



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICAS

Redistribución de Fidelidad promedio en Teleportación Cuántica

Robinson Gómez Núñez.

Profesor Guía: Dr. Luis Roa Oppliger.
Departamento de Física.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción.

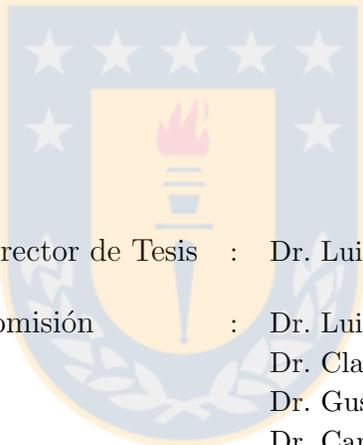
Tesis para ser presentada en Dirección de postgrado para optar al grado de
Magíster en Ciencias mención en Física

rgomez@udec.cl

ROBINSON GÓMEZ - CHILE 2015

A mi familia y Amigos





Director de Tesis : Dr. Luis Roa Oppliger.

Comisión : Dr. Luis Roa Oppliger.
Dr. Claudio Faundez Araya.
Dr. Gustavo Moreira Lima.
Dr. Carlos López Cabrera

Índice general

| | |
|--|------------|
| Agradecimientos | i |
| Resumen | ii |
| Introducción | iii |
| | |
| I Marco Teórico | 1 |
| 1. Nociones de Mecánica Cuántica | 2 |
| 1.1. Espacio de Hilbert | 2 |
| 1.1.1. Espacio de Hilbert Finito-dimensional | 3 |
| 1.1.2. Espacio de Hilbert Infinito-dimensional | 4 |
| 1.2. Postulados de la mecánica cuántica | 5 |
| 1.3. Operadores Lineales | 7 |
| 1.3.1. Operadores adjuntos y hermitianos | 9 |
| Operadores Unitarios | 10 |
| 1.3.2. Operadores de Pauli | 10 |
| 1.4. Estados Cuánticos y Operador Densidad | 11 |
| | |
| 2. Teoría de la Información Cuántica | 13 |
| 2.1. Qubit | 13 |
| 2.2. Entrelazamiento | 14 |
| 2.3. Clasificación de estados cuánticos | 16 |
| 2.3.1. Estado producto | 16 |
| 2.3.2. Estados separables | 16 |
| 2.3.3. Estados entrelazados | 17 |
| Estados de Bell | 17 |
| 2.3.4. Estado clásico | 18 |
| 2.3.5. Estado X | 18 |
| 2.4. Cuantificación del entrelazamiento | 19 |

| | |
|---|-----------|
| 2.5. Teleportación Cuántica | 21 |
| 2.5.1. Teleportación Cuántica Estándar | 21 |
| 2.5.2. Teleportación Cuántica Probabilista | 23 |
| 2.6. Fidelidad | 23 |
| 2.6.1. Fidelidad Promedio | 24 |
| | |
| II Redistribución de fidelidad media en la Teleportación Cuántica | 26 |
| | |
| 3. Redistribución de fidelidad | 27 |
| 3.1. Redistribución de la fidelidad en un proceso con un canal puro | 27 |
| 3.1.1. Proceso de Extracción de Estado con un canal puro | 28 |
| | |
| 4. Redistribución de fidelidad para estados X | 32 |
| 4.0.1. Proceso de Extracción de Estado con Estado-X como canal | 34 |
| | |
| III Conclusiones y Bibliografía | 38 |
| | |
| Bibliografía | 45 |



Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia que siempre me ha apoyado durante el estudio de esta carrera poco convencional, No solo a mi padre, mi madre y mis hermanos, sino que también a mis tíos, mis abuelos y mis primos todos fundamentales en mi desarrollo académico, social y emocional, gracias por quererme y soportarme tal como soy.

También a todos mis amigos, los que quedaron el Talca, los que fueron a otras ciudades, los que conocí en Concepción, en especial mi mejor amigo Diego, difícilmente conoceré a alguien más confiable, Ariana quien además de ser una gran amiga ha sido de gran ayuda en el desarrollo de este trabajo, Gustavo, Nicolás, Cristófer, Darwin, Evelyn, Jorge, Hugo, Andrés, Ernesto y tantos otros.

Al apoyo financiero y de exención de arancel proporcionado por Becas de Articulación Pregrado - Postgrado durante dos años de mi estadía en el programa de magister y al Proyecto FONDECYT 0000000.

Gracias al Dr. Luis Roa por ser mi tutor y un apoyo no solo con el trabajo de tesis, sino que también a nivel personal, su paciencia y disposición para recibir a un estudiante que apenas conocía; A todos los profesores que contribuyeron durante toda mi formación en particular al profesor de enseñanza básica Héctor Ilabaca quien despertó en mí, el interés por la ciencia.

Resumen

El proceso de Teleportación Cuántica permite transferir un estado cuántico desconocido entre dos sistemas espacialmente separados. En el caso de sistemas cuánticos de dos dimensionales el proceso requiere de la generación de un estado maximalmente entrelazado de dos qubits, luego, una medición conjunta sobre el qubit a teleportar y el qubit del par entrelazado, y finalmente el envío del resultado de la medición mediante un canal de comunicación clásica. Si se utiliza en lugar de un estado maximalmente entrelazado uno parcialmente entrelazado entonces, el proceso ahora será exitoso con una cierta probabilidad. llamando a este proceso Teleportación Cuántica Probabilista.

Tenemos herramientas para comparar la información enviada por este proceso con la recibida, este es el caso de la fidelidad, una "medida de similitud" que será utilizada para la comparación de los estados sean estos puros o mezcla.

En la presente tesis se aborda el estudio de la teleportación de un estado cuántico puro desconocido a través de canales parcialmente entrelazados y más adelante un estado-X; además con el uso de un protocolo de extracción de estados para mejorar mejorar la posibilidad de tener un proceso de teleportación exitoso con el uso de un canal puro, y hacer posible teleportación exitoso con el uso de un canal mezcla (estado-X).

Introducción

La Mecánica Cuántica posee como una de sus principales características la de describir fenómenos que no pueden ser descritos en el contexto de la Mecánica Clásica, uno de éstos es el entrelazamiento cuántico, el cual ha sido profundamente estudiado debido a sus propiedades no locales [1], ayudando al desarrollo de la computación cuántica, información cuántica, la criptografía cuántica y el proceso de teleportación cuántica [2] objeto de estudio de este trabajo, entre otros.

Los elementos necesarios para el desarrollo de este trabajo serán descritos en los 2 primeros capítulos, en el primero se revisarán conceptos fundamentales de mecánica cuántica, mediante la definición del espacio de Hilbert, la descripción de los postulados que dan origen a la teoría y también operaciones lineales que actúan sobre un espacio de Hilbert.

En el segundo capítulo se abordará teoría de la información cuántica, revisaremos el concepto de entrelazamiento, una clasificación de estados cuánticos, Además se introducirá el proceso de teleportación cuántica estándar y su versión probabilista, finalmente el concepto de fidelidad necesario para el análisis entre estados a teleportar y estados teleportados.

Los capítulos 3 y 4 serán utilizados para el desarrollo del trabajo junto al uso de un protocolo de extracción de estados y así mejorar los resultados obtenidos en el proceso de teleportación.

Parte I



Capítulo 1

Nociones de Mecánica Cuántica

Las leyes de la mecánica clásica fueron compiladas por Isaac Newton en 1686 en su famoso libro *Philosophiae Naturis Principia Mathematica*. Durante más de 200 años fueron utilizadas para la interpretación teórica de todas las observaciones conocidas por la física y la astronomía. Sin embargo a finales del siglo XIX surgen una serie de fenómenos que no podían ser descritos por la mecánica clásica de Newton, tales como el efecto fotoeléctrico, el decaimiento del electrón orbitando el núcleo atómico, la llamada catástrofe ultravioleta y la radiación de cuerpo negro. Debido a esto fue necesario el desarrollo de nuevas teorías capaces de describir este tipo de fenómenos, que da origen a principios del siglo XX, a la mecánica cuántica. El cambio radical de las ideas físicas del movimiento de la mecánica cuántica, exige una variación del formalismo matemático respecto a su contra parte clásica.

La mecánica cuántica se diferencia de la versión clásica principalmente porque en la mecánica cuántica no es posible conocer el estado de un sistema con total certeza solo tenemos una probabilidad de obtener dicho valor.

1.1. Espacio de Hilbert

Necesitamos definir el espacio donde se realiza la descripción matemática de los sistemas físicos en estudio [3].

Definición 1. Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial lineal finito- o infinito-dimensional con producto escalar en \mathbb{C} .

Los elementos del espacio vectorial son la representación para un sistema físico. Notemos, que en el contexto de la mecánica cuántica las cantidades físicas que queremos medir corresponden a operadores que actúan sobre los vectores o elementos del espacio de Hilbert.

1.1.1. Espacio de Hilbert Finito-dimensional

En dimensiones finitas, los vectores del espacio de Hilbert denotado por \mathcal{H} y sus productos escalares correspondientes, difieren del caso Euclideo estándar sólo por la elección de cantidades complejas \mathbb{C} , en lugar de reales \mathbb{R} . Esto significa que para los vectores $a, b \in \mathcal{H}$:

$$a = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}, \quad a^i, b^i \in \mathbb{C},$$

donde \mathcal{H} representa el espacio de Hilbert n-dimensional.

El producto escalar se puede escribir como:

$$a^i b_i = \langle a | b \rangle = \begin{pmatrix} a_1, & \dots, & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a^{i*} b^i.$$

Ahora bien, cada vez que un covector¹ cuyas componentes $a_i = a^{i*}$ son los complejos conjugados de las componentes del vector correspondiente, actúa sobre uno con componentes b^i desde el lado izquierdo, se obtiene un número complejo.

Luego es posible inferir la siguiente propiedad:

$$ab = (ba)^*. \quad (1.1)$$

Se garantiza también, que la norma de un vector sea real positiva, es decir,

$$\|a\| = \sqrt{aa} = (a_i a^i)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n a^{i*} a^i \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

Finalmente, los operadores que actúan sobre el espacio de Hilbert mapean un vector en otro vector del espacio, o sea, son transformaciones lineales que pueden ser representados por matrices:

$$a = Xb \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \dots & X_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow a^i = X^i_j b^j. \quad (1.3)$$

¹Un covector es un vector del espacio vectorial dual, que se denota por una fila en vez de una columna y por índices inferiores (covariante) en lugar de superiores (contravariante).

1.1.2. Espacio de Hilbert Infinito-dimensional

En dimensiones infinitas el espacio vectorial se generaliza a un espacio funcional, de funciones con valores complejos, que toman el rol de vectores de estado.

El producto interior se define como:

$$\langle \psi | \phi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \psi^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}), \quad (1.4)$$

donde, análogamente al caso finito dimensional, $\langle \psi |$ es un covector (o funcional lineal) actuando sobre el vector $|\phi\rangle$.

El conjunto de todas las funciones cuadrado integrables $\psi(x)$, sobre un cierto intervalo ², con:

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx < \infty \quad (1.5)$$

constituye un espacio vectorial [4].

Luego, si ψ y ϕ son cuadrado integrables y su producto interior existe (la integral (1.4) converge a un número finito), la inecuación de Schwarz toma la forma:

$$\left| \int_a^b \psi(x)^* \phi(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |\psi(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |\phi(x)|^2 dx}. \quad (1.6)$$

En particular,

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^*. \quad (1.7)$$

Adicionalmente, el producto interior de ψ con si misma,

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = \int dx |\psi(x)|^2 \quad (1.8)$$

es real positivo, y sólo es cero cuando $\psi(x) = 0$.

- Una función se dice normalizada si su producto interior con si misma es 1.
- Dos funciones son ortogonales si su producto interior es 0.

²El restringirnos a un interbalo a, b no implica perdida de generalidad, ya que, podemos hacer tender estos números a $\pm\infty$.

- Un set de funciones $\{\psi_n\}$ son ortonormales si ellas son normalizadas y mutuamente ortogonales, es decir:

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{nm}. \quad (1.9)$$

Finalmente, un set o conjunto de funciones es completo si, cualquier otra función (en el espacio de Hilbert) puede ser expresada como una combinación lineal de ellas,

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(x). \quad (1.10)$$

Por lo tanto, el Espacio de Hilbert es un espacio de funciones completo con producto escalar en \mathbb{C} .

1.2. Postulados de la mecánica cuántica

La mecánica cuántica como una teoría rigurosa posee un formalismo que permite describir ciertos sistemas físicos, entregando la base conceptual en la que estas leyes que la conforman. De esta manera, la representación de un estado cuántico se obtiene directamente a partir de los postulados de la teoría. En efecto,

Postulado 1

Cada grado de libertad de un sistema físico tiene asociado un espacio vectorial complejo con producto interno. Este espacio vectorial es llamado espacio de estados o espacio de Hilbert. Cuando el grado de libertad está aislado, su estado en un instante t es completamente descrito por un vector normalizado $|\psi(t)\rangle$ al cual se le llama estado puro por ser un vector.

Postulado 2

La dinámica del estado $|\psi(t)\rangle$ es descrita por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (1.11)$$

donde \hbar es la constante de Planck, \hat{H} es el operador hermítico llamado hamiltoniano del sistema.

Postulado 3

Una variable dinámica v de un grado de libertad es representada por un operador hermítico \hat{V} . Cada operador hermítico tiene un conjunto de estados y valores propios.

$$\begin{aligned}\hat{V}|v\rangle &= v|v\rangle, & \text{caso continuo} \\ \hat{V}|v_n\rangle &= v_n|v_n\rangle & \text{caso discreto}\end{aligned}$$

Si el grado de libertad está en el estado $|\psi(t)\rangle$ entonces al medir \hat{V} el estado del grado de libertad se proyecta en forma completamente aleatoria a un estado propio de \hat{V} y la variable dinámica tendrá el valor propio asociado al estado propio al cual se proyectó. Acá destacamos la sutil diferencia entre el caso de un observable con espectro discreto o continuo:

- **Caso discreto:** la probabilidad de que el grado de libertad, en un instante t , se proyecte a un estado propio $|v_n\rangle$, está dada por

$$\begin{aligned}p_{v_n} &= |\langle v_n|\psi(t)\rangle|^2 \\ &= \langle v_n|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|v_n\rangle \\ &= \langle \psi(t)|v_n\rangle \langle v_n|\psi(t)\rangle \\ &= \text{Tr}[(|v_n\rangle \langle v_n|) (|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|)]\end{aligned}$$

- **Caso continuo:** la probabilidad de que el grado de libertad en un instante t se proyecte a un estado propio con valor propio entre v y $v + dv$ está dada por $\rho(v)dv$ donde $\rho(v)$ representa la densidad de probabilidad de que el grado de libertad se proyecte al estado propio $|v_n\rangle$ del observable \hat{V} . La densidad de probabilidad está dada por:

$$\begin{aligned}\rho(v) &= |\langle v|\psi(t)\rangle|^2 \\ &= \langle v|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|v\rangle \\ &= \langle \psi(t)|v\rangle \langle v|\psi(t)\rangle \\ &= \text{Tr}[(|v\rangle \langle v|) (|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|)]\end{aligned}$$

Cabe destacar que es este postulado el que introduce el indeterminismo en la teoría.

Postulado 4

Dos grados de libertad A y B se comportan como un grado de libertad cuyo espacio de Hilbert está compuesto por el producto tensorial de los espacios de Hilbert de los subsistema A y B .

Cuando se conoce el estado puro $|\psi_{AB}(t)\rangle$ del sistema compuesto AB , entonces la probabilidad de proyectar a un estado propio $|v_A\rangle$ del observable \hat{V}_A en un proceso de medida realizado sobre el subsistema A , es:

$$\begin{aligned}\rho_{v_A} &= Tr[(|v_A\rangle\langle v_A|) (|\psi_{AB}(t)\rangle\langle\psi_{AB}(t)|)] \\ &= Tr \rho_{v_A} r_A Tr_B [(|v_A\rangle\langle v_A|) (|\psi_{AB}(t)\rangle\langle\psi_{AB}(t)|)] \\ &= Tr_A [|v_A\rangle\langle v_A| Tr_B (|\psi_{AB}(t)\rangle\langle\psi_{AB}(t)|)] \\ &= Tr_A [|v_A\rangle\langle v_A| \hat{\rho}_A(t)]\end{aligned}$$

De (anterior) y considerando el postulado 3 podemos ver que el estado efectivo del subsistema A es descrito por el estado mezcla ,

$$\hat{\rho}_A(t) = Tr_B [|\psi_{AB}(t)\rangle\langle\psi_{AB}(t)|] \quad (1.12)$$

Análogamente para el estado del subsistema B

$$\hat{\rho}_B(t) = Tr_A [|\psi_{AB}(t)\rangle\langle\psi_{AB}(t)|] \quad (1.13)$$

Se le llama estado mezcla cuando no puede ser representado por un solo vector como en el caso puro.

1.3. Operadores Lineales

Los operadores que actúan sobre un espacio de Hilbert transforman un estado en otro perteneciente al mismo espacio, es decir:

$$|\phi\rangle = A|\psi\rangle. \quad (1.14)$$

Por otro lado, del algebra lineal sabemos que un operador lineal entre espacios vectoriales V y W es definido como un funcional $A : V \rightarrow W$,

$$A \left(\sum_i a_i |\psi\rangle \right) = \sum_i a_i A(|\psi\rangle). \quad (1.15)$$

Ahora bien, supongamos que V , W y X son espacios vectoriales, $A : V \rightarrow W$ y $B : W \rightarrow X$ son operadores lineales, luego a partir de esto es posible definir explícitamente la composición de operadores, en particular, BA denota la composición de B con A , así, podemos actuar sobre el espacio con una n-ésima composición de operadores.

Una relación complementaria que es extremadamente útil es presentada a continuación:

$$I = \sum_j |j\rangle\langle j|, \quad (1.16)$$

donde I es el operador identidad, es decir, $I|\psi\rangle = |\psi\rangle$ para cualquier $|\psi\rangle$. La suma de la derecha es sobre las diadas $|j\rangle\langle j|$ correspondiente a los elementos $|j\rangle$ de una base ortonormal.

Usando (1.16) se tiene que:

$$|\psi\rangle = \left(\sum_j |j\rangle\langle j| \right) |\psi\rangle = \sum_j |j\rangle\langle j|\psi\rangle = \sum_j \langle j|\psi\rangle |j\rangle. \quad (1.17)$$

Los operadores también pueden ser representados por matrices, en efecto, dado un operador A y una base $\{\beta_j\}$ que no necesariamente es ortonormal, se le puede asociar una matriz cuadrada A de números definidos por A_{jk} :

$$A|\beta_k\rangle = \sum_j |\beta_j\rangle A_{jk} = \sum_j A_{jk} |\beta_j\rangle. \quad (1.18)$$

La matriz depende de la elección de la base, así como en el operador. En el caso de una base ortonormal y utilizando (1.16) se tiene,

$$A|k\rangle = IA|k\rangle = \left(\sum_j |j\rangle\langle j| \right) A|k\rangle = \sum_j |j\rangle\langle j|A|k\rangle = \sum_j \langle j|A|k\rangle |j\rangle, \quad (1.19)$$

donde $\langle j|A|k\rangle$ es el producto interior de $|j\rangle$ con $A|k\rangle$ que es equivalente a A_{jk} en la expresión (1.18). Así, $\langle j|A|k\rangle$ se conoce como un elemento de la matriz cuando se utiliza la notación de Dirac.

Cuando A se refiere a un qubit, la forma habitual de escribir la matriz en la base estándar (o computacional) es (nótese el orden de los elementos):

$$\begin{pmatrix} \langle 0|A|0\rangle & \langle 1|A|0\rangle \\ \langle 1|A|0\rangle & \langle 1|A|1\rangle \end{pmatrix}.$$

Otra aplicación de (1.16), está en escribir el elemento de matriz del producto de dos operadores en términos de los elementos matriciales individuales:

$$\langle j|AB|k\rangle = \langle j|AIB|k\rangle = \sum_m \langle j|A|m\rangle \langle m|B|k\rangle, \quad (1.20)$$

usando subíndices la ecuación queda de la forma:

$$(AB)_{jk} = \sum_m A_{jm} B_{mk}. \quad (1.21)$$

Por otra parte, la traza $Tr(A)$ de un operador A es la suma de los elementos diagonales de esta matriz, es decir:

$$Tr(A) = \sum_j \langle j|A|j\rangle = \sum_j A_{jj}. \quad (1.22)$$

Se puede demostrar que ésta traza es independiente de la base utilizada en la definición de los elementos de la matriz, en particular, no se necesita usar una base ortonormal; $\sum_j A_{jj}$ puede ser usada con los A_{jj} definidos en (1.18).

1.3.1. Operadores adjuntos y hermitianos

Los operadores usados en mecánica cuántica poseen propiedades importantes que estudiaremos en esta subsección.

Supongamos un operador A actuando sobre un espacio de Hilbert V , existe un operador lineal único A^\dagger sobre V de tal manera que, para todos los vectores $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle \in V$,

$$(|\psi\rangle, A|\phi\rangle) = (A^\dagger|\psi\rangle, |\phi\rangle), \quad (1.23)$$

este operador lineal es conocido como el adjunto o conjugado del operador A , además, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. Por convención, si $|\phi\rangle$ es un vector definimos $|\phi\rangle^\dagger \equiv \langle\phi|$, de lo que se desprende $(A|\phi\rangle)^\dagger = \langle\phi|A^\dagger$.

Se debe tener en consideración que la operación daga es antilineal, en la cual los escalares se sustituyen por sus complejos conjugados.

Un operador normal A sobre el espacio de Hilbert es uno que conmuta con su adjunto, es decir, $AA^\dagger = A^\dagger A$. Ellos tienen la propiedad de ser diagonalizados usando una base ortonormal, de la forma:

$$A = \sum_j \alpha_j |a_j\rangle\langle a_j|, \quad (1.24)$$

donde los vectores $|a_j\rangle$ son autovectores de A y los α_j son sus autovalores. Equivalentemente, la matriz de A en esta base es diagonal,

$$\langle a_j|A|a_k\rangle = \alpha_j \delta_{jk}. \quad (1.25)$$

La ec. (1.24) se conoce comunmente como la forma espectral o resolución del operador A . Ahora bien, un operador hermitico definido por la propiedad $A = A^\dagger$ es también un operador normal, siendo el análogo cuántico de un número real (en oposición a un complejo). Sus valores propios α_j son números reales.

Los términos “hermitianos y auto-adjunto” son equivalentes para un espacio de Hilbert de dimensión finita, que es el abordado en esta tesis, sin embargo, la distinción es importante para espacios infinito-dimensionales.

También existe un operador llamado proyector o más formalmente, operador proyección ortogonal, que satisface $P^2 = P$. Nótese que es un operador hermítico con autovalores 0 o 1, por lo tanto, siempre hay una base (que depende, por supuesto, del proyector) en la que su matriz es diagonal en el sentido de (1.25), con sólo 0 o 1 en la diagonal principal. Luego, una matriz siempre representa un proyector.

Operadores Unitarios

En mecánica cuántica se utilizan operadores unitarios para cambiar de una base ortonormal a otra, para representar simetrías como la de rotación y para describir algunos aspectos de la dinámica o la evolución de un sistema cuántico.

Los denominados operadores unitarios U tienen la propiedad que:

$$U^\dagger U = I = U U^\dagger. \quad (1.26)$$

Donde vemos que U conmuta con su adjunto, además es un operador normal y se puede escribir en la forma (1.24). Entonces, de (1.26) se tiene la condición: todos los valores propios de U son números complejos de magnitud 1, es decir, que se encuentran en la circunferencia unitaria en el plano complejo.

En un espacio de Hilbert de dimensión finita, con U mapeando el espacio sobre si mismo, cada igualdad en (1.26) implica la otra, por lo que basta solo considerar una de ella, $U U^\dagger = I$, para verificar si U es unitario.

1.3.2. Operadores de Pauli

Los operadores o matrices de Pauli son un conjunto de operadores hermíticos unitarios de dimensión 2^3 , definidos como

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

que poseen valores propios (+1) y (-1), su determinante $\det \sigma_k$ es -1 con $k = x, y, z$ y su traza $Tr(\sigma_k)$ es nula.

Satisfacen relaciones de conmutación y anticonmutación,

³grupo $SU(2)$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (1.28)$$

Con ϵ_{ijk} tensor antisimétrico en todos los índices,

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I, \quad (1.29)$$

de (1.28) y (1.29) se puede obtener:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij}I + i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k. \quad (1.30)$$

Si consideramos la base lógica $|0\rangle$ y $|1\rangle$ de σ_k con autovalores $(+1)$ y (-1) la acción de los operadores σ sobre los vectores de la base computadoriza es mostrada en la siguiente secuencia de igualdades:

$$\sigma_x |0\rangle = |1\rangle \quad (1.31a)$$

$$\sigma_x |1\rangle = |0\rangle \quad (1.31b)$$

$$\sigma_y |0\rangle = i|1\rangle \quad (1.31c)$$

$$\sigma_y |1\rangle = -i|0\rangle \quad (1.31d)$$

$$\sigma_z |0\rangle = +|0\rangle \quad (1.31e)$$

$$\sigma_z |1\rangle = -|1\rangle \quad (1.31f)$$

donde σ_x hace un cambio de estado (bit flip), σ_y intercambia e introduce la fase $\pm i$, y σ_z introduce la fase ± 1 (phase flip).

1.4. Estados Cuánticos y Operador Densidad

Hasta hora hemos considerado que el estado del sistema cuántico se describe por medio de un estado puro $|\psi_i\rangle$ en un espacio de Hilbert. Por lo general es estado de un sistema cuántico no es puro Sin embargo, se asume que el sistema se encuentra en uno de los estados normalizados $\{|\psi_i\rangle\}$, con una cierta probabilidad p_i respectivamente. Por lo tanto nuestro conocimiento del sistema cuántico es descrito por un ensamble de estados puros, $\{|\psi_i\rangle, p_i\}$. Si éste, esta compuesto por un sólo un estado, entonces, el estado es puro. De otra manera, el estado es mixto, es decir, una mezcla de estados puros.

Para describir un estado mixto se usa un operador en vez de un vector de estado, denominado operador o matriz densidad, denotado por ρ y tiene la siguiente forma:

$$\rho = \sum_i^n p_i |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (1.32)$$

Posee las siguientes propiedades

1. Condición de normalización

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1, \quad (1.33)$$

2. Es semidefinida positiva, para cualquier vector $|\phi\rangle$ en el espacio de los estados.

$$\langle\phi|\hat{\rho}|\phi\rangle \geq 0, \quad (1.34)$$

Cumpliendo esas condiciones, el operador densidad tiene una descomposición espectral de la forma

$$\rho = \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j|, \quad (1.35)$$

donde los vectores $|j\rangle$ son mutuamente ortogonales y los valores propios de ρ , λ_j son reales no negativos.

En general, para la traza de un operador densidad se cumple, $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1$, la igualdad se tiene solo para estados puros. Además el operador densidad es hermítico, sus elementos matriciales fuera de la diagonal principal son llamados términos de coherencia, $\rho_{nm} = \langle n|\rho|m\rangle$, y los términos diagonales $\rho_{nn} = \langle n|\rho|n\rangle$ son llamados poblaciones. Los términos de coherencia y poblaciones satisfacen la desigualdad triangular,

$$\langle n|\rho|n\rangle\langle m|\rho|m\rangle \geq |\langle n|\rho|m\rangle|^2. \quad (1.36)$$

Capítulo 2

Teoría de la Información Cuántica

2.1. Qubit

El bit es un concepto fundamental de la computación clásica y de teoría clásica de la información. La Computación cuántica y teoría cuántica de la información se basan en un concepto análogo, el bit cuántico o qubit [5, 6].

El bit clásico tiene dos posibles estados a adoptar, 0 y 1, mientras que, el qubit, puede encontrarse no solo, en los estados base $|0\rangle$ y $|1\rangle$, sino también, en las superposiciones de ambos [7],

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (2.1)$$

donde a y b son números complejos y $|a|^2 + |b|^2 = 1$ es decir esta normalizado a 1. La cantidad de información almacenable en un qubit es mayor que la del bit clásico por los coeficientes complejos que pertenecen a un conjunto continuo e infinito.

Debido a $|a|^2 + |b|^2 = 1$ es posible reescribir (2.1) como

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \quad (2.2)$$

Como $e^{i\gamma}$ es un fase global y no produce efectos observables posemos ignorarla, el estado quedan entonces de la forma:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (2.3)$$

θ y ϕ definen un punto sobre una esfera como se muestra en la figura 2.1

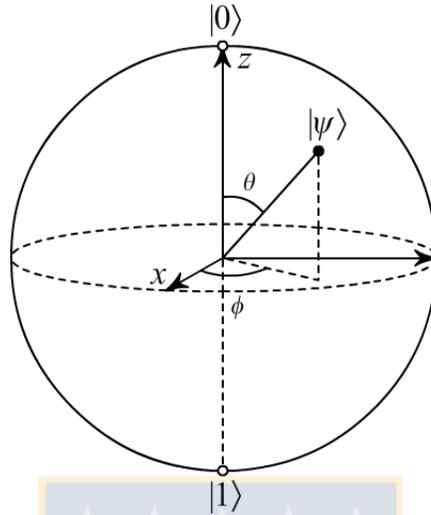


Figura 2.1: Representación de un qubit en la esfera de Bloch

Esta esfera, llamada esfera de Bloch, proporciona una visualización para el estado de un qubit. Aunque esta representación de la idea de que se puede almacenar infinita información si realizamos una medición, el resultado será 0 con probabilidad $|a|^2$ ó 1 con probabilidad $|b|^2$, obteniendo solo uno de los dos bits.

2.2. Entrelazamiento

Las correlaciones cuánticas son las que ponen de manifiesto *“una teoría de la información basada en los principios cuánticos, amplía y completa la teoría clásica de la información, del mismo modo que los números complejos amplían y completan los reales”* [8].

Son una propiedad de los sistemas cuánticos compuestos de dos o más partículas ¹. Dichas correlaciones dan origen a un sin número de aplicaciones, tanto en información cuántica como en computación cuántica, tales como: preparación remota de estados [9, 10, 11], codificación densa [12], teleportación de estados cuánticos [2], swapping de entrelazamiento [13], y criptografía cuántica [14].

¹o una partículas con más de un grado de libertad.

La siguiente revisión del concepto entrelazamiento está basada en el trabajo realizado en [15].

En 1935 E. Schrödinger se refirió al entrelazamiento como “los rasgos característicos de la mecánica cuántica” [16]. En efecto, cuando dos sistemas espacialmente separados con estados bien definidos entran en una interacción producto de fuerzas conocidas que actúan sobre ellos, luego de un tiempo finito de influencia mutua, estos sistemas se separan de manera que, ya no pueden ser descritos de la misma forma inicial dotando a cada uno de ellos con su propia representación independiente. Esta es una las característica de la teoría cuántica que genera un distanciamiento notable de las líneas del pensamiento clásico. Como resulta natural, la interacción cambia los sistemas, los conecta, los entrelaza.

Paralelamente, la interpretación de Copenhagen de la mecánica cuántica era fuertemente criticada por A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen EPR [1]. En el trabajo, ellos cuestionan si la mecánica cuántica puede ser considerada una teoría completa de la realidad física, bajo su propio paradigma realista. Considerando este contexto, plantean que en una teoría completa cada elemento de realidad física debe tener una contraparte en la teoría, por lo cual, la mecánica cuántica es sometida al siguiente criterio:

Sin perturbar de ningún modo un sistema se puede predecir con certeza, es decir, con probabilidad unitaria el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de realidad física asociado a dicha cantidad.

El argumento EPR señala que en teoría cuántica, si los correspondientes operadores de dos cantidades físicas, A y B no conmutan, entonces el conocimiento preciso de una de las cantidades excluye el conocimiento de la otra. Por lo tanto, se concluye que:

- i) la descripción de realidad de la mecánica cuántica entregada por la función de onda no es completa,
- ii) ó cuando los correspondientes operadores de dos cantidades físicas no conmutan no pueden tener realidad simultáneamente.

En el mismo año N. Bohr [17] respondió a la crítica realizada a la interpretación de Copenhagen de la teoría. El argumento de Bohr es que hay una ambigüedad en la implicancia de la expresión: “*sin perturbar de ningún modo un sistema*”. En mecánica cuántica es imposible controlar con certeza, es decir, con probabilidad 1, la reacción del sistema ante el instrumento de medida, lo cual es conocido como principio de incertidumbre o indeterminación.

“En 1952 D. Bohm introduce una nueva interpretación que pretendía revolucionar la teoría en términos de variables “ocultas” [18]. Con las cuales en principio era posible determinar en forma precisa el resultado de cada proceso individual de medida. Dice que, la teoría puede ser generalizada al considerar que las perturbaciones en el proceso de medida podrían ser eliminadas.

Según esto es concebible que el principio de incertidumbre no sea válido [15].

1964, resultó ser el año clave para esclarecer las interpretaciones de la mecánica cuántica, fue propuesta una prueba experimental por J. Bell [19], para determinar si los argumentos de EPR eran válidos. El resultado es conocido como la “desigualdad de Bell” (ver apéndice ??), que es completamente general y no depende de una teoría física en particular. Por medio de la desigualdad de Bell fue posible demostrar que al considerar estados entrelazados no se satisface la desigualdad, lo que está en acuerdo con las predicciones de la mecánica cuántica, con el argumento de Bohr, y en contradicción con las ideas de la denominada paradoja EPR. Es el requisito de localidad, o particularmente, que el resultado de una medición sobre un sistema no sea afectado por operaciones sobre sistemas distantes con los cuales ha interactuado en el pasado, el que crea la dificultad esencial. Por consiguiente, no existe una teoría física sobre variables ocultas que reproduzca todas las predicciones de la mecánica cuántica. Incluso hasta la actualidad se desarrollan trabajos que ratifican el resultado entregado por J. Bell y eliminan las posibles ambigüedades de su resultado [20].

2.3. Clasificación de estados cuánticos

Esta sección toma como base la descripción de estados cuánticos realizada en [21].

Consideremos un sistema cuántico compuesto de N subsistemas físicamente distinguibles A, B, C, \dots , cuyo operador densidad es $\hat{\rho}_{A,B,C,\dots}$, y el operador densidad del i -ésimo sistema se obtiene al trazar parcialmente sobre todos los otros subsistemas.

2.3.1. Estado producto

Se dice que $\hat{\rho}_{A,B,C,\dots}$ es un estado producto si es posible escribirlo como el producto tensorial de los respectivos operadores densidad, es decir:

$$\rho_{A,B,C,\dots} = \rho_A \otimes \rho_B \otimes \rho_{C,\dots} \quad (2.4)$$

Los estados producto no presentan correlaciones. Notemos que la mezcla de dos estados producto pertenece al conjunto de los estados separables.

2.3.2. Estados separables

Aquellos estados compuestos de dos o más partículas que no están entrelazados se les conocen como estados separables, y se caracterizan por satisfacer la desigualdad de Bell. Un estado compuesto $\hat{\rho}_{A,B,C,\dots}$, por los subsistemas A, B, C, \dots , es separable [22], si se puede escribir de la forma:

$$\hat{\rho}_{A,B,C,\dots} = \sum_i p_i \hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^i \otimes \hat{\rho}_C^i \dots, \quad (2.5)$$

donde $\hat{\rho}_A^i, \hat{\rho}_B^i, \hat{\rho}_C^i, \dots$, corresponden a los operadores densidad de los subsistemas A, B, C, \dots , respectivamente y $\sum_i p_i = 1$.

2.3.3. Estados entrelazados

Como contraparte a los estados separables que no presentan entrelazamiento, pero sí correlaciones clásicas, existen los llamados estados entrelazados o enredados.

Un estado bipartito en un espacio de Hilbert d dimensional está maximalmente entrelazado si es posible escribirlo como:

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i, i\rangle \quad (2.6)$$

o es unitariamente equivalente a (2.6).

Notemos que, un estado maximalmente entrelazado puede ser construido a partir de una base separable, es decir, $|j\rangle \otimes |k\rangle$ con $j, k = 0, \dots, d-1$, que expande un espacio de Hilbert de dos qubit,

$$|\psi_{jk}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} e^{i\frac{2\pi}{d}jn} |n\rangle \otimes |n \ominus k\rangle, \quad (2.7)$$

donde $|n\rangle \otimes |n \ominus k\rangle$ denota la diferencia $n - k$ módulo d .

Luego, un estado cuántico se encuentra maximalmente entrelazado si es posible construir a partir de él cualquier otro estado de la base usando operaciones locales y comunicación clásica (LOCC). Sabiendo que una operación local es aquella que no actúa sobre dos sistemas ² simultáneamente, sin embargo, cualesquiera otros operadores pueden ser formados a través de operaciones unitarias actuando en el estado.

En particular, cuando la dimension es 2 son los llamados estados de Bell.

Estados de Bell

Un estado de Bell o también conocido como par EPR ³ [1], es un estado que representa entrelazamiento máximo entre dos sistemas. Dichos estados de Bell forman una base ortogonal

²Para nuestros resultados esto se reduce sólo a un par de qubits.

³Eintein, Podolsky y Rosen.

denominada base de Bell:

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle \pm |1\rangle|1\rangle), \quad (2.8a)$$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|1\rangle \pm |1\rangle|0\rangle). \quad (2.8b)$$

2.3.4. Estado clásico

Un estado clásico tiene la particularidad de poseer solo correlaciones clásicas [23]. Se construye como una mezcla de estados puros no entrelazados, localmente ortogonales y es de la forma:

$$\hat{\rho}_{A,B,C,\dots} = \sum_{\vec{k}} p_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}|, \quad (2.9)$$

donde los estados $|\vec{k}\rangle$ denotan un producto tensorial de N estados $|k_i\rangle$, los cuales definen una base ortogonal en cada subsistema ⁴.

La mezcla de estados clásicos conduce en general a un estado separable, no obstante, cuando dos estados son clásicos y poseen los mismos autovalores, entonces la mezcla de ellos sigue siendo clásica.

Dado que las correlaciones cuánticas generalmente no son simétricas, es posible definir estados semi-clásicos, los cuales son clásicos tan sólo en una de sus partes.

2.3.5. Estado X

Los estados tipo- X son en la actualidad de gran interés, no sólo porque existe una expresión analítica para calcular su entrelazamiento, sino también, porque son en principio una generalización de estados maximalmente entrelazados. Motivaciones para su estudio se derivan del hecho que en general se encuentran en diferentes áreas, por ejemplo, mecanismos de decoherencia que pueden tomar qubits en un estado- X [24, 25, 26], dos átomos de dos niveles en el modelo de Tavis-Cummings pueden alcanzar una dinámica de estado- X [27], los estados de mínima y máxima discordia cuántica para un valor de entrelazamiento fijo son estados- X [28], en el campo de la materia condensada del estado fundamental de dos sitios de simetría- Z_2 de una red también está representado por un estado- X [29, 30, 31, 32].

En los siguientes párrafos, se tratan algunos de los aspectos más relevantes de los estados- X , representando dos qubit a y b .

⁴Dicho de otra manera, los autoestados del operador densidad que describe un estado clásico son factorizados y además localmente ortogonales

En la base lógica $\{|0_a\rangle|0_b\rangle, |0_a\rangle|1_b\rangle, |1_a\rangle|0_b\rangle, |1_a\rangle|1_b\rangle\}$ ⁵ el estado de dos qubits es dado por:

$$\hat{\rho}_{AB} \equiv \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Los elementos de la matriz 2.10 deben satisfacer la condición de $\sum_{j=1}^4 \rho_{jj} = 1$ y la de positividad,

$$|\rho_{14}| \leq \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} \quad \text{y} \quad |\rho_{23}| \leq \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}. \quad (2.11)$$

En adelante consideraremos los elementos diagonales fijos, es decir, la distribución de probabilidades permanece invariante, de manera que el análisis lo realizaremos en función de los elementos fuera de la diagonal principal. Éstos muestran el grado de coherencia dentro de dos subespacios ortogonales, por ejemplo, $\mathcal{H}_{00,11}$ expandido en la base $\{|0_a\rangle|0_b\rangle, |1_a\rangle|1_b\rangle\}$, y $\mathcal{H}_{01,10}$ expandido por $\{|0_a\rangle|1_b\rangle, |1_a\rangle|0_b\rangle\}$. En efecto, cuando $\rho_{14} = 0$ existe decoherencia absoluta en el subespacio $\mathcal{H}_{00,11}$, mientras que para $|\rho_{14}| = \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}$, $\hat{\rho}_{A,B}$ es un estado puro en $\mathcal{H}_{00,11}$. El elemento ρ_{23} tiene un significado similar en el subespacio $\mathcal{H}_{01,10}$. En consecuencia, los estados- X (2.10), que dependen de los módulos $|\rho_{14}|$ y $|\rho_{23}|$, van desde una superposición incoherente de los cuatro estados lógicos factorizados a una superposición de dos estados puros parcialmente entrelazados.

2.4. Cuantificación del entrelazamiento

En 1996 una buena cantidad de trabajos fueron dedicados a la búsqueda de medidas cuantitativas de entrelazamiento, en particular, para los estados mixtos de un sistema bipartito [33, 34, 35]. Tal vez la más básica de estas medidas es el entrelazamiento de formación, que abordaremos mas adelante, ésta tiene por objeto cuantificar los recursos necesarios para crear un estado entrelazado dado [35].

Un posible criterio pudo haber sido la desigualdad de Bell, sin embargo, existen estados parcialmente entrelazados que no satisfacen la desigualdad, por ejemplo, los estados de Werner [22]. Luego, la desigualdad de Bell no puede ser utilizada como medida de entrelazamiento.

Una buena medida de entrelazamiento para estados puros $|\phi_{AB}\rangle$ es la entropía de von Neumann, utilizando un operador densidad reducido, es decir, con la entropía de una parte del sistema. Así pues, se define la entropía del entrelazamiento como:

⁵o también conocida como base computacional.

$$E(|\phi\rangle\langle\phi|) = S(\text{Tr}_A|\phi\rangle\langle\phi|) = S(\text{Tr}_B|\phi\rangle\langle\phi|), \quad (2.12)$$

donde S es la entropía de von Neumann $S(\rho) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho})$ y Tr_A ó Tr_B , corresponden a las respectivas trazas parciales sobre los subsistemas A y B .

Para estados mixtos no existe una única cuantificación del entrelazamiento, pero se sabe que una posible medida de él debiese satisfacer las condiciones [36]:

- i) Para un sistema bipartito $E(\hat{\rho})$ debe ser un mapeo desde operadores densidad a números reales positivos.
- ii) Debe ser cero, si el estado es separable.
- iii) La medida no debe en promedio aumentar bajo operaciones locales y comunicación clásica (LOCC).
- iv) Para estados puros la medida de entrelazamiento se debe reducir a la entropía del entrelazamiento (2.12). Para estados maximalmente entrelazados como el de la ecuación (2.6) la medida se reduce a $\log_2 d$.

Sin embargo, algunos autores [36, 37] exigen otras propiedades que debe cumplir $E(\hat{\rho})$:

- v) Continuidad: El entrelazamiento debe converger a cero; en el límite cuando la distancia de dos operadores densidad distintos tiende a cero, es decir, $E(\hat{\rho}) - E(\hat{\sigma}) \rightarrow 0$ para $\|\hat{\rho} - \hat{\sigma}\| \rightarrow 0$.
- vi) Aditividad: Un número n de copias idénticas del estado $\hat{\rho}$ debe contener n veces el entrelazamiento de una copia, es decir, $E(\hat{\rho}^{\otimes n}) = nE(\hat{\rho})$.
- vii) Subaditividad: El entrelazamiento del producto tensorial de dos estados $\hat{\rho}$ y $\hat{\sigma}$ no debería ser mayor que la suma de los entrelazamientos de cada subsistema, es decir, $E(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}) \leq E(\hat{\rho}) + E(\hat{\sigma})$.
- viii) Convexidad: La medida del entrelazamiento debería ser una función convexa, es decir, $E(\lambda\hat{\rho} + (1-\lambda)\hat{\sigma}) \leq \lambda E(\hat{\rho}) + (1-\lambda)E(\hat{\sigma})$ para $0 < \lambda < 1$.

Desafortunadamente, existen medidas de entrelazamiento que implican extremizaciones difíciles de manejar analíticamente, el entrelazamiento de formación no es la excepción a esta regla. Sin embargo, en el caso especial de dos sistemas cuánticos binarios, como el spin de una partícula ó la polarización de un fotón - sistemas que se denominan genéricamente “qubits” - una fórmula explícita para el entrelazamiento de formación fue probada, por ejemplo, para una clase especial de matrices densidad [38]. En definitiva, Wootters generaliza y prueba la fórmula para los estados arbitrarios de dos qubits, la cual satisface las condiciones anteriores y generaliza la entropía

del entrelazamiento (2.12) para estados mixtos.

Así, si consideramos un sistema bipartito $\hat{\rho}_{AB}$, vemos que el entrelazamiento de formación se puede expresar como el mínimo sobre todas las descomposiciones del ensamble de $\hat{\rho}_{AB}$,

$$E_f(\hat{\rho}_{AB}) = \min \sum_i p_i E(\psi_i), \quad (2.13)$$

es decir, la minimización es realizada sobre todos los ensambles $\{p_i, \psi_i\}$ tal que, $\hat{\rho}_{AB} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.

La minimización de la expresión (2.13) en el caso de dos qubit fue la realizada por Wootters [39].

Luego, el entrelazamiento de formación de un estado $\hat{\rho}_{AB}$ de dos qubit se redujo a:

$$E_f(C) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C(\hat{\rho}_{AB})^2}}{2}\right), \quad (2.14)$$

donde $E(C)$ es monótonamente creciente y oscila entre 0 y 1, h es la entropía binaria $h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$, y $C(\hat{\rho}_{AB})$ es la llamada concurrencia,

$$C(\hat{\rho}) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (2.15)$$

con λ_i los autovalores en orden decreciente de la matriz hermitica $R \equiv \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}}\hat{\rho}\sqrt{\hat{\rho}}}$. De forma alternativa, se puede decir que los λ_i son las raíces cuadradas de los autovalores de la matriz Antihermitica,

$$\hat{\rho}_{AB} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \hat{\rho}_{AB}^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (2.16)$$

Observemos que cada uno de los λ_i es un número real no negativo.

2.5. Teleportación Cuántica

La Teleportación Cuántica propuesta por *Bennett et al* [2] que consiste transmitir un estado cuántico entre dos partes espacialmente separadas mediante la utilización de un canal cuántico, usualmente éste consiste en un estado maximalmente entrelazado de dos qubits.

2.5.1. Teleportación Cuántica Estándar

En algún laboratorio se encuentra Alice y en otro, alejado de Alice, se encuentra Bob. Interactuaron con anterioridad, obteniendo un estado maximalmente entrelazado que comparten. Alice ahora quiere enviar a Bob un estado cuántico desconocido usando un canal clásico de comunicación.

Entonces para realizar este proceso conocido como teleportación cuántica Alice debe medir sobre los estados que tiene en su laboratorio, la parte del par entrelazado y el estado desconocido que desea enviar, con dicha medición mediante el uso del canal clásico comunica a Bob los resultados y éste mediante el uso de Transformaciones Unitarias sobre su parte del par entrelazado, recobrar el estado a teleportar.

Tenemos un estado desconocido

$$|\psi\rangle_a = a|0\rangle_a + |1\rangle_a \quad (2.17)$$

Para el envío exitoso de la información es necesario un estado maximalmente entrelazado

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB} \quad (2.18)$$

El estado total esta dado por el producto tensorial de ambos estados, escribiendo este producto de manera conveniente se obtiene

$$|\psi_a\rangle \otimes |\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a|0_a0_A\rangle|0_B\rangle + a|0_a1_A\rangle|1_B\rangle + b|1_a0_A\rangle|0_B\rangle + b|1_a1_A\rangle|1_B\rangle) \quad (2.19)$$

Haciendo un cambio de base sobre el estado del sistema completo, en particular la base de estados maximalmente entrelazados de Bell, se obtiene

$$\begin{aligned} |\psi_a\rangle|\Psi_{AB}\rangle = & \frac{1}{2} [|\Phi_{aA}^+\rangle (a|0_B\rangle + b|1_B\rangle) + |\Phi_{aA}^-\rangle (a|0_B\rangle - b|1_B\rangle) \\ & + |\Psi_{aA}^+\rangle (b|0_B\rangle + a|1_B\rangle) + |\Psi_{aA}^-\rangle (b|0_B\rangle - a|1_B\rangle)] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Si Alice hace una medición de Bell sobre sus estados, y comunica a Bob el resultado usando el canal clásico este podrá recuperar el estado teleportado por Alice mediante una transformación unitaria que dependerá del resultado comunicado. Estas transformaciones son operadores de Pauli(1.3.2), así el estado toma la forma

$$|\psi_a\rangle|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2} [|\Phi_{aA}^+\rangle|\psi_B\rangle + |\Phi_{aA}^-\rangle\sigma_z|\psi_B\rangle + |\Psi_{aA}^+\rangle\sigma_x|\psi_B\rangle + |\Psi_{aA}^-\rangle\sigma_x\sigma_z|\psi_B\rangle] \quad (2.21)$$

Si Alice obtiene como resultado de su medición el estado $|\Phi_{aA}^+$ entonces Bob recobrará inmediatamente el estado original, con lo cual el proceso de teleportación habrá terminado, si en cambio, obtiene como resultado de su medición alguno de los otros estados de Bell, entonces Bob deberá realizar alguna transformación de Pauli para completar la teleportación.

De esta forma, se puede ver que es posible enviar información desconocida entre dos lugares espacialmente separados usando un canal clásico de comunicación y un par entrelazado de partículas producto de una interacción previa entre las partículas entrelazadas y luego separadas.

2.5.2. Teleportación Cuántica Probabilista

Desde una perspectiva mas realista y de forma experimental es muy complejo tener un canal maximalmente entrelazado (debido a imperfecciones en la fuente), es necesario entonces partir de una situación posible como es el caso de un canal puro parcialmente entrelazado en lugar de uno maximalmente entrelazado.

Tenemos un estado cuántico desconocido

$$|\psi\rangle_a = a|0\rangle_a + |1\rangle_a \quad (2.22)$$

Para el envío de la información es necesario un canal, en este caso un estado puro parcialmente entrelazado

$$|\Psi\rangle_{AB} = \alpha|00\rangle_{AB} + \beta|11\rangle_{AB} \quad (2.23)$$

Este se encuentra normalizado, es decir, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ y $|\alpha| < |\beta|$ denotando que α y β son diferente de $1/\sqrt{2}$ donde se recupera el canal maximalmente entrelazado y el calculo se reduce a lo visto en teleportación cuántica estándar. Analogamente al caso anterior el estado parcialmente entrelazado es compartido por Alice y Bob y el Estado total se puede describir como el producto tensorial de $|\psi\rangle_a$ y $|\Psi\rangle_{AB}$.

haciendo uso de (pendiente) y de forma analógica a la telportación estándar el estado total toma la forma,

$$\begin{aligned} |\psi_a\rangle \otimes |\Psi_{AB}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}} [|\Phi_{aA}^+\rangle (a\alpha|0_B\rangle + b\beta|1_B\rangle) + |\Phi_{aA}^-\rangle (a\alpha|0_B\rangle - b\beta|1_B\rangle) \\ & + |\Psi_{aA}^+\rangle (b\beta|0_B\rangle + a\alpha|1_B\rangle) + |\Psi_{aA}^-\rangle (b\beta|0_B\rangle - a\alpha|1_B\rangle)] \quad (2.24) \end{aligned}$$

Podemos ver de la ecuación anterior que si Alice realiza una medición de Bell sobre sus partículas, entonces el sistema de Bob no se proyectara al estado a teleportar, en su lugar tendremos estados con coeficientes proveniente del canal usado en el proceso.

2.6. Fidelidad

La fidelidad es una herramienta de la teoría de probabilidad, que busca la comparación entre distribuciones de probabilidad. Por ejemplo, dadas dos distribuciones p_x y q_x sobre un conjunto con índice x, la fidelidad de p y q se define como [5]

$$F(p, q) \equiv \sum_x \sqrt{p_x q_x} \quad (2.25)$$

En el caso cuántico, la fidelidad nace de la necesidad de cuantificar la cercanía entre dos estados al observar que tanta información se preserva en un proceso cuántico

Fue Uhlmann [40] quien la definió originalmente esta medida para dos estados con matrices densidad ρ_1 y ρ_2 como probabilidad de transición.

$$F(\rho, \sigma) \equiv \left(\text{Tr} \sqrt{\rho^{1/2} \sigma \rho^{1/2}} \right)^2 \quad (2.26)$$

Esta expresión cumple las siguientes propiedades:

- $0 \leq F(\rho_1, \rho_2) \leq 1$ y $F(\rho_1, \rho_2) = 1$ si y solo si $\rho_1 = \rho_2$.
- Es simétrica $F(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$.
- Si $\rho_1 = |\psi\rangle\langle\psi|$ es puro, entonces tenemos

$$F(\rho_1, \rho_2) = \langle\psi|\rho_2|\psi\rangle$$
- Convexidad si $\rho_1, \rho_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$ entonces

$$F(\rho, p_1\rho_1 + p_2\rho_2) \geq p_1F(\rho, \rho_1) + p_2F(\rho, \rho_2) \quad (2.27)$$

$$F(\rho_1, \rho_2) \geq \text{Tr}(\rho_1\rho_2) \quad (2.28)$$

- Multiplicatividad $F(\rho_1 \otimes \rho_2, \rho_3 \otimes \rho_4) = F(\rho_1, \rho_3)F(\rho_2, \rho_4)$
- La fidelidad se preserva cuando actúan evoluciones unitarias sobre los estados para cualquier operador unitario.

$$F(\rho_1, \rho_2) = F(U\rho_1U^\dagger, \rho_2U^\dagger) \quad (2.29)$$

Vale la pena señalar que en el caso de dos dimensiones es posible obtener fórmulas más simples para F como lo obtenido por Jozsa [41]

$$F(\rho_1, \rho_2) = \text{Tr}(\rho_1\rho_2) + 2(\det \rho_1 \det \rho_2)^{1/2} \quad (2.30)$$

2.6.1. Fidelidad Promedio

El desafío es transmitir un estado puro desconocido $|\psi\rangle$ con la mayor fidelidad posible. Debido a que generalmente el canal usado para el proceso de teleportación no es maximalmente entrelazado el estado recibido es diferente al enviado. Por lo tanto, considerando total ignorancia acerca el estado emitido $|\psi\rangle$ suponemos que se trata de cualquier estado del espacio de Hilbert, cada uno con una misma densidad de probabilidad $\wp = 1/2\pi$

En consecuencia, la fidelidad media f dada por el promedio de F en todos los posibles estados $\{|\psi\rangle\}$, se vuelve

$$f = \int \wp F d\psi \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle \psi | \rho | \psi \rangle |\langle 0 | \psi \rangle| d|\langle 0 | \psi \rangle| d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.32)$$

donde los θ_i son las dos fases del estado $|\psi\rangle$ y $|\langle 0 | \psi \rangle| d|\langle 0 | \psi \rangle| d\theta_1 d\theta_2$ es el elemento de volumen del estado espacio definido por los tres parámetros ($|\langle 0 | \psi \rangle|, \theta_1, \theta_2$). Supongamos que un emisor tiene un solo sistema y desea transferir un estado desconocido $|\psi\rangle$ a un receptor, teniendo sólo la comunicación clásica entre ellos. El proceso más elemental que el receptor puede hacer es medir un observable y enviar por medio de un bit clásico un 0 si el resultado es $|0\rangle$ o un 1 si es $|1\rangle$, donde $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son los estados propios de lo observable previamente acordado entre ellos. De este modo, el receptor recibe el estado $|0\rangle$ con probabilidad $|\langle 0 | \psi \rangle|^2$ y $|1\rangle$ con probabilidad $|\langle 1 | \psi \rangle|^2$, en lugar de $|\psi\rangle$. En este caso, la fidelidad media está dada por

$$\begin{aligned} f &= \int \wp \langle \psi | \left(|\langle 0 | \psi \rangle|^2 |0\rangle\langle 0| + |\langle 1 | \psi \rangle|^2 |1\rangle\langle 1| \right) | \psi \rangle d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[|\langle 0 | \psi \rangle|^4 + \left(1 - |\langle 0 | \psi \rangle|^2 \right)^2 \right] |\langle 0 | \psi \rangle| d|\langle 0 | \psi \rangle| d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (2.33)$$

lo que significa que el valor $2/3$ está garantizada por un proceso elemental de la transferencia de la información. En consecuencia podemos decir que un proceso para la transferencia de información no es elemental si su fidelidad media es superior a $2/3$.

Parte II

Redistribución de fidelidad media en la Teleportación Cuántica



Capítulo 3

Redistribución de fidelidad

3.1. Redistribución de la fidelidad en un proceso con un canal puro

Ahora abordaremos aspectos del protocolo de teleportación para estados puros, dejando para el siguiente capítulo una generalización a estados mixtos, en particular, estados tipo-X. Nos centraremos en el estudio de la fidelidad cuántica, cantidad da cuenta de la "similitud" de un par de estados.

Con el fin de introducir los elementos básicos y las operaciones revisamos el protocolo teleportación con el canal cuántico puro $|C_{AB}\rangle = \alpha|0\rangle|0\rangle + \beta|1\rangle|1\rangle$ donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ son los estados propios de σ_z operador de Pauli, $|i\rangle|j\rangle$ denota el producto tensorial del estado $|i\rangle$ del sistema A y el estado $|j\rangle$ del sistema B . Dado que cualquiera de las fases en el canal puede ser removido por una transformación unitaria local sin pérdida de generalidad, consideramos las amplitudes α y β son números reales no negativos y $\alpha \leq \beta$. El canal $|C_{AB}\rangle$ está normalizado, es decir, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

La teleportación cuántica probabilista, de un estado desconocido $|\psi\rangle$ del sistema de a , se muestra en la siguiente identidad,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle|C_{AB}\rangle &= \sqrt{\frac{\bar{p}}{2}}|\Phi_{aA}^+\rangle|\bar{\psi}\rangle + \sqrt{\frac{\bar{p}}{2}}|\Phi_{aA}^-\rangle\sigma_z|\bar{\psi}\rangle \\ &+ \sqrt{\frac{\check{p}}{2}}|\Psi_{aA}^+\rangle\sigma_x|\check{\psi}\rangle + \sqrt{\frac{\check{p}}{2}}|\Psi_{aA}^-\rangle\sigma_x\sigma_z|\check{\psi}\rangle, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $|\Phi_{aA}^\pm\rangle$ y $|\Psi_{aA}^\pm\rangle$ son los estados de bell del sistema bipartito aA . De la ecuación (3.1) Se entiende que al realizar de una medición proyectiva sobre los estados de Bell del sistema aA , en el sistema B también se proyectan sobre las salidas $|\bar{\psi}\rangle$ con probabilidad $\bar{p}/2$, $\sigma_z|\bar{\psi}\rangle$ con probabilidad $\bar{p}/2$, $\sigma_x|\check{\psi}\rangle$ con probabilidad $\check{p}/2$, y $\sigma_x\sigma_z|\check{\psi}\rangle$ con probabilidad $\check{p}/2$, donde

$$|\bar{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{p}}} (\alpha\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + \beta\langle 1|\psi\rangle|1\rangle), \quad (3.2)$$

$$\bar{p} = |\alpha|^2 |\langle 0|\psi\rangle|^2 + |\beta|^2 |\langle 1|\psi\rangle|^2,$$

$$|\check{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\check{p}}} (\beta\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + \alpha\langle 1|\psi\rangle|1\rangle), \quad (3.3)$$

$$\check{p} = 1 - \bar{p}.$$

El receptor teniendo el sistema B y, recibiendo el resultado de la medición del sistema aA , puede remover la transformación unitaria σ_z , σ_x o $\sigma_x\sigma_z$ con el fin de recuperar los estados $|\bar{\psi}\rangle$ o $|\check{\psi}\rangle$. Vale la pena mencionar aquí que si $\beta = |\beta| e^{i\theta_\beta}$ es complejo debemos introducir en (3.1), el operador unitario $e^{-i(\theta_\beta+\pi)/2} e^{i(\theta_\beta+\pi)\sigma_z/2}$ en lugar de σ_z . Nótese que, cuando $\alpha = \beta$, el canal se vuelve un estado de Bell, los estados $|\bar{\psi}\rangle$ y $|\check{\psi}\rangle$ se vuelven $|\psi\rangle$ que es el estado para ser teleportado del sistema aA al sistema B . Por consiguiente, después remover de los operadores unitarios, el receptor tiene dos posibles salidas, $|\bar{\psi}\rangle$ con probabilidad \bar{p} o $|\check{\psi}\rangle$ con probabilidad \check{p} . En este caso, la fidelidad promedio sobre las dos salidas, cada una con una probabilidad asociada es

$$f = \int \wp \left(\bar{p} |\langle \psi | \bar{\psi} \rangle|^2 + \check{p} |\langle \psi | \check{\psi} \rangle|^2 \right) d\psi \quad (3.4)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{C}{3} \quad (3.5)$$

donde $C = 2\alpha\beta$ es la concurrencia del canal $|\Phi_{AB}^+\rangle$. Adicionalmente, observamos que ambas salidas, $|\bar{\psi}\rangle$ y $|\check{\psi}\rangle$, tienen la misma fidelidad normalizada $\bar{f} = \int \wp \bar{p} |\langle \psi | \bar{\psi} \rangle|^2 d\psi / \int \wp \bar{p} d\psi = \check{f} = \int \wp \check{p} |\langle \psi | \check{\psi} \rangle|^2 d\psi / \int \wp \check{p} d\psi = f$.

De las anteriores expresiones se interpreta lo siguiente:

- Cuando el canal puro carece de entrelazamiento, es decir $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, entonces f toma el valor mínimo $2/3$
- La fidelidad media es de 1 sólo para $C = 1$, lo que corresponde al caso de un canal máximamente entrelazado.

Por lo tanto, nos encontramos con que la correlación de entrelazamiento contribuye únicamente al tercio superior en la fidelidad promedio, los dos tercios inferiores están garantizados sin ninguna correlación. En otras palabras para la teleportación con un canal de estado puro con entrelazamiento diferente de cero, el proceso ya no es elemental.

3.1.1. Proceso de Extracción de Estado con un canal puro

Ahora, con el fin de redistribuir la fidelidad en cada uno de las salidas, $|\bar{\psi}\rangle$ y $|\check{\psi}\rangle$, aplicamos un proceso de extracción de estado (PEE). Este proceso tiene un qubit auxiliar b inicialmente

en el estado $|0\rangle$, para cada salida es necesario aplicar una transformación unitaria diferente, es decir para $|\bar{\psi}\rangle$ se aplica \bar{U}_{Bb} sobre el producto tensorial $|\bar{\psi}\rangle|0\rangle$, donde \bar{U}_{Bb} es

$$\begin{aligned}\bar{U}_{Bb} &= |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U_b, \\ U_b|0\rangle &= \frac{\alpha}{\beta}|0\rangle - \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}}|1\rangle, \\ U_b|1\rangle &= \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}}|0\rangle + \frac{\alpha}{\beta}|1\rangle,\end{aligned}\tag{3.6}$$

Así, tenemos que

$$\bar{U}_{Bb}|\bar{\psi}\rangle|0\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{\bar{p}}}|0\rangle|\psi\rangle|0\rangle - \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\bar{p}}}|1\rangle|\psi\rangle|1\rangle|\psi\rangle\tag{3.7}$$

De la ecuación (3.7) nos damos cuenta de que el estado desconocido $|\psi\rangle$ se puede recuperar mediante la proyección del sistema auxiliar b en el estado $|0\rangle$, de lo contrario el sistema B se proyecta sobre el estado $|1\rangle$. La probabilidad condicional de extracción $|\psi\rangle$, para este caso, es α^2/\bar{p} .

Si el resultado es $|\check{\psi}\rangle$ entonces, para la extracción $|\psi\rangle$ es necesario aplicar la transformación unitaria $\check{U}_{Bb} = \sigma_x^{(B)}\bar{U}_{Bb}\sigma_x^{(B)}$ sobre el producto tensorial $|\check{\psi}_B\rangle|0\rangle$. Así, en este caso tenemos,

$$\check{U}_{Bb}|\check{\psi}\rangle|0\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{\check{p}}}|0\rangle|\psi\rangle|0\rangle - \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\check{p}}}|0\rangle|\psi\rangle|0\rangle|1\rangle\tag{3.8}$$

Una vez más el estado $|\psi\rangle$ se recupera mediante la proyección del sistema auxiliar b en el estado $|0\rangle$, de lo contrario el sistema B se proyecta sobre el estado $|0\rangle$. En este caso la probabilidad condicional de extracción $|\psi\rangle$ es α^2/\check{p} . La probabilidad total de extracción de $|\psi\rangle$ es

$$\begin{aligned}p_{ext} &= \bar{p}\frac{\alpha^2}{\bar{p}} + \check{p}\frac{\alpha^2}{\check{p}} \\ &= 2\alpha^2 \\ &= 1 - \sqrt{1 - C^2}\end{aligned}\tag{3.9}$$

Ambas salidas contribuyen con la misma probabilidad α^2 de lograr con éxito el proceso de teleportación cuántica, es decir, un resultado que tiene fidelidad máxima igual a 1. Sin embargo, cuando el PEE falla, hay dos resultados posibles, $|1\rangle$ o $|0\rangle$, que tienen fidelidad $1/2$. Por otro lado, la fidelidad promedio total, en este caso, viene dada por

$$\begin{aligned}
f &= \int \varrho d\psi \left\{ \bar{p} \left[\frac{\alpha^2}{\bar{p}} |\langle \psi | \psi \rangle|^2 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\bar{p}} \right) |\langle \psi | 1 \rangle|^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \dot{p} \left[\frac{\alpha^2}{\dot{p}} |\langle \psi | \psi \rangle|^2 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\dot{p}} \right) |\langle \psi | 0 \rangle|^2 \right] \right\}, \\
&= 1 - \frac{\sqrt{1 - C^2}}{3}
\end{aligned}$$

A partir de estas expresiones que vemos lo siguiente:

- Después de aplicar el PEE ambas salidas, $|\bar{\psi}\rangle$ y $|\dot{\psi}\rangle$, contribuyen con el mismo valor $f/2$ a la fidelidad promedio total; cada salida contribuye con un estado de fidelidad media 1 y otro con fidelidad media 1/2. Por lo tanto, el PEE distribuye la fidelidad promedio de manera similar en el interior de cada una de las salidas.
- La fidelidad media es de 1 sólo para $C = 1$, que corresponde al caso conocido de un canal máximamente entrelazado (Estados de Bell).
- La fidelidad media total f alcanza su valor mínimo $2/3$ cuando $C = 0$, que corresponde a un canal puro sin entrelazamiento [42]. Una vez más el entrelazamiento contribuye sólo a la tercera superior en la fidelidad promedio del estado teleportado.
- La fidelidad promedio total del proceso de teleportación con un PEE es menor que uno donde no se utiliza PEE. Sin embargo, el proceso proceso de teleportación con PEE permite la obtención de un estado de fidelidad 1 con probabilidad $p_{ext} = 1 - \sqrt{1 - C^2}$.

Por lo tanto, el PEE redistribuye la fidelidad promedio total generando una salida con fidelidad promedio igual a 1 con probabilidad $2\alpha^2$ al costo de generar también dos salidas con fidelidad promedio 1/2, y la disminución de la fidelidad total promedio de $(2 + C)/3$ a $1 - \sqrt{1 - C^2}/3$. La Figura (3.1) ilustra este efecto en la redistribución de la fidelidad media total.

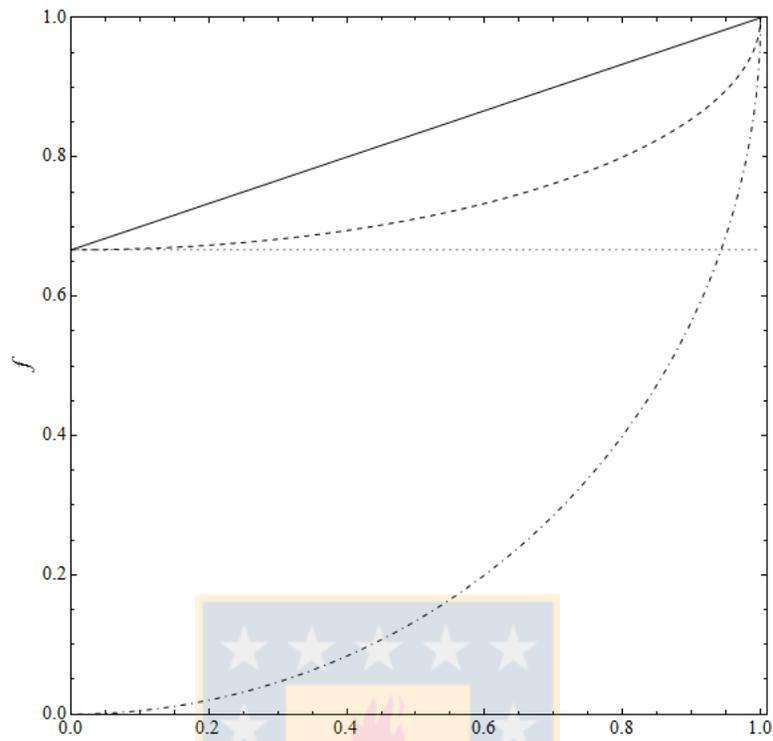


Figura 3.1: línea continua: fidelidad promedio total sin PEE, línea discontinua: fidelidad promedio total con PEE, línea discontinua y punteada: probabilidad de extracción exitosa en PEE, línea punteada: $f = 2/3$

Capítulo 4

Redistribución de fidelidad para estados X

Estados iniciales de Bell sometidos a mecanismos de decoherencia no markovianos evolucionan a Estados- X estacionarios [43] esto sumado a la dificultad del uso de estados puros de forma experimental da lugar a estudiar el proceso de teleportación con estados- X . Estudiemos ahora el mismo protocolo con un estado- X como canal cuántico en lugar de un canal puro. Consideramos que el sistema A y B están compartiendo el siguiente estado, un estado- X llena dos subespacios ortogonales, específicamente $\mathcal{H}_{00,11}$ expandido sobre la base $\{|0\rangle|0\rangle, |1\rangle|1\rangle\}$ y $\mathcal{H}_{01,10}$ expandido sobre $\{|0\rangle|1\rangle, |1\rangle|0\rangle\}$ la forma de X surge porque tiene coherencia cero entre los elementos de esos dos subespacios. Por lo tanto, consideramos que el sistema A y B están compartiendo el siguiente estado,

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{AB} = & \rho_{11}|00\rangle\langle 00| + \rho_{14}|00\rangle\langle 11| \\ & + \rho_{22}|01\rangle\langle 01| + \rho_{23}|01\rangle\langle 10| \\ & + \rho_{32}|10\rangle\langle 01| + \rho_{33}|10\rangle\langle 10| \\ & + \rho_{41}|11\rangle\langle 00| + \rho_{44}|11\rangle\langle 11|.\end{aligned}$$

Los elementos no diagonales ρ_{14} y ρ_{23} números reales y positivos. Dado que el canal cuántico considerado para el estado puro está en el subespacio $\mathcal{H}_{00,11}$ aquí consideramos como el subespacio principal es decir, el entrelazamiento de $\rho_{\hat{A}B}$ es dado por la concurrencia

$$C = \max\{0, C_{14}\},$$

donde

$$C_{14} = 2(\rho_{14} - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}).$$

Se asume que $C_{14} \geq C_{23} = 2(\rho_{23} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}})$ y cuando ambas, C_{14} y C_{23} , son menores que cero entonces el canal carece de entrelazamiento y es separable. Si $C_{14} > 0$ entonces $C = C_{14}$.

Mediante la aplicación del proceso de teleportación estándar, es decir, el sistema bipartito aA se mide de una manera tal que se puede proyectar en uno de los cuatro estados de Bell $\{|\phi_{aA}^\pm\rangle, |\psi_{aA}^\pm\rangle\}$, entonces el sistema B también se proyecta sobre uno de los cuatro estados $\bar{\rho}_B^\pm$ con probabilidad $\bar{p}/2$ o $\check{\rho}_B^\pm$ con probabilidad $\check{p}/2$, que se obtiene de

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_B^\pm &= \frac{\langle\phi_{aA}^\pm|(|\psi_a\rangle\langle\psi_a| \otimes \hat{\rho}_{AB})|\phi_{aA}^\pm\rangle}{Tr\langle\phi_{aA}^\pm|(|\psi_a\rangle\langle\psi_a| \otimes \hat{\rho}_{AB})|\phi_{aA}^\pm\rangle}, \\ &= \sigma_z^{(1\mp 1)/2} \bar{\rho}_B \sigma_z^{(1\mp 1)/2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\check{\rho}_B^\pm &= \frac{\langle\psi_{aA}^\pm|(|\psi_a\rangle\langle\psi_a| \otimes \hat{\rho}_{AB})|\psi_{aA}^\pm\rangle}{Tr\langle\psi_{aA}^\pm|(|\psi_a\rangle\langle\psi_a| \otimes \hat{\rho}_{AB})|\psi_{aA}^\pm\rangle}, \\ &= \sigma_z^{(1\mp 1)/2} \sigma_x \check{\rho}_B \sigma_x \sigma_z^{(1\mp 1)/2},\end{aligned}$$

$$\bar{p} = (\rho_{11} + \rho_{22}) |\langle 0|\psi_a\rangle|^2 + (\rho_{33} + \rho_{44}) |\langle 1|\psi_a\rangle|^2,$$

$$\check{p} = (\rho_{11} + \rho_{22}) |\langle 1|\psi_a\rangle|^2 + (\rho_{33} + \rho_{44}) |\langle 0|\psi_a\rangle|^2,$$

En la segunda etapa, una vez conocido el resultado de la medición se eliminan los unitarios, por lo que el receptor puede tener con probabilidad \bar{p} el estado

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_B &= \frac{1}{\bar{p}} \left[\left(\rho_{11} |\langle 0|\psi\rangle|^2 + \rho_{44} |\langle 1|\psi\rangle|^2 \right) |\bar{\psi}\rangle\langle\bar{\psi}| \right. \\ &\quad - (\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14}) (\langle 0|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle|0\rangle\langle 1| + \langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle|1\rangle\langle 0|) \\ &\quad + \rho_{33} |\langle 1|\psi\rangle|^2 |0\rangle\langle 0| + \rho_{22} |\langle 0|\psi\rangle|^2 |1\rangle\langle 1| \\ &\quad \left. + \rho_{32} \langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle|0\rangle\langle 1| + \rho_{23} \langle 0|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle|1\rangle\langle 0| \right],\end{aligned}$$

y con probabilidad \check{p} el estado

$$\begin{aligned}\check{\rho}_B &= \frac{1}{\check{p}} \left[\left(\rho_{44} |\langle 0|\psi\rangle|^2 + \rho_{11} |\langle 1|\psi\rangle|^2 \right) |\check{\psi}\rangle\langle\check{\psi}| \right. \\ &\quad - (\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} - \rho_{14}) (\langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle|1\rangle\langle 0| + \langle 0|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle|0\rangle\langle 1|) \\ &\quad + \rho_{22} |\langle 1|\psi\rangle|^2 |0\rangle\langle 0| + \rho_{23} \langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle|0\rangle\langle 1| \\ &\quad \left. + \rho_{32} \langle 0|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle|1\rangle\langle 0| + \rho_{33} |\langle 0|\psi\rangle|^2 |1\rangle\langle 1| \right],\end{aligned}$$

donde se han definido los estados puros

$$|\bar{\psi}\rangle = \frac{\sqrt{\rho_{11}}\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + \sqrt{\rho_{44}}\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{\rho_{11}|\langle 0|\psi\rangle|^2 + \rho_{44}|\langle 1|\psi\rangle|^2}},$$

$$|\ddot{\psi}\rangle = \frac{\sqrt{\rho_{44}}\langle 0|\psi\rangle|0\rangle + \sqrt{\rho_{11}}\langle 1|\psi\rangle|1\rangle}{\sqrt{\rho_{44}|\langle 0|\psi\rangle|^2 + \rho_{11}|\langle 1|\psi\rangle|^2}}.$$

La fidelidad promedio de los estados de salida y en los todos los posibles estados desconocidos $|\psi\rangle$ para ser teleportados, viene dada por

$$\begin{aligned} f &= \int \wp d\psi (\bar{p}\langle\psi|\bar{\rho}_B|\psi\rangle + \check{p}\langle\psi|\check{\rho}_B|\psi\rangle), \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} [2\rho_{14} - (\rho_{22} + \rho_{33})], \\ &= \frac{2}{3} + \frac{C_{14} - (\sqrt{\rho_{22}} - \sqrt{\rho_{33}})^2}{3}, \end{aligned}$$

Así, nos damos cuenta de que el entrelazamiento es necesario, pero no suficientes para obtener una fidelidad promedio superior a $2/3$. En concreto, nos encontramos con un valor umbral de la concurrencia,

$$C_{X,th} = (\sqrt{\rho_{22}} - \sqrt{\rho_{33}})^2, \quad (4.1)$$

con el fin sobrepasar la fidelidad mínima $2/3$, es decir, el proceso es no elemental cuando, $C \geq C_{th}$. f y C_{th} no dependen de los elementos ρ_{23} y ρ_{32} , pero si de los elementos diagonales del el subespacio $\mathcal{H}_{01,10}$.

De esta expresión encontramos efectos interesantes:

- La fidelidad promedio del protocolo de teleportación de un estado puro, se obtiene con $\rho_{11} = \alpha^2$, $\rho_{44} = \beta^2$, $\rho_{14} = \rho_{41} = \alpha\beta$, $\rho_{22} = \rho_{33} = 0$.
- La probabilidad $\rho_{22} + \rho_{33}$ en el subespacio $\mathcal{H}_{01,10}$ puede causar que la fidelidad mínima sea mas que $2/3$ cuando $\rho_{22} + \rho_{33} > 2Re\rho_{41}$. De esta forma hay una competencia entre la coherencia por el aumento de f contra la probabilidad en $\mathcal{H}_{01,10}$ por la disminución de f .

Finalmente podemos ver que la fidelidad promedio disminuye a medida que un mecanismo de decoherencia toma el término $|\rho_{41}|$ desde $\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}$ a 0.

4.0.1. Proceso de Extracción de Estado con Estado-X como canal

Ahora apliquemos el PEE descrito anteriormente para un canal puro , se debe sustituir dentro de las transformaciones unitarias \bar{U}_{Bb} y \check{U}_{Bb} el termino α/β por $\sqrt{\rho_{11}/\rho_{44}}$, donde se asume $\rho_{11} < \rho_{44}$.

Si la salida es $\bar{\rho}_B$ entonces transformamos $\bar{\rho}_B \otimes |0\rangle\langle 0|$ mediante \bar{U}_{Bb} . Después de aplicar \bar{U}_{Bb} el σ_z observable del sistema auxiliar b se mide en base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, por lo tanto se calcula sólo los resultados $\bar{\rho}_{B,0_b}$ y $\bar{\rho}_{B,1_b}$.

Específicamente tenemos

$$\begin{aligned}
\bar{\varrho}_{B,0_b} &= \frac{\langle 0_b | \bar{U}_{Bb} \bar{\varrho}_B \otimes |0\rangle \langle 0| \bar{U}_{Bb}^\dagger |0_b\rangle}{\text{Tr} \langle 0_b | \bar{U}_{Bb} \bar{\varrho}_B \otimes |0\rangle \langle 0| \bar{U}_{Bb}^\dagger |0_b\rangle}, \\
&= \frac{\rho_{11}}{p\bar{p}} \left[|\psi\rangle \langle \psi| \right. \\
&\quad - \left(1 - \frac{\rho_{14}}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}} \right) \langle 0|\psi_a\rangle \langle \psi_a|1\rangle |0\rangle \langle 1| \\
&\quad - \left(1 - \frac{\rho_{41}}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}} \right) \langle 1|\psi_a\rangle \langle \psi_a|0\rangle |1\rangle \langle 0| \\
&\quad + \frac{\rho_{32}}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}} \langle 1|\psi_a\rangle \langle \psi_a|0\rangle |0\rangle \langle 1| + \frac{\rho_{23}}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}} \langle 0|\psi_a\rangle \langle \psi_a|1\rangle |1\rangle \langle 0| \\
&\quad \left. + \frac{\rho_{33}}{\rho_{11}} |\langle 1|\psi_a\rangle|^2 |0\rangle \langle 0| + \frac{\rho_{22}}{\rho_{44}} |\langle 0|\psi_a\rangle|^2 |1\rangle \langle 1| \right],
\end{aligned}$$

con probabilidad condicional p

$$p = \frac{1}{\bar{p}} \left(\rho_{11} + \rho_{33} |\langle 1|\psi_a\rangle|^2 + \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} |\langle 0|\psi_a\rangle|^2 \right),$$

y

$$\begin{aligned}
\bar{\varrho}_{B,1_b} &= \frac{\langle 1_b | \bar{U}_{Bb} \bar{\varrho}_B \otimes |0\rangle \langle 0| \bar{U}_{Bb}^\dagger |1_b\rangle}{\text{Tr} \langle 1_b | \bar{U}_{Bb} \bar{\varrho}_B \otimes |0\rangle \langle 0| \bar{U}_{Bb}^\dagger |1_b\rangle}, \\
&= \frac{1}{(1-p)\bar{p}} \left[\left((\rho_{44} - \rho_{11}) |\langle 1|\psi_a\rangle|^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\rho_{22} - \frac{\rho_{22}\rho_{11}}{\rho_{44}} \right) |\langle 0|\psi_a\rangle|^2 \right] |1\rangle \langle 1|, \\
&= |1\rangle \langle 1|
\end{aligned}$$

con probabilidad condicional $1-p$. Del mismo modo, si el resultado es $\bar{\varrho}_B$ transformamos $\bar{\varrho}_B \otimes |0\rangle \langle 0|$ mediante el uso de \bar{U}_{Bb} y por lo tanto se calcula sólo los dos resultados posibles, es decir, $\bar{\varrho}_{B,0_b}$ y $\bar{\varrho}_{B,1_b}$, esos estados son,

$$\begin{aligned}
\ddot{\bar{Q}}_{B,0_b} &= \frac{\langle 0_b | \ddot{U}_{Bb} \ddot{Q}_B \otimes |0\rangle \langle 0 | \ddot{U}_{Bb}^\dagger |0_b\rangle}{Tr \langle 0_b | \ddot{U}_{Bb} \ddot{Q}_B \otimes |0\rangle \langle 0 | \ddot{U}_{Bb}^\dagger |0_b\rangle}, \\
&= \frac{1}{q\bar{p}} [\rho_{11} |\psi\rangle \langle \psi| \\
&\quad - \rho_{11} \left(1 - \frac{\rho_{41}}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}}\right) \langle 0 | \psi_a \rangle \langle \psi_a | 1 \rangle |0\rangle \langle 1| \\
&\quad - \rho_{11} \left(1 - \frac{\rho_{14}}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}}\right) \langle 1 | \psi_a \rangle \langle \psi_a | 0 \rangle |1\rangle \langle 0| \\
&\quad + \frac{\sqrt{\rho_{11}\rho_{23}}}{\sqrt{\rho_{44}}} \langle 1 | \psi_a \rangle \langle \psi_a | 0 \rangle |0\rangle \langle 1| + \frac{\sqrt{\rho_{11}\rho_{32}}}{\sqrt{\rho_{44}}} \langle 0 | \psi_a \rangle \langle \psi_a | 1 \rangle |1\rangle \langle 0| \\
&\quad + \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} |\langle 1 | \psi_a \rangle|^2 |0\rangle \langle 0| + \rho_{33} |\langle 0 | \psi_a \rangle|^2 |1\rangle \langle 1|],
\end{aligned}$$

con probabilidad condicional q

$$q = \frac{1}{\bar{p}} \left(\rho_{11} + \rho_{33} |\langle 0 | \psi_a \rangle|^2 + \frac{\rho_{11}}{\rho_{44}} \rho_{22} |\langle 1 | \psi_a \rangle|^2 \right),$$

y

$$\begin{aligned}
\ddot{Q}_{B,1_b} &= \frac{\langle 1_b | \ddot{U}_{Bb} \ddot{Q}_B \otimes |0\rangle \langle 0 | \ddot{U}_{Bb}^\dagger |1_b\rangle}{Tr \langle 1_b | \ddot{U}_{Bb} \ddot{Q}_B \otimes |0\rangle \langle 0 | \ddot{U}_{Bb}^\dagger |1_b\rangle}, \\
&= \frac{1}{\bar{p}(1-q)} \left[(\rho_{44} - \rho_{11}) |\langle 0 | \psi_a \rangle|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\rho_{22} - \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}} \right) |\langle 1 | \psi_a \rangle|^2 \right] |0\rangle \langle 0|, \\
&= |0\rangle \langle 0|
\end{aligned}$$

con probabilidad condicional $1 - q$. Observamos que la extracción de las salidas $\bar{Q}_{B,0_b}$ y $\ddot{Q}_{B,0_b}$ son estados mixtos del estado deseado $|\psi\rangle \langle \psi|$ con otros términos provenientes del subespacio $\mathcal{H}_{01,10}$ y la falta parcial de coherencia en el subespacio $\mathcal{H}_{00,11}$. Por lo tanto la probabilidad de cuasi-extraer $|\psi\rangle \langle \psi|$ es

$$\begin{aligned}
p_{\sim ext} &= \bar{p}p + \bar{p}q, \\
&= 2\rho_{11} + \rho_{33} + \frac{\rho_{11}\rho_{22}}{\rho_{44}}.
\end{aligned}$$

y la fidelidad promedio de este proceso está dada por

$$\begin{aligned}
f_{X-PEE} &= \int \wp [\bar{p} (p \langle \psi | \bar{\rho}_{B,0_b} | \psi \rangle + (1-p) \langle \psi | 1 \rangle \langle 1 | \psi \rangle) \\
&\quad + \bar{p} (q \langle \psi | \bar{\rho}_{B,0_b} | \psi \rangle + (1-q) \langle \psi | 0 \rangle \langle 0 | \psi \rangle)] d\psi, \\
&= \frac{2}{3} \left[1 + \rho_{14} \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}} - \frac{1}{2} (\rho_{22} + \rho_{33}) \right], \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\rho_{11}}{\rho_{44}}} \left[C_{14} - (\sqrt{\rho_{22}} - \sqrt{\rho_{33}})^2 - (\rho_{22} + \rho_{33}) \left(\sqrt{\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}} - 1 \right) \right].
\end{aligned}$$

Aquí nos damos cuenta de que existe un valor umbral de la concurrencia $C_{X-PEE,th}$, $f_{X,PEE}$ es mayor que $2/3$, cuando

$$C_{X-PEE,th} = (\sqrt{\rho_{22}} - \sqrt{\rho_{33}})^2 + (\rho_{22} + \rho_{33}) \left(\sqrt{\frac{\rho_{44}}{\rho_{11}}} - 1 \right).$$

En otras palabras, el entrelazamiento es necesario pero no suficiente debido a que el proceso no es elemental sólo cuando

$$C > C_{X-PEE,th}.$$

Es evidente que el umbral $C_{X-PEE,th}$ es mayor que C_X , es decir, este procedimiento con PEE exige más entrelazamiento con el fin de tener un resultado con fidelidad promedio normalizada mayor que f_X si $\rho_{44} \neq \rho_{11}$.

Vale la pena destacar que, en el caso de un Estado- X , con y sin PEE, el proceso de teleportación manifiesta característica cuántica para C mayor que los valores de umbral debido a la decoherencia en el subespacio $\mathcal{H}_{00,11}$ y a la población del subespacio $\mathcal{H}_{01,10}$. Por lo tanto, lo que estamos observando en este esquema es una competencia entre el entrelazamiento, que introduce la característica cuántica y la decoherencia, que introducen clasicidad al canal cuántico.

Parte III

Conclusiones y Bibliografía



Conclusiones

Se ha realizado un análisis de la redistribución de la fidelidad medio en un protocolo de teleportación Cuántica perteneciente al estudio de Teoría de la Información Cuántica, para un estado desconocido de un qubit. En particular, se utiliza proceso de extracción de estado para llevar a cabo la redistribución de la fidelidad.

Para el caso puro

- La fidelidad media solo es 1 para $C = 1$ correspondiente al canal maximalmente entrelazado.

fidelidad mínima alcanza un valor $2/3$ cuando $C = 0$ correspondiente a un canal puro sin entrelazamiento. lo que nos dice que la correlación de entrelazamiento contribuye solo con la tercera parte superior en la fidelidad promedio del estado teleportado.

- La fidelidad promedio total del proceso de teleportación con un PEE es menor que uno donde no se utiliza PEE. Sin embargo, el proceso de teleportación con PEE permite la obtención de un estado de fidelidad 1 con probabilidad $p_{ext} = 1 - \sqrt{1 - C^2}$. Por lo tanto, el PEE redistribuye la fidelidad promedio total generando una salida con fidelidad promedio igual a 1 con probabilidad $2\alpha^2$ al costo de generar también dos salidas con fidelidad promedio $1/2$, y la disminución de la fidelidad total promedio de $(2 + C)/3$ a $1 - \sqrt{1 - C^2}/3$.

Encontramos que los procesos de teleportación, con y sin PEE, sólo requieren entrelazamiento diferente de cero para ser no elemental, cuando el canal cuántico es puro. En este caso, el PEE redistribuye la fidelidad promedio de tal manera que hay un resultado posible con fidelidad 1, que significa que la teleportación es exitosa.

Para el Estado X

- La fidelidad promedio sin PEE no depende de los elementos no diagonales ρ_{23} y ρ_{32} pero depende de la suma de sus diagonales, $\rho_{22} + \rho_{33}$; f disminuye a medida que dicha probabilidad aumenta. En otras palabras, la probabilidad dentro del subespacio $H_{01,10}$ afecta la disminución de la fidelidad promedio, pero su grado de decoherencia no la afecta.

- Cuando el canal cuántico es un estado X , nos encontramos con que la teleportación no es elemental si y sólo si la concurrencia del canal es mayor que algunos valores de umbral particulares. En otras palabras, el entrelazamiento es necesario pero no suficiente. Aún más, nos encontramos con que el valor umbral requerido es mayor para el proceso con PEE que el uno sin PEE. Pensamos que $C_{X-PEE,th} > C_X$ porque el proceso con PEE permite, con probabilidad diferente de cero, un resultado con mayor fidelidad que la fidelidad promedio del procedimiento sin PEE.

Finalmente podemos concluir que existe una competencia entre el entrelazamiento por introducir rasgos cuánticos y la decoherencia por introducir clasicidad, cuando el canal cuántico es un estado X .



Bibliografía

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.
- [2] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1895–1899, Mar 1993.
- [3] J.D. Jackson. *Mathematics for Quantum Mechanics: An Introductory Survey of Operators, Eigenvalues And Linear Vector Spaces*. Dover books on mathematics. Dover Publications, Incorporated, 2006.
- [4] D.J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson international edition. Pearson Education, Limited, 2005.
- [5] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge Series on Information and the Natural Sciences. Cambridge University Press, 2000.
- [6] Benjamin Schumacher. Quantum coding. *Phys. Rev. A*, 51:2738–2747, Apr 1995.
- [7] Samuel L. Braunstein, A. Mann, and M. Revzen. Maximal violation of bell inequalities for mixed states. *Phys. Rev. Lett.*, 68:3259–3261, Jun 1992.
- [8] Charles H. Bennett and David P. DiVincenzo. Quantum information and computation. *Nature*, 404, 2000.
- [9] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, Peter W. Shor, John A. Smolin, Barbara M. Terhal, and William K. Wootters. Remote state preparation. *Phys. Rev. Lett.*, 87:077902, Jul 2001.
- [10] Hoi-Kwong Lo. Classical-communication cost in distributed quantum-information processing: A generalization of quantum-communication complexity. *Phys. Rev. A*, 62:012313, Jun 2000.
- [11] Arun K. Pati. Minimum classical bit for remote preparation and measurement of a qubit. *Phys. Rev. A*, 63:014302, Dec 2000.

- [12] Charles H. Bennett and Stephen J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, 69:2881–2884, Nov 1992.
- [13] M. Żukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne, and A. K. Ekert. “event-ready-detectors” bell experiment via entanglement swapping. *Phys. Rev. Lett.*, 71:4287–4290, Dec 1993.
- [14] Nicolas Gisin, Grégoire Ribordy, Wolfgang Tittel, and Hugo Zbinden. Quantum cryptography. *Rev. Mod. Phys.*, 74:145–195, Mar 2002.
- [15] O. Jiménez. *Aplicaciones de la discriminación de estados cuánticos*. PhD thesis, Universidad de Concepción, 2009.
- [16] E. Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31:555–563, 10 1935.
- [17] N. Bohr. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 48:696–702, Oct 1935.
- [18] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. i. *Phys. Rev.*, 85:166–179, Jan 1952.
- [19] J. S. Bell. On the einstein-podolsky-rosen paradox. *Physics*, 1:195–200, 1964.
- [20] A. Cuevas, G. Carvacho, G. Saavedra, J. Cariñe, W.A.T. Nogueira, M. Figueroa, A. Cabello, P. Mataloni, G. Lima, and G.B. Xavier. Long-distance distribution of genuine energy-time entanglement. *Nat Commun*, 4, November 2013.
- [21] C. Jara. *Generación y Modificación de Correlaciones Cuánticas*. PhD thesis, Universidad de Concepción, 2013.
- [22] Reinhard F. Werner. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40:4277–4281, Oct 1989.
- [23] Kavan Modi, Tomasz Paterek, Wonmin Son, Vlatko Vedral, and Mark Williamson. Unified view of quantum and classical correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 104:080501, Feb 2010.
- [24] Ting Yu and J. H. Eberly. Evolution from entanglement to decoherence of bipartite mixed “x” states. *Quantum Info. Comput.*, 7(5):459–468, July 2007.
- [25] Ting Yu and J. H. Eberly. Finite-time disentanglement via spontaneous emission. *Phys. Rev. Lett.*, 93:140404, Sep 2004.
- [26] M. França Santos, P. Milman, L. Davidovich, and N. Zagury. Direct measurement of finite-time disentanglement induced by a reservoir. *Phys. Rev. A*, 73:040305, Apr 2006.
- [27] F. Lastra, C. E. López, L. Roa, and J. C. Retamal. Entanglement of formation for a family of (2)-dimensional systems. *Phys. Rev. A*, 85:022320, 2012.

- [28] Asma Al Qasimi and Daniel F. V. James. Comparison of the attempts of quantum discord and quantum entanglement to capture quantum correlations. *Phys. Rev. A*, 83:032101, Mar 2011.
- [29] Raoul Dillenschneider. Quantum discord and quantum phase transition in spin chains. *Phys. Rev. B*, 78:224413, Dec 2008.
- [30] M. S. Sarandy. Classical correlation and quantum discord in critical systems. *Phys. Rev. A*, 80:022108, Aug 2009.
- [31] T. Werlang, C. Trippe, G. A. P. Ribeiro, and Gustavo Rigolin. Quantum correlations in spin chains at finite temperatures and quantum phase transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 105:095702, Aug 2010.
- [32] L. Ciliberti, R. Rossignoli, and N. Canosa. Quantum discord in finite XY chains. *Phys. Rev. A*, 82:042316, Oct 2010.
- [33] Charles H. Bennett, Herbert J. Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53:2046–2052, Apr 1996.
- [34] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Sandu Popescu, Benjamin Schumacher, John A. Smolin, and William K. Wootters. Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels. *Phys. Rev. Lett.*, 76:722–725, Jan 1996.
- [35] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, John A. Smolin, and William K. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, 54:3824–3851, Nov 1996.
- [36] Martin B. Plenio and Shashank Virmani. An introduction to entanglement measures. *Quantum Information & Computation*, 7(1):1–51, 2007.
- [37] Dagmar Bruß. Characterizing entanglement. *Journal of Mathematical Physics*, 43(9):4237–4251, 2002.
- [38] Scott Hill and William K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, 78:5022–5025, Jun 1997.
- [39] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245–2248, Mar 1998.
- [40] A. Uhlmann. The “transition probability” in the state space of a $*$ -algebra. *Reports on Mathematical Physics*, 9(2):273 – 279, 1976.
- [41] Richard Jozsa. Fidelity for mixed quantum states. *Journal of Modern Optics*, 41(12):2315–2323, 1994.

- [42] N. Gisin. Nonlocality criteria for quantum teleportation. *Physics Letters A*, 210(3):157–159, 1996.
- [43] ROSARIO LO FRANCO, BRUNO BELLOMO, SABRINA MANISCALCO, and GIUSEPPE COMPAGNO. Dynamics of quantum correlations in two-qubit systems within non-markovian environments. *International Journal of Modern Physics B*, 27(01n03):1345053, 2013.

