que $m_{y',e}$ es una función conjunto finitamente aditiva de $Ba^*(X)$ en $\mathbb{R}$.

Para mostrar que $m_{y',e} \in M(X)$, veremos que $m_{y',e}$ induce un funcional lineal continuo sobre $(C_b(X), \|.\|)$.

En efecto, definamos $\phi(f) = \int\limits_X f dm_{y',e}$; para cada $f \in C_b(X)$. Sea la sucesión $f_\alpha \to 0$ en $(C_b(X), \|.\|)$, luego:

$$|\phi(f_\alpha)| = \left|\int\limits_X f_\alpha dm_{y',e}\right| \leq \int\limits_X \|f_\alpha\| d|m_{y',e}| \leq \|f_\alpha\|_\infty \int\limits_X d|m_{y',e}|$$

$$= \|f_\alpha\|_\infty |m_{y',e}|(X) \to 0.$$

4. $\widetilde{m}(X) < \infty$.

   De las definiciones dadas en la sección anterior, tenemos que:

   $\widetilde{m}(X) = \sup\limits_{\|y'\| \leq 1} |m_{y'}|(X)$. Fijemos $y' \in F'$ tal que $\|y'\| \leq 1$.

   $|m_{y'}|(X) = sup \left| \sum\limits_{i=1}^{n} m_{y'}(A_i)(e_i) \right|$; donde el supremo recorre todas las particiones finitas $\{A_i\}$ de X y todos los $e_i \in E$ tal que $\|e_i\| \leq 1$.

$$\left| \sum_{i=1}^{n} m_{y'}(A_i)(e_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} m(A_i)(e_i)(y') \right| = \left| \left(\sum_{i=1}^{n} m(A_i)(e_i) \right) (y') \right|$$

$$= \left| \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left(T|_{C_{rc}(X,E)} \right)'' \circ \pi \right) (\chi_{A_i} \otimes e) \right) (y') \right|$$

$$= \left| (T'' \circ \pi) \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e \right) (y') \right| \leq \left\| T'' \circ \pi \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \otimes e \right) \right\|_{F''} \|y'\| \leq \|T'' \circ \pi\|.$$

   Como esto es válido para cualquier partición finita de X y cualquier colección $\{e_i\}$, es válido para el supremo y por tanto $\widetilde{m}(X) < \infty$.

$\square$

Previo a demostrar el siguiente teorema, es necesario recordar que:

1. Si $f \in C_b(X)$, f es *Baire*−medible (Wheeler, [**23** p. 108]).

2. Para μ, una medida positiva, se verifica que:

   a) Si $0 \leq f \leq g$, donde g es integrable respecto a μ y f es medible, entonces f también es integrable respecto a μ (Berberian, [**2** p. 78 Teorema 1]).

   b) Si $f \geq 0$ es integrable, entones $\int\limits_X f d\mu = sup \int\limits_X \varphi d\mu$, donde φ varía sobre todas las funciones simples tales que $0 \leq \varphi \leq f$ (Berberian, [**2** p. 80 Ejercicio 2]).

3. Si $\mu \in M_p(X,E') \subseteq M_\sigma(X,E')$, induce un funcional lineal continuo $\widetilde{\lambda_\mu} : \mathcal{L}_1 \to \mathbb{R}$ que verifica $\left|\widetilde{\lambda_\mu}(f)\right| \leq p(f) = |\mu|^*(\|f\|)$, para toda $f \in \mathcal{L}_1$. Además $B(X, Ba^*(X), E)$ es subconjunto de $\mathcal{L}_1$ y cuando la seminorma p está dada por $|\mu|$, $\mathcal{L}_1$ contiene a $C_b(X) \otimes E$ y $S(X, Ba^*(X), E)$ como subespacios densos (Capítulo 1 Sección 1.4).

4. Si $\Phi \in (C_b(X,E), ||.||)'$, la función $\lambda_\Phi : C_b(X)^+ \to [0,+\infty)$ definida por $\lambda_\Phi(f) = sup\{|\Phi(h)| : h \in C_b(X,E), ||h|| \leq f\}$, es aditiva, homogéneamente positiva y monótona (Lema 2.2.1).

   Es conocido que esta función puede extenderse a un funcional sobre $C_b(X)$, dado por:

   $\overline{\lambda_\Phi}(f) = \lambda_\Phi(f^+) - \lambda_\Phi(f^-)$; para toda $f \in C_b(X)$.

5. Si $\mu \in M_p(X,E')$, entonces $|\mu| \in M_p(X)$ (Teorema 2.4.1) y esta $|\mu|$ se corresponde con un funcional $\phi_{|\mu|}$ β_p-continuo sobre $C_b(X)$ (Wheeler, [**23** Teorema 11.8]).

6. Si $C_b(X) \otimes E$ es β_p- denso en $C_b(X,E)$, entonces $(C_b(X,E), \beta_p))'$ se identifica con $M_p(X,E')$. Por tanto, cada $\mu \in M_p(X,E')$ induce un funcional Φ_μ β_p-continuo sobre $C_b(X,E)$ y $C_b(X,E) \subseteq \mathcal{L}_1(\mu,X,E)$ (Teorema 2.4.2).

Respecto a estas relaciones tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.2 *Si $C_b(X) \otimes E$ es β_p- denso en $C_b(X,E)$, para cada $\mu \in M_p(X,E')$, $\overline{\lambda_{\Phi_\mu}}(f) = \int_X f d\,|\mu| = \phi_{|\mu|}(f)$; para toda $f \in C_b(X)$.*

Demostración:

La segunda igualdad es un resultado conocido por lo que mostraremos, sin pérdida de generalidad, $\lambda_{\Phi_\mu}(f) = \int_X f d\,|\mu|$; para toda $f \in C_b(X)^+$.

- $\int_X f d\,|\mu| \leq \lambda_{\Phi_\mu}(f)$.

  Para $f \in C_b(X)^+$, tenemos que $\int_X f d\,|\mu| = \sup_{0\leq\varphi\leq f} \int_X \varphi d\,|\mu|$ con φ función simple de X en $\mathbb{R}$.

  Para $\varepsilon > 0$ existen $\alpha_i > 0$ y una colección de conjuntos disjuntos $\{A_i\}_{i=1}^n$ $Ba^*(X)-$medibles tales que:

$$\int_X f d\,|\mu| < \int_X \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} d|\mu| + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{i=1}^n \alpha_i |\mu|(A_i) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Por la definición de $|\mu|$, para cada A_i existe una colección de conjuntos disjuntos $\{A_{ij}\}_{j=1}^{p_i}$ $Ba^*(X)-$medibles y $e_{ij} \in E$ con $\|e_{ij}\| \leq 1$ tales que

$$|\mu|(A_i) < \left|\sum_{j=1}^{p_i} \mu(A_{ij})(e_{ij})\right| + \frac{\varepsilon}{4n\alpha_i} < \sum_{j=1}^{p_i} |\mu(A_{ij})(e_{ij})| + \frac{\varepsilon}{4n\alpha_i}.$$

  En estas últimas expresiones podemos considerar un único $p = max\,\{p_i\}$ si permitimos que los A_{ij} puedan ser vacíos y además, sin pérdida de generalidad, podemos considerar que $\mu(A_{ij})(e_{ij}) \geq 0$. Así,

$$\int_X f d\,|\mu| < \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^p \mu(A_{ij})(e_{ij}) + \frac{3\varepsilon}{4} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^p \mu_{e_{ij}}(A_{ij}) + \frac{3\varepsilon}{4}.$$

  Por la regularidad de las medidas $\mu_{e_{ij}}$, tenemos que para cada A_{ij} existe un Baire set Z_{ij} tal que $\mu_{e_{ij}}(A_{ij}) < \mu_{e_{ij}}(Z_{ij}) + \dfrac{\varepsilon}{12pn\alpha_i}$, con lo cual

$$\int_X f d\,|\mu| < \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^p \mu_{e_{ij}}(Z_{ij}) + \frac{5\varepsilon}{6}.$$

Por cada i, j, podemos escoger (Wheeler, [**23** p. 115]; Fontenot, [**4** p. 852]):

- cozeros disjuntos D_{ij} con $Z_{ij} \subseteq D_{ij}$ y $|\mu_{\alpha_i e_{ij}}|(D_{ij} - Z_{ij}) \leq \dfrac{\varepsilon}{6pn}$.
- funciones f_{ij} continuas de X en $\mathbb{R}$ tales $0 \leq f_{ij} \leq 1$, $f_{ij} = 1$ en Z_{ij} y $f_{ij} = 0$ en $X - D_{ij}$.

Con esto tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{p} \mu_{e_{ij}}(Z_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \mu(Z_{ij})(\alpha_i e_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \int_{Z_{ij}} f_{ij} \otimes \alpha_i e_{ij} d\mu$$

$$\leq \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \int_{Z_{ij}} f_{ij} \otimes \alpha_i e_{ij} d\mu \right|$$

$$= \left| \sum_{i,j} \int_{D_{ij}} f_{ij} \otimes \alpha_i e_{ij} d\mu - \sum_{i,j} \int_{D_{ij}-Z_{ij}} f_{ij} \otimes \alpha_i e_{ij} d\mu \right|$$

$$\leq \left| \sum_{i,j} \int_{D_{ij}} f_{ij} \otimes \alpha_i e_{ij} d\mu \right| + \frac{\varepsilon}{6}$$

$$= \left| \sum_{i,j} \int_{X} f_{ij} \otimes \alpha_i e_{ij} d\mu \right| + \frac{\varepsilon}{6}$$

$$= \left| \int_{X} \sum_{i,j} f_{ij} \otimes \alpha_i e_{ij} \, d\mu \right| + \frac{\varepsilon}{6}$$

$$= \left| \Phi_\mu \left(\sum_{i,j} f_{ij} \otimes \alpha_i e_{ij} \right) \right| + \frac{\varepsilon}{6}.$$

Notemos que $\displaystyle\sum_{i,j} f_{ij} \otimes \alpha_i e_{ij} \in C_b(X, E)$ y verifica $\displaystyle\left\| \sum_{i,j} f_{ij} \otimes \alpha_i e_{ij} \right\| \leq f$.

Así $\displaystyle\left| \Phi_\mu \left(\sum_{i,j} f_{ij} \otimes \alpha_i e_{ij} \right) \right| \leq \lambda_{\Phi_\mu}(f)$ y por tanto $\displaystyle\int_X f d\,|\mu| < \lambda_{\Phi_\mu}(f) + \varepsilon$.

Puesto que ε fue arbitrario, esto prueba la primera desigualdad.

- $\lambda_{\Phi_\mu}(f) \leq \int\limits_X f d\,|\mu|$.

 Sea $g \in C_b(X,E)$ tal que $\|g\| \leq f$. Entonces existe una sucesión $\{g_n\}$ en $S(X, Ba^*(X), E)$ que converge a g en la seminorma $|\mu|$.

 Dado $\varepsilon > 0$ tenemos que $|\mu|(\|g - g_n\|) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$; con $n_0 \in \mathbb{N}$. Por propiedades de las seminormas y por la monotonía de $|\mu|$, sigue que $|\mu|(\|g_n\|) < |\mu|(\|g\|) + \varepsilon \leq |\mu|(f) + \varepsilon$.

 Como $\left|\widetilde{\lambda_\mu}(g_n)\right| \leq |\mu|(\|g_n\|)$ y $|\widetilde{\lambda_\mu}(g)| - |\widetilde{\lambda_\mu}(g - g_n)| \leq |\widetilde{\lambda_\mu}(g_n)|$, entonces $|\widetilde{\lambda_\mu}(g)| - |\widetilde{\lambda_\mu}(g - g_n)| < |\mu|(f) + \varepsilon$.

 Por la continuidad de $\widetilde{\lambda_\mu}$ en g y dado que ε fue arbitrario, se concluye que $|\widetilde{\lambda_\mu}(g)| \leq |\mu|(f)$.

 Por la unicidad de la representación sabemos que $\widetilde{\lambda_\mu}(g) = \Phi_\mu(g)$ y $|\mu|(f) = \int\limits_X f d|\mu|$, por lo cual $|\Phi_\mu(g)| \leq \int\limits_X f d|\mu|$.

 Puesto que g fue arbitraria esto es válido para el supremo y por tanto $\lambda_{\Phi_\mu}(f) \leq \int\limits_X f d\,|\mu|$.

$\square$

La siguiente definición será empleada más adelante.

Definición 3.2.1 *Sea $\mathcal{M}$ subconjunto de $M_p(X, E')$ tal que $\sup\limits_{\mu \in \mathcal{M}} |\mu|(X) < \infty$. Se dice que $\mathcal{M}$ satisface la condición (C_p), si para toda función f de X en un espacio métrico separable Y y para todo $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K \subseteq Y$ tal que $\sup\limits_{\mu \in \mathcal{M}} |\mu|(X - f^{-1}(K)) < \varepsilon$.*

Teorema 3.2.3 *Sea $\mathcal{M}$ subconjunto de $M_p(X, E')$ tal que $\sup\limits_{\mu \in \mathcal{M}} |\mu|(X) < \infty$ y sea $C_b(X) \otimes E$ β_p-denso en $C_b(X, E)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *$\{\Phi_\mu : \mu \in \mathcal{M}\}$ es β_p-equicontinuo.*
2. *$\left\{\overline{\lambda_{\Phi_\mu}} : \mu \in \mathcal{M}\right\}$ es β_p-equicontinuo.*
3. *$\left\{\phi_{|\mu|} : \mu \in \mathcal{M}\right\}$ es β_p-equicontinuo.*
4. *$\mathcal{M}$ satisface la condición (C_p).*

Demostración:

Por lo mostrado en el Teorema precedente tenemos que $(2) \Leftrightarrow (3)$.

Ahora mostramos que $(1) \Leftrightarrow (3)$.

- $(3) \Rightarrow (1)$

  Sea $H = \left\{\phi_{|\mu|} : \mu \in \mathcal{M}\right\}$ β_p-equicontinuo. Dado $\varepsilon > 0$ existe una β_p-vecindad W, absolutamente convexa y sólida en $C_b(X)$, tal que $|\phi_{|\mu|}(f)| < \varepsilon$, para toda $f \in W$ y para todo $\phi_{|\mu|} \in H$.

  Con W construimos una β_p- vecindad V en $C_b(X, E)$ y se verifica que si $g \in V$, entonces $\|g\| \in W$; similar al procedimiento empleado en la demostración del Teorema 2.3.1, primera parte.

  Sabemos que $|\Phi_\mu(f)| \leq \phi_{|\mu|}(\|f\|)$, para $f \in C_b(X, E)$ y $\mu \in M(X, E')$ (Fontenot, [**4** Lema 3.11]).

  Por lo expuesto, si $g \in V$ entonces $|\Phi_\mu(g)| \leq \phi_{|\mu|}(\|g\|) < \varepsilon$. Esto prueba que $\{\Phi_\mu : \mu \in \mathcal{M}\}$ es β_p-equicontinuo.

- $(1) \Rightarrow (3)$

  Sea $H = \{\Phi_\mu : \mu \in \mathcal{M}\}$ β_p-equicontinuo. Dado $\varepsilon > 0$ existe una β_p-vecindad V, absolutamente convexa y sólida en $C_b(X,E)$, tal que $|\Phi_\mu(g)| < \varepsilon$ para toda $g \in V$ y para todo $\Phi_\mu \in H$.

  Con V construimos una β_p- vecindad W en $C_b(X)$ y se verifica que si $f \in W$, entonces $f \otimes e \in V$, con $e \in E$ tal que $\|e\| = 1$; similar al procedimiento usado en la demostración del Teorema 2.3.1, segunda parte.

  Fijemos $f \in W$ y sea $g \in C_b(X,E)$ tal que $\|g\| \leq |f|$. Puesto que $|f| = \|f \otimes e\|$ y V es sólida, se verifica que $g \in V$. Por tanto $|\Phi_\mu(g)| < \varepsilon$ para todo $\Phi_\mu \in H$.

  Como g fue tomada de manera arbitraria, el supremo verifica esto y así $\lambda_{\Phi_\mu}(|f|) < \varepsilon$. Además $\overline{\lambda_{\Phi_\mu}}(f) \leq \overline{\lambda_{\Phi_\mu}}(|f|) = \lambda_{\Phi_\mu}(|f|)$.

  De aquí y del teorema anterior, se tiene que $\phi_{|\mu|}(f) < \varepsilon$, para toda $f \in W$. Esto prueba que $\left\{\phi_{|\mu|} : \mu \in \mathcal{M}\right\}$ es β_p-equicontinuo.

Finalmente mostramos que $(1) \Leftrightarrow (4)$.

- $(1) \Rightarrow (4)$

  Puesto que ya mostramos que $(1) \Leftrightarrow (3)$ mostraremos que $(3) \Rightarrow (4)$.

  Por hipótesis $\left\{\phi_{|\mu|} : \mu \in \mathcal{M}\right\}$ es β_p-equicontinuo en $C_b(X)$.

  Por otra parte $|\mu| \in M_p(X)^+$ y para cada función continua f de X en un espacio métrico separable Y se verifica que $f_*(|\mu|) \in M_t(Y)^+$ (Lema 1.2.1).

Por tanto, se verifica que $\left\{\phi_{f_*(|\mu|)} : \mu \in \mathcal{M}\right\}$ es β_0-equicontinuo en $C_b(Y)$.

Esto implica que dado $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K \subseteq Y$ tal que $f_*(|\mu|)(Y - K) < \varepsilon$; para toda $\mu \in \mathcal{M}$ (Sentilles, [**17** Teorema 5.1]).

Por tanto, $|\mu|(f^{-1}(Y - K)) = |\mu|(X - f^{-1}(K)) < \varepsilon$, para toda $\mu \in \mathcal{M}$.

Esto prueba que $\mathcal{M}$ satisface la condición (C_p).

- $(4) \Rightarrow (1)$

Por hipótesis $\mathcal{M} \subseteq M_p(X, E')$ tal que $\underset{\mu\in\mathcal{M}}{sup}|\mu|(X) < \infty$.

Sea $\alpha_0 = \underset{\mu\in\mathcal{M}}{sup}|\mu|(X)$. Mostrar que $H = \{\Phi_\mu : \mu \in \mathcal{M}\}$ es β_p-equicontinuo en $C_b(X, E)$ es equivalente a mostrar que H es β_D-equicontinuo, para cada $D \in \mathcal{D}(\beta X)$.

Sea D un conjunto distinguido de $\beta X - X$. Existe una función continua $\widetilde{f} : \beta X \to \widetilde{Y}$, con $\widetilde{Y}$ espacio métrico separable, tal que $D = \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{f}(D))$.

Con esta función definamos $f : X \to Y$ por $f = \widetilde{f}|_X$, con $Y = \widetilde{f}(X)$. Notemos que f es continua de X en el espacio métrico separable Y.

Sea $W = \{f \in C_b(X, E) : |\Phi_\mu(f)| < \varepsilon; \forall \mu \in \mathcal{M}\}$; $\varepsilon > 0$.

Mostraremos que $W \in \beta_D$ y con ello que H es β_D-equicontinuo.

Notemos que W es absolutamente convexo por lo que falta mostrar que para todo $r > 0$ existe una β_D-vecindad V_r en $C_b(X, E)$ tal que $V_r \cap B_r \subseteq W$, siendo B_r la bola en $C_b(X,E)$, centrada en 0 y radio r (Lema 2.1.1; Katsaras, [**8** Lema 3.2]).

De la hipótesis, $\mathcal{M}$ satisface la condición (C_p) y para f definida anteriormente, existe un compacto $K \subseteq Y$ tal que

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}} |\mu|(X - f^{-1}(K)) < \frac{\varepsilon}{2r}. \qquad (\S)$$

Sea $K_D = \widetilde{f}^{-1}(K)$. Notemos que K es cerrado por ser compacto en el espacio Hausdorff $\widetilde{Y}$ y como $\widetilde{f}$ es continua, entonces K_D es cerrado en βX.

Puesto que βX es compacto se concluye que K_D es un subconjunto compacto de $\beta X - D$.

Por otra parte, de la Definición 2.1.1 y del Lema 2.1.1, β_D coincide con la topología τ^* de la convergencia uniforme sobre los compactos de $\beta X - D$, en los conjuntos acotados en norma de $C_b(X,E)$.

Con lo expuesto, definamos el conjunto

$$Z = \left\{ f \in C_b(X,E) : \sup_{x\in K_D} \widetilde{\|f\|}(x) < \eta \right\} \bigcap B_r;\ \eta = \frac{\varepsilon}{2(1+\alpha_0)}.$$

Sea $f \in Z$ y sea $\Phi_\mu \in H$.

$$|\Phi_\mu(f)| \leq \int_X \|f\| d|\mu| = \int_{\beta X} \widetilde{\|f\|} d\widetilde{|\mu|} = \int_{K_D} \widetilde{\|f\|} d\widetilde{|\mu|} + \int_{\beta X - K_D} \widetilde{\|f\|} d\widetilde{|\mu|}$$

$$\leq \frac{\alpha_0\ \varepsilon}{2(1+\alpha_0)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Para la primera igualdad se usa (Sentilles, [**17** p. 313]) y para la última desigualdad se usa (§) y el hecho que

$\widetilde{|\mu|}(\beta X - K_D) = |\mu|((\beta X - K_D) \cap X).$

Esto prueba que $Z \subseteq W$ y así $W \in \beta_D$. Por tanto H es β_D-equicontinuo en $C_b(X, E)$, para todo $D \in \mathcal{D}(\beta X)$. Luego H es β_p-equicontinuo.

$\square$

Teorema 3.2.4 *Si $C_b(X) \otimes E$ es β_p-denso en $C_b(X, E)$ y $\mu \in M_p(X, E')$, entonces para todo $A \in Ba^*(X)$ se cumple que:*

1. *El funcional $\Phi_A : C_{rc}(X, E) \to \mathbb{R}$ definido por $\Phi_A(h) := \int\limits_A h d\mu$, es $\beta_p|_{C_{rc}(X,E)}-$continuo y puede ser extendido a un único funcional lineal β_p-continuo $\overline{\Phi_A} : C_b(X, E) \to \mathbb{R}$, y escribiremos*

   $\int\limits_A f d\mu := \overline{\Phi_A}(f)$; *para $f \in C_b(X, E)$.*

2. $\left|\int\limits_A f d\mu\right| \leq \int\limits_A \|f\| d|\mu|$; *para $f \in C_b(X, E)$.*

Demostración:

1. Para $A \in Ba^*(X)$, $\mu \in M(X, E')$ y $h \in C_{rc}(X, E)$, se define $\int\limits_A h d\mu = \lim\limits_{\mu(P)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)(h(x_i))$, donde $P = \{A_i\}$ es $Ba^*(X)-$partición de A y $x_i \in A_i$ (Katsaras, [**7** p. 14-15]).

   Similar a lo realizado en el Teorema 1.4.1, obtenemos $\left|\int\limits_A h d\mu\right| \leq \int\limits_A \|h\| d|\mu|$.

   Consideremos ahora una red h_α en $C_{rc}(X, E)$ tal que $h_\alpha \overset{\beta_p|C_{rc}(X,E)}{\longrightarrow} 0$. Entonces

$$|\Phi_A(h_\alpha)| = \left|\int_A h_\alpha d\mu\right| \leq \int_A \|h_\alpha\| d|\mu| \leq \int_X \|h_\alpha\| d|\mu| = \phi_{|\mu|}(\|h_\alpha\|).$$

Por la β_p-continuidad de $\phi_{|\mu|}$ y dado que $\|h_\alpha\| \overset{\beta_p}{\to} 0$ en $C_b(X)$ (Teorema 2.3.1), se concluye la β_p-continuidad de Φ_A sobre $C_{rc}(X, E)$.

De la hipótesis $C_b(X) \otimes E$ es β_p-denso en $C_b(X, E)$ y de lo expuesto en la introducción $C_b(X) \otimes E \subseteq C_{rc}(X, E)$, por tanto $C_{rc}(X, E)$ es β_p-denso en $C_b(X, E)$.

Por la β_p-densidad de $C_{rc}(X, E)$, Φ_A puede ser extendido de manera única a un funcional lineal β_p-continuo sobre $C_b(X, E)$ denotado por $\overline{\Phi_A}$.

2. Sea $f \in C_b(X, E)$ y sea h_α en $C_{rc}(X, E)$ tal que $h_\alpha \overset{\beta_p}{\to} f$, entonces $h_\alpha - f \overset{\beta_p}{\to} 0$, luego $\|h_\alpha - f\| \overset{\beta_p}{\to} 0$ y por tanto $|\ \|h_\alpha\| - \|f\|\ | \overset{\beta_p}{\to} 0$ en $C_b(X)$. Con esto tenemos que

$$\left|\int_A \|h_\alpha\| d|\mu| - \int_A \|f\| d|\mu|\right| = \left|\int_A (\|h_\alpha\| - \|f\|)\, d|\mu|\right| \leq \int_A |\ \|h_\alpha\| - \|f\|\ |\, d|\mu|$$

$$\leq \int_X |\ \|h_\alpha\| - \|f\|\ |\, d|\mu| = \phi_{|\mu|}(|\ \|h_\alpha\| - \|f\|\ |) \to 0.$$

De aquí, $\int_A \|f\| d|\mu| = \lim_\alpha \int_A \|h_\alpha\| d|\mu|$.

De la parte (1), $\overline{\Phi_A}(f) = \overline{\Phi_A}(\lim_\alpha h_\alpha) = \lim_\alpha \Phi_A(h_\alpha)$. Por tanto,

$$\left|\int_A f d\mu\right| = \lim_\alpha \left|\int_A h_\alpha d\mu\right| \leq \lim_\alpha \int_A \|h_\alpha\| d|\mu| = \int_A \|f\| d|\mu|.$$

□

En los próximos resultados emplearemos la siguiente definición.

Definición 3.2.2 *Sea $A \in Ba^*(X)$, $m \in M(X, \mathcal{L}(E, F''))$ y $h \in C_{rc}(X, E)$. Se define $\int\limits_A hdm = \lim\limits_{m(P)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)(h(x_i))$, donde $P = \{A_i\}$ es $Ba^*(X)-$partición de A y $x_i \in A_i$.*

Cabe resaltar que como F'' es Banach, nuevamente Katsaras garantiza la existencia del límite referido en esta definición.

Teorema 3.2.5 *Si $C_b(X) \otimes E$ es β_p-denso en $C_b(X, E)$, $\mu \in M_p(X, \mathcal{L}(E, F''))$ y el conjunto $\{\mu_{y'} : y' \in F'\}$ satisface la condición (C_p), entonces para todo $A \in Ba^*(X)$ se cumple que:*

1. *El funcional $S_A : C_{rc}(X, E) \to F''$ definido por $S_A(h) := \int\limits_A hd\mu$, es $(\beta_p|_{C_{rc}(X,E)}, \|.\|_{F''})-$continuo y puede ser extendido a un único funcional lineal $(\beta_p, \|.\|_{F''})-$continuo $\overline{S_A} : C_b(X, E) \to F''$, y escribiremos*

   $\int\limits_A fd\mu := \overline{S_A}(f)$; *para $f \in C_b(X, E)$.*

2. *Para cada $y' \in F'$, $\left(\int\limits_A fd\mu\right)(y') = \int\limits_A fd\mu_{y'}$; para $f \in C_b(X, E)$.*

Demostración:

1. Notemos que $\int\limits_A hd\mu \in F''$. De la definición precedente, para $y' \in F'$,

   $$\left(\int\limits_A hd\mu\right)(y') = \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)(h(x_i))(y') = \lim_{\mu(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu_{y'}(A_i)(h(x_i))$$

   $$= \int\limits_A hd\mu_{y'} \qquad (\S)$$

   Por la hipótesis el conjunto $\{\mu_{y'} : y' \in F'\}$ satisface la condición (C_p) y por el Teorema 3.2.3 tenemos que el conjunto $\left\{\phi_{|\mu_{y'}|} : y' \in F'\right\}$ es β_p-equicontinuo.

Dado $\varepsilon > 0$ existe una β_p-vecindad V en $C_b(X)$ tal que $|\phi_{|\mu_{y'}|}(f)| < \varepsilon$, para cada $f \in V$ y cada $y' \in F'$.

Consideremos ahora una red h_α en $C_{rc}(X,E)$ tal que $h_\alpha \overset{\beta_p|C_{rc}(X,E)}{\longrightarrow} 0$. Entonces $\|h_\alpha\| \overset{\beta_p}{\to} 0$ en $C_b(X)$. Esto implica que para V existe α_0 tal que $\|h_\alpha\| \in V$, siempre que $\alpha \geq \alpha_0$.

Para $y' \in F'$ y empleando (§) tenemos

$$|S_A(h_\alpha)(y')| = \left|\left(\int\limits_A h_\alpha d\mu\right)(y')\right| = \left|\int\limits_A h_\alpha d\mu_{y'}\right| \leq \int\limits_A \|h_\alpha\| d|\mu_{y'}| \leq \int\limits_X \|h_\alpha\| d|\mu_{y'}|$$

$$= \phi_{|\mu_{y'}|}(\|h_\alpha\|) < \varepsilon; \text{ para todo } \alpha \geq \alpha_0.$$

Tomando supremo sobre $\|y'\| \leq 1$ obtenemos $\|S_A(h_\alpha)\| < \varepsilon$; para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Esto prueba que S_A es $(\beta_p|_{C_{rc}(X,E)}, \|.\|_{F''})-$continuo.

Similar que en la prueba del teorema anterior, $C_{rc}(X,E)$ es β_p-denso en $C_b(X,E)$ y por tanto S_A se extiende de manera única a un funcional lineal $(\beta_p, \|.\|_{F''})-$continuo sobre $C_b(X,E)$, denotado por $\overline{S_A}$.

2. Sea $f \in C_b(X,E)$ y sea $\{h_\alpha\}$ una red en $C_{rc}(X,E)$ tal que $h_\alpha \overset{\beta_p}{\to} f$.

Por la parte (1), $\int\limits_A f d\mu = \lim\limits_\alpha \int\limits_A h_\alpha d\mu$.

De aquí y por (§), para cada $y' \in F'$ se verifica que

$$\left(\int\limits_A f d\mu\right)(y') = \lim_\alpha \left(\left(\int\limits_A h_\alpha d\mu\right)(y')\right) = \lim_\alpha \left(\int\limits_A h_\alpha d\mu_{y'}\right) = \int\limits_A f d\mu_{y'},$$

donde la última igualdad es consecuencia del teorema anterior.

$\square$

Lema 3.2.1 *Si $C_b(X) \otimes E$ es β_p-denso en $C_b(X,E)$, $\mu \in M_p(X, \mathcal{L}(E, F''))$ y el conjunto $\{\mu_{y'} : y' \in F', \|y'\| \leq 1\}$ satisface la condición (C_p), entonces para todo $A \in Ba^*(X)$ se cumple que:*

1. $|\mu_{y'}|(A)$

$$= sup \left\{ \left| \int_A f d\mu_{y'} \right| : f \in C_b(X,E), \|f\| \leq 1 \right\}.$$

$$= sup \left\{ \left| \int_A h d\mu_{y'} \right| : h \in C_b(X) \otimes E, \|h\| \leq 1 \right\}.$$

2. $\widetilde{\mu}(A)$

$$= sup \left\{ \left\| \int_A f d\mu \right\|_{F''} : f \in C_b(X,E), \|f\| \leq 1 \right\}.$$

$$= sup \left\{ \left\| \int_A h d\mu \right\|_{F''} : h \in C_b(X) \otimes E, \|h\| \leq 1 \right\}.$$

Demostración:

1. - $sup \left\{ \left| \int_A f d\mu_{y'} \right| : f \in C_b(X,E), \|f\| \leq 1 \right\} \leq |\mu_{y'}|(A).$

  Sea $A \in Ba^*(X)$, sea $f \in C_b(X,E)$ tal que $\|f\| \leq 1$. Sea $y' \in F'$ tal que $\|y'\| \leq 1$. Del Teorema 3.2.4, parte (2), tenemos que:

  $$\left| \int_A f d\mu_{y'} \right| \leq \int_A \|f\| d|\mu_{y'}| \leq |\mu_{y'}|(A).$$

Tomando supremo sobre $\|f\| \leq 1$ se obtiene la desigualdad.

- $|\mu_{y'}|(A) \leq sup\left\{\left|\int\limits_A f d\mu_{y'}\right| : f \in C_b(X,E), \|f\| \leq 1\right\}$.

Por la definición de $|\mu_{y'}|(A)$, dado $\varepsilon > 0$ existe una $Ba^*(X)-$partición $\{A_i\}$ de A y una colección $\{e_i\}$ con $e_i \in E$, $\|e_i\| \leq 1$, tal que $|\mu_{y'}|(A) < \left|\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_{y'}(A_i)(e_i)\right| + \dfrac{\varepsilon}{3} = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_{y',e_i}(A_i)\right| + \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Como $|\mu_{y',e_i}| \in M(X)$, de la regularidad de estas medidas existen zero set's $Z_i \subseteq A_i$ tales que $|\mu_{y',e_i}|(A_i) < |\mu_{y',e_i}|(Z_i) + \dfrac{\varepsilon}{3n}$. (a)

Similar a lo realizado en la prueba del Teorema 3.2.2, escojamos:

- cozeros disjuntos D_i con $Z_i \subseteq D_i$ y $|\mu_{y',e_i}|(D_i - Z_i) \leq \dfrac{\varepsilon}{3n}$. (b)

- funciones f_i continuas de X en $\mathbb{R}$ tales $0 \leq f_i \leq 1$, $f_i = 1$ en Z_i y $f_i = 0$ en $X - D_i$.

Con esto definimos $h = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \otimes e_i$. Se verifica que $h \in C_b(X) \otimes E$ y $\|h\| \leq 1$. Además,

$$\int\limits_A h d\mu_{y'} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_A f_i \otimes e_i d\mu_{y'} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_A f_i d\mu_{y',e_i} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A\cap D_i} f_i d\mu_{y',e_i}.$$

Por otra parte, $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_{y',e_i}(A_i)\right| =$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \mu_{y',e_i}(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu_{y',e_i}(Z_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu_{y',e_i}(Z_i) - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A\cap D_i} f_i d\mu_{y',e_i} + \int\limits_A h d\mu_{y'}\right|$$

$$\leq \left|\sum_{i=1}^{n} \mu_{y',e_i}(A_i - Z_i)\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Z_i} f_i d\mu_{y',e_i} - \int\limits_{A\cap D_i} f_i d\mu_{y',e_i}\right| + \left|\int\limits_A h d\mu_{y'}\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\mu_{y',e_i}|(A_i - Z_i) + \sum_{i=1}^{n} |\mu_{y',e_i}|(D_i - Z_i) + \left| \int_A h d\mu_{y'} \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left| \int_A h d\mu_{y'} \right|, \text{ por (a) y (b).}$$

Luego, $|\mu_{y'}|(A) < \varepsilon + \left| \int_A h d\mu_{y'} \right|$. Como ε fue arbitrario obtenemos

$$|\mu_{y'}|(A) \leq \left| \int_A h d\mu_{y'} \right| \leq sup \left\{ \left| \int_A h d\mu_{y'} \right| : h \in C_b(X) \otimes E, \|h\| \leq 1 \right\}.$$

Además,

$$sup \left\{ \left| \int_A h d\mu_{y'} \right| : h \in C_b(X) \otimes E, \|h\| \leq 1 \right\}$$

$$\leq sup \left\{ \left| \int_A f d\mu_{y'} \right| : f \in C_b(X, E), \|f\| \leq 1 \right\}.$$

Con esto y la desigualdad anterior, se prueba la igualdad de ambos supremos con $|\mu_{y'}|(A)$.

2. Sea $A \in Ba^*(X)$. De lo expuesto en la sección 3.1, sabemos que

$$\widetilde{\mu}(A) = sup \{ |\mu_{y'}| (A); \|y'\| \leq 1 \}.$$

Por el ítem anterior y por el teorema precedente, tenemos que $\widetilde{\mu}(A)$

$$= sup \left\{ \left| \int_A f d\mu_{y'} \right| : f \in C_b(X, E); \|f\| \leq 1; \|y'\| \leq 1 \right\}$$

$$= sup \left\{ \left| \int_A h d\mu_{y'} \right| : h \in C_b(X) \otimes E; \|h\| \leq 1; \|y'\| \leq 1 \right\}$$

$$= sup \left\{ \left| \left(\int_A f d\mu \right) (y') \right| : f \in C_b(X, E), \|f\| \leq 1; \|y'\| \leq 1 \right\}.$$

$$= sup \left\{ \left| \left(\int_A h d\mu \right) (y') \right| : h \in C_b(X) \otimes E, \|h\| \leq 1; \|y'\| \leq 1 \right\}.$$

$$= sup \left\{ \left\| \int_A f d\mu \right\|_{F''} : f \in C_b(X, E), \|f\| \leq 1 \right\}.$$

$$= sup \left\{ \left\| \int_A h d\mu \right\|_{F''} : h \in C_b(X) \otimes E, \|h\| \leq 1 \right\}.$$

□

3.3. Teorema de Representación

En esta sección damos condiciones para representar un operador lineal continuo sobre el espacio $C_b(X, E)$ provisto de la topología estricta β_p, en un espacio normado F.

Dado que $C_b(X) \otimes E \subseteq C_{rc}(X, E)$, es de observar que si $C_b(X) \otimes E$ es β_p-denso en $C_b(X, E)$, entonces $C_{rc}(X, E)$ también es β_p-denso en $C_b(X, E)$ y por tanto $(C_{rc}(X, E), \beta_p)' = (C_b(X, E), \beta_p)'$. Sigue que $(C_{rc}(X, E), \beta_p)' = M_p(X, E')$ por el Teorema 2.4.2.

Lema 3.3.1 *Sea $C_b(X) \otimes E$ β_p-denso en $C_b(X, E)$ y F espacio normado. Sea $S : C_{rc}(X, E) \to F$ un operador lineal $(\beta_p, \|.\|)-$ continuo. Se definen:*

- *$i_F : F \to F''$ como el embebimiento canónico dado por $i_F(y)(y') = y'(y)$ y $j_F : i_F(F) \to F$ la inversa de i_F.*

- $S' : F' \to (C_{rc}(X,E), \beta_p)'$ *dado por* $f \mapsto f \circ S; f \in F'$, *considerando en* F' *y en* $(C_{rc}(X,E), \beta_p)'$ *la topología de la norma.*

- $S'' : C = ((C_{rc}(X,E), \beta_p)'; \|.\|)' \to F''$ *dado por* $g \mapsto g \circ S'$; $g \in C$, *considerando en* C *y en* F'' *la topología de la norma.*

- $\pi : B(X, Ba^*(X), E) \to C$, *la aplicación* $g \mapsto \pi(g)$ *dada por* $\pi(g)(\Phi_\mu) := \int_X g d\mu$; *con* $\mu \in M_p(X,E')$ *y* Φ_μ *el funcional* β_p-*continuo sobre* $C_{rc}(X,E)$ *que se identifica con* μ.

- m *como la medida representación de* S, *tal como en el Teorema 3.2.1 pues* $\beta_p \leq \|.\|$ *(Corolario 2.3.1).*

Entonces la aplicación $S'' \circ \pi : B(X, Ba^*(X), E) \to F''$ *satisface las siguientes propiedades.*

1. $(S'' \circ \pi)(g) = \int_X g \, dm$; *para* $g \in B(X, Ba^*(X), E)$.

2. *Para cada* $y' \in F'$, $(S'' \circ \pi)(g)(y') = \int_X g \, dm_{y'}$; *para* $g \in B(X, Ba^*(X), E)$.

3. $(S'' \circ \pi)(C_{rc}(X,E)) \subseteq i_F(F)$.

4. $S(h) = j_F \left(\int_X h \, dm \right)$; *para* $h \in C_{rc}(X,E)$.

5. *Para cada* $y' \in F'$, $y'(S(h)) = \int_X h \, dm_{y'}$; *para* $h \in C_{rc}(X,E)$.

Demostración:

1. Para $g \in B(X, Ba^*(X), E)$ existe una sucesión de funciones simples $\left\{\varphi_n = \sum_{i=1}^{N_n} \chi_{A_{i,n}} \otimes e_{i,n}\right\}$ que la alcanza.

   Puesto que $S''\circ\pi$ y la integral son operadores lineales y continuos, tenemos

   $$(S''\circ\pi)(g) = \lim_n (S''\circ\pi)(\varphi_n) = \lim_n \sum_{i=1}^{N_n} (S''\circ\pi)(\chi_{A_{i,n}} \otimes e_{i,n})$$

   $$= \lim_n \sum_{i=1}^{N_n} m(A_{i,n})(e_{i,n}) = \lim_n \int_X \varphi_n \, dm = \int_X g \, dm.$$

2. Sea $g \in B(X, Ba^*(X), E)$ y $y' \in F'$.

   Tenemos $(S''\circ\pi)(g) = S''(\pi(g)) = \pi(g)\circ S'$.

   Por tanto, $(S''\circ\pi)(g)(y') = (\pi(g)\circ S')(y') = \pi(g)(S'(y')) = \pi(g)(y'\circ S)$.

   Puesto que $y'\circ S \in (C_{rc}(X, E), \beta_p)'$ se identifica con $\mu_{y'\circ S} \in M_p(X, E')$,

   $(S''\circ\pi)(g)(y') = \int_X g \, d\mu_{y'\circ S}. \quad (*)$

   Ahora mostramos que $\mu_{y'\circ S} = m_{y'}$. En efecto, sea $A \in Ba^*(X)$ y $e \in E$. Dado que m es la medida representación de S y de $(*)$, tenemos que

   $$m_{y'}(A)(e) = m(A)(e)(y') = (S''\circ\pi)(\chi_A \otimes e)(y') = \int_X \chi_A \otimes e \, d\mu_{y'\circ S} = \mu_{y'\circ S}(A)(e).$$

3. Para cada $h \in C_{rc}(X, E)$, definamos $\Lambda_h : (C_{rc}(X, E); \beta_p)' \to \mathbb{R}$ dada por $\Lambda_h(\Phi) = \Phi(h)$.

   Para $\Phi \in (C_{rc}(X, E); \beta_p)'$ y $\mu \in M_p(X, E')$ la medida que se identifica con Φ, $\pi(h)(\Phi) = \int_X h \, d\mu = \Phi(h) = \Lambda_h(\Phi)$. Esto prueba que $\Lambda_h = \pi(h)$.

Por otra parte, para cada $y' \in F'$ se verifica que

$(S''(\pi(h))(y') = (S''(\Lambda_h))(y') = (\Lambda_h \circ S')(y') = \Lambda_h(S'(y'))$

$= \Lambda_h(y' \circ S) = (y' \circ S)(h) = y'(S(h)) = i_F(S(h))(y')$.

Por tanto, $(S'' \circ \pi)(h) = i_F(S(h)) \in i_F(F)$; para toda $h \in C_{rc}(X, E)$.

4. De los ítemes anterior y (1), para cada $h \in C_{rc}(X, E)$, tenemos que $S(h) = j_F(i_F(S(h))) = j_F\left((S'' \circ \pi)(h)\right) = j_F\left(\int\limits_X h \, dm\right)$.

5. Sea $h \in C_{rc}(X, E)$, $y' \in F'$. Del ítem precedente, $y'(S(h)) = y'\left(j_F\left(\int\limits_X h \, dm\right)\right) = i_F\left(j_F\left(\int\limits_X h \, dm\right)\right)(y') = \left(\int\limits_X h \, dm\right)(y')$.

   De los ítemes (1) y (2) se concluye que $y'(S(h)) = \int\limits_X h \, dm_{y'}$.

$\square$

Teorema 3.3.1 *Sea $C_b(X) \otimes E$ β_p−denso en $C_b(X, E)$ y sea F un espacio de Banach. Si $T : C_b(X, E) \to F$ es un operador lineal $(\beta_p, \|.\|)$−continuo, entonces:*

1. *La medida representación m de T es un elemento de $M_p(X, \mathcal{L}(E, F''))$.*

2. *El conjunto $\{m_{y'} : y' \in F', \|y'\| \leq 1\}$ satisface la condición (C_p).*

3. *Para cada $y' \in F'$, $y'(T(f)) = \int\limits_X f \, dm_{y'}$; para $f \in C_b(X, E)$.*

4. *Para cada $f \in C_b(X, E)$, $\int\limits_X f \, dm \in i_F(F)$ y $T(f) = j_F\left(\int\limits_X f \, dm\right)$.*

5. *$\|T\| = \widetilde{m}(X)$.*

Demostración:

1. Sea S la restricción de T en $C_{rc}(X,E)$.

   Por (5) del lema precedente, para cada $y' \in F'$, $y'(S(h)) = \int\limits_X h\ dm_{y'}$; para toda $h \in C_{rc}(X,E)$.

   Por hipótesis, $C_b(X) \otimes E$ es β_p-denso en $C_b(X,E)$ y dado que $C_b(X) \otimes E \subseteq C_{rc}(X,E)$, resulta que $(C_{rc}(X,E), \beta_p)' = M_p(X,E')$.

   Como $y' \circ S \in (C_{rc}(X,E), \beta_p)'$, se concluye que $m_{y'} \in M_p(X,E')$.

2. Sea $H = \{y' \circ T; y' \in F'; \|y'\| \leq 1\}$. Tenemos que H es un conjunto de funcionales sobre $C_b(X,E)$ β_p-equicontinuo. En efecto, para $\varepsilon > 0$ sea la bola B_ε en F, centrada en 0 y radio ε. Por la continuidad de T, existe una β_p-vecindad V en $C_b(X,E)$ tal que si $f \in V$, entonces $T(f) \in B_\varepsilon$.

   Esto implica que $(y' \circ T)(f) = y'(T(f)) \leq \|y'\|\|T(f)\| < \varepsilon$, para toda $f \in V$ y para todo y' con $\|y'\| \leq 1$. Luego H es β_p-equicontinuo y por tanto es acotado en norma.

   Por otra parte, cada uno de estos funcionales se identifica con una medida $\mu_{y' \circ T}$ en $M_p(X,E')$ y por el Teorema 3.2.3 el conjunto de estas medidas $\{\mu_{y' \circ T}; y' \in F'; \|y'\| \leq 1\}$ satisface la condición (C_p).

   De la parte (1) se tiene que $\mu_{y' \circ T} = m_{y'}$ y esto prueba (2).

3. Sea $f \in C_b(X,E)$ y sea h_α una red en $C_{rc}(X,E)$ que β_p-converge a f. Para cada $y' \in F'$ tenemos que $y' \circ T$ es β_p-continuo y por (5) del lema precedente, $(y' \circ T)(f) = \lim\limits_{\alpha} (y' \circ T)(h_\alpha) = \lim\limits_{\alpha} \int\limits_X h_\alpha\ dm_{y'}$.

Por el Teorema 3.2.4 se concluye que $(y' \circ T)(f) = \int_X f \, dm_{y'}$.

4. Por (1) y (3) del lema precedente, se tiene que para toda $h \in C_{rc}(X, E)$, $\int_X h \, dm \in i_F(F)$. Por el Teorema 3.2.5 se concluye que $\int_X f \, dm \in i_F(F)$, para toda $f \in C_b(X, E)$, pues $i_F(F)$ es Banach y el funcional extendido preserva la imagen del funcional original.

   Por (4) del lema anterior, $T(h) = j_F\left(\int_X h \, dm\right)$. Sea $f \in C_b(X, E)$ y sea h_α una red en $C_{rc}(X, E)$ que β_p-converge a f. Como T es β_p-continuo,

   $$T(f) = \lim_\alpha T(h_\alpha) = \lim_\alpha j_F\left(\int_X h_\alpha \, dm\right) = j_F\left(\lim_\alpha \int_X h_\alpha \, dm\right) = j_F\left(\int_X f \, dm\right).$$

5. Por definición, $\|T\| = sup\|T(f)\|$ donde el supremo recorre todas las funciones $f \in C_b(X, E)$ tal que $\|f\| \leq 1$.

   Del ítem precedente, $\|T(f)\| = \left\|j_F\left(\int_X f \, dm\right)\right\| = \left\|\int_X f \, dm\right\|$.

   Aplicando supremo, el Lema 3.2.1 y la parte (2) se obtiene que $\|T\| = \widetilde{m}(X)$.

$\square$

Capítulo 4

Conclusiones

A continuación resumimos los principales resultados de los Capítulos 2 y 3, así como se proponen posibles estudio posteriores.

1. Para cada conjunto distinguido $D \subseteq \beta X - X$, definimos una topología localmente convexa sobre $C_b(X, E)$, la cual coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos de $\beta X - D$, en los conjuntos acotados en norma (Lema 2.1.1). En la demostración de este mismo Lema, vimos que β_D es una topología mixta como la definida en (Wiweger [**25** p. 50]).

2. La construcción de β_D es muy similar a la topología β_0 de (Katsaras, [**8** Sección 3]) sobre $C_{rc}(X, E)$, con la diferencia que Katsaras utilizó la familia de subconjuntos compactos de X mientras que β_D utiliza la de los compactos de $\beta X - D$. De aquí, no es coincidencia que β_D haya resultado ser una topología mixta al igual que la que definió Katsaras.

3. La topología perfeta β_p se definió como la topología límite inductivo de las topologías β_D, cuando D recorre la colección de todos los conjuntos distinguidos de $\beta X - X$.

4. Como otras topologías definidas sobre $C_b(X,E)$, β_p es localmente sólida (Teorema 2.2.1). Esto resultó de utilidad para la demostración de los siguientes resultados del Capítulo 2, como el de la equivalencia entre la β_p-convergencia de una red en $C_b(X,E)$ con la β_p-convergencia en $C_b(X)$ de la respectiva red de las funciones norma (Teorema 2.3.1).

5. Bajo la hipótesis que $C_b(X) \otimes E$ es β_p-denso en $C_b(X,E)$, mostramos que $(C_b(X,E),\beta_p)' = M_p(X,E')$. Además $C_b(X) \otimes E \subseteq C_{rc}(X,E)$ y por tanto $C_{rc}(X,E)$ también es β_p-denso en $C_b(X,E)$. Así, $(C_{rc}(X,E),\beta_p)' = M_p(X,E')$ para el caso estudiado, con E normado.

6. En el Teorema 2.5.1 mostramos que si E es un espacio de Banach, la condición X es pseudocompacto equivale a que β_p sea normable, metrizable, bornológica y tonelada.

7. También se mostró que bajo las hipótesis que $C_b(X) \otimes E$ es β_p-denso en $C_b(X,E)$ y X un $P-$espacio, si E es normado entonces β_p es Mackey y si E es Banach entonces es fuertemente Mackey (Teoremas 2.5.2 y 2.5.3).

8. Bajo la hipótesis que X es un espacio métrico y E es un espacio normado separable, se mostró que $(C_b(X,E),\beta_p)$ es separable si y sólo si la cardinalidad de X es menor o igual que la de $\mathbb{R}$ (Teorema 2.5.5).

9. En el Capítulo 3 se describió la construcción de una medida de representación para un operador lineal norma-continuo, de $C_b(X,E)$ en un espacio normado F. Se estudiaron algunas propiedades que poseen estas medidas y luego se dieron las condiciones para representar un operador β_p-norma continuo con F espacio de Banach.

10. Los resultados del Capítulo 3 se basan en la dualidad entre $C_{rc}(X, E)$ y $M(X, E')$ mostrada en (Katsaras, [**7**]). De hecho, el trabajo de (Nowak, [**13**]) parte de operadores sobre $C_{rc}(X, E)$ que luego son extendidos a $C_b(X, E)$ bajo la hipótesis de que $C_b(X) \otimes E$ es β_p-denso en $C_b(X, E)$. La densidad garantiza que la extensión sea única.

11. Un resultado clave obtenido por (Vielma, [**11**]) el cual es la dualidad entre $M_p(X, E')$ y $(C_b(X, E), \beta_p)'$, permitió la representación descrita. Gracias a este trabajo fue posible extender la teoría de representación sobre $C_{rc}(X, E)$ al caso β_p-continuo sobre $C_b(X, E)$.

Apéndices

Apéndice A

Espacios Tonelados y Bornológicos

Definición A.0.1 *Sea E un espacio vectorial topológico. Un tonel es un subconjunto de E que es absolutamente convexo y cerrado. E se dice espacio tonelado si todo tonel es una vecindad de 0.*

Teorema A.0.2 *Todo espacio E localmente convexo de Baire es tonelado.*

Demostración:

Sea D un tonel del espacio E. Puesto que D es absorbente tenemos que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nD$ y dado que E es de Baire existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que mD tiene interior no vacío.

Luego existe algún $x \in E$ tal que $x \in int(mD) = m\,int(D)$, por tanto existe $y \in int(D)$ y como D es balanceado su interior también lo es, así $-y \in int\,(D)$. Por la convexidad de $int\,(D)$ se tiene que $0 = \frac{1}{2}y + \left(-\frac{1}{2}\right) y \in int\,(D)$.

$\square$

Corolario A.0.1 *Los espacios de Banach y de Fréchet son tonelados.*

Definición A.0.2 *Un espacio localmente convexo E es bornológico si todo conjunto absolutamente convexo que absorbe a todo conjunto acotado de E, es una vecindad de 0.*

Teorema A.0.3 *Todo l.c.s metrizable es bornológico.*

Demostración:

Sea E un l.c.s metrizable. Entonces E posee una base local numerable. Sin pérdida de generalidad supongamos que esta base está formada por bolas centradas en 0 y radios decrecientes $\{B_n(0, r_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Sea A un conjunto absolutamente convexo que absorbe a todo conjunto acotado de E.

Mostraremos que $B_N \subseteq NA$ para algún $N \in \mathbb{N}$. Supongamos que $B_n \nsubseteq nA$ para todo n. Existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in B_n$ y $n^{-1}x_n \notin A$. Como $\{x_n\}$ converge a 0 es acotada y por tanto es absorbida por A lo cual es una contracción pues $x_n \notin nA$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego A es una vecindad de 0.

□

Corolario A.0.2 *Los espacios de Banach y de Fréchet son bornológicos.*

Teorema A.0.4 *Sea $E(\mathcal{I})$ un espacio bornológico, sea F l.c.s. y sea u una aplicación lineal de E en F. Son equivalentes:*

(a) u es continua.

(b) Si $\{x_n\}$ es una sucesión de E que converge a 0, $\{u(x_n)\}$ converge a 0.

(c) Si B es acotado en E, $u(B)$ es acotado en F.

Demostración:

- $(a) \Rightarrow (b)$ es inmediato.

- $(b) \Rightarrow (c)$
  Sea $\{u(x_n)\}$ una sucesión en $u(B)$. Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión en B.

  Como B es acotado, $\lambda_n x_n$ converge a 0 en E para cualquier sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ que converge a 0. De (b) se tiene que $\lambda_n u(x_n)$ converge a 0 y por tanto $u(B)$ es acotado.

- $(c) \Rightarrow (a)$

  Sea V una vecindad absolutamente convexa en F. Entonces $u^{-1}(V)$ es absolutamente convexo en E. Mostraremos que $u^{-1}(V)$ absorbe todo conjunto acotado de $E(\mathcal{I})$. Sea B un conjunto acotado en E. De la hipótesis $u(B)$ es acotado en F y por tanto existe $t > 0$ tal que $u(B) \subseteq tV$. Luego $B \subseteq tu^{-1}(V)$ y así $u^{-1}(V)$ absorbe todo conjunto acotado de $E(\mathcal{I})$. Como este espacio es tonelado se concluye que $u^{-1}(V)$ es vecindad de 0 en $E(\mathcal{I})$.

$\square$

En (Schaefer, [**15** p. 132]) se muestra el siguiente resultado.

Teorema A.0.5 *Si E es l.c.s. tonelado o bornológico, entonces E es espacio Mackey.*

Apéndice B

Topología Límite Inductivo

Sean Y y B_α; $\alpha \in A$, espacios vectoriales sobre un campo K. Sean g_α aplicaciones lineales de B_α en Y.

Si τ_α es una toplogía sobre el espacio B_α, se define la topología inductiva $\mathcal{I}$ sobre Y respecto a la familia $\{(B_\alpha, \tau_\alpha, g_\alpha)\,; \alpha \in A\}$, como la topología localmente convexa más fina que hace continuas las aplicaciones $g_\alpha : (B_\alpha, \tau_\alpha) \longrightarrow (Y, \mathcal{I})$; para todo $\alpha \in A$.

Si $Y = gen\left\{\bigcup_{\alpha \in A} g_\alpha(B_\alpha)\right\}$, $\mathcal{I}$ se denomina la **Topología Límite Inductivo** sobre Y y es denotada por $\mathcal{I} = \underline{ind(B_\alpha, \tau_\alpha, g_\alpha)}$.

Al espacio Y se lo denomina el límite inductivo de los espacios B_α y de las aplicaciones g_α. Esto es denotado por $Y = (Y, \mathcal{I}) = \underline{ind(B_\alpha, g_\alpha)}$.

Una base de vecindades de 0 de esta topología está dada por la familia U de subconjuntos de Y, convexos balanceados tales que $g_\alpha^{-1}(U)$ es una vecindad de 0 en (B_α, τ_α), para cada $\alpha \in A$.

Notemos que la topología trivial, la que sólo contiene Y y ϕ, es una topología localmente convexa que hace continuas todas las aplicaciones g_α, por lo que la colección de tales topologías es no vacía y así $\mathcal{I}$ es el supremo de esta colección.

Por la forma en que se construye una topología límite inductivo, se tiene el siguiente corolario.

Corolario B.0.3 *Sea $Y = \underline{ind(B_\alpha, g_\alpha)}$ y sea F un espacio espacio localmente convexo con topología τ. Una aplicación lineal $T : Y \to F$ es continua respecto a la topología límite inductivo $\mathcal{I}$ de Y y la topología τ de F, si y sólo si las aplicaciones $T\mathsf{o}g_\alpha : B_\alpha \to F$ son continuas respecto a las topologías τ_α y τ, respectivamente, para todo $\alpha \in A$.*

Básicamente el corolario dice que la continuidad de la aplicación lineal T, siendo Y un espacio límite inductivo y F un espacio con una topología localmente convexa, equivale a la continuidad de las composiciones entre T y g_α, para todo $\alpha \in A$.

Demostración del corolario:

- Para la primera implicación tenemos por hipótesis que T es $\mathcal{I} - \tau$ continua. Además $\mathcal{I}$ hace continuas las aplicaciones $g_\alpha : (B_\alpha, \tau_\alpha) \to (Y, \mathcal{I})$. La composición de funciones continuas es continua y así se obtiene el resultado, para todo $\alpha \in A$.

- Para la segunda implicación tenemos por hipótesis que $T\mathsf{o}g_\alpha$ es $\tau_\alpha - \tau$ continua, para todo $\alpha \in A$. Sea V una $\tau-$ vecindad absolutamente convexa de 0 en F. Se tiene que $(T\mathsf{o}g_\alpha)^{-1}(V)$ es una vecindad de 0 en B_α, para todo $\alpha \in A$.

  Además $(T\mathsf{o}g_\alpha)^{-1}(V) = (g_\alpha^{-1}\mathsf{o}T^{-1})(V) = g_\alpha^{-1}(T^{-1}(V))$. Luego $T^{-1}(V)$ es una $\mathcal{I}-$ vecindad de 0 y por tanto T es continua.

$\square$

Un caso particular de topologías límite inductivo es cuando los espacios B_α son el espacio Y dotado de una topología τ_α y las aplicaciones g_α son las aplicaciones identidad Id_α.

En este caso, se afirma que $\mathcal{I} = \bigcap \tau_\alpha$.

En efecto, se requiere que $\mathcal{I}$ sea la topología localmente convexa más fina que hace continuas las aplicaciones $Id_\alpha : (Y, \tau_\alpha) \to (Y, \mathcal{I})$.

Una aplicación identidad es continua si y sólo si la topología del espacio dominio es más fina que la del espacio llegada. Esto nos dice que $\mathcal{I} \subseteq \tau_\alpha$; para todo α, por tanto $\mathcal{I} \subseteq \bigcap \tau_\alpha$.

Por otra parte, una topología límite inductivo $\mathcal{I}$ también es el supremo de todas las topologías localmente convexas sobre Y que hacen continuas las aplicaciones g_α. Digamos que estas topologías forman el conjunto $\{\beta_j; j \in J\}$.

Tenemos en este caso que $\bigcap \tau_\alpha$ es un elemento de este conjunto. Así $\bigcap \tau_\alpha \subseteq \mathcal{I}$.

Para el caso particular que hemos mostrado, diremos que $\mathcal{I}$ es el límite inductivo respecto a los espacios (Y, τ_α) y a las aplicaciones identidad Id_α.

- $\mathcal{I} = \bigcap \tau_\alpha$.

- $\mathcal{I}$ tiene una base de vecindades de 0 formada por los conjuntos $W \subseteq Y$ absolutamente convexos, tales que $Id_\alpha^{-1}(W)$ es una vecindad de 0 en (Y, τ_α), para cada $\alpha \in A$.

  Es decir, $W \subseteq Y$ es una $\mathcal{I}-$vecindad de 0 si y sólo si es absolutamente convexo y es una $\tau_\alpha-$vecindad de 0, para todo α.

Índice de Símbolos

- $\mathbb{R}$ Conjunto de los Números Reales
- $\mathbb{N}$ Conjunto de los Números Naturales
- ω Cardinalidad de $\mathbb{N}$
- (X, τ) Espacio Topológico X con topología τ
- βX Compactificación Stone-Cech de X
- νX Realcompactificación de X
- ΘX Completitud **Dieudonné** de X
- χ_A Función Característica del Conjunto A
- $C_b(X)$ Funciones Continuas y Acotadas $\mathbb{R}-$valuadas en X
- $C_b(X)^+$ Funciones Continuas y Acotadas No Negativas $\mathbb{R}-$valuadas en X
- $C_b(X, E)$ Funciones Continuas y Acotadas $E-$valuadas en X
- $C_{rc}(X, E)$ Funciones Continuas y Acotadas $E-$valuadas en X con imagen relativamente compacta en E
- $C_b(X) \otimes E$ Producto Tensor Estándar entre $C_b(X)$ y E
- $\|f\|_\infty$ Norma del supremo de f
- $\|f\|$ Función norma de f
- $\widetilde{f}$ Extensión de la función $\mathbb{R}-$valuada f en X a βX

- $\mathcal{L}(E, F'')$ Colección de Aplicaciones Lineales y Continuas de E en F''
- $Ba^*(X)$ Álgebra de Baire
- $Bo^*(X)$ Álgebra de Borel
- $Ba(X)$ $\sigma-$Álgebra de Baire
- $Bo(X)$ $\sigma-$Álgebra de Borel
- $S(X, Ba^*(X), E)$ Conjunto de Funciones Simples $E-$valuadas en X
- $B(X, Ba^*(X), E)$ Clausura de $S(X, Ba^*(X), E)$ en el conjunto de las funciones acotadas de X en E, respecto a la topología de la norma
- $\mathcal{L}_1(\mu, X, E)$ Clausura de $S(X, Ba^*(X), E)$ en un espacio seminormado, respecto a la topología de la seminorma inducida por μ
- $M(X)$ Espacio de Medidas de Baire de X en $\mathbb{R}$
- $M(X)^+$ Espacio de Medidas No Negativas de Baire de X en $\mathbb{R}$
- $M_t(X)$ Subespacio de Medidas Baire tight de X
- $M_\tau(X)$ Subespacio de Medidas Baire τ de X
- $M_\sigma(X)$ Subespacio de Medidas Baire $\sigma-$aditivas de X
- $M_p(X)$ Subespacio de Medidas Perfectas Baire de X
- $M_s(X)$ Subespacio de Medidas Separables Baire de X
- $\|.\|$ Topología de la Norma sobre $C_b(X)$ o $C_b(X, E)$
- β_0 Topología Estricta β_0 sobre $C_b(X)$ o $C_b(X, E)$
- β_τ Topología Estricta β_τ sobre $C_b(X)$ o $C_b(X, E)$
- β_1 Topología Estricta β_1 sobre $C_b(X)$ o $C_b(X, E)$
- β_p Topología Estricta β_p sobre $C_b(X)$ o $C_b(X, E)$

- τ_{pw} Topología de la Convergencia Puntual sobre $C_b(X)$ o $C_b(X,E)$
- $\mathcal{D}(\beta X)$ Colección de Conjuntos Distinguidos de $\beta X - X$
- $B_D(X)$ Colección de Funciones Acotadas $\mathbb{R}-$valuadas en βX que se desvanecen en el infinito y se anulan en D
- $\sigma(E,F)$ Topología Débil de E respecto a la dualidad $\langle E,F\rangle$
- $\tau(E,F)$ Topología Mackey de E respecto a la dualidad $\langle E,F\rangle$
- $\beta(E,F)$ Topología Fuerte de E respecto a la dualidad $\langle E,F\rangle$
- $M(X,E')$ Espacio de Medidas de $Ba^*(X)$ en E'
- $M_t(X,E')$ Subespacio de Medidas tight de $Ba^*(X)$ en E'
- $M_\sigma(X,E')$ Subespacio de Medidas $\sigma-$aditivas de $Ba^*(X)$ en E'
- $M_p(X,E')$ Subespacio de Medidas Perfectas de $Ba^*(X)$ en E'
- $|\mu|$ Variación de la medida μ
- μ^* Medida Exterior de la medida μ
- $\widetilde{|\mu|}$ Extensión de la Variación de la medida μ
- $M(X,\mathcal{L}(E,F''))$ Espacio de medidas de $Ba^*(X)$ en $\mathcal{L}(E,F'')$
- $M_p(X,\mathcal{L}(E,F''))$ Subespacio de medidas perfectas de $Ba^*(X)$ en $\mathcal{L}(E,F'')$
- $\mathbf{abco}(A)$ Cápsula Absolutamente Convexa del conjunto A
- A° Conjunto Polar de A
- $A^{\circ\circ}$ Conjunto Bipolar de A
- $\dot{\bigcup}$ Unión Disjunta
- $f_\alpha \xrightarrow{\beta} f$ Red $\{f_\alpha\}$ que converge a f en la topología β

Bibliografía

[1] R. B. Ash, Measure, Integration, and Fuctional Analysis, Academic Press, Inc., USA, 1972.

[2] S. K. Berberian, Measure and Integration, Chelsea Publishing Company, Bronx New York, 1965.

[3] S. Choo, Strict Topology on Spaces of Continuos Vector-Valued Functions, Ph. D. Thesis, University of Iowa, 1976.

[4] R. Fontenot, Strict Topology for Vector-Valued Functions, Can. J. Math.; Vol. XXVI, No. 4, 1974.

[5] L. Gillman; M. Jerison, Rings of Continuous Functions, Springer-Verlag, The University of Iowa.

[6] J. Kelley, Topología General, Editorial Universitaria de Buenos Aires, Argentina 1962.

[7] A. Katsaras, Continuous Linear Functionals on Spaces of Vector-Valued Functions, Bull. Soc. math. Grèce, Tome 15, 1974.

[8] A. Katsaras, Locally Convex Topologies on the Spaces of Continuous Vector Functions, Campinas Brasil, 1974.

[9] G. Koumoullis, Perfect, u-additive Measures and Strict Topologies, Illinois Jorunal of Matheamtics, Volume 26 Number 3, 1982.

[10] G. Koumoullis, On Perfect Measures, Transactions of the AMS, Volume 264, 1981.

[11] S. Khurana, Topologies on Spaces of Vector-Valued Continuous Functions, Transactions of the AMS, Volume 241, 1978.

[12] G. Köthe, Topological Vector Spaces I, Springer-Verlag, New York 1969.

[13] M. Nowak, Operators on Spaces of Bounded Vector-Valued Continuous Functions with Strict Topologies, Hindawi Publishing Corporation, Journal of Function Spaces, Article ID 407521, 2014.

[14] W. Rudin, Análisis Funcional, Editorial Reverté S.A., España 2002.

[15] H. H. Schaefer, Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, New York 1980.

[16] A. Schuchat, Integral Representation Theorems in Topological Vector Spaces, Transactions of the AMS, Volume 172, 1972.

[17] F. D. Sentilles, Bounded Continuous Functions on a completely regular space, Transactions of the AMS, Volume 168, 1972.

[18] F. D. Sentilles, The Strict Topology on Bounded Sets, Pacific Journal of Mathematics, Volume 34, 1970.

[19] D. Sondermann, Masse auf lokalbeschränkten Raümen. Annales de l'institut Fourier, Tome 19 No. 2, 1969.

[20] W. Summers, Separability in the Strict and Substrict Topologies, AMS, Volume 35, 1972.

[21] C. Swartz, Functional Analysis Introduction, Marcel Dekker Inc, USA 1992.

[22] J. Vielma, Vector Valued Perfect Measures and Strict Topology, Ph. D. Thesis, University of Iowa, 1986.

[23] R. Wheeler, A survey of Baire Measures and Strict Topologies, Expositiones Mathematicae, 1983.

[24] R. Wheeler, The Strict Topology for $P-$spaces, Proceedings of The American Mathematical Society, Volume 41, 1973.

[25] A. Wiweger, "Linear spaces with mixed topologies", Studia Mathematica T. XX, 1961.