

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Cosmología en la gravedad de Einstein-Chern-Simons

Tesis para optar al grado académico
de Doctor en Ciencias Físicas

Por

Fernando Patricio Gómez Díaz

Director de tesis: Dr. Patricio Salgado

Comisión: Dr. Mauricio Cataldo
Dr. Fernando Izaurieta
Dr. Luis Roa

Director del programa: Dr. Jaime Araneda

Concepción, Chile
Agosto 2015

A mi familia



Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia y amigos, por su apoyo incondicional.

En particular, a mi Profesor Guía, el Dr. Patricio Salgado, por su constante apoyo, tanto en ámbitos personales como académicos, y por haber confiado en mí.

También agradezco a la comisión, los Drs. Mauricio Cataldo, Fernando Izaurieta y Luis Roa, y al Director del Programa, el Dr. Jaime Araneda, que en más de una ocasión han estado en mis presentaciones.

Por último, agradezco a CONICYT y la Universidad de Concepción, por financiar mis estudios de doctorado.



Índice general

I Preliminares	4
1. Introducción	5
1.1. Motivación y objetivos	5
1.2. Resumen	7
2. Breve revisión de tópicos relevantes	8
2.1. Teoría General de la Relatividad	8
2.2. Cosmología estándar	12
2.3. Problemas cosmológicos; inflación y aceleración del universo	17
2.4. Extensiones de la Relatividad General	23
2.5. Gravedad de Chern-Simons	34
2.6. Gravedad de Einstein-Chern-Simons	39
2.7. Cosmología Friedmann-Robertson-Walker Einstein-Chern-Simons	42
2.8. Solución con simetría esférica para la gravedad de Einstein-Chern-Simons	46
II Cosmología Einstein-Chern-Simons Friedmann-Robertson-Walker 5-dimensional acelerada	48
3. Ecuaciones de campo de Einstein-Chern-Simons	49
3.1. Ecuaciones tipo Einstein-Maxwell	49
3.2. Rango de validez de la Relatividad General	50
4. Cosmología Friedmann-Robertson-Walker 5-dimensional acelerada	52
4.1. Ecuaciones de campo Einstein-Chern-Simons para el espacio-tiempo tipo Friedmann-Robertson-Walker	52
4.2. Soluciones cosmológicas Einstein-Chern-Simons 5-dimensionales	54
4.2.1. Caso $k = -1$	55
4.2.2. Caso $k = 0$	59
4.2.3. Caso $k = 1$	60
4.3. Consistencia de las soluciones con la era de materia	61
4.3.1. Caso $k = -1$	62

4.3.2. Caso $k = 0$	67
4.3.3. Caso $k = 1$	70
5. Conclusiones: <i>Cosmología Einstein-Chern-Simons Friedmann-Robertson-Walker 5-dimensional acelerada</i>	74

III Cosmología acelerada para una brana en la gravedad de Einstein-Chern-Simons 76

6. Acción para una brana en la gravedad de Einstein-Chern-Simons	77
6.1. Simplificación de la teoría	77
6.2. Torsión nula	78
6.3. Geometría de branas	78
6.4. Acción para la brana	79
6.4.1. Acción total	79
6.4.2. Acción en el bulk	80
6.4.3. Acción efectiva en la brana. Comentario sobre las <i>constantes</i>	81
6.4.4. Acción en lenguaje tensorial	82
6.4.5. Acción con h interpretado como campo escalar e inclusión de un término cinético	83
6.5. Ecuaciones de campo	84
7. Soluciones cosmológicas aceleradas en la brana	87
7.1. Ecuaciones cosmológicas Friedmann-Robertson-Walker	87
7.2. Solución I: Campo escalar constante y partícula de Klein-Gordon	89
7.3. Solución II: Campo escalar como taquión	91
7.4. Solución III: Campo escalar sin término cinético	93
8. Conclusiones: <i>Cosmología para una brana en la gravedad de Einstein-Chern-Simons</i>	95

IV Formulación hamiltoniana para cosmología de branas Einstein-Chern-Simons y ecuaciones para cosmología cuántica 97

9. Campo escalar con potencial cuadrático	98
9.1. Hamiltoniano y ecuaciones canónicas en cosmología	98
9.2. Solución para $\varphi = cte.$	100
9.3. Ecuación tipo Wheeler-de Witt para cosmología cuántica	100
10. Campo escalar con potencial lineal y sin término cinético	102
10.1. Hamiltoniano y ecuaciones canónicas	102
10.2. Solución para $\varphi = cte.$	103
10.3. Ecuación tipo Wheeler-de Witt para cosmología cuántica	104

11. Conclusiones: <i>Formulación hamiltoniana para la cosmología de branas Einstein-Chern-Simons y ecuaciones para cosmología cuántica</i>	105
V Solución estática para la gravedad de Einstein-Chern-Simons	107
12. Solución estática con subespacio 3-dimensional maximalmente simétrico	108
12.1. Soluciones de las ecuaciones de Einstein-Chern-Simons	108
12.2. Tensor de energía-momentum para el campo h^a	111
12.3. Densidad de energía y presión radial	111
12.4. Presión tangencial	112
13. Solución esférica a partir de la solución general	115
13.1. Caso $\alpha > 0$	115
13.2. Caso $\alpha < 0$	117
14. Conclusiones: <i>Solución estática para la gravedad de Einstein-Chern-Simons</i>	118
VI Conclusiones	120
15. Resumen y comentarios finales	121
VII Apéndices	123
A. Obtención de las ecuaciones (4.9)-(4.13)	124
B. Posibles elecciones de $f(\phi)$ y $g(\phi)$. Constantes A , B , C y E	128
C. Acción para una brana en la teoría de [72]	131

Parte I
Preliminares



Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y objetivos

Esta tesis ha sido concebida en el contexto de dos temas aún no completamente resueltos por la física actual: por un lado, la cuantización del campo gravitacional, y por otro, la cosmología.

La *Teoría General de la Relatividad* de Einstein ([1], [2], [3]) describe exitosamente el campo gravitacional en términos clásicos, sin embargo se ha resistido a la cuantización, [4]. Este hecho motiva la construcción y exploración nuevas teorías. En este escenario podemos ubicar a las teorías gravitacionales, -invariantes de gauge- de *Chern-Simons* ([5], [6], [7], [8]), en una de las cuales está basada la presente investigación. En particular nos fijaremos en la *Teoría de Einstein-Chern-Simons* [8], a partir de la cual obtendremos soluciones de universo en expansión acelerada.

¿Porqué estudiar cosmología? Por dos razones. La primera tiene relación con lo recién señalado. La cuantización del campo gravitacional presenta dificultades- además de las técnicas-matemáticas y conceptuales, [9]-experimentales: debido a las altas energías involucradas ($\sim 10^{19} GeV$), parece imposible construir en La Tierra un acelerador de partículas que nos permita experimentar con efectos cuántico-gravitacionales, [10]. No obstante es posible encontrar en la naturaleza procesos con potencial para revelarnos el carácter cuántico del espacio-tiempo, i.e. del campo gravitacional. Junto con los agujeros negros, el universo como una totalidad se nos presenta como uno de estos laboratorios naturales. La idea es la siguiente: el modelo estándar de la cosmología ([1], [2], [3], [11], [12], [13], [14]) nos muestra un universo en expansión, que comienza en una singularidad (también están presentes en agujeros negros, y representan un problema para la física); donde, se supone, los efectos cuántico-gravitacionales dominan, y remanentes de aquella época podrían ser, en principio, rastreados hoy en día mediante la observación astronómica. Parece interesante entonces estudiar las predicciones de nuevas teorías en el ámbito de la *cosmología cuántica* ([15], [16], [17], [18]). Si bien el tema principal de esta investigación no corre por este car-

ril, presentaremos aquí una primera aproximación a la cosmología cuántica en el contexto de la teoría de Einstein-Chern-Simons.

La segunda razón tiene que ver con la cosmología clásica (relativista, no-cuántica), entorno en el que podemos ubicar el grueso del contenido de esta tesis. Aunque la Teoría General de la Relatividad presenta un marco conceptual sólido para entender la interacción gravitacional, y en particular de la cosmología, ya que nos muestra un universo en expansión ([1], [2], [3], [11], [12], [13], [14]), el esquema no está completo. Hay problemas importantes (además del de la singularidad inicial ya señalada), para los cuales todavía no se tiene respuestas precisas y concensuadas ([12], [13]). El principal parece ser el problema de la actual expansión acelerada del universo ([19], [20], [21]), conocido como el *Problema de la energía oscura*. Si bien existen modelos capaces de describir una expansión como tal, e.g. considerando la constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein, el tema no está zanjado. Otras cuestiones no resueltas tienen que ver con acontecimientos ocurridos en etapas tempranas de la evolución del universo; aquí ubicamos los *Problemas del horizonte, de la planitud y de los monopolos magnéticos* ([12], [13]). Aunque hay bastante consenso en que dichos problemas son resueltos por la *Teoría de inflación cósmica*—lapso de expansión rápida y acelerada que tuvo lugar en el universo primigenio ([11], [12], [22], [23])—, el mecanismo específico no es algo absolutamente claro. Cabe mencionar que dichos problemas, que tienen relación con una dinámica acelerada—el tema de esta tesis—, no son los únicos; en un dominio diferente encontramos los *Problemas de la materia oscura y el de la asimetría bariónica* ([12], [13]).

Así, teniendo en vista la necesidad de una teoría para la gravedad consistente con la mecánica cuántica y el importante rol que jugado por la cosmología—ya sea en el marco clásico o en el cuántico—, reconocemos lo interesante que puede ser explorar teorías alternativas a la Relatividad General y, en particular, el estudio de soluciones de universo. Llegamos así al **objetivo principal** de la investigación aquí expuesta:

Obtener soluciones cosmológicas tipo Friedmann-Robertson-Walker aceleradas en el contexto de la teoría para gravedad 5-dimensional de Einstein-Chern-Simons [8].

Debe ser notado que en un trabajo anterior [24] encontramos algunas soluciones tipo Friedmann-Robertson-Walker para la teoría de Einstein-Chern-Simons que son consistentes con los modelos cosmológicos usuales. Sin embargo, varias interrogantes quedaron allí planteadas, asociadas principalmente al tipo de materia incluida en teoría de Einstein-Chern-Simons, a la necesidad de soluciones coherentes con la idea de un espacio-tiempo 4-dimensional, y a la construcción de soluciones aceleradas. De aquí emergen los **objetivos secundarios**:

En el marco de la cosmología tipo Friedmann-Robertson-Walker acelerada para la gravedad de Einstein-Chern-Simons, i) obtener soluciones consistentes con la noción de espacio-tiempo 4-dimensional y, ii) lograr una interpretación de los campos de materia incluidos en la teoría.

1.2. Resumen

En esta tesis encontraremos soluciones cosmológicas tipo Friedmann-Robertson-Walker de expansión acelerada para la gravedad 5-dimensional de Einstein-Chern-Simons construidas a partir de tres diferentes enfoques:

1. En la parte II, encontraremos soluciones 5-dimensionales, obtenidas a partir de un conjunto de ecuaciones similar al de Einstein-Maxwell (que aparecen como un reordenamiento de las ecuaciones de [8]). Veremos aquí que el campo material h^a de la teoría de Einstein-Chern-Simons puede interpretarse como una constante cosmológica (resultados publicados en [25]).
2. En la parte III, bajo ciertas imposiciones al lagrangiano en consideración, conseguiremos una acción para una brana 4-dimensional inmersa en el espacio de la teoría de Einstein-Chern-Simons, y a partir de ella soluciones de universo acelerado. Aquí el campo h^a se interpreta como un campo escalar acoplado no-minimalmente a la gravedad; en particular será asociado a una partícula de Klein-Gordon y a un taquión (artículo en construcción, [26]).
3. En la parte IV, desarrollaremos el formalismo hamiltoniano correspondiente al modelo cosmológico tipo brana recién mencionado, para potenciales del campo escalar cuadrático y lineal. En ambos casos obtendremos una solución acelerada. Además, derivaremos un par de ecuaciones cosmológico-cuánticas tipo Wheeler-de Witt; aquí no daremos soluciones.

Aparte de estos resultados, como un contenido adicional, en la parte V de esta tesis se incluyen algunas soluciones estáticas para la gravedad de Einstein-Chern-Simons asociadas a una variedad que contiene un subespacio 3-dimensional maximalmente simétrico. Veremos que es posible hacer contacto con los resultados de [27], derivar soluciones de agujero negro e interpretar la materia h^a de la teoría como una constante cosmológica (artículo enviado, [28]).

Para terminar, en la parte VI se presenta una sucinta revisión de los contenidos desarrollados en esta tesis. Además se incluyen tres apéndices (parte VII) y un listado de referencias (al final).

A continuación, en lo que sigue esta parte I, revisaremos brevemente algunos tópicos relevantes que fundamentan la presente investigación; a saber: Relatividad General, la cosmología estándar y sus problemas, la aceleración del universo, algunas extensiones o variantes de la Relatividad General (los tratamientos de Palatini, Lovelock, Kaluza-Klein, hamiltoniano de la Relatividad General y Wheeler-de Witt, la Cosmología cuántica, el *Mundo Brana*, el acoplamiento no-minimal geometría-materia y la gravedad en el lenguaje de formas diferenciales), la gravedad de Chern-Simons y, en particular, la de Einstein-Chern-Simons y algunas de sus soluciones (cosmológicas y con simetría esférica).

Capítulo 2

Breve revisión de tópicos relevantes

Los aspectos teóricos en los cuales se basa esta tesis pueden ser divididos en dos conjuntos. El primero incluye temas ampliamente aceptados y reconocidos, los cuales se supone han de ser un ingrediente fundamental en la construcción de nuevas teorías y/o modelos: Relatividad General (sec. 2.1), cosmología estándar (sec. 2.2) y, los problemas cosmológicos y aceleración del universo (sec. 2.3). El segundo incluye contenidos que emergen como posibles variantes, o extensiones, de los temas recién señalados: extensiones de la Relatividad General (sec. 2.4), gravedad de Chern-Simons (sec. 2.5), gravedad de Einstein-Chern-Simons (sec. 2.6) y sus soluciones: Friedmann-Robertson-Walker Einstein-Chern-Simons (sec. 2.7) y con simetría esférica (sec. 2.8), que han sido encontradas con anterioridad.

2.1. Teoría General de la Relatividad

Acción de Einstein-Hilbert y Ecuaciones de Einstein. La Teoría General de la Relatividad es la teoría de Einstein para el campo gravitacional, y describe exitosamente el movimiento planetario, predijo los agujeros negros y nos muestra un universo dinámico. La bibliografía en el tema es numerosa, e.g. [1], [2], [3].

La Relatividad General emerge como una generalización de *Teoría Especial de la Relatividad*. Mediante el principio de equivalencia—entre un sistema de referencia no inercial y el campo gravitacional, esto en un sentido local—Einstein identificó el campo gravitacional con el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) correspondiente a una variedad espacio-temporal 4-dimensional curva barrida por un sistema coordenado x^μ (como se ha dejado ver, la Relatividad General está íntimamente ligada a la geometría diferencial, tema que aquí no tocaremos; tratamientos bastante amplios pueden encontrarse en los libros estándar sobre Relatividad General, e.g. [1], [2], [3]). En el espacio-tiempo, asociado al elemento

de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

los cuerpos sometidos a la fuerza gravitacional siguen trayectorias geodésicas, descritas por la expresión

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0. \quad (2.2)$$

Aquí $x^\mu(\tau)$ representa la trayectoria de la partícula, parametrizada por el tiempo propio τ , y $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ son los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}). \quad (2.3)$$

En Relatividad General, la dinámica del espacio-tiempo, i.e. el campo gravitacional, cuya fuente es la distribución de energía-momentum, es dada por las ecuaciones de Einstein. Este conjunto de ecuaciones puede ser derivado a partir de un principio de acción. Consideremos una acción cuya densidad lagrangiana \mathcal{L} está compuesta por dos partes, una puramente gravitacional \mathcal{L}_G y otra puramente material \mathcal{L}_M (*Acoplamiento minimal*)

$$S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L} = \int_{\Omega} d^4x (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M). \quad (2.4)$$

Ciertas exigencias razonables conducen al \mathcal{L}_G correcto [29]. \mathcal{L}_G debe ser una densidad escalar, construida a partir de $g_{\mu\nu}$, de sus primeras derivadas $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ y, a lo más, de sus segundas derivadas $\partial_\rho \partial_\lambda g_{\mu\nu}$, siempre y cuando estas últimas aparezcan de forma lineal, de modo que términos de superficie puedan ser despreciados, y así obtener—como corresponde—ecuaciones de campo de segundo grado. Si se intenta construir \mathcal{L}_G sólo a partir de $g_{\mu\nu}$ y sus primeras derivadas $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ —contenidas en la conexión $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ —el resultado es fallido: no es posible obtener una densidad escalar utilizando sólo $g_{\mu\nu}$ y $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$. Si uno se permite considerar segundas derivadas, se verá que existen 14 invariantes de curvatura en 4 dimensiones; pero sólo uno de ellos es lineal en segundas derivadas: el *Escalar de Ricci*

$$R = R^\mu_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

obtenido a partir de la contracción del *Tensor de Ricci*

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = g^{\rho\lambda} R_{\rho\mu\lambda\nu}, \quad (2.6)$$

que a su vez, se obtiene a partir de la contracción del *Tensor de curvatura de Riemann*

$$R^\mu_{\nu\lambda\rho} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\rho}. \quad (2.7)$$

De este modo

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g} R, \quad (2.8)$$

donde se ha incluido $\sqrt{-g}$ el para asegurar la covariancia. La acción correspondiente a la densidad lagrangiana (2.8) es conocida como *Acción de Einstein-Hilbert*.

Consideremos ahora el término material \mathcal{L}_M . En la teoría newtoniana la fuente de campo gravitacional es la masa; Einstein, en la Relatividad Especial, mostró la íntima relación entre ésta y la energía-momentum. Con esto en cuenta, se intuye que la fuente de campo gravitacional debe aparecer ahora como una generalización covariante y relativista del concepto de masa, i.e. el tensor de energía-momentum. Así, todo lo que posea energía-momentum deberá estar presente de alguna forma en la acción de la Relatividad General. Escribimos entonces

$$\mathcal{L}_M = -2\kappa\sqrt{-g}L_M, \quad (2.9)$$

donde L_M es un escalar asociado a todos los campos presentes diferentes al gravitacional, y donde se ha incluido el $\sqrt{-g}$ para asegurar la covariancia; el -2κ se ha escogido de esa manera por comodidad en los cálculos, y representa la constante de interacción gravitacional.

Así, a partir de (2.4), (2.8) y (2.9) se consigue la acción para la Relatividad General

$$S = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\kappa L_M). \quad (2.10)$$

Las ecuaciones de campo se obtienen a partir del principio de mínima acción

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.11)$$

Como $\delta g^{\mu\nu}$ es arbitrario, se tiene que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

La expresión (2.12) muestra las *Ecuaciones de campo de Einstein*. Aquí $T_{\mu\nu}$ es el *Tensor de energía-momentum dinámico*, definido como

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_M)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.13)$$

Por supuesto la teoría de Einstein contiene a la de Newton. En el llamado *límite newtoniano* ([1], [2], [3]) es posible relacionar a la constante κ con la constante gravitacional G de la teoría de Newton:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4},$$

donde c es la velocidad de la luz.

Existen varias soluciones para las ecuaciones de Einstein, las cuales describen con alta precisión fenómenos como el movimiento planetario, el desvío de la luz que pasa cerca de un cuerpo masivo, agujeros negros, lentes gravitacional, entre

otros ([1], [2], [3]). No daremos detalles sobre estos temas, sin embargo, más adelante revisaremos las soluciones cosmológicas estándar.

Es importante notar que es posible agregar un *término cosmológico* en la acción de Einstein-Hilbert, que no afecta las predicciones a nivel del sistema solar siempre que su valor sea lo suficientemente pequeño. En escalas cosmológicas, dicho término, aunque pequeño, puede tener notables consecuencias (más adelante discutiremos el tema). Teniendo en cuenta este término, la acción a considerar tiene la forma

$$S = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda - 2\kappa L_M), \quad (2.14)$$

donde Λ es la llamada *Constante cosmológica*.

A partir del principio de mínima acción se obtienen las *Ecuaciones de Einstein con constante cosmológica*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

El tratamiento estándar de Relatividad General no incluye la constante cosmológica, y ese camino seguiremos en la mayor parte de este capítulo. Si en algún momento es considerada será oportunamente señalado.

Gravedad acoplada a un campo escalar. El tema de la inclusión de materia en teorías para gravedad es un asunto relevante en el desarrollo de esta tesis: la teoría de Einstein-Chern-Simons incorpora términos que asocian materia y geometría acoplados de manera no trivial (ver ec. (2.171); los campos h^a y k^{ab} representan materia). Es de particular importancia para nosotros el estudio del caso de un campo escalar. A continuación revisaremos el acoplamiento minimal de un campo escalar en Relatividad General.

El lagrangiano para un campo escalar φ asociado al potencial $V(\varphi)$ en ausencia de gravitación, i.e. en el espacio de Minkowski descrito por la métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$, tiene la forma

$$\mathcal{L}_{\varphi} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} (\partial_{\mu}\varphi) (\partial_{\nu}\varphi) + V = \frac{1}{2} (\partial_{\mu}\varphi) (\partial^{\mu}\varphi) + V. \quad (2.16)$$

Para encontrar el lagrangiano correspondiente al caso en que está presente la gravitación recurrimos *procedimiento de acoplamiento minimal*, que consiste en multiplicar el lagrangiano por $\sqrt{-g}$ (asegurando la covariancia), y efectuar los reemplazos de una métrica plana por una curva, y de las derivadas parciales por covariantes,

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \quad \partial_{\mu} \rightarrow \nabla_{\mu}. \quad (2.17)$$

De este modo se obtiene

$$\mathcal{L}_{g\varphi} = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu} (\nabla_{\mu}\varphi) (\nabla_{\nu}\varphi) + V \right] = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (\nabla_{\mu}\varphi) (\nabla^{\mu}\varphi) + V \right]. \quad (2.18)$$

Considerando este lagrangiano se construye la acción que combina los efectos de los campos escalar y gravitacional

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R - 2\kappa \left[\frac{1}{2} (\nabla_\mu \varphi) (\nabla^\mu \varphi) + V \right] \right\}. \quad (2.19)$$

Al variar (2.19) con respecto a los campos $g_{\mu\nu}$ y φ , e igualar a cero, se obtienen las ecuaciones de campo que buscamos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}^\varphi \quad (2.20)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.21)$$

Aquí $T_{\mu\nu}^\varphi$ es el tensor de energía-momentum asociado al campo escalar φ , que es derivado a partir de (2.18),

$$T_{\mu\nu}^\varphi = \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \nabla^\lambda \varphi \nabla_\lambda \varphi + V \right). \quad (2.22)$$

Ecuaciones de Einstein-Maxwell. Otro conjunto de ecuaciones que tocaremos en esta investigación es el de *Einstein-Maxwell*, que describen el efecto combinado del campo gravitacional y del campo electromagnético libre. Procediendo de manera análoga a lo hecho con el campo escalar, pero ahora partiendo del lagrangiano para el campo electromagnético (A_μ) libre y en ausencia de gravitación

$$\mathcal{L}_{em} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, es posible derivar dicho conjunto de ecuaciones:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}^{em} \quad (2.24)$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.25)$$

$$\nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \quad (2.26)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{em} = -\frac{1}{2} \left(F_{\mu\lambda} F_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \right). \quad (2.27)$$

2.2. Cosmología estándar

Mostraremos a continuación algunas soluciones a las ecuaciones de Einstein. Éstas son pertenecientes a la llamada *Cosmología Estándar*, tratamiento que es abordado en la mayoría de los libros de Relatividad General, también en los textos básicos de cosmología; e.g. [1], [2], [3], [11], [12], [13], [14].

Principio cosmológico y métrica de Friedmann-Robertson-Walker. Como hemos visto, las ecuaciones de Einstein involucran, por un lado, a la geometría—el campo gravitacional mismo—y por otro, a la materia—fuente de campo gravitacional. Para encontrar soluciones, de acuerdo a cada caso, es necesario modelar convenientemente cada uno de estos aspectos. Comencemos por el lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein, *la parte geométrica*, para construir modelos cosmológicos.

Hasta donde podemos ver, en escalas del orden de cientos de millones de años luz, la densidad de galaxias parece ser la misma en todas partes, y cada dirección en la que se mire parece equivalente; i.e. la materia en el universo parece estar distribuida de forma homogénea e isotrópica. Si damos a esta afirmación un carácter de principio tenemos el *Principio cosmológico: el universo es homogéneo e isotrópico*. La métrica asociada a un espacio con dichas características es la de Friedmann-Robertson-Walker (para una derivación rigurosa ver e.g. [1], [11]):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.28)$$

donde la función $a = a(t)$ es el llamado *factor de escala*, que caracteriza la dinámica de estos modelos; k es una constante que puede tomar los valores $-1, 0$ y 1 , que describen respectivamente geometrías espaciales hiperbólica (o abierta), euclidiana (o plana) y elíptica (o cerrada); y $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ es el *sistema de coordenadas comóviles*.

Al elemento de línea (2.28) corresponden las componentes del tensor métrico diferentes de cero

$$g_{00} = -1 \quad g_{11} = \frac{a^2}{1 - kr^2} \quad g_{22} = a^2 r^2 \quad g_{33} = a^2 r^2 \sin^2\theta. \quad (2.29)$$

Fluido perfecto. En el lado derecho de las ecuaciones de Einstein se ubica *la parte de materia*. Teniendo en cuenta el principio cosmológico, el tensor energía-momento a considerar debe ser homogéneo e isotrópico. La forma más general para $T_{\mu\nu}$ consistente con dichas características es la del fluido perfecto

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

donde $\rho(t)$ es densidad de energía, $p(t)$ la presión y u_μ la 4-velocidad correspondientes al fluido. Notar que esta última debe tener componentes espaciales nulas, para no violar el principio de isotropía.

De manera explícita, las componentes de $T_{\mu\nu}$ diferentes de cero, considerando que en el sistema de referencia comóvil $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$, son

$$T_{00} = \rho \quad T_{11} = \frac{a^2 p}{1 - kr^2} \quad T_{22} = a^2 r^2 p \quad T_{33} = a^2 r^2 \sin^2\theta p. \quad (2.31)$$

Una ecuación de estado $p = p(\rho)$ caracteriza los diferentes tipos de materia

que pudieran ser considerados. En cosmología estándar se tiene ¹:

$$\text{Materia incoherente o polvo:} \quad p = 0 \quad (2.32)$$

$$\text{Materia relativista o radiación:} \quad p = \rho/3 \quad (2.33)$$

$$\text{Constante cosmológica o energía de vacío:} \quad p = -\rho. \quad (2.34)$$

Ecuaciones de Friedmann. Al reemplazar (2.29) y (2.31) en las ecuaciones de Einstein (2.12) se obtienen las ecuaciones que describen la dinámica de los modelos cosmológicos estándar, las *Ecuaciones de Friedmann*²

$$3 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = 8\pi G\rho \quad (2.35)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = 8\pi Gp. \quad (2.36)$$

Una ecuación útil, la de conservación de la energía, puede ser derivada a partir de (2.35) y (2.36):

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.37)$$

Para resolver el sistema (2.35)-(2.36) es necesario introducir una ecuación estado $p = p(\rho)$, ya que las ecuaciones de Friedmann son dos y las incógnitas tres: $a(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$. Al hacer esto estamos eliminando $p(t)$ del sistema. Evaluando (2.32)-(2.34) en (2.37) se obtiene la relación entre el factor de escala $a(t)$ y la densidad de energía $\rho(t)$:

$$\text{Materia incoherente o polvo:} \quad \rho_m = \rho_{m0}a^{-3} \quad (2.38)$$

$$\text{Materia relativista o radiación:} \quad \rho_r = \rho_{r0}a^{-4} \quad (2.39)$$

$$\text{Constante cosmológica o energía de vacío:} \quad \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0}, \quad (2.40)$$

donde el subíndice 0 indica funciones evaluadas en el tiempo actual, denotado por t_0 ; así, e.g. la densidad de materia incoherente en la actualidad será $\rho_{m0} = \rho_m(t_0)$.

Combinando las expresiones (2.35)-(2.40) se deriva una única ecuación, escrita convenientemente en función de parámetros observacionales, que entregará la dinámica, i.e. $a = a(t)$, de los modelos de universo estándar:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{r0}a^{-4} + \Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{k0}a^{-2} + \Omega_{\Lambda 0}. \quad (2.41)$$

¹Notar que en cosmología estándar es usual incorporar la constante cosmológica como parte del contenido material y no como perteneciente a las ecuaciones de Einstein. De una u otra forma, el resultado es el mismo.

²Donde se ha considerado un sistema de unidades en el que $c = 1$.

Aquí H_0 , Ω_{r0} , Ω_{m0} , Ω_{k0} y $\Omega_{\Lambda 0}$ son constantes, obtenidas a partir de la evaluación en el tiempo actual los siguientes parámetros, definidos como:

$$\text{Parámetro de Hubble} \quad : \quad H = \dot{a}/a \quad (2.42)$$

$$\text{Parámetro de densidad de radiación} \quad : \quad \Omega_r = \rho_r/\rho_c \quad (2.43)$$

$$\text{Parámetro de densidad de materia} \quad : \quad \Omega_m = \rho_m/\rho_c \quad (2.44)$$

$$\text{Parámetro de densidad de constante cosmológica} \quad : \quad \Omega_\Lambda = \rho_\Lambda/\rho_c \quad (2.45)$$

$$\text{Parámetro de densidad de curvatura espacial} \quad : \quad \Omega_k = -k/H^2 a^2 \quad (2.46)$$

donde ρ_c es la *densidad crítica*, que es la densidad de energía asociada al caso plano, definida como

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.47)$$

Es difícil encontrar soluciones para la ecuación (2.41) considerando todos sus elementos, sin embargo es posible construir algunas soluciones exactas tomando el contenido material por separado, i.e. polvo, radiación y constante cosmológica. A continuación revisaremos algunos modelos simples.

Era de materia. El universo en la actualidad, observado a gran escala, del orden de cientos de millones de años luz, aparece como un polvo conformado por galaxias, osea materia no interactuante, i.e. descrito por la ecuación de estado $p = 0$. El aporte energético de éstas es notable en comparación con el de la radiación, que es despreciable. En otras palabras, Ω_{m0} predomina sobre Ω_{r0} ; haremos $\Omega_{r0} = 0$ en la ecuación (2.41). Si además se considera una constante cosmológica nula ($\Omega_{\Lambda 0} = 0$), es posible encontrar soluciones exactas para (2.41), que describen la *era de materia*:

$$k = -1 \quad : \quad \begin{cases} a(\eta) = \frac{\Omega_{m0}}{2(1-\Omega_{m0})} (\cosh \eta - 1) \\ t(\eta) = \frac{\Omega_{m0}}{2H_0(1-\Omega_{m0})^{2/3}} (\sinh \eta - \eta) \end{cases} \quad (2.48)$$

$$k = 0 \quad : \quad a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \quad (2.49)$$

$$k = 1 \quad : \quad \begin{cases} a(\eta) = \frac{\Omega_{m0}}{2(\Omega_{m0}-1)} (1 - \cosh \eta) \\ t(\eta) = \frac{\Omega_{m0}}{2H_0(\Omega_{m0}-1)^{2/3}} (\eta - \sinh \eta) \end{cases} \quad (2.50)$$

Notar que en los casos con $k = \pm 1$ las soluciones vienen en forma paramétrica; η es el parámetro. Además se ha considerado la condición inicial $a(t = 0) = 0$ (en concordancia con la observación y con la *Teoría del Big Bang*, que nos muestra un universo en expansión, que comienza en una singularidad). Estas soluciones describen un universo dinámico; en los casos plano y abierto tenemos una expansión hasta el infinito, cuya velocidad va disminuyendo en el tiempo; en el caso cerrado la solución muestra una cicloide, i.e. un universo que parte con $a = 0$, se expande hasta llegar a un máximo, y se contrae hasta retornar a un radio nulo.

En este contexto—el de una era de materia—se puede obtener una primera estimación de la edad del universo t_0 , que no es tan distante de la obtenida de manera más precisa considerando diversas fuentes de evidencia observacional; más adelante daremos algunos datos. En esta estimación se considera la solución plana y el valor medido de la constante de Hubble $H_0 \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \approx 14 \times 10^9 \text{ años.}$$

Era de radiación. Como hemos mencionado, en la actualidad el aporte energético de la radiación en el universo parece despreciable en comparación con el de la materia incoherente en forma de galaxias. Sin embargo, esto no siempre fue así: si volvemos atrás en el tiempo la densidad de energía contenida en el universo va aumentando conforme a la disminución de su tamaño; pero, mientras la densidad de energía correspondiente a materia no interactuante ρ_m crece como a^{-3} , la de la radiación ρ_r lo hace como a^{-4} . De este modo, llegamos a la conclusión de que en algún tiempo pasado la radiación dominó la dinámica de la expansión.

Una solución para la *era de radiación* se encuentra haciendo $\Omega_{m0} = \Omega_{\Lambda 0} = 0$ en (2.41):

$$a(t) = \sqrt{2Ct - kt^2}, \quad (2.51)$$

donde C es una constante que, escrita en términos de H_0^2 y k , o de Ω_{r0} y k , tiene la forma

$$C = \sqrt{H_0^2 + k} = \sqrt{\frac{k\Omega_{r0}}{\Omega_{r0} - 1}}. \quad (2.52)$$

Aquí, como en el caso de la era de materia, los universos plano y abierto se expanden hasta el infinito, y en el cerrado la expansión llega a un máximo y comienza la contracción.

Supongamos que volvemos aún más atrás en el tiempo, superando así la era de radiación, y acercándonos al inicio de todo. Nos encontraríamos en este escenario con un período de rápida expansión acelerada, la *inflación cósmica*, tema que trataremos en la siguiente sección. Debe ser notado que esto ocurre en un universo muy pequeño y comprimido, donde la física de partículas cobra importancia. Dicho tema está fuera del alcance de esta tesis; en ref. [30] se aborda el asunto desde variados puntos de vista. Si retrocedemos todavía más en el tiempo llegaríamos a una singularidad, problema que ya hemos mencionado y que más adelante revisaremos.

Modelo de de Sitter. Ya hemos hablado acerca de la actual expansión acelerada observada ([19], [20], [21]); también la existencia de un período inflacionario (e.g. [22], [30]), que presenta aceleración. Un modelo cosmológico simple con este tipo de dinámica puede ser construido haciendo $\Omega_{m0} = \Omega_{r0} = 0$ en (2.41), dejando que el término cosmológico ($\Lambda > 0$) domine la expansión. Este es el

llamado *Modelo de de Sitter*:

$$a(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right), & k = 1 \\ C \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right), & k = 0 \\ \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right), & k = -1, \end{cases} \quad (2.53)$$

donde C es una constante arbitraria.

Notar que en el caso cerrado el modelo alcanza un mínimo para $t = 0$, y que en $t < 0$ se observa una contracción; en $t > 0$ hay expansión acelerada. No hay singularidad. En el caso plano tampoco la hay; aquí el radio del universo se aproxima a cero mientras $t \rightarrow -\infty$. En el caso abierto se observa una singularidad en $t = 0$, pero es sólo una singularidad coordenada.

Datos observacionales. En 1998 dos grupos de astrónomos, *The supernova Cosmology Project* [19] y el *High-z supernova cosmology team* [20] determinaron, usando supernovas tipo Ia, valores para los parámetros de densidad: $\Omega_{k0} = 0$, $\Omega_{m0} \approx 0,28$ y $\Omega_{\Lambda0} \approx 0,72$. Aquí se considera el aporte de la radiación en la actualidad como despreciable: $\Omega_{r0} \approx 0$. Así, en el contexto de la cosmología estándar, la evolución del universo es dominada por el término cosmológico ($\Lambda > 0$), lo que se traduce en una expansión acelerada.

En el caso de no haber incluido la constante cosmológica en los cálculos estaríamos en problemas; ya que con las ecuaciones de Einstein sin constante cosmológica no hubiese sido posible explicar un expansión como la observada. La validez de la inclusión de la constante cosmológica en la teoría es aún un tema poco claro; en la siguiente sección profundizaremos en el *problema de la aceleración del universo o de la energía oscura*. Además revisaremos otros problemas cosmológicos.

2.3. Problemas cosmológicos; inflación y aceleración del universo

Problemas cosmológicos. La cosmología estándar, a pesar de sus éxitos: muestra naturalmente un universo en expansión, predice de abundancia de elementos livianos, explica el fondo cósmico de microondas, provee un marco para entender la formación de galaxias y otras estructuras; presenta problemas (e.g. [12]):

- Singularidad inicial: en teoría, el universo parte en un estado de densidad y temperatura infinitas, en una singularidad; aquí la geometría se indefiniría y las leyes físicas pierden validez. Una teoría cuántica para la gravedad satisfactoria debería resolver este problema. Por el momento sólo existen respuestas parciales, y una de ellas es dada en el contexto de la cosmología cuántica, tema que revisaremos en la siguiente sección.

- El horizonte cosmológico: el fondo cósmico de microondas se ve muy homogéneo e isotrópico—de hecho, es el cuerpo negro conocido más perfecto—, característica que indica que la radiación ha tenido contacto térmico en algún momento. El problema consiste en que los modelos cosmológicos estándar no describen una conexión causal entre puntos distantes, i.e. hay un horizonte causal ¿cómo se explica entonces esta homogeneidad e isotropía? La teoría inflacionaria, que en esta sección revisaremos, entrega una respuesta.
- La planitud: la densidad de energía en el universo parece ser muy cercana a la crítica ρ_c , i.e. a la del caso plano. En el universo primigenio una pequeña desviación de ρ_c hubiese conducido, por un lado a un recolapso, o por otro a una muerte térmica ¿cómo se explica este ajuste fino en la densidad de energía, que nos permite estar en un universo como el observado? La inflación soluciona este problema.
- Los monopolos: las teorías de la gran unificación predicen monopolos magnéticos creados en los comienzos del cosmos; hasta ahora no se ha encontrado ninguno. Nuevamente, la teoría inflacionaria tiene una respuesta para este problema.
- La asimetría bariónica: una suposición natural es que el universo sea neutral con todas las cargas conservadas; en este sentido, el Big Bang debió haber producido cantidades iguales de materia bariónica que antibariónica. Sin embargo, existe una asimetría: el universo parece estar hecho casi íntegramente de materia, en desmedro de la antimateria. No existe una teoría general que explique este fenómeno.
- La materia oscura: más del 80% de la materia del universo, i.e. más del 0,22 de $\Omega_{m0} \approx 0,28$, no ha sido observada por telescopios ¿dónde está dicha materia, cuál es su naturaleza?
- La aceleración del universo; energía oscura: el universo se expande de forma acelerada ($\Omega_{\Lambda 0} \approx 0,72$) ¿cómo se explica dicho comportamiento inesperado? ¿considerando una constante cosmológica positiva en las ecuaciones de Einstein, como el efecto de algún tipo de materia desconocida no observada a la que se asocia presión negativa—la energía oscura—, recurriendo a la energía del vacío, atribuyéndolo a un fallo de la Relatividad General?

A continuación revisaremos con más detalle los problemas del horizonte, de la planitud y de la energía oscura, todos asociados a una dinámica de expansión acelerada, tema relevante en esta tesis. Los dos primeros, como ya hemos señalado, son resueltos por la teoría de inflación cósmica, que posee amplia aceptación; en ese sentido, dichos problemas han dejado de serlo, pero en otro lo siguen siendo: el mecanismo inflacionario específico no es un tema concensuado; existen muchos modelos de inflación. Otros problemas, como el de los monopolos, el de la asimetría bariónica y el la materia oscura—asociados directamente a la

física de partículas—escapan del alcance de esta tesis, y no serán aquí discutidos. Por último, el problema de la singularidad inicial será brevemente estudiado en la sección siguiente, en el contexto de la ecuación de Wheeler-de Witt y la cosmología cuántica.

Problema del horizonte. Para ilustrar el problema del horizonte nos valdremos del modelo cosmológico de Einstein-de Sitter, i.e. la solución para la era de materia en caso plano $k = 0$ mostrada en (2.41).

Los modelos cosmológicos estudiados presentan horizontes, que definen la región de causalidad en el espacio. Considerando la trayectoria radial de un fotón emitido en $t = 0$ que se aproxima al origen del sistema coordenado $r = 0$ —al que se asocia un elemento de línea $ds^2 = 0$ —, y la métrica de Friedmann-Robertson-Walker con factor de escala $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$ correspondiente al modelo de Einstein-de Sitter, se puede demostrar que la distancia al horizonte de causalidad d_H en función del tiempo es dada por ([3])

$$d_H(t) = 3t. \quad (2.54)$$

Así, el volumen V_H encerrado por el horizonte será $V_H \propto t^3$. Considerando la razón entre los volúmenes de causalidad del tiempo actual $V_{H0} = V_H(t_0)$ ($t_0 \approx 15 \times 10^9$ años), y el de la recombinación $V_{Hr} = V_H(t_r)$ (tiempo en que la radiación se desacopla de la materia y nace el fondo cósmico de microondas, $t_r \approx 3 \times 10^5$ años; [3]), se obtiene la expresión

$$V_{Hr} = \left(\frac{t_r}{t_0}\right)^3 V_{H0}. \quad (2.55)$$

Por otro lado, el volumen de lo que hoy es el universo visible en momento de la recombinación V_{H0r} es dado por

$$V_{H0r} = \left(\frac{a(t_r)}{a(t_0)}\right)^3 V_{H0} = \left(\frac{t_r}{t_0}\right)^2 V_{H0}. \quad (2.56)$$

A partir de (2.55) y (2.56) se obtiene la relación

$$\frac{V_{Hr}}{V_{H0r}} = \frac{t_r}{t_0} \approx 2 \times 10^{-5}, \quad (2.57)$$

que nos dice que, al momento de la recombinación, sólo una pequeña parte de lo que hoy es el universo visible, el 2×10^{-5} del volumen total, tenía conexión causal ¿Cómo se explica entonces la isotropía de la radiación de fondo, teniendo en cuenta que regiones distantes, al momento su creación en la época de recombinación, no habrían tenido conexión causal, y por lo tanto, tampoco equilibrio térmico? Este es el problema del horizonte.

Problema de la planitud. Las expresión (2.35) puede ser reescrita como

$$\Omega - 1 = \frac{k}{\dot{a}^2}, \quad (2.58)$$

donde Ω representa el *parámetro de densidad de energía total*, definido como

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (2.59)$$

Así,

$$\Omega \begin{cases} < 1 & \text{para } k = -1 \\ = 1 & \text{para } k = 0 \\ > 1 & \text{para } k = +1 \end{cases}. \quad (2.60)$$

Esta expresión puede interpretarse como: el contenido de materia en el universo determina su geometría.

Con ayuda de estas ecuaciones ilustraremos a continuación el problema de la planitud. En el caso de un universo plano, i.e. con $k = 0$, la expresión (2.58) nos indica que en todo tiempo se cumple $\Omega - 1 = 0$. Supongamos que no lo fuera, y consideremos los modelos abierto y cerrado i.e con $k = -1, +1$ respectivamente; en ambos casos es válida la siguiente ecuación, derivada a partir de (2.58),

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega_0 - 1} = \frac{\dot{a}_0^2}{\dot{a}^2}. \quad (2.61)$$

Asumiremos un universo que comienza con una era de radiación y que—de acuerdo con los datos observacionales; [19], [20]—es cercanamente plano. De este modo, a partir de (2.51), la expresión (2.61) puede ser aproximada como

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega_0 - 1} \approx \frac{t}{t_0}. \quad (2.62)$$

Evaluando (2.62) en el inicio del universo, digamos en el *tiempo de Planck* $t_p = 10^{-43}[s]$, y teniendo en cuenta que $t_0 \approx 15 \times 10^9[\text{años}] \approx 5 \times 10^{17}[s]$, y que—de acuerdo con la cercana planitud mencionada—, $5 < \Omega_0 < 1, 5$, se obtiene

$$\Omega(t_p) - 1 \approx 10^{-60}. \quad (2.63)$$

Esta expresión nos dice que para llegar tener un universo como el observado en la actualidad, la densidad de energía en el tiempo de Planck debió haber sido extremadamente cercana a la crítica ¿Cómo puede se explica un ajuste tan fino en el contenido energético al inicio del universo? Este es el problema de la planitud.

Inflación como solución a los problemas del horizonte y de la planitud.

La inflación cósmica se concibe en el marco de la física de partículas y de la cosmología, y propone una etapa de evolución muy rápida y acelerada en el universo primigenio. Una dinámica como tal permite resolver los problemas de

la planitud y del horizonte (también el de los monopolos). Aunque el mecanismo detallado de la física se desconoce, la imagen básica proporciona predicciones consistentes con las pruebas observacionales [23]. A continuación consideraremos un modelo inflacionario básico para ilustrar la manera en que este permite dar respuesta a los problemas cosmológicos señalados. La justificación teórica para la inflación, proveniente de la física de la partículas, escapa del alcance de esta tesis y no será aquí tratada; sólo mencionaremos algunas referencias que pudieran ser de interés: i) Ref. [30] es un libro que trata de manera muy completa el tema de la física de partículas y la cosmología inflacionaria; ii) Ref. [22] fue el primer modelo cosmológico inflacionario, y propone la solución a los problemas antes citados; iii) En los libros estándar de gravitación y cosmología también se encuentran modelos inflacionarios, e.g. [3], [11], [12].

Consideremos un modelo ilustrativo. La idea es la siguiente [3]: en la física de partículas el quiebre de simetría es una característica fundamental, proceso que es determinado por la energía del sistema o, equivalentemente, su temperatura; a ciertas temperaturas es posible asociar al potencial de un campo escalar ϕ una simetría exacta, pero si la temperatura baja la simetría se quiebra. Situando dicho campo en nuestro universo en expansión, y teniendo en cuenta que mientras aumenta el volumen la temperatura disminuye, las condiciones son propicias para una ruptura de simetría. En el contexto de la *Teoría de Gran Unificación* se estima que la temperatura del quiebre es aproximadamente $T_{GUT} \approx 10^{27}[K]$, al que se puede asociar un lapso cosmológico entre los $10^{-35}[s]$ y $10^{-33}[s]$. Con la simetría rota ocurre una transición de estado en el sistema, aquí el campo ϕ adquiere el comportamiento de la constante cosmológica Λ . La dinámica inflacionaria puede ser entonces descrita como un modelo de de Sitter, i.e. dada por la expresión (2.41). Notando que el tiempo que nos incumbe es pequeño, la expansión para los casos abierto y cerrado puede ser aproximada a una exponencial:

$$a(t) = e^{\omega t} \quad \text{para } k = -1, 0, +1. \quad (2.64)$$

Veamos a continuación como la inflación resuelve el problema de la planitud. Reemplazando (2.64) en (2.58) se obtiene

$$\Omega - 1 = \frac{k}{\omega^2 e^{2\omega t}} \quad (2.65)$$

Evalutando (2.65) en $t_1 = 10^{-35}[s]$, tiempo que comienza la inflación, y en $t_2 = 10^{-33}[s]$, cuando termina, tenemos:

$$\Omega(t_1) - 1 = \frac{k}{\omega^2 e^{2\omega t_1}} \quad (2.66)$$

$$\Omega(t_2) - 1 = \frac{k}{\omega^2 e^{2\omega t_2}} \quad (2.67)$$

Para los casos no planos, a partir del cociente

$$\frac{\Omega(t_2) - 1}{\Omega(t_1) - 1} = e^{2\omega(t_1 - t_2)} \approx 10^{-56} \quad (2.68)$$

se obtiene

$$\Omega(t_2) - 1 \approx 10^{-56}(\Omega(t_1) - 1) \quad (2.69)$$

Que nos dice que, dentro de un amplio rango de condiciones iniciales—i.e. valores de $\Omega(t_1)$ —, al final del periodo inflacionario la densidad de energía es muy cercana a la crítica—i.e. $\Omega(t_2) \approx 1$ —, resultando de esto un universo cercanamente plano (notar que si $k = 0$ no hay problema), tal y como lo indica la observación. Así la inflación soluciona el problema de la planitud.

Veamos ahora la solución al problema del horizonte. Para esto tomaremos un modelo plano, hecho razonable debido a la evidencia observacional. Consideremos primero la magnitud del horizonte al momento de comenzar la inflación, en $t_1 = 10^{-35}[s]$, que es dada por la expresión

$$d_H(t_1) = 2t_1 = 6 \times 10^{-27}[m]. \quad (2.70)$$

A continuación notamos lo siguiente: el universo tiene aproximadamente 15×10^9 [años], así el horizonte actual se encuentra a una distancia de 15×10^9 [años—*luz*] = $1,4 \times 10^{26}[m]$. Si retrocedemos en el tiempo, la región encerrada hoy por el horizonte se vuelve más pequeña. Nos preguntamos ¿La región hoy encerrada por el horizonte, contraída hasta el comienzo de la inflación, es más pequeña que la región dentro del horizonte en dicho tiempo? Si así fuera, tenemos la solución al problema del horizonte. Llevemos entonces lo que hoy es el universo visible, hasta su tamaño al comienzo de la inflación. Empezamos en una era de materia, i.e. $a(t) \propto t^{2/3}$, entre los $10^{11}[s] = t_3 < t_M < t_0 = 10^{27}[s]$; pasamos por una era de radiación, i.e. $a(t) \propto t^{1/2}$, entre los $10^{-33}[s] = t_2 < t_R < t_3 = 10^{11}[s]$; para terminar en una era de inflación, i.e. $a(t) \propto e^{\omega t}$, entre los $10^{-35}[s] = t_1 < t_I < t_2 = 10^{-33}[s]$. De acuerdo esto, tenemos que el radio del universo hoy visible d_{HV} al comienzo de la inflación es dado por

$$(d_{HV})_{t_1} = e^{\omega(t_1-t_2)} \left(\frac{t_2}{t_3}\right)^{2/3} \left(\frac{t_3}{t_4}\right)^{1/2} r_H \approx 1,4 \times 10^{-28}[m], \quad (2.71)$$

donde $r_H = 1,4 \times 10^{26}[m]$ es la distancia coordenada al horizonte.

Ahora comparamos la distancia al horizonte al comienzo de la inflación, dada por (2.70), con el radio, de lo que hoy es el universo visible, al comienzo de la inflación, dado por (2.71). Vemos que

$$d_H(t_1) > (d_{HV})_{t_1}. \quad (2.72)$$

Que indica que todo lo que hoy vemos puede tener conexión causal, en particular a la radiación de fondo (que se desacopla de la materia a los $10^{13}[s]$) pudo estar en equilibrio térmico, lo que se traduce en la homogeneidad e isotropía observada. Lo que soluciona el problema del horizonte.

Expansión acelerada del universo; energía oscura. El universo se expande de forma acelerada; [19], [20]. En términos matemáticos, esto se traduce en un factor de escala tal que $\ddot{a}(t) > 0$. Este comportamiento inesperado—considerando la naturaleza atractiva de la fuerza gravitacional—al día de hoy

no tiene una explicación concluyente, y constituye, quizás, el mayor problema de la cosmología en la actualidad; ver e.g. [31], [32].

Se vislumbran tres posibles fuentes de error (o, siendo optimistas, tres posibles lugares donde encontrar una solución al problema): i) El lado derecho de las ecuaciones de Einstein, i.e. la parte correspondiente al contenido material, el tensor de energía-momentum, podría estar incompleto, algo importante no se ha considerado. ii) El lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein, i.e. la parte geométrica-dinámica de la teoría, correspondiente al término de Einstein-Hilbert en la acción, no es correcto. iii) Hay problemas en los dos lados de las ecuaciones; i.e. tanto la parte geométrica-dinámica como la del contenido material fallan.

Siguiendo estos enfoques se han propuesto variadas soluciones al problema de la aceleración. En el modelo estándar de la cosmología se atribuye dicho comportamiento a la llamada energía oscura: hipotética forma de energía distribuida homogéneamente en todo el espacio, la cual, asociada al término cosmológico en las ecuaciones de Einstein, representaría cerca de tres cuartas partes de la energía total del universo ($\Omega_{\Lambda 0} \approx 0,72$; sec. 2.2); a ésta corresponde una presión negativa ($p = -\rho$), resultando de esto una fuerza gravitacional repulsiva. El concepto de energía de vacío, proveniente de la teoría cuántica de campos, es usual verlo junto al de energía oscura, ya que se piensa que ahí podría tener su origen. Debe notarse que esta formulación es un tanto ambigua: por un lado se habla de la constante cosmológica, que corresponde a la parte geométrica-dinámica de la teoría de Einstein, y por otro, de energía, que naturalmente se asocia al contenido material. Otra propuesta que describe expansión acelerada es de la *quintaesencia* (ver e.g. [31]): materia hipotética que actúa como un campo repulsivo, asociada a una ecuación de estado con la forma $p = \omega\rho$, donde el parámetro $\omega < -1/3$ puede variar en escalas de tiempo cosmológicas. En el contexto de teorías que proponen modificaciones a la Relatividad General es posible encontrar modelos acelerados, hay bastantes; e.g. la *Cosmología de branas* (ver e.g. [33]), o soluciones construidas a partir de la *Gravedad $f(R)$* o de la *Teoría de Brans-Dicke* ([34]).

Si alguna de estas propuestas—u otra—llega a transformarse en la *explicación oficial* al problema de la expansión acelerada del universo es algo que está por verse. Cada teoría proporciona sus particulares predicciones, las cuales deben ser contrastadas con la experimentación. Este es un punto fundamental en el problema: se estima que el valor la energía asociada a una dinámica como la observada es pequeño; la constante cosmológica sería del orden de 10^{-120} en unidades de Planck, de modo que se vuelve difícil tomar partido por una teoría u otra, al tiempo que no se cuenta con una base teórica sólida. En este contexto, parece importante la búsqueda de teorías y soluciones consistentes, que revelen naturalmente un dinámica de expansión acelerada.

2.4. Extensiones de la Relatividad General

La teoría para gravedad de Einstein-Chern-Simons puede entenderse como una versión extendida de la Relatividad General; más adelante veremos el de-

talle (sec. 2.6). Para comprender el sentido de dicha extensión parece conveniente abordar ciertas variantes de Relatividad General, que en esta sección revisaremos. Además, mostraremos cierto tipo de formulaciones que nos serán útiles para obtener las soluciones presentadas en esta tesis. A continuación describiremos brevemente los tratamientos de Palatini, Lovelock, Kaluza-Klein, hamiltoniano de la Relatividad General y de Wheeler-de Witt; la cosmología cuántica, el *Mundo Brana*, el acoplamiento no-minimal geometría-materia y la gravedad en el lenguaje de formas diferenciales.

Método de Palatini. En geometría diferencial, la conexión es un objeto definido sobre una variedad diferenciable que permite relacionar o *conectar* puntos próximos. Para establecer dicha relación el concepto de métrica no es estrictamente necesario [35]. Un tipo particular de conexión son los símbolos de Cristoffel (ec. (2.8)), i.e. una conexión definida a partir del tensor métrico, en función de los cuales se construye la Relatividad General. Sin embargo, es posible conseguir una formulación para la gravedad más general considerando una geometría en la que los conceptos de métrica y conexión sean independientes, esto es el *Método de Palatini* ([36], [37], [38]). Se cree que este tratamiento, que aparece como una extensión de Relatividad General, podría jugar un rol importante en cuantización del campo gravitacional, de ahí su importancia.

Las ecuaciones de esta teoría se obtienen variando la acción (2.10), ahora con respecto a los campos independientes $g_{\mu\nu}$ y $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa\hat{T}_{\mu\nu} \quad (2.73)$$

$$\nabla_{\alpha}g^{\alpha\nu}\delta_{\lambda}^{\mu} - \nabla_{\lambda}g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\nabla_{\lambda}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\nabla_{\gamma}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\nu}\delta_{\lambda}^{\mu} + T_{\lambda}^{\nu\mu} + T_{\alpha\lambda}^{\alpha}g^{\mu\nu} - T_{\alpha}^{\nu\alpha}\delta_{\lambda}^{\mu} = 0, \quad (2.74)$$

donde $\hat{T}_{\mu\nu}$ representa al tensor de energía-momentum, y $T_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}$ el tensor torsión.

Notar que: i) Aquí las conexiones no son simétricas; ii) Si a este conjunto de ecuaciones se impone o la condición de metricidad $\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} = 0$, o la de torsión nula $T_{\nu\lambda}^{\mu} = 0$, se recobran las ecuaciones de Einstein.

Lagrangiano de Lovelock. La gravedad de Lovelock [39] es la generalización natural de Relatividad General a un espacio-tiempo D -dimensional. Es la teoría métrica más general que conduce a ecuaciones de segundo orden. La densidad lagrangiana de Lovelock, en D dimensiones, es dada por

$$\mathcal{L}^{(D)} = \sum_{2p \leq D} \alpha_p \mathcal{L}_p^{(D)}, \quad (2.75)$$

donde α_p son coeficientes arbitrarios con unidades $[masa]^{D-2p}$ y

$$\mathcal{L}_p^{(D)} = \delta_{\gamma_1 \dots \gamma_{2p}}^{\lambda_1 \dots \lambda_{2p}} R_{\lambda_1 \lambda_2}^{\gamma_1 \gamma_2} \dots R_{\lambda_{2p-1} \lambda_{2p}}^{\gamma_{2p-1} \gamma_{2p}}, \quad (2.76)$$

aquí $\delta_{\gamma_1 \dots \gamma_{2p}}^{\lambda_1 \dots \lambda_{2p}}$ son los delta de Kronecker generalizados y $R^{\gamma_1 \gamma_2}_{\lambda_1 \lambda_2}$ es el tensor de curvatura de Riemann.

Los tres primeros términos de la acción construida a partir de esta acción son el cosmológico, el de Einstein-Hilbert y el de Gauss-Bonnet:

$$S_0^{(D)} = \int \sqrt{-g} d^D x. \quad (2.77)$$

$$S_1^{(D)} = \int \sqrt{-g} R d^D x. \quad (2.78)$$

$$S_3^{(D)} = \int \sqrt{-g} (R_{\mu\nu\gamma\delta} R^{\mu\nu\gamma\delta} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) d^D x. \quad (2.79)$$

Este último término, el de Gauss-Bonnet, cobra importancia a partir desde $D = 5$. En $D = 4$ no aporta a las ecuaciones de movimiento, de modo que se recobra la teoría de Einstein. En el caso de la gravedad de Einstein-Chern-Simons (que es 5-dimensional) este término está presente.

Teoría de Kaluza-Klein. En el contexto de las teorías para gravedad en dimensiones mayores a cuatro, el concepto de compactificación de Kaluza-Klein (ver e.g. [3], [24], [40], [41]) cobra importancia: el mundo que vemos es 4-dimensional; se hace necesario algún mecanismo que haga consistentes las teorías en altas dimensiones. La teoría de Kaluza-Klein nació como un intento de unificación de la gravedad y el electromagnetismo, y se construye a partir de una versión 5-dimensional de la Relatividad General; sin embargo, en actualidad se utiliza más como un método de *reducción* dimensional en teorías gravitacionales, y no sólo en cinco dimensiones. La idea es simple: se asume que—en adición a las cuatro usuales— existe una o más dimensiones espaciales compactas extra, *pequeñas*, y que no podemos *ver*. Para entender el sentido de esto e ilustrar la mecánica del asunto, revisaremos cómo, mediante esta formulación, se pueden unificar la gravedad y el electromagnetismo a partir de la Relatividad General 5-dimensional.

Consideremos una métrica asociada a un espacio-tiempo 5-dimensional con cierta simetría espacial a la que corresponde un vector de Killing (este espacio se puede visualizar de la siguiente forma: en cada punto del espacio-tiempo 4-dimensional se adjunta una pequeña circunferencia. Para detalles ver e.g. [3])

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \phi^2 (dy + A_\mu dx^\mu)^2, \quad (2.80)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico 4-dimensional, y x^μ las coordenadas que le corresponden, donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; la coordenada y se asocia a la quinta dimensión; ϕ es un campo escalar que define el tamaño de la dimensión extra; y A_μ es un campo vectorial que da *inclinación* de la dimensión extra. La designación de este campo vectorial con la letra A no es casual: veremos que se identifica al potencial electromagnético. Notar además que la simetría asociada a la quinta dimensión puede ser relacionada con la conocida invariancia de gauge del electromagnetismo.

Al evaluar la métrica (2.80) en la acción para Relatividad General 5–dimensional, dada por

$$S_{KK} = \int \sqrt{-g^{(5)}} R^{(5)} d^5x, \quad (2.81)$$

se obtiene

$$S_{KK} = \int \phi \sqrt{-g^{(4)}} \left(R^{(4)} - \frac{1}{4} \phi^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{2}{\phi} \partial_\mu \partial^\mu \phi \right) d^4x dy, \quad (2.82)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Ésta es la acción de Kaluza-Klein en el marco de Jordan. El caso más simple es el que considera al campo ϕ como constante e igual a 1. Bajo esta consideración, e integrando en la quinta dimensión compacta, se unifica gravedad 4–dimensional con el electromagnetismo:

$$S_{KK} = \int \sqrt{-g^{(4)}} \left(R^{(4)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d^4x. \quad (2.83)$$

Ésta es la imagen básica de la teoría de Kaluza-Klein. Si bien ella posee consistencia matemática, el geometrizar en este sentido el electromagnetismo tiene implicancias que muestran fuertes contrastes con lo observado; y, aunque se haya descartado en su sentido original—el de la unificación—, el mecanismo de reducción de dimensional todavía aparece como una opción válida.

Mundo Brana. Otra manera de lidiar con el problema de las dimensiones extra es la *Teoría de Branas* o *Mundo Brana*. La idea básica consiste en que nuestro espacio-tiempo 4–dimensional aparece como una *membrana* inmersa en un espacio-tiempo de mayores dimensiones, el *bulk*. En el lenguaje coloquial término membrana hace alusión a una superficie 2–dimensional inmersa en un espacio 3–dimensional; el término brana generaliza esta noción a dimensiones arbitrarias, también se utiliza a veces *d*–brana, donde *d* corresponde a la dimensión del objeto inmerso. En el bulk pueden convivir varias branas. Para ilustrar el asunto nos valdremos de la Relatividad General 5–dimensional.

Consideremos una métrica para branas (e.g. [42]) en un bulk 5–dimensional

$$ds^2 = e^{2f(y)} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + r_c^2 dy^2, \quad (2.84)$$

donde $g_{\mu\nu}(x)$ es el tensor métrico correspondiente a la parte 4–dimensional del espacio, a la que correponden coordenadas x^μ , con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; la coordenada y se asocia a la quinta dimensión; la función $f(y)$ es el *factor warp* y la constante r_c el *radio de compactificación* (este nombre hace alusión a un espacio compacto; esto no es absolutamente necesario).

En este espacio-tiempo la, o las, branas se ubican de modo tal que les corresponde una coordenada $y = cte.$ ($dy = 0$); de este modo la métrica inducida en la brana será

$$ds^2 = e^{2f(y=cte)} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (2.85)$$

Notar que el $e^{2f(y=cte)}$ puede ser eliminado fácilmente mediante una transformación de coordenadas, resultando de esto un elemento de línea con la forma $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$.

A continuación, la métrica (2.84) se evalúa en las ecuaciones de Einstein 5–dimensionales (también se podría hacer en el lagrangiano)

$$R_{\alpha\beta}^{(5)} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}^{(5)}R^{(5)} = \kappa T_{\alpha\beta}^{(5)}; \quad \alpha, \beta = 0, \dots, 4. \quad (2.86)$$

Aquí el tensor de energía-momentum 5–dimensional $T_{\alpha\beta}^{(5)}$ tiene una forma particular, y en él se distingue la materia que vive en el bulk de la que vive en la brana

$$T_{\alpha\beta}^{(5)} = T_{\alpha\beta}^{Bulk} + \delta(y_{Br})T_{\alpha\beta}^{Br}, \quad (2.87)$$

donde $\delta(y_{Br})$ es un delta de Dirac, evaluado la coordenada y_{Br} en la que está ubicada la brana.

Las ecuaciones obtenidas mediante este procedimiento se evalúan sobre la brana, resultando de esto las ecuaciones que describen una dinámica 4–dimensional de la brana, resolviendo así el problema de las dimensiones extra. Ésta es la imagen básica de la teoría; para un estudio más riguroso ver e.g. [3], [42].

Formulación hamiltoniana de la Relatividad General y ecuación de Wheeler-de Witt. La teoría de Wheeler-de Witt ([43], [44]) se vislumbra como una primera aproximación a la cuantización del campo gravitacional. El primer paso para obtener la ecuación de Wheeler-de Witt es construir la formulación hamiltoniana de la Relatividad General, procedimiento que a continuación resumiremos; para profundizar ver e.g. [3], [45]. Una vez conseguida la formulación hamiltoniana, mediante el método de cuantización canónica se obtiene la ecuación de Wheeler-de Witt.

Consideremos la descomposición del espacio-tiempo (4–dimensional) en espacio y tiempo (3+1) mediante el uso de las *variables ADM* (de Arnowitt, Deser y Misner; los autores de [46], donde se introducen dichas variables), (N, N_a, g_{ab}) :

$$ds^2 = (N^a N_a - N^2) dt^2 + 2N_a dt dx^a + g_{ab} dx^a dx^b. \quad (2.88)$$

Aquí t representa una coordenada temporal y x^a ($a = 1, 2, 3$) coordenadas espaciales, N y N^a son funciones dependientes de (t, x^a) , conocidas como *lapse* y *shift* respectivamente, y g_{ab} es una métrica puramente espacial³.

En función estas variables la acción de Einstein-Hilbert—y considerando el término cosmológico—puede ser reescrita como

$$S_G[N, N^a, g_{ab}] = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Sigma_t} d^3x \mathcal{L}_G = \frac{1}{16\pi G} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\Sigma_t} d^3x N \sqrt{g} ({}^3R - K^2 + K_{ab}K^{ab} - 2\Lambda), \quad (2.89)$$

donde g es el determinante de g_{ab} y K_{ab} es la curvatura extrínseca asociada al subespacio–tipo espacio–barrido por las coordenadas x^a , dada por

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\nabla_a N_b + \nabla_b N_a - \dot{g}_{ab}) = K_{ba}, \quad (2.90)$$

³Para bajar y subir índices a, b, \dots se usa la métrica espacial. En este caso $N_a = g_{ab}N^b$.

donde ∇_a denota una derivada covariante en el espacio con métrica g_{ab} y el punto sobre g_{ab} significa derivada con respecto a t . La función K es la traza de K_{ab} , dada por $K = K^a_a$.

A continuación se definen los momenta canónicos como

$$\Pi^N := \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{N}} \quad \Pi^a := \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{N}_a} \quad \Pi^{ab} := \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial (\dot{g}_{ab})}. \quad (2.91)$$

Para encontrar la densidad hamiltoniana de la Relatividad General se lleva a cabo, como es usual en este tipo de procedimientos, una transformación de Legendre [47], de modo que se obtiene:

$$\mathcal{H}_G = N\mathcal{H}_\perp + N_a\mathcal{H}^a, \quad (2.92)$$

donde

$$\mathcal{H}_\perp = \sqrt{g} \left[{}^3R - 2\Lambda - \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{1}{2}\Pi^2 \right) \right] \quad (2.93)$$

$$\mathcal{H}^a = 2\sqrt{g}\nabla_a \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{g}} \right), \quad (2.94)$$

con $\Pi = \Pi^a_a$.

Mediante la aplicación de las ecuaciones Hamilton se encuentra las relaciones

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta N} = -\mathcal{H}_\perp = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_\perp = 0, \quad (2.95)$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta N_a} = -\mathcal{H}^a = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}^a = 0. \quad (2.96)$$

Estas expresiones son los llamados *constraint hamiltoniano* y *constraint de momentum* respectivamente.

Finalmente, para obtener la ecuación de Wheeler-de Witt, se efectúan los reemplazos

$$g_{ab} \rightarrow \hat{g}_{ab} = g_{ab} \quad (2.97)$$

$$\Pi^N \rightarrow \hat{\Pi}^N = -i \frac{\delta}{\delta N} \quad (2.98)$$

$$\Pi^a \rightarrow \hat{\Pi}^a = -i \frac{\delta}{\delta N_a} \quad (2.99)$$

$$\Pi^{ab} \rightarrow \hat{\Pi}^{ab} = -i \frac{\delta}{\delta (g_{ab})}, \quad (2.100)$$

correspondientes al procedimiento de cuantización canónica [48], en el constraint hamiltoniano dado por (2.95), y se multiplica por la función de onda (o mejor dicho, funcional del onda) $\Psi[g_{ab}]$:

$$\left\{ G_{abcd} \frac{\delta^2}{\delta (g_{ab}) \delta (g_{cd})} + \frac{\sqrt{g}}{16\pi G} [-{}^3R + 2\Lambda] \right\} \Psi[g_{ab}] = 0, \quad (2.101)$$

donde G_{abcd} es la llamada *supermétrica*, que se interpreta como la *métrica* del superespacio, que es el espacio infinito-dimensional de todas las 3-geometrías definidas por g_{ab} [3], y es dada por

$$G_{abcd} = \frac{1}{2\sqrt{g}} (g_{ac}g_{bd} + g_{ad}g_{bc} - g_{ab}g_{cd}). \quad (2.102)$$

La expresión (2.101) es la ecuación que buscábamos, la ecuación de Wheeler-de Witt ([43], [44]), que es una ecuación diferencial funcional hiperbólica de segundo orden sobre el superespacio, para la función de onda $\Psi[g_{ab}]$, que se supone contiene toda la información del sistema.

Notar que es posible incluir campos de materia en esta formulación, hecho que se traduce en un incremento de las dimensiones del superespacio. Notar también que la ecuación de Wheeler-de Witt puede ser obtenida a partir del método de las integrales de camino [49].

Cosmología cuántica. La aplicación de la teoría cuántica en la descripción del universo es lo que se conoce como cosmología cuántica; modelos cosmológicos construidos a partir de la ecuación de Wheeler-de Witt corresponden a esta denominación. Para ilustrar el tema, revisemos el *universo función de onda* de [48], que es una solución cosmológica de la ecuación (2.101), basada en la métrica Friedmann-Robertson-Walker cerrada, i.e. con $k = 1$. Este modelo se construye en base al concepto de *minisuperespacio*, que es un subespacio finito-dimensional del superespacio. En el caso de cosmologías tipo Friedmann-Robertson-Walker se habla de modelos de *minisuperespacio*, ya que son descritas por una única variable, el factor de escala a , en contraposición a las infinitas variables correspondientes al superespacio. Para una discusión sobre la validez de la aproximación del *minisuperespacio* ver [50], [51].

En este modelo se parte de la métrica Friedmann-Robertson-Walker cerrada

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.103)$$

a la cual corresponde una acción como la dada por (2.89), escrita de manera explícita como

$$S_{grav} \equiv \int dt L_{grav} = \frac{3\pi}{4G} \int dt \left[-\dot{a}^2 a + a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) \right], \quad (2.104)$$

donde se ha definido $a_0 = \sqrt{3/\Lambda}$. A partir (2.104) se obtiene el momento canónico asociado a la variable a ,

$$p_a \equiv \frac{\partial L_{grav}}{\partial \dot{a}} = -\frac{3\pi}{2G} \dot{a} a. \quad (2.105)$$

A partir de (2.104) y (2.105) es posible derivar la ecuación de movimiento

$$p_a^2 + \left(\frac{3\pi}{2G} \right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) = 0. \quad (2.106)$$

Reemplazando en (2.106) a y p_a por los operadores correspondientes, i.e.

$$a \rightarrow \hat{a} = a \quad \hat{p}_a \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial a}, \quad (2.107)$$

e introduciendo una función de onda dependiente de a , $\psi(a)$, se obtiene la ecuación de Wheeler-de Witt para este caso cosmológico en particular

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \left(\frac{3\pi}{2G\hbar} \right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right) \right] \psi(a) = 0. \quad (2.108)$$

Notar que esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo 1-dimensional para el caso de una partícula de masa unitaria y con energía nula, en un potencial dado por

$$V(a) = \left(\frac{3\pi}{2G\hbar} \right)^2 a^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right). \quad (2.109)$$

De acuerdo a esto, es posible usar métodos ya conocidos para tratar la ecuación (2.108) y extender las interpretaciones de la mecánica cuántica ordinaria a los conceptos de espacio y tiempo, lo que permite interesantes conclusiones. Quizás, las cuestiones más llamativas son que el tiempo no está presente en la ecuación de Wheeler-de Witt y la introducción del concepto de *espuma espacio-temporal*. No viene al caso profundizar ahora en estos temas, para una introducción breve y concisa ver [15], y para revisar el concepto de espuma espacio-temporal ver [52].

En el potencial (2.109) es posible distinguir dos regiones, una bajo *la barrera*, $0 < a < a_0$, que es clásicamente prohibida (a la *partícula* de energía cero), y otra, donde $a > a_0$, que es clásicamente permitida. Este potencial describe una forma que hace pensar en el efecto túnel; de hecho es posible encontrar soluciones donde un universo *se crea desde la nada* (esa *nada* hace referencia a una condición física para la cual no tienen sentido las nociones de espacio y tiempo clásicas) mediante efecto túnel. A continuación revisaremos brevemente dos posibles soluciones para (2.108), una de las cuales considera la situación del efecto túnel.

Para determinar la función de onda del minisuperespacio—seleccionar una solución particular de la ecuación de Wheeler-de Witt—las condiciones de borde deben ser especificadas. Para obtener un universo nacido a partir de efecto túnel se debe requerir que en la región clásicamente permitida la solución represente sólo una onda *saliente*; esta elección de la condición de borde define la llamada *función de onda tunelada*, ψ_T , de [53]. La solución semiclásica (para revisión del tema de la aproximación semiclásica en el caso general ver [54]) que describe tal onda, en la región $0 < a < a_0$, es dada por

$$\psi_T(0 < a < a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{\kappa(a)}} \left\{ \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right)^{3/2} \right] + i \exp \left[\frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right)^{3/2} \right] \right\}, \quad (2.110)$$

donde $\kappa(a) = \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)^{1/2}$, mientras que la solución para la región clásicamente permitida, $a > a_0$, es

$$\psi_T(a > a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{k(a)}} \exp \left[-i \frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1 \right)^{3/2} \right], \quad (2.111)$$

donde $k(a) = \left(\frac{3\pi}{2G}\right)^2 a \left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1\right)^{1/2}$.

Otra opción es considerar cantidades iguales de ondas *entrantes* y *salientes* en la región clásicamente permitida, que conduce a la función de onda *sin borde*, ψ_{HH} (HH de Hartle y Hawking, [48]); bajo esta consideración la solución en la región $0 < a < a_0$ es dada por

$$\psi_{HH}(0 < a < a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{\kappa(a)}} \exp \left[-\frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2} \right)^{3/2} \right], \quad (2.112)$$

mientras que en la región $a > a_0$ se tiene

$$\psi_{HH}(a > a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{k(a)}} \cos \left[\frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1 \right)^{3/2} \right]. \quad (2.113)$$

En los dos casos revisados la función de onda en la región clásicamente permitida es oscilatoria, mientras que la solución bajo la barrera es exponencial. La función de onda tunelada, que es compleja, tiene sólo una componente saliente, y representa un universo Friedmann-Robertson-Walker en expansión, mientras que la función de onda de Hartle-Hawking, que es real, consiste en dos piezas, una entrante y otra saliente, y así, asigna una probabilidad no cero para un universo que colapse. Un universo como tal no sobrevive lo suficiente como producir observadores que descubran el colapso.

Estas funciones de onda, han sido seleccionadas porque han sido las más ampliamente discutidas y las condiciones de borde tienen una fácil interpretación. Las condiciones de borde de tunelamiento y las de Hartle-Hawking simplemente restringen los modos presentes en la región clásicamente permitida. Así, éstas son aplicables a clases más generales de modelos cosmológico-cuánticos que el caso simple presentado acá. En particular, son aplicables a modelos no-vacíos, en los cuales varios tipos de materia cuantizada están presentes. Puede argumentarse, con base en estos modelos, que la función de onda tunelante predice un universo en el cual una inflación suficiente tiene lugar, mientras la función de onda de Hartle-Hawking no. Todavía no hay consenso en esta materia. De hecho, hay varias posibles elecciones; por ejemplo, en ref. [55] se han investigado condiciones de borde más generales.

Cabe mencionar aquí una cuestión importante. La *partícula* en $a = 0$ —un universo cuántico Friedmann-Robertson-Walker de tamaño cero, o, una *nada* cosmológica—puede atravesar la barrera de potencial vía efecto túnel, y aparecer en $a = a_0$. Este evento de tunelamiento representa un universo Friedmann-Robertson-Walker de tamaño (factor de escala) a_0 que ha sido *mecánica-cuánticamente*

arrojado a la existencia; i.e., un universo que ha sido creado espontáneamente, y sin una singularidad (ya que *comienza* con tamaño finito; esto puede interpretado como algo bueno, ya que muchos piensan que las singularidades carecen de significado físico). Escogiendo la función de onda tunelante, es ahora una materia simple (usando los métodos usuales) calcular la probabilidad de que esto ocurra:

$$P \simeq \exp \left[-\frac{3\pi}{G\Lambda} \right] \quad (2.114)$$

Pero ¿Cómo se interpreta esta expresión? Tenemos sólo un universo—¿qué significa el concepto de probabilidad para un sistema único? Este es un problema fundamental, y ha llevado a nuevas interpretaciones de la mecánica cuántica. No daremos detalles aquí, pero bibliografía relacionada es la siguiente: [16], [17], [56], [57], [58].

Acoplamiento no-minimal. Otra posible modificación de la Relatividad General consiste en incluir términos de *acoplamiento no-minimal*, i.e. que combinen geometría y materia. De este modo se puede obtener ecuaciones que describan dinámicas diferentes a las regulares. Este tipo de acoplamiento normalmente tiene su justificación en la teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo curvo ([59], [60]), también aparece en la teorías de cuerdas [61] y en la de Brans-Dicke [34].

A modo de ejemplo consideremos la acción de Brans-Dicke en el marco de Jordan

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} \left(\left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + V(\phi) \right] \right) d^4x + S_M, \quad (2.115)$$

donde R es el escalar de Ricci, ϕ un campo escalar con potencial $V(\phi)$, ω es un parámetro adimensional y S_M es la acción correspondiente a materia ordinaria.

Aquí el acoplamiento no-minimal aparece en el término ϕR que incluye a la geometría—mediante R —y al campo escalar ϕ . Las ecuaciones obtenidas al variar la acción (2.115) con respecto a los campos $g_{\mu\nu}$ y ϕ presentan términos extra:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi \right) + \frac{1}{\phi} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi \right) - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu} \quad (2.116)$$

$$\frac{2\omega}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + R + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.117)$$

Gravedad en el lenguaje de las formas diferenciales. El tratamiento estándar de la Relatividad General ocurre en el lenguaje tensorial (e.g. [1], [2]). Sin embargo es posible usar un lenguaje distinto, el de las formas diferenciales (no estudiaremos aquí dicho lenguaje en sí mismo, sino su relación con la gravedad; para profundizar ver e.g. [1], [2], [3], [7], [35]). Este enfoque presenta ventajas en el sentido que hace más manejable los tratamientos para gravedad en dimensiones diferentes de cuatro (e.g. la acción de Lovelock) y cuando se considera

torsión (e.g. la acción de Palatini); además, facilita la implementación de teorías para gravedad invariantes de gauge (renormalizables y cuantizables), como la gravedad de Chern-Simons. A continuación mostraremos la acción de Lovelock (que, recordemos, en el caso 4–dimensional es la teoría de Einstein) escrita en el términos de formas; posteriormente serán incluidos términos que involucran torsión. Seguiremos aquí lo expuesto en [7].

La idea es construir una acción para gravedad en términos de las 1–formas vielbein e^a y conexión de espín ω^{ab} (relacionadas a $g_{\mu\nu}$ y $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ respectivamente), y sus derivadas exteriores (notar que para índices de Lorentz se utilizarán caracteres latinos a, b, \dots). El hecho de que $d^2 \equiv 0$ implica que el lagrangiano contendrá, a lo más, derivadas de primer orden de e^a y ω^{ab} ; esto atraves de las 2–formas curvatura $R^{ab} = D\omega^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb}$ y torsi3n $T^a = De^a = de^a + \omega^a_b e^b$. Además contamos con los tensores invariantes de Lorentz η_{ab} y $\varepsilon_{a_1 \dots a_D}$, donde N es la dimensi3n de variedad espacio-temporal considerada.

Teorema de Lovelock: La acci3n más general para gravedad que no involucra torsi3n y conduce a ecuaciones de segundo orden en la métrica es de la forma

$$S_N = \kappa \int_M \sum_{p=0}^{[N/2]} \alpha_p L^{(N,p)}, \quad (2.118)$$

donde

$$L^{(N,p)} = \kappa \varepsilon_{a_1 \dots a_N} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_N}. \quad (2.119)$$

En $N = 4$ la acci3n toma la forma

$$S_4 = \kappa \int_M \varepsilon_{abcd} [\alpha_2 R^{ab} R^{cd} + \alpha_1 R^{ab} e^c e^d + \alpha_0 e^c e^d e^c e^d]. \quad (2.120)$$

Aquí el primer término es de el Gauss-Bonnet, que–en $N = 4$ – no aporta a las ecuaciones de movimiento; el segundo es el de Einstein-Hilbert; y el tercero el cosmol3gico. De modo que tenemos la Relatividad General. En lenguaje tensorial (2.120) toma la forma

$$S_4 = -\kappa \int_M \sqrt{-g} [\alpha_2 (R^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\mu\nu\lambda\rho} - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^2) + 2\alpha_1 R + 24\alpha_0] d^4x. \quad (2.121)$$

Al variar la acci3n (2.118) con respecto a los campos e^a y ω^{ab} se obtienen las ecuaciones

$$\sum_{p=0}^{[(N-1)/2]} \alpha_p (N - 2p) \varepsilon_{ab_2 \dots b_N} R^{b_2 b_3} \dots R^{b_{2p} b_{2p+1}} e^{b_{2p+2}} \dots e^{b_N} = 0, \quad (2.122)$$

$$\sum_{p=1}^{[(N-1)/2]} \alpha_p p (N - 2p) \varepsilon_{ab_3 \dots a_N} R^{a_3 a_4} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} T^{a_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \dots e^{a_N} = 0. \quad (2.123)$$

Si se asume—como usualmente se hace—que la torsión es nula $T^a = 0$, la ecuación (2.123) se satisface automáticamente. En este caso es posible despejar las conexiones de espín en términos del vielbien, de modo que la conexión $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ se identifica con los símbolos de Christoffel.

El teorema de Lovelock no incluye torsión. Sin embargo es posible adicionar términos asociados a la torsión, con la forma

$$A_{2p} = e_{a_1} R_{a_2}^{a_1} R_{a_3}^{a_2} \dots R_{a_p}^{a_{p-1}} e^{a_p}, \quad \text{par } p \geq 2, \quad (2.124)$$

$$B_{2p+1} = T_{a_1} R_{a_2}^{a_1} R_{a_3}^{a_2} \dots R_{a_p}^{a_{p-1}} e^{a_p}, \quad \text{cualquier } p \geq 1, \quad (2.125)$$

$$C_{2p+2} = T_{a_1} R_{a_2}^{a_1} R_{a_3}^{a_2} \dots R_{a_p}^{a_{p-1}} T^{a_p}, \quad \text{impar } p \geq 1, \quad (2.126)$$

que representan respectivamente $2p$, $2p+1$ y $2p+2$ formas. Con estos ingredientes es posible construir acciones bastante más complejas; para un análisis detallado ver [62].

2.5. Gravedad de Chern-Simons

La gravedad de Chern-Simons responde a la necesidad de implementar una teoría para gravedad invariante de gauge, renormalizable y cuantizable. A continuación veremos que, en el contexto del formalismo de Yang-Mills, es posible construir acciones como éstas a partir de formas de Chern-Simons, esto en términos de los campos independientes e^a y ω^{ab} . Seguiremos aquí lo expuesto en [5], [6], [7].

Teoría de Yang-Mills. La estructura dinámica del exitoso modelo estándar de la física de partículas es dada por la acción de Yang-Mills, construida bajo el precepto de que la naturaleza debe ser invariante bajo un grupo de transformaciones que actúa de manera independiente en cada punto del espacio, i.e. una simetría local, o *de gauge*. La principal gracia de esta teoría es permite eludir inconsistencias: no presenta anomalías y, mediante el procedimiento de renormalización, es posible lidiar con la aparición de términos divergentes.

Revisemos la estructura básica de la teoría de Yang-Mills [63]. Consideremos la acción invariante de gauge, para un grupo de Lie n -dimensional simple G , dada por

$$S = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \langle F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rangle. \quad (2.127)$$

Aquí g^2 es una constante positiva, el corchete $\langle \ \rangle$ representa la traza, y los potenciales de campo son los vectores A_μ , los cuales, escritos en términos de los generadores t_a del álgebra de Lie asociada al grupo G ($[t_a, t_b] = C_{ab}^c t_c$, donde C_{ab}^c son las *constantes de estructura* del álgebra y los índices $a, b, c = 1, \dots, n$), tienen la forma

$$A_\mu = g t_a A_\mu^a \quad \text{con } A_\mu^a(x) \in \mathbb{R}, \quad (2.128)$$

y vienen dentro del tensor $F_{\mu\nu}$ como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = g t_a F_{\mu\nu}^a, \quad (2.129)$$

con

$$[A_\mu, A_\nu] = A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu, \quad (2.130)$$

y

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gC_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.131)$$

La invariancia de gauge de la acción se verifica para las transformaciones (de gauge) de A_μ y $F_{\mu\nu}$ dadas por

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1} \quad (2.132)$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1}, \quad (2.133)$$

donde $\omega = \omega(x)$ es un elemento del grupo G y ω^{-1} es el inverso de ω .

Las ecuaciones de campo se obtienen extremando la acción (2.127) con respecto a A_μ^a , y es posible ponerlas en términos de una *derivada covariante* D_μ :

$$(D_\mu F_{\nu\lambda})^a = \partial_\mu F_{\nu\lambda}^a + gC_{bc}^a A_\mu^b F_{\nu\lambda}^c = 0. \quad (2.134)$$

Además, al igual que en el electromagnetismo, $F_{\mu\nu}$ satisface la identidad de Bianchi

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (D_\nu F_{\lambda\rho})^a = 0. \quad (2.135)$$

Notar que la derivada covariante puede ser escrita en forma matricial como

$$D_\mu F_{\nu\lambda} = \partial_\mu F_{\nu\lambda} + [A_\mu, F_{\nu\lambda}]. \quad (2.136)$$

Por último, es interesante señalar que esta teoría puede ser elegantemente escrita en el lenguaje de formas diferenciales (ver e.g. [3], donde se construye la electrodinámica de manera similar a lo que mostraremos a continuación). En este caso la acción considerada tiene la forma⁴

$$S = -\frac{1}{2g^2} \int \langle F^2 \rangle, \quad (2.137)$$

donde F representa la 2-forma curvatura, dada por

$$F = dA + AA. \quad (2.138)$$

Aquí el potencial A es una 1-forma, y es escrito en la base de los generadores t_a del álgebra como

$$A = t_a A_\mu^a dx^\mu. \quad (2.139)$$

Este es básicamente el formalismo de Yang-Mills.

⁴El símbolo \wedge del producto cuña entre formas, en la totalidad de esta tesis, será omitido; e.g. $F \wedge F \equiv FF \equiv F^2$.

Formas de Chern-Simons. Es posible construir acciones para gravedad con una estructura similar a la recién presentada en base a *formas de Chern-Simons*. Antes ir a las teorías gravitacionales, veamos a grandes rasgos lo que son estas formas de Chern-Simons (para estudios más rigurosos ver [5], [64]).

Una $(2p - 1)$ -forma de Chern-Simons \mathcal{Q}_{2p-1} es una clase características secundaria, definida de modo tal que

$$d\mathcal{Q}_{2p-1} = \langle F^p \rangle, \quad (2.140)$$

donde $p = 1, 2, \dots$ y F es la 2-forma curvatura dada por (2.138).

Así, las 1, 3 y 5 formas de Chern-Simons tienen respectivamente la forma

$$\mathcal{Q}_1 = \langle A \rangle \quad (2.141)$$

$$\mathcal{Q}_3 = \left\langle FA - \frac{1}{3}A^3 \right\rangle \quad (2.142)$$

$$\mathcal{Q}_5 = \left\langle F^2A - \frac{1}{2}FA^3 - \frac{1}{10}A^5 \right\rangle. \quad (2.143)$$

Gravedad en 2+1 dimensiones como teoría de Chern-Simons. La Teoría General de la Relatividad es una teoría invariante bajo transformaciones generales de coordenadas; está es una simetría local, de cierto modo análoga a las transformaciones de gauge. Bajo esta consideración se podría intentar reconstruir una Relatividad General invariante de gauge, en el mismo sentido que la teoría de Yang-Mills, sin embargo, para cuatro u otras dimensiones diferentes de tres esto no es posible (ver e.g. [6], [7]). El caso 3-dimensional (o $(2 + 1)$ -dimensional), que a continuación revisaremos, es una excepción.

En tres dimensiones la acción de Einstein-Hilbert es dada por

$$S_{2+1} = \int \varepsilon_{abc} R^{ab} e^c = \int \varepsilon_{abc} e^c (d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb}). \quad (2.144)$$

Si se interpreta los campos e^a y ω^{ab} como campos de gauge, y se considera el conjunto como una entidad única, el parecido del lagrangiano correspondiente a (2.144) con una 3-forma Chern-Simons es evidente:

$$\mathcal{Q}_3 = \left\langle FA - \frac{1}{3}A^3 \right\rangle = \left\langle AdA + \frac{2}{3}A^3 \right\rangle. \quad (2.145)$$

En efecto, la Relatividad General $(2 + 1)$ -dimensional es un sistema Chern-Simons invariante de gauge para el grupo de Poincaré $ISO(2, 1)$. Para justificar esta afirmación, identificamos primero al e^a tomando el rol de una conexión, el cual, en conjunto con ω^{ab} , aparecen como parte de una conexión de gauge A expandida en la base de los generadores del álgebra de Poincaré P^a y J^{ab} (traslaciones y rotaciones de Lorentz 3-dimensionales)

$$A = A^I t_I = e^a P_a + \omega^{ab} J_{ab}, \quad (2.146)$$

donde se ha considerado el desdoblamiento de los índices $I = (ab, c)$.

Recordar que el álgebra de Poincaré es descrita por [65]

$$[P_a, P_b] = 0 \quad (2.147)$$

$$[J_{ab}, P_c] = -\eta_{ac}P_b + \eta_{bc}P_a \quad (2.148)$$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{db}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb} \quad (2.149)$$

A la conexión (2.146) corresponde la 2-forma curvatura $F = dA + AA$ dada por

$$\begin{aligned} F &= F^I t_I = F^a P_a + F^{ab} J_{ab} \\ &= T^a P_a + \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab}, \end{aligned} \quad (2.150)$$

donde T^a y R^{ab} representan respectivamente las 2-formas torsión y curvatura:

$$T^a = De^a = de^a + \omega^a_b e^b \quad (2.151)$$

$$R^{ab} = D\omega^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb}. \quad (2.152)$$

Con estos ingredientes construimos la acción

$$S = \int_M \langle F^2 \rangle = \int_M \left(T^a T^b \langle P_a P_b \rangle + \frac{1}{2} T^a R^{bc} \langle P_a J_{bc} \rangle + \frac{1}{2} R^{ab} T^c \langle J_{ab} P_c \rangle + \frac{1}{4} R^{ab} R^{cd} \langle J_{ab} J_{cd} \rangle \right), \quad (2.153)$$

definida sobre una variedad 4-dimensional sin borde M .

Notando que un invariante para $ISO(2, 1)$ es dado por

$$\langle P_a P_b \rangle = 0 \quad \langle P_a J_{bc} \rangle = \langle J_{ab} P_c \rangle = \varepsilon_{abc} \quad \langle J_{ab} J_{cd} \rangle = 0, \quad (2.154)$$

la expresión (2.153) toma la forma

$$S = \int_M \langle F^2 \rangle = \int_{\partial M} \left\langle FA - \frac{1}{3} A^3 \right\rangle = \int_M d(\varepsilon_{abc} e^a R^{bc}) = \int_{\partial M} \varepsilon_{abc} e^a R^{bc}, \quad (2.155)$$

que es la acción de la Relatividad General (2 + 1) –dimensional dada por (2.144).

De este modo, por contrucción, se ha implementado la Relatividad General (2 + 1) –dimensional como un teoría de Chern-Simons invariante de gauge para el grupo $ISO(2, 1)$.

De manera similar, se puede demostrar que la Relatividad General (2 + 1) –dimensional con constante cosmológica Λ es un sistema de Chern-Simons para el grupo de de Sitter (dS) $SO(3, 1)$ si $\Lambda < 0$, o para el de anti-de Sitter (AdS) $SO(2, 2)$ si $\Lambda > 0$; ver e.g. [6], [7].

Gravedad en dimensiones impares como teoría de Chern-Simons. Procedimientos como el recién mostrado para el caso 3-dimensional, basado en la acción de Einstein-Hilbert de la Relatividad General, no pueden replicarse con éxito para diferentes dimensiones. Sin embargo, a partir de la gravedad de Lovelock y bajo una elección particular de las constantes involucradas, es posible

construir teorías invariantes de gauge del tipo Chern-Simons para dimensiones impares.

A la acción de Lovelock, dada por (2.118), corresponden las ecuaciones de campo (2.122) y (2.123). En el caso que las $(N + 1)/2$ constantes α_p sean arbitrarias, la evolución temporal no queda completamente determinada por dichas ecuaciones. Sin embargo existe una elección particular de los coeficientes α_p que permite resolver el problema [66]. Si se considera dimensiones impares $N = 2n - 1$ resulta que las ecuaciones (2.122) y (2.123) poseen igual número de términos y, en efecto, son proporcionales; de este modo es posible encontrar una correspondencia entre las ecuaciones y seleccionar así las constantes α_p de forma que el sistema quede dinámicamente determinado. Así, de la comparación de las ecuaciones (2.122) y (2.123), en el caso N impar, surge la expresión que fija los α_p como

$$\alpha_p = \kappa \frac{(\pm 1)^{p+1} l^{2p-N}}{N-2p} \binom{n-1}{p}, \quad \text{con } p = 1, 2, \dots, (N-1)/2 \quad (2.156)$$

donde $p = 1, 2, \dots, (N-1)/2$, κ es una constante arbitraria adimensional, y l un parámetro con dimensiones de longitud. Así el número de constantes en la acción se reduce a dos, κ y l , las que pueden ser relacionadas a las constantes de la Relatividad General: la gravitacional de Newton G y la cosmológica Λ . En el caso par, efectuar una elección como ésta no es posible, debido que las ecuaciones (2.122) y (2.123) presentan un número diferente de términos.

Consideremos entonces el lagrangiano de Lovelock para dimensiones impares $N = 2n - 1$ eligiendo las constantes como (2.156), el cual denotaremos como $L_{2n-1}^{(A)dS}$, donde el $(A)dS$ se asocia al grupo de invariancia,

$$L_{2n-1}^{(A)dS} = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p L^{(2n-1,p)}, \quad (2.157)$$

con $L^{(2n-1,p)}$ dado por (2.120).

Es posible identificar (2.157) como un lagrangiano Chern-Simons. Para conseguirlo, el primer paso es definir la 1-forma conexión

$$A = \frac{1}{2} W^{AB} J_{AB} = e^a J_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab}, \quad (2.158)$$

donde $J_{AB} = (J_a, J_{ab})$ representa los generadores del álgebra $(A)dS$: J^a boosts $(A)dS$ y J_{ab} transformaciones de Lorentz. El álgebra $(A)dS$ es definida por

$$[P_a, P_b] = \pm J_{ab} \quad (2.159)$$

$$[J_{ab}, P_c] = -\eta_{ac} P_b + \eta_{bc} P_a \quad (2.160)$$

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{ca} J_{bd} + \eta_{db} J_{ca} - \eta_{da} J_{cb}, \quad (2.161)$$

donde los signos “+” y “-” corresponden respectivamente a las álgebras de AdS $SO(N-1, 2)$ y de dS $SO(N, 1)$.

A continuación, a partir de la conexión A –el campo de gauge $(A)dS$ –dada por (2.158), se construye $2n$ –forma densidad de Euler

$$E_{2n} = \varepsilon_{A_1 \dots A_{2n}} F^{A_1 A_2} \dots F^{A_{2n-1} A_{2n}}, \quad (2.162)$$

donde F^{AB} se asocia a la 2–forma curvatura

$$\begin{aligned} F &= AdA + AA = F^{AB} J_{AB} = (dW^{AB} + W_C^A W^{CB}) J_{AB} \\ &= \frac{1}{2} \left(R^{ab} - \frac{1}{l^2} e^a e^b \right) J_{ab} + T^a J_a. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Después de algunos cálculos es posible obtener la relación entre el lagrangiano de Lovelock en dimensiones impares $L_{2n-1}^{(A)dS}$ y el la densidad de Euler E_{2n} , que es dada por

$$dL_{2n-1}^{(A)dS} = E_{2n}. \quad (2.164)$$

De este modo, vemos que $L_{2n-1}^{(A)dS}$ puede ser implementado como una $(2n-1)$ –forma Chern-Simons (ec. (2.140)), y que es invariante bajo el grupo $(A)dS$.

Como ejemplo, en el caso 5–dimensional, que es el que más nos interesa, el lagrangiano Chern-Simons- $(A)dS$ tiene la forma

$$L_5^{(A)dS} = \frac{\kappa}{l} \varepsilon_{abcde} \left[R^{ab} R^{cd} e^e \pm \frac{2}{3l^2} R^{ab} e^c e^d e^e + \frac{1}{5l^4} e^a e^b e^c e^d e^e \right]. \quad (2.165)$$

Aquí el signo “+” corresponde a invariancia AdS , mientras que el “–” a la dS .

2.6. Gravedad de Einstein-Chern-Simons

Para cualquier teoría gravitacional es fundamental hacer contacto con la Relatividad General. En el caso del lagrangiano Chern-Simons- $(A)dS$ dado por (2.165), ni en el límite $l \rightarrow \infty$, ni en límite $l \rightarrow 0$ se consigue que el término de Einstein-Hilbert $\varepsilon_{a_1 \dots a_5} R^{a_1 a_2} e^{a_3} \dots e^{a_5}$ aparezca *solo*. Sin embargo, mediante la consideración de un álgebra diferente–como ya lo veremos–es posible obtener un lagrangiano Chern-Simons con dicha característica. Ésta es la teoría de Einstein-Chern-Simons [8], en la que se basa esta tesis, y que a continuación revisaremos.

Álgebra \mathcal{B} . Antes de ir a la teoría de Einstein-Chern-Simons, parece conveniente revisar algunos aspectos importantes del álgebra asociada: el *álgebra \mathcal{B}* ([67], [8]). Ésta tiene relación con los conceptos de *contracción de Inonu-Wigner* [65], *expansión* [68] y *S-expansión de álgebras* [67], que aquí no serán detallados.

El álgebra \mathcal{B} se obtiene–siguiendo las definiciones de ref. [67]–a partir de la *S-expansion* del álgebra de Lie $SO(4,2)$ con el semigrupo abeliano discreto $S_E^{(3)}$: los generadores de $SO(4,2)$, $T_A = \{ \tilde{J}_{ab}, \tilde{P}_a \}$, que satisfacen las relaciones de conmutación (2.165)-(2.165), se *multiplican* por cada elemento de $S_E^{(3)}$, $\lambda_\alpha =$

$\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, que obedecen el producto dado por, $\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta}$, cuando $\alpha + \beta \leq 4$, y $\lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_4$, cuando $\alpha + \beta > 4$. De este procedimiento se obtiene un nuevo conjunto de 10 generadores, $T_{(A,\alpha)} = \lambda_\alpha T_A$, que satisfacen el producto algebraico [67]

$$[T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)}] = \lambda_\alpha \lambda_\beta [T_A, T_B]. \quad (2.166)$$

Una selección particular de ciertos elementos de esta nueva álgebra S -expandida constituye la base de una subálgebra, el álgebra \mathcal{B} . La selección de estos elementos se basa en los conceptos de *subálgebra resonante* y 0_S -*reducción*, [67]. Los generadores del álgebra \mathcal{B} son $\{J_{ab}, P_a, Z_{ab}, Z_a\}$, definidos como

$$J_{ab} = \lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ab} \quad Z_{ab} = \lambda_2 \otimes \tilde{J}_{ab} \quad P_a = \lambda_1 \otimes \tilde{P}_a \quad Z_a = \lambda_3 \otimes \tilde{P}_a, \quad (2.167)$$

y satisfacen las relaciones de conmutación ([67], [8])

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{ca} J_{bd} + \eta_{db} J_{ca} - \eta_{da} J_{cb} \\ [J_{ab}, P_c] &= \eta_{cb} P_a - \eta_{ca} P_b \\ [P_a, P_b] &= Z_{ab} \\ [J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{cb} Z_{ad} - \eta_{ca} Z_{bd} + \eta_{db} Z_{ca} - \eta_{da} Z_{cb} \\ [J_{ab}, Z_c] &= \eta_{cb} Z_a - \eta_{ca} Z_b \\ [Z_{ab}, P_c] &= \eta_{cb} Z_a - \eta_{ca} Z_b \\ [P_a, Z_b] &= 0 \\ [Z_{ab}, Z_c] &= 0 \\ [Z_{ab}, Z_{cd}] &= 0 \\ [Z_a, Z_b] &= 0. \end{aligned} \quad (2.168)$$

Gravedad de Einstein-Chern-Simons. En ref. [8] se presenta la acción de Einstein-Chern-Simons, invariante de gauge para el álgebra \mathcal{B} .

A fin de obtener un lagrangiano Chern-Simons para el álgebra \mathcal{B} , consideremos la 1-forma conexión de gauge expandida en la base del álgebra

$$A = \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} e^a P_a + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{l} h^a Z_a, \quad (2.169)$$

a la cual corresponde la 2-forma curvatura

$$F = \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} T^a P_a + \frac{1}{2} \left(D_\omega k^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b \right) Z_{ab} + \frac{1}{l} (D_\omega h^a + k_b^a e^b) Z_a, \quad (2.170)$$

donde D_ω es la derivada covariante asociada a ω_{ab} .

Usando la fórmula de homotopía de Cartan extendida como en [69], e integrando por partes, es posible derivar el lagrangiano de Einstein-Chern-Simons para gravedad 5-dimensional:

$$L_{ChS}^{(5)} = \alpha_1 l^2 \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \varepsilon_{abcde} \left(\frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + 2l^2 k^{ab} R^{cd} T^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right). \quad (2.171)$$

Aquí α_1 y α_3 son constantes arbitrarias, l es un parámetro con dimensiones de longitud; hay dos campos geométricos independientes, el vielbein e^a y la conexión de espín ω_{ab} , y dos campos bosónicos, h^a y k^{ab} . Los términos aquí presentes son, de izquierda a derecha, el de Gauss-Bonnet, el Einstein-Hilbert, además de dos términos de acoplamiento geometría-materia. Notar que en el límite $l \rightarrow 0$ el único término que queda es el Einstein-Hilbert, recobrandose así la Relatividad General.

La variación del lagrangiano (2.171), módulo términos de borde, es dada por

$$\begin{aligned} \delta L_{ChS}^{(5)} = & \varepsilon_{abcde} (2\alpha_3 R^{ab} e^c e^d + \alpha_1 l^2 R^{ab} R^{cd} + 2\alpha_3 l^2 D_\omega k^{ab} R^{cd}) \delta e^e \\ & + \alpha_3 l^2 \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} \delta h^e + 2\alpha_3 l^2 \varepsilon_{abcde} R^{cd} T^e \delta k^{ab} \\ & + 2\varepsilon_{abcde} (\alpha_1 l^2 R^{cd} T^e + \alpha_3 l^2 D_\omega k^{ab} T^e + \alpha_3 e^c e^d T^e + \alpha_3 l^2 R^{cd} D_\omega h^e + \alpha_3 l^2 R^{cd} k_f^e e^f) \delta \omega^{ab}. \end{aligned} \quad (2.172)$$

Por lo tanto, en el límite donde la constante de acoplamiento $l \rightarrow 0$ se obtiene

$$\delta L_{ChS}^{(5)} = 2\alpha_3 \varepsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d + 2\alpha_3 \varepsilon_{abcde} e^c e^d T^e \delta \omega^{ab}, \quad (2.173)$$

que describe la dinámica de Einstein-Hilbert en el vacío. Es interesante notar que el argumento dado aquí no es sólo un accidente 5-dimensional. En cada dimensión impar, es posible realizar la S -expansión del modo ilustrado aquí, tomar el límite de la constante de acoplamiento $l \rightarrow 0$, y recobrar la gravedad de Einstein-Hilbert.

Si se incluye un lagrangiano de materia L_M ([24], [25]) se obtienen las ecuaciones de campo

$$\varepsilon_{abcde} (2\alpha_3 R^{ab} e^c e^d + \alpha_1 l^2 R^{ab} R^{cd} + 2\alpha_3 l^2 D_\omega k^{ab} R^{cd}) = \kappa \frac{\delta L_M}{\delta e^a} \quad (2.174)$$

$$\alpha_3 l^2 \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} = \kappa \frac{\delta L_M}{\delta h^a} \quad (2.175)$$

$$2\varepsilon_{abcde} (\alpha_1 l^2 R^{cd} T^e + \alpha_3 l^2 D_\omega k^{ab} T^e + \alpha_3 e^c e^d T^e + \alpha_3 l^2 R^{cd} D_\omega h^e + \alpha_3 l^2 R^{cd} k_f^e e^f) = \kappa \frac{\delta L_M}{\delta \omega^{ab}} \quad (2.176)$$

$$2\alpha_3 l^2 \varepsilon_{abcde} R^{cd} T^e = \kappa \frac{\delta L_M}{\delta k^{ab}}, \quad (2.177)$$

donde $\frac{\delta L_M}{\delta e^a}$ se asocia al tensor de energía-momentum $T_{\mu\nu}$, $\frac{\delta L_M}{\delta h^a}$ al tensor de energía-momentum para el campo h^a , que denotaremos como $T_{\mu\nu}^{(h)}$, $\frac{\delta L_M}{\delta \omega^{ab}}$ al tensor de espín $S_{\mu\nu\lambda}$, y $\frac{\delta L_M}{\delta k^{ab}}$ es su análogo para el campo k^{ab} .

2.7. Cosmología Friedmann-Robertson-Walker Einstein-Chern-Simons

En [24] encontramos algunas soluciones para la teoría de Einstein-Chern-Simons que describen la evolución de universos tipo Friedmann-Robertson-Walker con curvatura espacial nula. En ese artículo se mostró que es posible recuperar la cosmología estándar, en cinco y cuatro dimensiones, a partir de la gravedad de Einstein-Chern-Simons.

Soluciones 5–dimensionales. El primer paso para encontrar estas soluciones es imponer las condiciones de torsión y campo k^{ab} nulos, i.e. $T^a = 0$ y $k^{ab} = 0$, en el sistema de ecuaciones (2.174)-(2.177), lo que simplifica bastante el sistema. A continuación se introduce la métrica de Friedmann-Robertson-Walker 5–dimensional

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 [d\theta_2^2 + \text{sen}^2\theta_2 d\theta_3^2 + \text{sen}^2\theta_2 \text{sen}^2\theta_3 d\theta_4^2] \right\} = \eta_{ab} e^a e^b \quad (2.178)$$

$$\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1, +1), \quad k = 0, +1, -1,$$

donde se ha elegido la base ortonormal

$$\begin{aligned} e^0 &= dt & e^1 &= a(t) dr/(1 - kr^2) & e^2 &= a(t) r d\theta_2 \\ e^3 &= a(t) r \text{sen}\theta_2 d\theta_3 & e^4 &= a(t) r \text{sen}\theta_2 \text{sen}\theta_3 d\theta_4. \end{aligned} \quad (2.179)$$

Exigiendo que el campo h^a sea consistente con la homogeneidad e isotropía espacial, se postula

$$h^0 = f(t)e^0 \quad h^p = g(t)e^p, \quad p = 1, \dots, 4. \quad (2.180)$$

Además, se considera a los tensores de energía-momentum $T_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}^{(h)}$ como fluidos perfectos, de modo que la materia es descrita por su densidad de energía $\rho(t)$ y presión $P(t)$; y análogamente $\rho^{(h)}$ y $P^{(h)}$. Así, las ecuaciones de campo toman la forma

$$48\alpha_3 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) + 24\alpha_1 l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = \beta\rho \quad (2.181)$$

$$-24\alpha_3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] - 24\alpha_1 l^2 \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \beta P \quad (2.182)$$

$$24\alpha_3 l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = \beta\rho^{(h)} \quad (2.183)$$

$$-24\alpha_3 l^2 \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \beta P^{(h)} \quad (2.184)$$

$$24\alpha_3 l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left[(g-f) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{g} \right] = 0 \quad (2.185)$$

donde β corresponde a las constante de acoplamiento de la materia y en la última ecuación hemos considerado el tensor de espín nulo, $S_{\mu\nu\lambda} = 0$.

En el caso que l , f y g sean iguales a cero (y por lo tanto $\rho^{(h)} = P^{(h)} = 0$), sólo sobreviven las ecuaciones (2.181) y (2.182), y toman la forma de las ecuaciones de Friedmann en cinco dimensiones. Con una ecuación de estado con la forma $P = \omega\rho$ (con ω constante) y para el caso plano, i.e. $k = 0$, se derivan las siguientes soluciones (aproximadas) para las ecuaciones tipo Einstein (2.181) y (2.182):

- Si $\omega = -1$, se encuentra la solución aproximada (para valores de l^2 pequeños)

$$a(t) = C e^{H_0 t}, \quad (2.186)$$

donde H_0 es la constante de Hubble dada en este caso por

$$H_0^2 \approx \frac{\rho_0 \kappa}{6} \left\{ 1 - l^2 \frac{\alpha \kappa}{36} \rho_0 \right\}, \quad (2.187)$$

donde se ha definido las constantes $\alpha = 3\alpha_1/\alpha_3$ y $\kappa = \beta/8\alpha_3$, y ρ_0 representa la densidad de energía constante asociada a este caso. Notar que este es un modelo de de Sitter, y que si $l \rightarrow 0$ se obtiene la solución de la cosmología estándar basada en la Relatividad General.

- Si $\omega \neq -1$, se encuentra la solución aproximada (cuando el término proporcional a l^2 es pequeño)

$$a(t) \approx C t^{1/2(1+\omega)} \left[1 + \frac{\alpha l^2}{12} \left(\frac{1}{2(1+\omega)} \right)^3 \frac{1}{t^2} \right], \quad (2.188)$$

donde

$$C = a_0 \left\{ [2(1+\omega)]^2 \frac{\kappa_1 \rho_0}{6} \right\}^{1/4(1+\omega)}. \quad (2.189)$$

Notar que los casos de mayor interés físico son los con $\omega = 0$ and $\omega = 1/4$, que representan respectivamente a las llamadas eras de materia y de radiación. Esta solución es interesante ya que permiten recobrar las soluciones cosmología estándar 5-dimensional en el límite $l \approx 0$, siempre y cuando t y l no sean del mismo orden. En el caso que sí lo sean vemos el término de la derecha en (2.188) cobra importancia y la aproximación considerada pierde validez.

Soluciones 4-dimensionales. También es posible encontrar soluciones consistentes con la noción de un espacio-tiempo 4-dimensional con parte espacial plana; esto con base en el procedimiento de compactificación dinámica desarrollado en [40] y [41].

En este caso partimos de una métrica con parte espacial homogénea que contiene a la de Friedmann-Robertson-Walker plana 4-dimensional

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right] + a^{-2n}(t) dx^4, \quad n > 0, \quad (2.190)$$

a la que asociamos la base ortonormal

$$e^0 = dt \quad e^p = a(t) dx^p \quad e^4 = a^{-n}(t) dx^4, \quad p = 1, 2, 3. \quad (2.191)$$

Notar que en el caso de un universo en expansión, i.e. cuando la función $a(t)$ se incrementa, la parte del elemento de línea asociado a la quinta dimensión, a^{-2n} , decrece, hecho que está de acuerdo con el concepto de compactificación.

Además, se postula acorde a la simetría del espacio que el campo h^a y los tensores de energía-momento, $T_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}^{(h)}$, tienen la forma

$$h^0 = f(t)e^0 + g(t)e^4 \quad h^p = r(t)e^p \quad h^4 = m(t)e^0 + q(t)e^4, \quad p = 1, 2, 3 \quad (2.192)$$

$$T_{\mu\nu} = (\rho, P, P, P, P_5) \quad T_{\mu\nu}^{(h)} = (\rho^{(h)}, P^{(h)}, P^{(h)}, P^{(h)}, P_5^{(h)}) \quad (2.193)$$

Al reemplazar estos campos en el sistema (2.174)-(2.177), y tras algunas definiciones y pasos intermedios [24], se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$3(1-n) \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 12\varepsilon n \frac{\dot{a}^4}{a^4} = \frac{\rho}{2\kappa_1} \quad (2.194)$$

$$(1-n) \left[2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] + 4n\varepsilon \left[4 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] \frac{\dot{a}}{a^2} = -\frac{\tilde{P}}{2\kappa_1} \quad (2.195)$$

$$-3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] + 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 12\varepsilon \frac{\ddot{a} \dot{a}}{a^2} = \frac{P_5}{2\kappa_1} \quad (2.196)$$

$$\varepsilon n \frac{\dot{a}^4}{a^4} = \kappa_2 \rho^{(h)} \quad (2.197)$$

$$3\varepsilon \left[\frac{n(n+1)}{3} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - n \frac{\ddot{a} \dot{a}}{a^2} \right] = -\kappa_2 P^{(h)} \quad (2.198)$$

$$\varepsilon \frac{\ddot{a} \dot{a}}{a^2} = \kappa_2 P_5^{(h)} \quad (2.199)$$

$$\dot{q} - n \frac{\dot{a}}{a} (q - f) = 0 \quad (2.200)$$

$$\dot{g} + \frac{\dot{a}}{a}(g - f) = 0 \quad (2.201)$$

En el caso que ε (asociado a l), f , g y q sean iguales a cero (y por lo tanto $\rho^{(h)} = P^{(h)} = P_5^{(h)} = 0$) las ecuaciones que sobreviven son (2.194), (2.195) y (2.196). Las dos primeras tomaran la forma de las ecuaciones de Friedmann de la cosmología estándar 4-dimensional.

Introduciendo un ecuación estado en la forma $\tilde{P} = \omega\rho$ (con ω constante) se encuentra las soluciones aproximadas para los siguientes casos:

- Si $\omega = -1$, se encuentra la solución aproximada (para valores de ε pequeños)

$$a(t) = Ce^{H_0 t}, \quad (2.202)$$

donde H_0 es la constante de Hubble dada en este caso por

$$H_0 \approx \frac{\rho_0}{3(1-n)\kappa_1} \left\{ 1 - \varepsilon \frac{2n}{3(1-n)^2} \frac{\rho_0}{\kappa_1} \right\} \quad (2.203)$$

Expresión que en el caso límite $\varepsilon = 0$, se vuelve idéntica a la obtenida usando las ecuaciones de Einstein en cuatro dimensiones.

- Si $\omega \neq -1$, se encuentra la solución aproximada (cuando el término proporcional a ε es pequeño)

$$a(t) \approx Ct^{1/3(1+\omega)} \left[1 + \frac{2n\varepsilon}{(1-n)} \left(\frac{2}{3(1+\omega)} \right)^3 \frac{1}{t^2} \right] \quad (2.204)$$

donde

$$C = a_0 \left\{ \left[\frac{3}{2}(1+\omega) \right]^2 \frac{\rho_0}{6(1-n)\kappa_1} \right\}^{1/4(1+\omega)} \quad (2.205)$$

Notar que los de casos de mayor interés físico son los con $\omega = 0$ y $\omega = 1/3$, los cuales representan respectivamente las llamadas era de materia y era de radiación.

Estas últimas soluciones, (2.202) y (2.204), tienen la misma forma que las mostradas anteriormente para la métrica de Friedmann-Robertson-Walker 5-dimensional, y por lo tanto poseen la misma interpretación, que no repetiremos. Sí parece importante recalcar que la diferencia entre éstas es que, en este caso la métrica ha sido elegida ex profeso para lograr la compactificación de la cuarta dimensión espacial (mientras tres dimensiones espaciales se expanden, la cuarta se contrae, volviéndose esta última insignificante en relación con las otras).

Notar que en el conjunto de soluciones encontradas no se ha hecho referencia al comportamiento de la materia tipo h^a . En esta tesis se incluire este tema.

2.8. Solución con simetría esférica para la gravedad de Einstein-Chern-Simons

Además de las soluciones cosmológicas para la teoría de Einstein-Chern-Simons, se han encontrado otras para espacios con simetría esférica. En [27] se presenta una solución de agujero negro, y en [70] se estudia el equilibrio estelar. A continuación revisaremos brevemente los resultados encontrados en [27].

Ecuaciones de campo. En [27] se consideró el lagrangiano

$$L = L_{\text{ECS}} + L_{\text{M}}, \quad (2.206)$$

donde L_{ECS} es el lagrangiano de Einstein-Chern-Simons dado por (2.171) y L_{M} es el lagrangiano correspondiente a materia, y tiene la forma $L_{\text{M}} = L_{\text{M}}(e^a, h^a, \omega^{ab})$.

A partir de la acción (2.206), con $T^a = 0$ and $k^{ab} = 0$, se encuentran las ecuaciones de campo de Einstein-Chern-Simons, escritas aquí de la siguiente manera [27]:

$$de^a + \omega^a_b e^b = 0, \quad (2.207)$$

$$\varepsilon_{abcde} R^{cd} D_\omega h^e = 0, \quad (2.208)$$

$$\alpha_3 l^2 \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} R^{de}) = - \star \left(\frac{\delta L_{\text{M}}}{\delta h^a} \right), \quad (2.209)$$

$$\star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} e^d e^e) + \frac{1}{2\alpha} l^2 \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} R^{de}) = \kappa_{\text{EH}} \hat{T}_a, \quad (2.210)$$

donde “ \star ” representa al operador estrella Hodge, $\alpha := \alpha_3/\alpha_1$, κ_{EH} es la constante de la gravedad de Einstein-Hilbert 5-dimensional y

$$\hat{T}_a = \hat{T}_{ab} e^b = - \star \left(\frac{\delta L_{\text{M}}}{\delta e^a} \right) \quad (2.211)$$

es la 1-forma de energía-momentum correspondiente al tensor de energía-momentum usual \hat{T}_{ab} .

Como la ecuación (2.210) es una generalización de las ecuaciones de campo de Einstein, es útil escribirla en la forma

$$\star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} e^d e^e) = \kappa_{\text{EH}} \hat{T}_a + \frac{1}{2\alpha\alpha_3} \star \left(\frac{\delta L_{\text{M}}}{\delta h^a} \right), \quad (2.212)$$

donde se ha usado la ecuación (2.209). Este resultado conduce a la definición de la 1-forma de energía-momentum asociada al campo h^a

$$\hat{T}_a^{(h)} = \hat{T}_{ab}^{(h)} e^b = \frac{1}{2\alpha\alpha_3} \star \left(\frac{\delta L_{\text{M}}}{\delta h^a} \right).$$

Esto permite reescribir las ecuaciones (2.209) y (2.210) como

$$- \text{sgn}(\alpha) \frac{1}{2} l^2 \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} R^{de}) = \kappa_{\text{EH}} \hat{T}_a^{(h)}, \quad (2.213)$$

$$\star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} e^d e^e) + \text{sgn}(\alpha) \frac{1}{2} l^2 \star (\varepsilon_{abcde} R^{bc} R^{de}) = \kappa_{\text{EH}} \hat{T}_a, \quad (2.214)$$

donde el valor absoluto de la constante α ha sido absorbido por la redefinición del parámetro l :

$$l \rightarrow l' = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} = \sqrt{\left| \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right|}.$$

Solución con simetría esférica. Consideremos la métrica 5-dimensional

$$ds^2 = -f^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{g^2(r)} + r^2 d\Omega_3^2 = \eta_{ab} e^a e^b$$

donde $d\Omega_3^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_3^2$ es el elemento de línea de la 3-esfera S^3 .

Introduciendo la base ortonormal

$$\begin{aligned} e^T &= f(r) dt, \quad e^R = \frac{dr}{g^2(r)}, \quad e^1 = r d\theta_1, \\ e^2 &= r \sin \theta_1 d\theta_2, \quad e^3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_3, \end{aligned} \quad (2.215)$$

y reemplazando en la ecuación (2.214), en el vacío ($\hat{T}_{TT} = \hat{T}_{RR} = \hat{T}_{ii} = 0$), se obtienen ecuaciones como las (26) -(28) de [27]; siguiendo el procedimiento usual se consigue la solución

$$f^2(r) = g^2(r) = 1 + \text{sgn}(\alpha) \left(\frac{r^2}{l^2} - \beta \sqrt{\frac{r^4}{l^4} + \text{sgn}(\alpha) \frac{\kappa_{\text{EH}}}{6\pi^2 l^2} M} \right), \quad (2.216)$$

donde M es una constante de integración y $\beta = \pm 1$ muestra la degeneración debida al carácter cuadrático de las ecuaciones de campo. De (2.216) es directo ver que cuando $l \rightarrow 0$, es necesario considerar $\beta = 1$ para obtener la estándar de las ecuaciones de Einstein-Cartan, lo que permite identificar a la constante M con la distribución de masa. Este resultado permite describir un agujero negro [27].

Parte II

Cosmología Einstein-Chern-Simons Friedmann-Robertson- Walker 5-dimensional acelerada



Capítulo 3

Ecuaciones de campo de Einstein-Chern-Simons

3.1. Ecuaciones tipo Einstein-Maxwell

Encontraremos en esta parte de la tesis un conjunto de soluciones tipo Friedmann-Robertson-Walker 5–dimensionales, algunas aceleradas y otras no, para la gravedad de Einstein-Chern-Simons. Bajo ciertas imposiciones en el sistema de ecuaciones (2.174)-(2.177) derivaremos un conjunto similar al de Einstein-Maxwell (ecs. (2.24)-(2.27)), a partir del cual encontraremos nuestras soluciones.

Como punto de partida impondremos las condiciones de torsión nula ($T^a = 0$) y $k^{ab} = 0$ en (2.174)-(2.177), de modo que se obtiene

$$\varepsilon_{abcde} (2\alpha_3 R^{ab} e^c e^d + \alpha_1 l^2 R^{ab} R^{cd}) = \kappa \frac{\delta L_M}{\delta e^e} \quad (3.1)$$

$$\alpha_3 l^2 \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} = \kappa \frac{\delta L_M}{\delta h^e} \quad (3.2)$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta k^{ab}} = 0 \quad (3.3)$$

$$2\alpha_3 l^2 \varepsilon_{abcde} R^{cd} D_\omega h^e = \kappa \frac{\delta L_M}{\delta \omega^{ab}}. \quad (3.4)$$

Para conseguir ecuaciones similares a las de Einstein, reordenamos la (3.1) como

$$\varepsilon_{abcde} R^{bc} e^d e^e = \frac{\kappa}{2\alpha_3} \frac{\delta L_M}{\delta e^a} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_3} l^2 \varepsilon_{abcde} R^{bc} R^{de}, \quad (3.5)$$

y reemplazamos (3.2) en (3.5), de modo que el término cuadrático en la curvatura pasa a considerarse como correspondiente al contenido material, así se

obtiene el conjunto de ecuaciones

$$\varepsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d = 4\kappa_5 \left(\frac{\delta L_M}{\delta e^e} + \alpha \frac{\delta L_M}{\delta h^e} \right) \quad (3.6)$$

$$l^2 \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} = 8\kappa_5 \frac{\delta L_M}{\delta h^e} \quad (3.7)$$

$$l^2 \varepsilon_{abcde} R^{cd} D_\omega h^e = 4\kappa_5 \frac{\delta L_M}{\delta \omega^{ab}}, \quad (3.8)$$

donde se ha definido las constantes $\kappa_5 = \kappa/8\alpha_3$ y $\alpha = -\alpha_1/\alpha_3$. Esto nos permite interpretar $\delta L_M/\delta h^a$ como el tensor de energía-momentum de un segundo tipo de materia, no ordinaria, el campo h^a .

La ecuación de movimiento para el campo h^a es dada por (3.8). Por consistencia con la condición $T^a = 0$, se impone $\delta L_M/\delta \omega^{ab} = 0$ (usual en teorías para gravedad), lo que conduce a (3.11) para h^a . De este modo obtenemos el sistema

$$\varepsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d = 4\kappa_5 \left(\frac{\delta L_M}{\delta e^e} + \alpha \frac{\delta L_M}{\delta h^e} \right) \quad (3.9)$$

$$\frac{l^2}{8\kappa_5} \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} = \frac{\delta L_M}{\delta h^e} \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{abcde} R^{cd} D_\omega h^e = 0. \quad (3.11)$$

Así, a partir de la teoría de Einstein-Chern-Simons, sujeta a las condiciones $T^a = 0$, $k^{ab} = 0$ y $\delta L_M/\delta \omega^{ab} = 0$, hemos derivado un sistema similar al Einstein-Maxwell.

Notar que al imponer $T^a = 0$ la conexión de espín ω^{ab} ya no es un campo independiente, y puede ser escrito en términos del campo e^a . Además, de (3.9)-(3.11) se puede ver que si $L_M = 0$, entonces no existe una solución tipo Schwarzschild 5-dimensional; [8], [27].

3.2. Rango de validez de la Relatividad General

De (3.9)-(3.10) podemos ver que la Relatividad General es válida cuando la curvatura R^{ab} y la constante α no poseen valores excesivamente grandes, y el parámetro l es pequeño ([8]). De hecho, en este caso, (3.10) toma la forma

$$\frac{\delta L_M}{\delta h^e} \approx 0. \quad (3.12)$$

Introduciendo (3.12) en (3.9) se obtienen las ecuaciones de Einstein 5-dimensionales

$$\varepsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d \approx 4\kappa_5 \frac{\delta L_M}{\delta e^e}. \quad (3.13)$$

Si R^{ab} no es grande entonces $\delta L_M/\delta e^a$ tampoco lo será. Esto significa que la Relatividad General puede ser vista como un límite de baja energía de la

gravedad de Einstein-Chern-Simons. Así, en el rango de validez de la Relatividad General, las ecuaciones (3.9)-(3.11) son dadas por

$$\varepsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d = 4\kappa_5 \frac{\delta L_M}{\delta e^e}, \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_{abcde} R^{cd} D_\omega h^e = 0. \quad (3.15)$$

Por otro lado, si R^{ab} es lo suficientemente grande, tanto como para que al ser multiplicado por l^2 (que es muy pequeño) el resultado no sea despreciable, entonces vemos que $\delta L_M/\delta h^a$ no tampoco será despreciable. En este caso, el sistema completo, (3.9)-(3.11), debe ser considerado.



Capítulo 4

Cosmología Friedmann- Robertson-Walker 5-dimensional acelerada

4.1. Ecuaciones de campo Einstein-Chern-Simons para el espacio-tiempo tipo Friedmann-Robertson- Walker

Buscaremos soluciones para (3.9)-(3.11) modelando los campos, e^a y h^a , de acuerdo al principio cosmológico. La métrica asociada a un espacio-tiempo 5-dimensional con parte espacial maximalmente simétrica es la Friedmann-Robertson-Walker; ec. (2.178). Como en [24] el vielbein se escoge como

$$\begin{aligned}e^0 &= dt, \\e^1 &= \frac{a(t)}{\sqrt{1 - kr^2}} dr, \\e^2 &= a(t)r d\theta_2, \\e^3 &= a(t)r \sin \theta_2 d\theta_3, \\e^4 &= a(t)r \sin \theta_2 \sin \theta_3 d\theta_4\end{aligned}\tag{4.1}$$

El campo h^a , modelado para satisfacer la simetría de este espacio, tendrá la

forma ([1], [24])

$$\begin{aligned}
h^0 &= h(0) dt = h(0)e^0, \\
h^1 &= h(t) \frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}} dr = h(t)e^1, \\
h^2 &= h(t)a(t)r d\theta_2 = h(t)e^2, \\
h^3 &= h(t)a(t)r \sin \theta_2 d\theta_3 = h(t)e^3, \\
h^4 &= h(t)a(t)r \sin \theta_2 \sin \theta_3 d\theta_4 = h(t)e^4
\end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $h(0)$ es una constante y $h(t)$ es una función del tiempo t que debe ser determinada.

Además deben introducirse los tensores de energía-momentum $T_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}^{(h)}$, asociados respectivamente a $\frac{\delta L_M}{\delta e^a}$ y $\frac{\delta L_M}{\delta h^a}$. En ambos casos consideraremos fluidos perfectos, de modo que, en el sistema de referencia comóvil tendremos

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p, p), \tag{4.3}$$

$$T_{\mu\nu}^{(h)} = \text{diag}(\rho^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}), \tag{4.4}$$

donde ρ y $\rho^{(h)}$ corresponden a las densidades de energía y, p y $p^{(h)}$ a las presiones. Entonces, el tensor de energía-momentum total, compuesto por los fluidos es dado por

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \alpha T_{\mu\nu}^{(h)} \tag{4.5}$$

$$= \text{diag}(\rho + \alpha\rho^{(h)}, p + \alpha p^{(h)}, p + \alpha p^{(h)}, p + \alpha p^{(h)}, p + \alpha p^{(h)}) \tag{4.6}$$

$$= \text{diag}(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p}). \tag{4.7}$$

En el caso libre de torsión, el tensor de energía momentum para materia ordinaria satisface la ecuación de conservación y el tensor de Einstein también posee divergencia nula. En este caso el tensor de energía-momentum para la materia no-ordinaria también debe satisfacer la ecuación de conservación. De hecho, a partir de la ec. (3.9) se encuentra que

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0 \quad , \quad \nabla_\mu T^{(h)\mu}_\nu = 0 \tag{4.8}$$

Introduciendo (4.1)-(4.7) en (3.9)-(3.11) obtenemos las siguientes ecuaciones

de campo (ver [24] y el apéndice A):

$$6 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \kappa_5 \tilde{\rho}, \quad (4.9)$$

$$3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] = -\kappa_5 \tilde{p}, \quad (4.10)$$

$$\frac{3l^2}{\kappa_5} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = \rho^{(h)}, \quad (4.11)$$

$$\frac{3l^2}{\kappa_5} \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = -p^{(h)}, \quad (4.12)$$

$$\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left[(h - h(0)) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{h} \right] = 0. \quad (4.13)$$

Las ecuaciones (4.9) y (4.10) tiene la misma forma que las ecuaciones de Friedmann 5–dimensionales, sin embargo, aquí $\tilde{\rho}$ y \tilde{p} están sujetas a las restricciones impuestas por las restantes ecuaciones. Notar que la ecuación (4.9) fue estudiada en [71] en el contexto de la cosmología inflacionaria.

4.2. Soluciones cosmológicas Einstein-Chern-Simons 5-dimensionales

Con el objeto de obtener resultados conocidos de la cosmología estándar en el contexto de la expansión acelerada consideraremos la aproximación

$$T_{\mu\nu} \ll \alpha T_{\mu\nu}^{(h)}. \quad (4.14)$$

Este enfoque es análogo al caso en que, en la era de energía oscura, el tensor de energía-momentum se desprecia en favor de la consideración de la constante cosmológica. Esto significa que la contribución de materia ordinaria a las energía y presión totales será despreciable en comparación al aporte hecho por el campo h^a . En este caso, el tensor de energía momentum $\tilde{T}_{\mu\nu}$ es dado por

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mu\nu} &= \text{diag}(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p}) \\ &= \alpha T_{\mu\nu}^{(h)} \\ &= \text{diag} \left(\alpha \rho^{(h)}, \alpha p^{(h)}, \alpha p^{(h)}, \alpha p^{(h)}, \alpha p^{(h)} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

y las ecuaciones (4.9)-(4.13) toman la forma

$$6 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \kappa_5 \alpha \rho^{(h)} \quad (4.16)$$

$$3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] = -\kappa_5 \alpha p^{(h)} \quad (4.17)$$

$$\frac{3l^2}{\kappa_5} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = \rho^{(h)} \quad (4.18)$$

$$\frac{3l^2}{\kappa_5} \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = -p^{(h)} \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left[(h - h(0)) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{h} \right] = 0. \quad (4.20)$$

4.2.1. Caso $k = -1$

Introduciendo (4.18) en (4.16) obtenemos

$$6 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = 3l^2 \alpha \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2, \quad (4.21)$$

expresión que puede reescribirse como

$$\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left(\frac{2}{\alpha l^2} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = 0. \quad (4.22)$$

Solución con $\ddot{a} = 0$.

Consideremos una solución con $\ddot{a} = 0$, i.e. sin expansión acelerada. Para el primer término en el lado izquierdo de (4.22) tendremos

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 0; \quad (4.23)$$

recordando que $k = -1$, entonces

$$\dot{a} = \sqrt{-k}. \quad (4.24)$$

La solución es

$$a(t) = \sqrt{-k} (t - t_0) + a_0. \quad (4.25)$$

En este caso $a(t)$ crece linealmente.

Reemplazando esta solución en (4.18) y (4.19) encontramos que

$$\rho^{(h)} = p^{(h)} = 0, \quad (4.26)$$

y que (4.20) se satisface para $h(t)$ arbitrario.

Solución con $\ddot{a} \neq 0$.

A partir de (4.22) obtenemos

$$\dot{a}^2 - \frac{2}{\alpha l^2} a^2 = -k, \quad (4.27)$$

y vemos dos opciones: $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$.

Caso $\alpha > 0$. Consideremos el caso en que la constante α es positiva. Considerando el *ansatz*¹

$$a(t) = A \sinh \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t') \right) \quad (4.28)$$

donde t' es una constante de integración, obtenemos

$$A = \sqrt{-\frac{\alpha l^2 k}{2}} \quad (4.29)$$

y por lo tanto

$$a(t) = \sqrt{-\frac{\alpha l^2 k}{2}} \sinh \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t') \right). \quad (4.30)$$

La condición inicial $a_0 = a(t = t_0)$ conduce a

$$a(t) = \sqrt{-\frac{\alpha l^2 k}{2}} \times \sinh \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{-\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0 \right) \right] \quad (4.31)$$

y

$$\dot{a}(t) = \sqrt{-k} \times \cosh \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{-\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0 \right) \right]. \quad (4.32)$$

¹Este *ansatz* puede ser obtenido a partir de

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{2}{\alpha l^2} a^2 - k},$$

cuya solución es ($\alpha > 0$, $k = -1$)

$$\int_{t'}^t \frac{da}{\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2} a^2 - k}} = t - t',$$

usando una sustitución hiperbólica

$$\sqrt{\frac{\alpha l^2}{2}} \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{-\frac{2}{\alpha l^2 k}} a \right) = t - t'.$$

Resultado que muestra que, si $\alpha > 0$, entonces hay expansión acelerada. Por otro lado, desde las ecuaciones (4.31) y (4.32) podemos ver que

$$\ddot{a}(t) = \frac{2}{\alpha l^2} a(t). \quad (4.33)$$

Reemplazando (4.31), (4.32) y (4.33) en (4.16)-(4.19) obtenemos

$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = \frac{12}{\kappa_5 \alpha l^2}, \quad (4.34)$$

i.e., tenemos una expansión acelerada con una densidad de energía positiva y presión negativa (como una constante cosmológica positiva).

A partir de la ecuación (4.20) encontramos que

$$-\frac{\dot{h}}{h - h(0)} = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (4.35)$$

Integrando, tenemos que

$$h(t) = \frac{C}{\sinh \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{-\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0 \right) \right]} + h(0), \quad (4.36)$$

donde C es una constante de integración. La condición inicial $h_0 = h(t_0)$ conduce a

$$h(t) = \frac{[h_0 - h(0)] \sqrt{\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0}{\sinh \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{-\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0 \right) \right]} + h(0), \quad (4.37)$$

de donde podemos ver $h(t) \rightarrow h(0)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Caso $\alpha < 0$. Consideremos ahora el caso en que la constante α es negativa. El *ansatz*²

$$a(t) = A \sin \left(\sqrt{-\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t') \right) \quad (4.38)$$

² Este *ansatz* puede ser obtenido a partir de

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{2}{\alpha l^2} a^2 - k},$$

cuya solución es ($\alpha < 0$, $k = -1$)

$$\int_{t'}^t \frac{da}{\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2} a^2 - k}} = t - t',$$

usando una sustitución trigonométrica

$$\sqrt{-\frac{\alpha l^2}{2}} \operatorname{arcsin} \left(\sqrt{-\frac{2}{\alpha l^2 k}} a \right) = t - t'.$$

con t' una constante de integración, conduce a

$$A = \sqrt{\frac{\alpha l^2 k}{2}}, \quad (4.39)$$

por lo tanto

$$a(t) = \sqrt{\frac{\alpha l^2 k}{2}} \sin \left(\sqrt{-\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t') \right). \quad (4.40)$$

La condición inicial $a_0 = a(t = t_0)$, lleva a

$$a(t) = \sqrt{\frac{\alpha l^2 k}{2}} \times \sin \left[\sqrt{-\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0 \right) \right] \quad (4.41)$$

y

$$\dot{a}(t) = \sqrt{-k} \times \cos \left[\sqrt{-\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0 \right) \right]. \quad (4.42)$$

Por lo tanto si $a(t) > 0$ entonces $\ddot{a}(t) < 0$, que muestra que si $\alpha < 0$, entonces hay una expansión desacelerada.

Por otro lado, reemplazando (4.41) y (4.42) en (4.16)-(4.19) obtenemos

$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = \frac{12}{\kappa_5 \alpha l^2}. \quad (4.43)$$

Como el tensor de energía-momentum es dado por

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}^{(h)} = \text{diag} \left(\alpha \rho^{(h)}, \alpha p^{(h)}, \alpha p^{(h)}, \alpha p^{(h)}, \alpha p^{(h)} \right) \quad (4.44)$$

tenemos que la densidad de energía y presión correspondientes son

$$\tilde{\rho} = \alpha \rho^{(h)} = \frac{12}{\kappa_5 l^2} > 0, \quad (4.45)$$

$$\tilde{p} = \alpha p^{(h)} = -\frac{12}{\kappa_5 l^2} < 0,$$

A partir de (4.20) encontramos

$$-\frac{\dot{h}}{h - h(0)} = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (4.46)$$

Integrando, se obtiene

$$h(t) = \frac{C}{\sin \left[\sqrt{-\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0 \right) \right]} + h(0) \quad (4.47)$$

donde C es una constante de integración. La condición inicial $h_0 = h(t_0)$, conduce a

$$h(t) = \frac{(h_0 - h(0))\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0}{\sin \left[\sqrt{-\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0 \right) \right]} + h(0). \quad (4.48)$$

4.2.2. Caso $k = 0$

Introduciendo (4.18) en (4.16) y considerando $k = 0$, obtenemos

$$6 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 3l^2 \alpha \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^4, \quad (4.49)$$

que puede ser reescrita como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \left(\frac{2}{\alpha l^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = 0. \quad (4.50)$$

Solución estática $\dot{a} = 0$.

La solución para un universo estático es dada por

$$a(t) = a_0 \quad (4.51)$$

que conduce a

$$\rho^{(h)} = p^{(h)} = 0 \quad (4.52)$$

y la ecuación (4.20) se satisface para todo $h(t)$.

Solución no estática $\dot{a} \neq 0$.

A partir de (4.50) obtenemos

$$\dot{a}^2 - \frac{2}{\alpha l^2} a^2 = 0. \quad (4.53)$$

Esta ecuación tiene solución sólo si $\alpha > 0$.

Caso $\alpha > 0$. En este caso tenemos una expansión acelerada

$$a(t) = A \exp \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} t \right). \quad (4.54)$$

La condición inicial $a_0 = a(t_0)$ conduce a

$$a(t) = a_0 \exp \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) \right) \quad (4.55)$$

y

$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = \frac{12}{\kappa_5 \alpha l^2}.$$

Reemplazando (2.104) en (4.20), resolviendo para $h(t)$ y usando la condición inicial $h_0 = h(t_0)$, encontramos

$$h(t) = \frac{h_0 - h(0)}{\exp\left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}}(t - t_0)\right)} + h(0). \quad (4.56)$$

Caso $\alpha < 0$. En este caso no es posible encontrar una solución.

4.2.3. Caso $k = 1$

Introduciendo (4.18) en (4.16) obtenemos

$$6 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = 3l^2 \alpha \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2, \quad (4.57)$$

que puede ser reescrita como

$$\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left(\frac{2}{\alpha l^2} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = 0. \quad (4.58)$$

Caso con $\ddot{a} = 0$.

En este caso no es posible encontrar una solución.

Caso con $\ddot{a} \neq 0$.

A partir de la ecuación (4.58) se obtiene

$$\frac{2}{\alpha l^2} a^2 - \dot{a}^2 = k. \quad (4.59)$$

Desde (4.59) vemos dos casos: $\alpha > 0, \alpha < 0$.

Caso $\alpha > 0$. Si $\alpha > 0$ postulamos la solución

$$a(t) = A \cosh\left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}}(t - t')\right), \quad (4.60)$$

donde t' es una constante de integración, se llega a

$$A = \sqrt{\frac{\alpha l^2 k}{2}}. \quad (4.61)$$

La condición inicial $a_0 = a(t_0)$ nos lleva a

$$a(t) = \sqrt{\frac{\alpha l^2 k}{2}} \cosh \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \operatorname{arcosh} \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} a_0 \right) \right] \quad (4.62)$$

y

$$\dot{a}(t) = \sqrt{k} \sinh \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \operatorname{arcosh} \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} a_0 \right) \right]; \quad (4.63)$$

que representa una expansión acelerada.

Reemplazando (4.62) y (4.63) en (4.16)-(4.19) obtenemos

$$\rho^{(h)} = -p^{(h)} = \frac{12}{\kappa_5 \alpha l^2}, \quad (4.64)$$

i.e. tenemos una expansión acelerada mientras que la densidad de energía es positiva y la presión negativa, cuyos valores son constantes (como una constante cosmológica positiva).

A partir de (4.20) encontramos

$$-\frac{\dot{h}}{h - h(0)} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.65)$$

de modo que

$$h(t) = \frac{C}{\cosh \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \operatorname{arcosh} \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0 \right) \right]} + h(0), \quad (4.66)$$

donde C es una constante de integración. La condición inicial $h_0 = h(t_0)$ conduce a

$$h(t) = \frac{(h_0 - h(0)) \sqrt{\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0}{\cosh \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \operatorname{arcosh} \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0 \right) \right]} + h(0).$$

Notar que $h(t) \rightarrow h(0)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Caso $\alpha < 0$. Si $\alpha < 0$ la ecuación (4.59) no tiene solución.

4.3. Consistencia de las soluciones con la era de materia

En la sección anterior encontramos soluciones para las ecuaciones de campo Einstein-Chern-Simons con $T_{\mu\nu} = 0$, que pueden ser útiles para describir modelos de una era de energía oscura. En esta sección revisaremos la consistencia de estas ecuaciones con la era de materia.

Consideraremos materia ordinaria o polvo ($\rho \neq 0, p = 0$), tal como se hace en la cosmología estándar. La materia no-ordinaria será modelada como un fluido perfecto ($\rho^{(h)} \neq 0$ y $p^{(h)} \neq 0$). En este caso las ecuaciones (4.9)-(4.13) toman la forma

$$6 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \kappa_5 \left(\rho + \alpha \rho^{(h)} \right) \quad (4.67)$$

$$3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] = -\kappa_5 \alpha p^{(h)} \quad (4.68)$$

$$\frac{3l^2}{\kappa_5} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = \rho^{(h)} \quad (4.69)$$

$$\frac{3l^2}{\kappa_5} \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = -p^{(h)} \quad (4.70)$$

$$\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left[(h - h(0)) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{h} \right] = 0, \quad (4.71)$$

y las ecuaciones de conservación (4.8) para cada fluido son dadas por

$$\dot{\rho} + 4 \frac{\dot{a}}{a} \rho = 0 \quad (4.72)$$

y

$$\dot{\rho}^{(h)} + 4 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho^{(h)} + p^{(h)} \right) = 0. \quad (4.73)$$

La ecuación (4.72) tiene solución

$$\rho(t) = \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 \rho_0, \quad (4.74)$$

donde se han fijado las condiciones iniciales $a_0 = a(t_0)$ y $\rho_0 = \rho(t_0)$.

Reemplazando (4.74) y (4.69) en (4.67) tenemos

$$\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 - 2A \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) + AB \frac{a_0^4}{a^4} = 0, \quad (4.75)$$

donde se ha definido

$$A := \frac{1}{\alpha l^2}, \quad B := \frac{\kappa_5 \rho_0}{3}. \quad (4.76)$$

4.3.1. Caso $k = -1$

En este caso, la ecuación (4.75) puede ser reescrita como

$$\left(\frac{\dot{a}^2 - 1}{a^2} \right)^2 - 2A \left(\frac{\dot{a}^2 - 1}{a^2} \right) + AB \frac{a_0^4}{a^4} = 0, \quad (4.77)$$

de donde despejamos

$$\dot{a} = \pm \sqrt{Aa^2 \left(1 \pm \text{sgn}(A) \sqrt{1 - \frac{B}{A} \frac{a_0^4}{a^4}} \right) + 1}. \quad (4.78)$$

Caso $\alpha > 0$

En este caso

$$A = \frac{1}{\alpha l^2} > 0. \quad (4.79)$$

De (4.78) podemos ver que \dot{a} está bien definido para

$$a \geq a_{\min} = \sqrt[4]{\frac{B}{A}} a_0 \quad (4.80)$$

donde

$$a_{\min} = \sqrt[4]{\frac{\kappa_5 \alpha l^2 \rho_0}{3}} a_0.$$

Por otro lado, a_0 debe satisfacer

$$a_0 \geq a_{\min}, \quad (4.81)$$

de modo que

$$\frac{B}{A} \leq 1 \quad \text{i.e.,} \quad B \leq A, \quad (4.82)$$

y por lo tanto

$$\rho_0 \leq \rho_{\max} = \frac{3}{\kappa_5 \alpha l^2} \quad (4.83)$$

Este resultado nos permite analizar el radical en (4.78)

$$Aa^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{a_{\min}^4}{a^4}} \right) + 1 \geq 0, \quad (4.84)$$

i.e.,

$$-A^2 a_{\min}^4 \leq 1 + 2Aa^2 \quad (4.85)$$

se satisface para todo a .

¿Signo “+” o “-”? La elección del signo del radical tiene la información acerca de los valores permitidos de \dot{a} . Consideremos $\dot{a} > 0$ (el análisis del caso $\dot{a} < 0$ es muy similar)

$$\dot{a} = \sqrt{Aa^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{a_{\min}^4}{a^4}} \right) - k}. \quad (4.86)$$

La función $\dot{a}(a)$ es monótonicamente creciente (decreciente) si consideramos el signo más (menos) al frente de la raíz cuadrada.

De (4.86) podemos ver que existe un \dot{a}_{cri}

$$\dot{a}_{\text{cri}} := \dot{a}(a_{\min}) = \sqrt{\sqrt{\frac{\kappa_5 \rho_0}{3 \alpha l^2}} a_0^2 - k}. \quad (4.87)$$

Si consideramos el signo más (menos), \dot{a}_{cri} es el mínimo (máximo) valor de \dot{a} .

Si hay un límite para $a \gg a_{\text{min}}$, entonces

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \pm \sqrt{Aa^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{a_{\text{min}}^4}{a^4}} \right) - k} \\ &\approx \pm \sqrt{Aa^2 \left\{ 1 \pm \left(1 - \frac{a_{\text{min}}^4}{2a^4} \right) \right\} - k}.\end{aligned}\quad (4.88)$$

donde $k = -1$.

Caso con signo “+”. En este caso

$$\dot{a} = \pm \sqrt{Aa^2 \left(2 - \frac{a_{\text{min}}^4}{2a^4} \right) - k} \approx \pm \sqrt{2Aa^2 - k}, \quad (4.89)$$

cuya solución aproximada es

$$\begin{aligned}a(t) &= \pm \sqrt{-\frac{\alpha l^2 k}{2}} \\ &\times \sinh \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \text{arsinh} \left(\sqrt{-\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0 \right) \right]\end{aligned}\quad (4.90)$$

donde usamos $A = \frac{1}{\alpha l^2}$ y $k = -1$.

Caso con signo “-”. En este caso

$$\dot{a} = \pm \sqrt{A \frac{a_{\text{min}}^4}{2a^2} - k} \approx \pm \sqrt{-k}, \quad (4.91)$$

cuya solución aproximada es

$$a(t) = \pm \sqrt{-k} (t - t_0) + a_0$$

donde hemos usado $k = -1$.

Caso $\alpha < 0$.

En este caso

$$A = \frac{1}{\alpha l^2} < 0. \quad (4.92)$$

De (4.78) podemos ver que \dot{a} está bien definido si

$$1 - \frac{B}{A} \frac{a_0^4}{a^4} \geq 0, \quad (4.93)$$

pero esta condición se satisface para todo a .

Caso con signo ‘+’. En este caso

$$Aa^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{Ba_0^4}{Aa^4}} \right) - k \geq 0, \quad (4.94)$$

de modo que

$$\frac{k - Aa^2}{Aa^2} \geq \sqrt{1 - \frac{Ba_0^4}{Aa^4}}. \quad (4.95)$$

El lado izquierdo esta ecuación debe ser positivo, i.e.

$$k - Aa^2 \leq 0 \quad \text{or} \quad a \leq \sqrt{\frac{k}{A}}. \quad (4.96)$$

De (4.95) obtenemos

$$k^2 - 2Aka^2 \geq -ABa_0^4, \quad (4.97)$$

y nuevamente, el lado izquierdo de esta última ecuación debe ser positivo, i.e.,

$$k^2 - 2Aka^2 \geq 0 \quad \iff \quad a \leq \sqrt{\frac{k}{2A}}, \quad (4.98)$$

y, de (4.97) encontramos

$$a \leq \sqrt{\frac{k^2 + ABa_0^4}{2Ak}}. \quad (4.99)$$

A partir de

$$\sqrt{\frac{k}{A}} > \sqrt{\frac{k}{2A}} > \sqrt{\frac{k^2 + ABa_0^4}{2Ak}} = a_{\max} \geq a, \quad (4.100)$$

encontramos el valor máximo para a

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{3\alpha l^2 k^2 + \kappa_5 \rho_0 a_0^4}{6k}}, \quad (4.101)$$

y por lo tanto

$$\dot{a}(a = a_{\max}) = 0, \quad (4.102)$$

i. e., a_{\max} es un máximo local. Es directo probar que $\dot{a} \neq 0$ para $a \neq a_{\max}$. Si a tiene un valor máximo a_{\max} entonces (ver (4.74))

$$\rho(t) = \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 \rho_0 \geq \left(\frac{a_0}{a_{\max}} \right)^4 \rho_0 = \rho_{\min}. \quad (4.103)$$

Esto significa que ρ tiene un valor mínimo ρ_{\min} dado por

$$\rho_{\min} = \left(\frac{6ka_0^2}{3\alpha l^2 k^2 + \kappa_5 \rho_0 a_0^4} \right)^2 \rho_0, \quad (4.104)$$

donde $k = -1$.

Consideremos el caso donde $\dot{a} > 0$. Tomaremos sólo $\dot{a} > 0$ debido a que el análisis para el caso $\dot{a} < 0$ es muy similar. En este caso

$$\dot{a} = \sqrt{Aa^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{Ba_0^4}{Aa^4}} \right) - k} \quad (4.105)$$

es una función decreciente. Podemos ver que el mínimo valor de \dot{a} es dado por

$$\dot{a}_{\min} = \dot{a}(a_{\max}) = 0, \quad (4.106)$$

y el máximo por

$$\dot{a}_{\max} = \dot{a}(a = 0) = \sqrt{-\sqrt{-\frac{\kappa_5 \rho_0}{3\alpha l^2} a_0^2} - k}.$$

Caso con signo “-”. En este caso obtenemos la siguiente condición:

$$Aa^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Ba_0^4}{Aa^4}} \right) - k \geq 0, \quad (4.107)$$

donde $A = -\frac{1}{\alpha l^2}$ y $k = -1$. Esta condición es trivialmente satisfecha para todo a .

Este resultado implica que $\dot{a} \neq 0$. Esto significa que a no tiene máximos/mínimos locales, de modo que a es monótonicamente creciente o decreciente.

Si hay un límite para $a \gg \sqrt[4]{-\frac{B}{A}} a_0$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \pm \sqrt{Aa^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Ba_0^4}{Aa^4}} \right) - k} \\ &\approx \pm \sqrt{Aa^2 \left(1 - \left(1 - \frac{Ba_0^4}{2Aa^4} \right) \right) - k} \end{aligned} \quad (4.108)$$

y

$$\dot{a} = \pm \sqrt{\frac{Ba_0^4}{2a^2} - k} \approx \pm \sqrt{-k}, \quad (4.109)$$

cuya solución aproximada es

$$a(t) = \pm \sqrt{-k}(t - t_0) + a_0, \quad (4.110)$$

donde usamos $k = -1$.

En este caso

$$\dot{a} = \sqrt{Aa^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Ba_0^4}{Aa^4}}\right) - k} \quad (4.111)$$

es una función decreciente. El valor máximo de \dot{a} es dado por

$$\dot{a}_{\text{máx}} = \dot{a}(a = 0) = \sqrt{\sqrt{-\frac{\kappa_5 \rho_0}{3\alpha l^2}} a_0^2 - k}, \quad (4.112)$$

y podemos ver que \dot{a} tiende a un valor mínimo dado por

$$\dot{a}_{\text{mín}} = \dot{a}(a \rightarrow \infty) = \sqrt{-k} = 1. \quad (4.113)$$

4.3.2. Caso $k = 0$

En este caso, la ecuación (4.75) toma la forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4 - 2A \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + AB \frac{a_0^4}{a^4} = 0, \quad (4.114)$$

de donde obtenemos

$$\dot{a} = \pm \sqrt{Aa^2 \left(1 \pm \text{sgn}(A) \sqrt{1 - \frac{B}{A} \frac{a_0^4}{a^4}}\right)}. \quad (4.115)$$

Caso $\alpha > 0$

En este caso

$$A = \frac{1}{\alpha l^2} > 0. \quad (4.116)$$

De (4.115) podemos ver que \dot{a} está bien definido para

$$a \geq \sqrt[4]{\frac{B}{A}} a_0, \quad (4.117)$$

y por lo tanto un valor mínimo para a es dado por

$$a_{\text{mín}} = \sqrt[4]{\frac{\kappa_5 \alpha l^2 \rho_0}{3}} a_0. \quad (4.118)$$

Por otro lado $a_0 \geq a_{\text{mín}}$, de modo que

$$B \leq A \quad \text{i.e.,} \quad \rho_0 \leq \rho_{\text{máx}} = \frac{3}{\kappa_5 \alpha l^2}. \quad (4.119)$$

Este resultado conduce a

$$Aa^2 \left(1 \pm \text{sgn}(A) \sqrt{1 - \frac{B}{A} \frac{a_0^4}{a^4}}\right) \geq 0, \quad (4.120)$$

i.e., a no posee máximos/mínimos locales, de modo que a monotónicamente creciente o monotónicamente decreciente.

¿Signo “+” o “-”? La elección del signo en el radical tiene la información acerca de los valores permitidos de \dot{a} . Consideremos $\dot{a} > 0$, el análisis para el caso $\dot{a} < 0$ es muy similar,

$$\dot{a} = \sqrt{Aa^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{a_{\min}^4}{a^4}} \right)}. \quad (4.121)$$

La función $\dot{a}(a)$ es monótonicamente creciente (decreciente) si consideramos el signo más (menos) en el radical.

De (4.121) podemos ver que existe un \dot{a}_{cri}

$$\dot{a}_{\text{cri}} := \dot{a}_{\min} = \sqrt{A} a_{\min} = \sqrt[4]{\frac{\kappa_5 \rho_0}{3\alpha l^2}} a_0.$$

Si consideramos el signo más (menos) de la raíz cuadrada, \dot{a}_{cri} es el mínimo (máximo) valor de \dot{a} .

Si hay un límite para $a \gg a_{\min}$ entonces

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \pm \sqrt{Aa^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{a_{\min}^4}{a^4}} \right)} \\ &\approx \pm a \sqrt{A \left(1 \pm \left(1 - \frac{a_{\min}^4}{2a^4} \right) \right)}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Caso con signo “+”. En este caso

$$\dot{a} = \pm a \sqrt{A \left(2 - \frac{a_{\min}^4}{2a^4} \right)} \approx \pm a \sqrt{2A}, \quad (4.123)$$

cuya solución aproximada es

$$a(t) = a_0 \exp \left(\pm \sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) \right), \quad (4.124)$$

donde $A = \frac{1}{\alpha l^2} > 0$.

Caso con signo “-”. En este caso

$$\dot{a} \approx \pm \sqrt{\frac{A}{2}} \frac{a_{\min}^2}{a}, \quad (4.125)$$

cuya solución aproximada es

$$\begin{aligned} a(t) &= \pm \sqrt{a_0^2 \pm \sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} a_{\min}^2 (t - t_0)} \\ &= \pm a_0 \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{2\kappa_5 \rho_0}{3a_0^4}} (t - t_0)}, \end{aligned} \quad (4.126)$$

donde hemos usado $A = \frac{1}{\alpha l^2} > 0$ and $a_{\min} = \sqrt[4]{\frac{\kappa_5 \alpha l^2 \rho_0}{3}} a_0$.

Caso $\alpha < 0$

En este caso

$$A = \frac{1}{\alpha l^2} < 0. \quad (4.127)$$

De (4.115) podemos ver que \dot{a} está bien definido si

$$1 \mp \sqrt{1 - \frac{B}{A} \frac{a_0^4}{a^4}} \leq 0. \quad (4.128)$$

Esta condición se satisface sólo si usamos el signo “-”, para todo a , i.e.,

$$1 - \sqrt{1 - \frac{B}{A} \frac{a_0^4}{a^4}} < 0, \quad (4.129)$$

y por lo tanto a no tiene máximos/mínimos locales, de modo que a es monótonicamente creciente o monótonicamente decreciente. Así, \dot{a} tiene un valor máximo en $a = 0$, i.e.,

$$\dot{a}_{\max} = \dot{a}(a = 0) = \sqrt[4]{-\frac{\kappa_5 \rho_0}{3\alpha l^2}} a_0, \quad (4.130)$$

y \dot{a} tiende a un valor mínimo dado por

$$\dot{a}_{\min} = \dot{a}(a \rightarrow \infty) = 0. \quad (4.131)$$

Si existe un límite para $a \gg \sqrt[4]{-\frac{B}{A}} a_0$ entonces

$$\dot{a} = \pm \sqrt{Aa^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{B}{A} \frac{a_0^4}{a^4}} \right)} \approx \pm \sqrt{\frac{B}{2}} \frac{a_0^2}{a}, \quad (4.132)$$

cuya solución aproximada es

$$a(t) = a_0 \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{2\kappa_5 \rho_0}{3a_0^4}} (t - t_0)} \quad (4.133)$$

donde usamos $B = \frac{\kappa_5 \rho_0}{3}$.

4.3.3. Caso $k = 1$

En este caso, la ecuación (4.75) puede ser reescrita como

$$\left(\frac{\dot{a}^2 + 1}{a^2}\right)^2 - 2A\left(\frac{\dot{a}^2 + 1}{a^2}\right) + AB\frac{a_0^4}{a^4} = 0, \quad (4.134)$$

de donde despejamos

$$\dot{a} = \pm \sqrt{Aa^2 \left(1 \pm \operatorname{sgn}(A) \sqrt{1 - \frac{B}{A} \frac{a_0^4}{a^4}}\right) - k} \quad (4.135)$$

con $k = 1$.

Caso $\alpha > 0$

En este caso

$$A = \frac{1}{\alpha l^2} > 0. \quad (4.136)$$

De (4.135) podemos ver que \dot{a} está bien definida si

$$a_{\min} = \sqrt[4]{\frac{\kappa_5 \alpha l^2 \rho_0}{3}} a_0, \quad (4.137)$$

de modo que

$$B \leq A \quad \text{i.e.,} \quad \rho_0 \leq \rho_{\max} = \frac{3}{\kappa_5 \alpha l^2}. \quad (4.138)$$

Con estas consideraciones podemos analizar (4.135) cuando el radical es positivo

$$Aa^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{a_{\min}^4}{a^4}}\right) - k. \quad (4.139)$$

¿Signo “+” o “-”? Consideraremos $\dot{a} > 0$, el análisis del caso $\dot{a} < 0$ es muy similar,

$$\dot{a} = \sqrt{Aa^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{a_{\min}^4}{a^4}}\right) - k}. \quad (4.140)$$

La función $\dot{a}(a)$ es monótonicamente creciente (decreciente) si consideramos el signo más (menos) en la raíz cuadrada.

De (4.140) podemos ver que existe \dot{a}_{cri}

$$\dot{a}_{\text{cri}} := \dot{a}(a_{\min}) = \sqrt{\sqrt{\frac{\kappa_5 \rho_0}{3 \alpha l^2}} a_0^2 - k}. \quad (4.141)$$

Si consideramos el signo más (menos) en la raíz, \dot{a}_{cri} es el mínimo (máximo) valor de \dot{a} .

Caso con signo “+”. En este caso

$$Aa^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a_{\min}^4}{a^4}} \right) - k \geq Aa_{\min}^2 - k \geq 0, \quad (4.142)$$

de modo que

$$a_{\min} \geq \sqrt{\frac{k}{A}} \iff \rho_0 a_0^4 \geq 3 \frac{\alpha l^2 k^2}{\kappa_5}, \quad (4.143)$$

pero (ver (4.74))

$$\rho(t) = \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 \rho_0 \implies \rho a^4 = \rho_0 a_0^4,$$

entonces

$$\rho a^4 \geq 3 \frac{\alpha l^2 k^2}{\kappa_5}. \quad (4.144)$$

Es directo probar que $\dot{a} \neq 0$ para $a > a_{\min}$, entonces a no posee máximos/mínimos locales, y por lo tanto a es monotónicamente creciente o monotónicamente decreciente.

Si hay un límite para $a \gg a_{\min}$, entonces

$$\dot{a} = \pm \sqrt{Aa^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a_{\min}^4}{a^4}} \right) - k} \approx \pm \sqrt{2Aa^2 - k}, \quad (4.145)$$

cuya solución aproximada es

$$a(t) = \pm \sqrt{\frac{\alpha l^2 k}{2}} \times \cosh \left[\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2}} (t - t_0) + \operatorname{arcosh} \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha l^2 k}} a_0 \right) \right],$$

donde usamos $A = \frac{1}{\alpha l^2}$ y $k = 1$.

Caso con signo “-”. En este caso

$$Aa^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a_{\min}^4}{a^4}} \right) - k \geq 0, \quad (4.146)$$

por lo tanto

$$\frac{Aa^2 - k}{Aa^2} \geq \sqrt{1 - \frac{a_{\min}^4}{a^4}}. \quad (4.147)$$

Esta condición debe ser también ser satisfecha por a_{\min}

$$Aa_{\min}^2 - k \geq 0 \iff a_{\min} \geq \sqrt{\frac{k}{A}}, \quad (4.148)$$

de modo que,

$$\rho_0 a_0^4 \geq 3 \frac{\alpha l^2 k^2}{\kappa_5}, \quad (4.149)$$

pero (ver (4.74))

$$\rho a^4 = \rho_0 a_0^4$$

y por lo tanto

$$\rho a^4 \geq 3 \frac{\alpha l^2 k^2}{\kappa_5}. \quad (4.150)$$

A partir de (4.147) obtenemos

$$a \leq a_{\max} = \sqrt{\frac{k^2 + A^2 a_{\min}^4}{2Ak}}, \quad (4.151)$$

i.e.

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{3\alpha l^2 k^2 + \kappa_5 \rho_0 a_0^4}{6k}}. \quad (4.152)$$

De la expresión

$$\rho = \frac{a_0^4}{a^4} \rho_0, \quad (4.153)$$

obtenemos

$$\rho_{\min} = \frac{a_0^4}{a_{\max}^4} \rho_0, \quad (4.154)$$

y por lo tanto

$$\rho_{\min} = \left(\frac{6ka_0^2}{3\alpha l^2 k^2 + \kappa_5 \rho_0 a_0^4} \right)^2 \rho_0. \quad (4.155)$$

Caso $\alpha < 0$

En este caso

$$A = \frac{1}{\alpha l^2} < 0. \quad (4.156)$$

De (4.135) podemos ver que \dot{a} está bien definida si

$$Aa^2 \left(1 \pm \operatorname{sgn}(A) \sqrt{1 - \frac{B}{A} \frac{a_0^4}{a^4}} \right) - k \geq 0. \quad (4.157)$$

Este constraint excluye el caso con signo más en la raíz cuadrada. Esta condición conduce a

$$a \leq a_{\max} = \sqrt{\frac{-ABa_0^4 - k^2}{-2Ak}}, \quad (4.158)$$

donde $k = 1$ y $A = \frac{1}{\alpha l^2} < 0$. Hay un valor máximo para a

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{3\alpha l^2 k^2 + \kappa_5 \rho_0 a_0^4}{6k}}, \quad (4.159)$$

que conduce a

$$\rho_0 a_0^4 \geq -3 \frac{\alpha l^2 k^2}{\kappa_5}, \quad (4.160)$$

pero (ver (4.74))

$$\rho a^4 = \rho_0 a_0^4,$$

de modo que

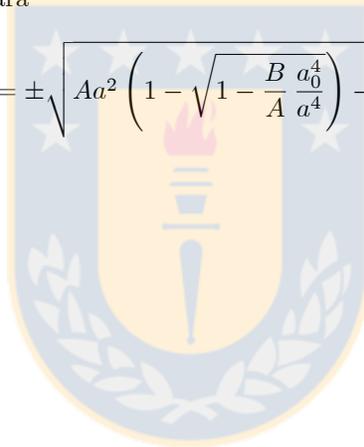
$$\rho a^4 \geq -3 \frac{\alpha l^2 k^2}{\kappa_5}. \quad (4.161)$$

Si hay un máximo a_{\max} entonces, debe existir un mínimo para ρ ,

$$\rho_{\min} = \left(\frac{6ka_0^2}{3\alpha l^2 k^2 + \kappa_5 \rho_0 a_0^4} \right)^2 \rho_0. \quad (4.162)$$

No hay límite para $a \rightarrow \infty$ y por lo tanto no es posible encontrar una solución aproximada para

$$\dot{a} = \pm \sqrt{Aa^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{B}{A} \frac{a_0^4}{a^4}} \right)} - k. \quad (4.163)$$



Capítulo 5

Conclusiones: *Cosmología Einstein-Chern-Simons Friedmann-Robertson-Walker 5-dimensional acelerada*

En ésta, la segunda parte de la tesis, titulada *Cosmología Einstein-Chern-Simons Friedmann-Robertson-Walker 5-dimensional acelerada*, hemos considerado una acción 5-dimensional $S = S_g + S_M$ compuesta por un sector gravitacional, correspondiente a la gravedad de Einstein-Chern-Simons y un sector de materia, descrito como un fluido perfecto. Hemos mostrado que:

1. Las ecuaciones de campo de Einstein-Chern-Simons (2.174)-(2.177) sujetas a las condiciones $T^a = 0$, $k^{ab} = 0$ and $\frac{\delta L_M}{\delta \omega^{ab}} = 0$ pueden reescribirse de forma similar a las ecuaciones de Einstein-Maxwell ((3.9)-(3.11)). En el caso donde las ecuaciones (3.9)-(3.11) satisfacen el principio cosmológico y la materia ordinaria es despreciable en comparación con la energía oscura, encontramos que éstas toman la forma (4.16)-(4.20). Cuando la materia ordinaria es modelada como polvo (era de materia), las ecs. (3.9)-(3.11) toman la forma (4.67)-(4.71).
2. Las ecuaciones de campo (4.16)-(4.20) fueron completamente resueltas para una era de energía oscura (sec. 4.2, expansión acelerada). Encontramos que el campo h^a tiene un comportamiento similar al de una constante cosmológica.
3. Las ecuaciones de campo (4.67)-(4.71) fueron resueltas para una era de materia (sec. 4.3). Encontramos varios modelos consistentes con la cos-

mología estándar. La dinámica del campo h^a (4.71) no fue analizada ya que nos enfocamos en investigar la dinámica del factor de escala $a(t)$.

En particular, en la sec. 4.2 hemos encontrado soluciones que describen expansión acelerada para las tres posibles geometrías contenidas en la métrica de Friedmann-Robertson-Walker: esférica ($k = 1$), plana ($k = 0$) e hiperbólica ($k = -1$); esto cuando la constante α es mayor que cero. Cumpliendo así con el objetivo principal (ver objetivos en sec. 1.1) de encontrar soluciones aceleradas para la gravedad de Einstein-Chern-Simons. Podemos asociar estos resultados a una *era de energía oscura*. Además, hemos logrado interpretar al campo h^a incluido en la teoría como una suerte de constante cosmológica (positiva); cumpliendo así con uno de los dos objetivos secundarios. El objetivo secundario restante, encontrar soluciones consistentes con la noción de espacio-tiempo 4-dimensional, no fue satisfecho, y constituye el mayor problema del enfoque aquí desarrollado. En las partes III y IV de esta tesis—adelantamos—encontraremos soluciones que no presentan esta dificultad.

Además de estos modelos acelerados, encontramos otros resultados, que no presentan una dinámica con tal, pero que completan el conjunto soluciones para las ecuaciones en cuestión.

En la sec. 4.3 hemos encontrado una familia de soluciones consistentes con una era de materia.

En el caso $k = -1$ (universo abierto), las soluciones corresponden a, una expansión acelerada ($\alpha > 0$) con un mínimo factor de escala en el tiempo inicial que, cuando el tiempo va a infinito, se comporta como una función seno hiperbólico; una expansión desacelerada ($\alpha < 0$) con un *Big Crunch* en un tiempo finito $t_{\text{máx}}$; y un par de soluciones sin aceleración, cuyo factor de escala tiene a un valor constante.

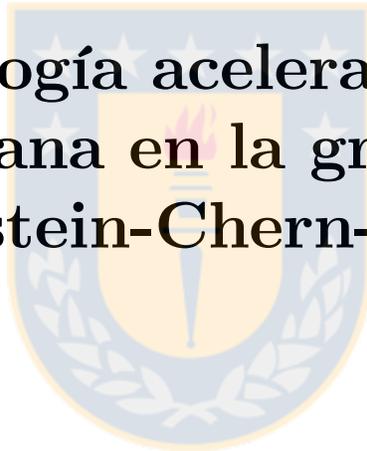
En el caso $k = 0$ (universo plano), las soluciones describen una expansión acelerada cuyo factor de escala muestra un comportamiento exponencial; y par de soluciones con expansión desacelerada cuyo factor de escala tiende a una raíz cuadrada.

En el caso $k = 1$ (universo cerrado) se encontró una solución de universo en expansión, cuyo comportamiento es dado por una función coseno hiperbólico. Además, hay dos soluciones de universo en contracción, ambas terminan en un tiempo finito; una termina en el valor mínimo a_{min} , cuando α es positivo y la termina en un *Big Crunch*, cuando α es negativo.

En estos casos no analizamos la dinámica del campo h^a .

Parte III

Cosmología acelerada para una brana en la gravedad de Einstein-Chern-Simons



Capítulo 6

Acción para una brana en la gravedad de Einstein-Chern-Simons

6.1. Simplificación de la teoría

El espacio-tiempo correspondiente a la gravedad de Einstein-Chern-Simons tiene cinco dimensiones, en contraste con las cuatro *experimentadas*. Para enfrentar este problema, en este capítulo introduciremos una métrica para branas, y de pasada lograremos una simplificación de la teoría. Encontraremos una acción asociada a una brana 4-dimensional Σ_4 inmersa en un espacio-tiempo 5-dimensional *cilíndrico* $\Sigma_5 = \Sigma_4 \times S^1$, que contiene al término de Einstein-Hilbert, más términos de acoplamiento no-minimal entre la geometría y un campo escalar. Aquí los términos cuadráticos en la curvatura desaparecen. Para dicha acción encontraremos las ecuaciones de movimiento. En el capítulo siguiente encontraremos soluciones cosmológicas aceleradas.

Nuestro punto de partida es el lagrangiano para gravedad 5-dimensional de Einstein-Chern-Simons [8] dado por

$$\begin{aligned} L_{ChS}^{(5)}[e, \omega, h, k] = & \alpha_1 l^2 \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e & (6.1) \\ & + \alpha_3 \varepsilon_{abcde} \left(\frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + 2l^2 k^{ab} R^{cd} T^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right). \end{aligned}$$

Ciertas imposiciones, que a continuación efectuaremos, nos conducirán a la acción y a las ecuaciones mencionadas.

6.2. Torsión nula

Como primer paso, parece razonable imponer la condición de torsión nula:

$$T^a = de^a + \omega^a_b e^b = 0. \quad (6.2)$$

Con esto podemos dejar de tratar a ω^{ab} como variable independiente, ahora $\omega = \omega(e)$:

$$\omega^a_{b\alpha} = -e^\beta_b \left(\partial_\alpha e^a_\beta - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e^a_\gamma \right) \quad (6.3)$$

Además, vemos que el tercer término en (6.1) desaparece, de modo que se pierde la dependencia en el campo k^{ab} . Entonces tendremos

$$L_{ChS}^{(5)}[e, h] = \alpha_1 l^2 \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \varepsilon_{abcde} \left(\frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right). \quad (6.4)$$

6.3. Geometría de branas

A continuación nos proponemos eliminar los términos cuadráticos en la curvatura de (6.4), hecho que representa un gran simplificación. Para ello, el primer paso es considerar una métrica de branas (e.g. [42]):

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta \\ &= \eta_{ab} e^a e^b \\ ds^2 &= e^{2f(\phi)} \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu + r_c^2 d\phi^2 \\ &= e^{2f(\phi)} \tilde{\eta}_{mn} \tilde{e}^m \tilde{e}^n + r_c^2 d\phi^2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde el símbolo \sim hace referencia a cantidades 4-dimensionales, r_c es una constante llamada *radio de compactificación* y

$$\begin{aligned} x^\alpha &= (\tilde{x}^\mu, \phi) \\ 0 &\leq \phi < 2\pi \\ \alpha, \beta &= 0, \dots, 4 \\ a, b &= 0, \dots, 4 \\ \mu, \nu &= 0, \dots, 3 \\ m, n &= 0, \dots, 3 \\ \eta_{ab} &= \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1) \\ \tilde{\eta}_{mn} &= \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \end{aligned} \quad (6.6)$$

La métrica (6.5) describe un espacio-tiempo 5-dimensional *cilíndrico* $\Sigma_5 = \Sigma_4 \times S^1$. Si se fija el valor de ϕ , digamos en ϕ_0 , lugar donde podríamos ubicar arbitrariamente una brana, se obtiene una métrica 4-dimensional inducida para ésta:

$$ds^2 = e^{2f(\phi_0)} \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu. \quad (6.7)$$

De acuerdo con (6.5), escribimos el vielbein

$$e^m(\phi, \tilde{x}) = e^{f(\phi)} \tilde{e}^m(\tilde{x}) = e^{f(\phi)} \tilde{e}_\mu^m(\tilde{x}) d\tilde{x}^\mu \quad (6.8)$$

$$e^4(\phi) = r_c d\phi. \quad (6.9)$$

A partir de la condición de torsión 5-dimensional nula, $T^a = de^a + \omega_b^a e^b = 0$, se encuentra la forma de las conexiones de espín y la expresión que da cuenta que la torsión 4-dimensional \tilde{T}^m también es nula:

$$\omega_4^m = \frac{e^f f'}{r_c} \tilde{e}^m \quad (6.10)$$

$$\omega_n^m = \omega_n^m(\tilde{x}) \equiv \tilde{\omega}_n^m \quad (6.11)$$

$$\tilde{T}^m \equiv \tilde{d}\tilde{e}^m + \tilde{\omega}_n^m \tilde{e}^n = 0, \quad (6.12)$$

donde

$$(\cdot)' \equiv \frac{\partial}{\partial \phi}(\cdot), \quad \tilde{d} \equiv d\tilde{x}^\mu \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu}. \quad (6.13)$$

A partir de (6.10) y (6.11) se encuentra la curvatura 5-dimensional $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega_c^a \omega^{cb}$:

$$R^{m4} = \frac{e^f}{r_c} (f'^2 - f'') d\phi \tilde{e}^m \quad (6.14)$$

$$R^{mn} = \tilde{R}^{mn} - \left(\frac{e^f f'}{r_c} \right)^2 \tilde{e}^m \tilde{e}^n, \quad (6.15)$$

donde se ha definido la curvatura 4-dimensional

$$\tilde{R}^{mn} \equiv \tilde{d}\tilde{\omega}^{mn} + \tilde{\omega}_p^m \tilde{\omega}^{pn}. \quad (6.16)$$

Por último, es conveniente definir el símbolo de Levi-Civita 4-dimensional como

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq} \equiv \epsilon_{mnpq4}. \quad (6.17)$$

6.4. Acción para la brana

6.4.1. Acción total

Consideraremos una acción total con la siguiente forma:

$$S = S_B + S_b, \quad (6.18)$$

donde S_B representa la acción en el bulk 5-dimensional, descrita por el lagrangiano de Einstein-Chern-Simons (6.4) sujeto a la imposición de la métrica

para branas, y S_b es una acción para materia *tipo h* que vive en una brana 4-dimensional ubicada en $\phi = 0$ dada por¹

$$\begin{aligned} S_b[g, h] &= \int_0^{2\pi} d\phi \delta(\phi) \int_{\Sigma_4} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}[g, h] \\ &= \int_{\Sigma_4} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}[g, h] \end{aligned} \quad (6.19)$$

Enfoquémonos por ahora en S_B y dejemos para el final S_b .

6.4.2. Acción en el bulk

Al aplicar la geometría de la sección anterior al lagrangiano (6.4) se obtiene los siguientes términos:

$$\begin{aligned} L_{GB} &= \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e \\ &= r_c d\phi \left\{ \tilde{\varepsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq} - \left(\frac{2e^{2f}}{r_c^2} \right) (3f'^2 + 2f'') \tilde{\varepsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{e^{4f}}{r_c^4} f'^2 \right) (5f'^2 + 4f'') \tilde{\varepsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right\} \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} L_{EH} &= \varepsilon_{abcde} R^{ab} e^c e^d e^e \quad (6.21) \\ &= r_c d\phi \left\{ (3e^{2f}) \tilde{\varepsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q - \left(\frac{e^{4f}}{r_c^2} \right) (5f'^2 + 2f'') \tilde{\varepsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{h}^q \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_H &= \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} h^e \\ &= \tilde{\varepsilon}_{mnpq} \left\{ \tilde{R}^{mn} - \left(\frac{e^f f'}{r_c} \right)^2 \tilde{e}^m \tilde{e}^n \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \left[\tilde{R}^{pq} - \left(\frac{e^f f'}{r_c} \right)^2 \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right] h^4 - \left(\frac{4e^f}{r_c} \right) (f'^2 + f'') d\phi \tilde{e}^p h^q \right\}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Vemos que en (6.20) y (6.22) hay términos que contienen curvaturas al cuadrado, $\tilde{\varepsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq}$ y $\tilde{\varepsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq} h^4$, que nos molestan y nos propusimos eliminar. Para esto, lo primero es notar que en la acción correspondiente al primer término de (6.20) es posible integrar directamente en ϕ :

$$r_c \int_{\Sigma_5} d\phi \tilde{\varepsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq} = r_c \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\Sigma_4} \tilde{\varepsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq} = 2\pi r_c \int_{\Sigma_4} \tilde{\varepsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{R}^{pq}. \quad (6.23)$$

¹Arbitrariamente hemos considerado una sola brana. Podrían incluirse más sin problemas, pero hacerlo parece redundante.

Que es el término de Gauss-Bonnet 4-dimensional, que sabemos no aporta a la dinámica. Por lo tanto, simplemente no lo consideraremos.

A continuación, para eliminar el término $\tilde{\varepsilon}_{mnpq}\tilde{R}^{mn}\tilde{R}^{pq}h^4$, hacemos el siguiente *ansatz* (de manera análoga al de e^a) para el campo h^a :

$$h^m(\phi, \tilde{x}) = e^{g(\phi)}\tilde{h}^m(\tilde{x}) \quad (6.24)$$

$$h^4 = 0. \quad (6.25)$$

Bajo estas consideraciones, se obtiene la acción para el bulk

$$S_B[e, h] = \int_{\Sigma_5} L_{ChS}^{(5)}[e, h] \quad (6.26)$$

$$S_B[\tilde{e}, \tilde{h}] = \int_{\Sigma_4} \tilde{\varepsilon}_{mnpq} \left(A\tilde{R}^{mn}\tilde{e}^p\tilde{e}^q + B\tilde{e}^m\tilde{e}^n\tilde{e}^p\tilde{e}^q + C\tilde{R}^{mn}\tilde{e}^p\tilde{h}^q + E\tilde{e}^m\tilde{e}^n\tilde{e}^p\tilde{h}^q \right), \quad (6.27)$$

donde

$$A = 2r_c \int_0^{2\pi} d\phi e^{2f} \left[\alpha_3 - \frac{\alpha_1 l^2}{r_c^2} (3f'^2 + 2f'') \right] \quad (6.28)$$

$$B = -\frac{1}{r_c} \int_0^{2\pi} d\phi e^{4f} \left[\frac{2\alpha_3}{3} (5f'^2 + 2f'') - \frac{\alpha_1 l^2}{r_c^2} f'^2 (5f'^2 + 4f'') \right] \quad (6.29)$$

$$C = -\frac{4\alpha_3 l^2}{r_c} \int_0^{2\pi} d\phi e^f e^g (f'^2 + f'') \quad (6.30)$$

$$E = \frac{4\alpha_3 l^2}{r_c^3} \int_0^{2\pi} d\phi e^{3f} e^g f'^2 (f'^2 + f''). \quad (6.31)$$

6.4.3. Acción efectiva en la brana. Comentario sobre las constantes

Para obtener una acción efectiva para la brana debemos escoger convenientemente las funciones $f(\phi)$ y $g(\phi)$, de modo sea posible integrar sin problemas A , B , C y E , para que éstas representen constantes. Por supuesto dichas integrales deben ser convergentes y, notando que trabajamos con una variedad *cilíndrica*, hay que ser cuidadoso con la continuidad y diferenciability. Por ahora no fijaremos una elección particular para dichas funciones, sin embargo, en el apéndice B se presentan algunas opciones *cómodas* (se muestra que es posible elegir las constantes de forma consistente con la Relatividad General).

Aunque aquí no daremos $f(\phi)$ y $g(\phi)$, sí asumiremos que es posible despejar $A = -1/2$ y $B = \Lambda/12$ (las constantes de la Relatividad General), en el mismo sentido que lo mostrado en el apéndice B.

De acuerdo a lo dicho, trabajaremos con la acción efectiva para la brana

$$\tilde{S}_B[\tilde{e}, \tilde{h}] = \int_{\Sigma_4} \tilde{\varepsilon}_{mnpq} \left(-\frac{1}{2}\tilde{R}^{mn}\tilde{e}^p\tilde{e}^q + \frac{\Lambda}{12}\tilde{e}^m\tilde{e}^n\tilde{e}^p\tilde{e}^q + C\tilde{R}^{mn}\tilde{e}^p\tilde{h}^q + E\tilde{e}^m\tilde{e}^n\tilde{e}^p\tilde{h}^q \right), \quad (6.32)$$

donde Λ es una constante arbitraria.

Notar que si $l \rightarrow 0$, entonces: i) $C \rightarrow 0$ y $E \rightarrow 0$, como lo muestran (6.30) y (6.31); ii) las constantes A y B se comportan bien, como lo muestran (6.27) y (6.28). De modo que, en ese límite se recupera la Relatividad General 4-dimensional con constante cosmológica:

$$\tilde{S}_B \text{ } l \rightarrow 0[\tilde{e}, \tilde{h}] = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left(\tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q - \frac{\Lambda}{6} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right). \quad (6.33)$$

Por último, relacionado al tema de las *constantes*, notar que al poner $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_3 = l^2 = 1$ en (6.28)-(6.31) se hace contacto con la teoría Chern-Simons de [72]. Esto se muestra en el apéndice C.

6.4.4. Acción en lenguaje tensorial

Como ahora las conexiones de espín no se tratan como variables independientes, parece conveniente—con miras a llevar a cabo la variación del lagrangiano—escribir la acción (6.32) en lenguaje tensorial.

Los dos primeros términos de (6.32) son conocidos. De [7], sabemos que:

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q = -2\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} d^4 \tilde{x} \quad (6.34)$$

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q = -24\sqrt{-\tilde{g}} d^4 \tilde{x} \quad (6.35)$$

donde \tilde{g} es el determinante del tensor métrico y \tilde{R} el escalar de Ricci, 4-dimensionales.

Los dos términos restantes—después de algunos cálculos—toman la forma

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{h}^q = 2\sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{R} \tilde{h} - 2\tilde{R}^\mu_\nu \tilde{h}^\nu_\mu \right) d^4 \tilde{x} \quad (6.36)$$

$$\tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{h}^q = 6\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{h} d^4 \tilde{x}, \quad (6.37)$$

donde se ha considerado

$$\tilde{h}^m = \tilde{h}^m_\mu d\tilde{x}^\mu, \quad (6.38)$$

y se ha definido

$$\tilde{h} \equiv \tilde{h}^\mu_\mu. \quad (6.39)$$

Al reemplazar (6.34)-(6.37) en (6.32), se obtiene

$$\tilde{S}_B[\tilde{g}, \tilde{h}] = \int d^4 \tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} \left[\left(\tilde{R} - 2\Lambda \right) + 2C \left(\tilde{R} \tilde{h} - 2\tilde{R}^\mu_\nu \tilde{h}^\nu_\mu \right) + 6E \tilde{h} \right]. \quad (6.40)$$

Esta acción parece bastante más tratable que la original (asociada al lagrangiano (6.1)). Sin embargo, todavía es un poco complicada debido a la presencia del término $\tilde{R}^\mu_\nu \tilde{h}^\nu_\mu$. En la subsección siguiente interpretaremos $\tilde{h}_{\mu\nu}$ como

campo escalar y de pasada transformaremos la acción (6.40) en una más simple².

Notar que, como se esperaba, en los límites $C \rightarrow 0$ y $E \rightarrow 0$ (equivalentes a $l \rightarrow 0$) se recobra la Relatividad General 4-dimensional con constante cosmológica:

$$\tilde{S}_B[\tilde{g}] = \int d^4\tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{R} - 2\Lambda \right). \quad (6.42)$$

6.4.5. Acción con h interpretado como campo escalar e inclusión de un término cinético

Si introducimos un campo escalar $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x})$ como parte de $\tilde{h}_{\mu\nu}$ en la forma³

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \frac{F(\tilde{\varphi})}{4} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (6.43)$$

se tiene que

$$\tilde{R}^\mu_\nu \tilde{h}^\nu_\mu = \frac{F(\tilde{\varphi})}{4} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R}^{\mu\nu} = \frac{F(\tilde{\varphi})}{4} \tilde{R} \quad (6.44)$$

$$\tilde{h} = \tilde{h}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{F(\tilde{\varphi})}{4} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} = F(\tilde{\varphi}). \quad (6.45)$$

De modo que la acción (6.40) se transforma en

$$\tilde{S}_B[\tilde{g}, \tilde{\varphi}] = \int d^4\tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} \left[\left(\tilde{R} - 2\Lambda \right) + C\tilde{R}F(\tilde{\varphi}) + 6EF(\tilde{\varphi}) \right]. \quad (6.46)$$

Entonces, hemos encontrado una acción para gravedad 4-dimensional acoplada no-minimalmente a un campo escalar. Notar que (6.46) que tiene la forma

$$\tilde{S}_B = \tilde{S}_g + \tilde{S}_{g\varphi} + \tilde{S}_\varphi, \quad (6.47)$$

donde \tilde{S}_g corresponde a una acción puramente gravitacional, $\tilde{S}_{g\varphi}$ a un término de interacción no-minimal de la gravedad con la materia, y \tilde{S}_φ a la acción de materia pura. Podríamos decir que $-6EF(\tilde{\varphi})$ hace de potencial del campo escalar, y que sólo faltaría incluir el término cinético. Aquí es cuando volvemos a la acción total (6.18), y consideramos S_b asociado al término cinético que nos falta:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_b[\tilde{g}, \tilde{\varphi}] &= \int_0^{2\pi} d\phi \delta(\phi) \int_{\Sigma_4} d^4\tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{L}[\tilde{g}, \tilde{\varphi}] \\ &= -\kappa \int_{\Sigma_4} d^4\tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} (\nabla_\mu \tilde{\varphi}) (\nabla^\mu \tilde{\varphi}), \end{aligned} \quad (6.48)$$

²Otra forma de conseguir una acción simple es haciendo $C = 0$ (o $C \rightarrow 0$), en cuyo caso tendríamos la acción:

$$\tilde{S}_B[\tilde{g}, \tilde{h}] = \int d^4\tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} \left[\left(\tilde{R} - 2\Lambda \right) + 6E\tilde{h} \right]. \quad (6.41)$$

³Parecido a lo que pasa en cosmología tipo Friedmann-Robertson-Walker. En un espacio maximalmente simétrico todos los tensores de rango dos deben ser proporcionales al tensor métrico. Esta manera de introducir el campo escalar se hizo pensando en que queremos aplicar estos resultados a la cosmología, donde se trabaja con un espacio-tiempo altamente simétrico.

donde κ es la constante gravitacional.

De este modo, obtenemos la acción para la brana:

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \tilde{S}_B + \tilde{S}_b \\ &= \int d^4\tilde{x}\sqrt{-\tilde{g}} \left\{ (\tilde{R} - 2\Lambda) + C\tilde{R}F(\tilde{\varphi}) - 2\kappa \left[\frac{1}{2} (\nabla_\mu\tilde{\varphi})(\nabla^\mu\tilde{\varphi}) - \frac{3E}{\kappa}F(\tilde{\varphi}) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (6.49)$$

Finalmente, para escribir las cosas de la manera usual, quitamos los *gorritos* \sim , y definimos la constante ε y el potencial $V(\varphi)$:

$$\varepsilon \equiv -\frac{\kappa C}{3E} \quad V(\varphi) \equiv -\frac{3E}{\kappa}F(\varphi).\quad (6.50)$$

Entonces, nos quedamos con

$$S[g, \varphi] = \int d^4x\sqrt{-g} \left\{ (R - 2\Lambda) + \varepsilon RV(\varphi) - 2\kappa \left[\frac{1}{2} (\nabla_\mu\varphi)(\nabla^\mu\varphi) + V(\varphi) \right] \right\}.\quad (6.51)$$

Este es el resultado que buscábamos. Hemos encontrado, a partir de la gravedad de Einstein-Chern-Simons, una acción efectiva para una brana 4-dimensional Σ_4 inmersa en un espacio-tiempo 5-dimensional *cilíndrico* $\Sigma_5 = \Sigma_4 \times S^1$, acoplada no-minimalmente a un campo escalar, y que no involucra torsión, ni incluye términos cuadráticos en la curvatura; hecho que simplifica bastante la búsqueda de soluciones ⁴.

6.5. Ecuaciones de campo

Para encontrar las ecuaciones de movimiento debemos extremar la acción.

Por comodidad, escribamos (6.51) como

$$S = \int d^4x\mathcal{L} = \int d^4x(\mathcal{L}_{RG} + \mathcal{L}_{g\varphi}),\quad (6.52)$$

⁴ Algo interesante relacionado con el contenido de esta sección es lo siguiente: a partir de (2.33) es posible obtener una acción como la de la teoría escalar-tensorial en marco de Jordan. Para esto asumimos que C y E son grandes, tanto como queramos, y que son del mismo orden, de modo que los términos cosmológico y de Einstein-Hilbert se vuelvan despreciables. Así tendremos:

$$\tilde{S}_B = C \int d^4\tilde{x}\sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R}F(\tilde{\varphi}) + \frac{6E}{C}F(\tilde{\varphi}) \right].$$

(Notar que la constante $6E/C$ no toma un valor *exagerado*, al ser C y E del mismo orden). Agregando ahora el término cinético $[\omega(\tilde{\varphi})/\tilde{\varphi}](\partial_\mu\tilde{\varphi})(\partial^\mu\tilde{\varphi})$, se obtiene

$$\tilde{S} = \int d^4\tilde{x}\sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \tilde{R}F(\tilde{\varphi}) - 2\kappa \left[\frac{\omega(\tilde{\varphi})}{\tilde{\varphi}} (\partial_\mu\tilde{\varphi})(\partial^\mu\tilde{\varphi}) - \frac{3E}{\kappa C}F(\tilde{\varphi}) \right] \right\}.$$

Que es una acción como la de la teoría escalar-tensorial en el marco de Jordan (ver e.g. [34]).

Notar que, si se considera $F = \tilde{\varphi}$, $\omega = (\omega_0/2\kappa) = cte.$ y se desprecia el aporte del último término se obtiene la teoría de Brans-Dicke:

$$\tilde{S} = \int d^4\tilde{x}\sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R}\tilde{\varphi} - \frac{\omega_0}{\tilde{\varphi}} (\partial_\mu\tilde{\varphi})(\partial^\mu\tilde{\varphi}) \right].$$

donde

$$\mathcal{L}_{RG} = \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) \quad (6.53)$$

$$\mathcal{L}_{g\varphi} = \sqrt{-g} \left\{ \varepsilon R V(\varphi) - 2\kappa \left[\frac{1}{2} (\nabla_\mu \varphi) (\nabla^\mu \varphi) + V(\varphi) \right] \right\}. \quad (6.54)$$

La variación total δS tendrá la forma

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L} = \int d^4x (\delta \mathcal{L}_{RG} + \delta \mathcal{L}_{g\varphi}). \quad (6.55)$$

El primer término, $\delta \mathcal{L}_{RG}$, lo conocemos de la Relatividad General (e.g. [74]):

$$\delta \mathcal{L}_{RG} = \sqrt{-g} (G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) \delta g^{\mu\nu}. \quad (6.56)$$

Aquí no se ha considerado los términos de borde y $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (6.57)$$

El segundo término, $\delta \mathcal{L}_{g\varphi}$, toma la forma (e.g. [75])

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{g\varphi} = & \sqrt{-g} \left\{ \varepsilon \left[G_{\mu\nu} V - \nabla_\mu \nabla_\nu V + g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \nabla_\lambda V \right] - \kappa \left[\nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \nabla^\lambda \varphi \nabla_\lambda \varphi + V \right) \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} + \\ & + 2\kappa \sqrt{-g} \left\{ \nabla_\mu \nabla^\mu \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \left(1 - \frac{\varepsilon R}{2\kappa} \right) \right\} \delta \varphi. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Aquí tampoco se han considerado términos de borde. Notar que el segundo paréntesis cuadrado de (6.58) contiene al tensor de energía-momentum del campo escalar:

$$T_{\mu\nu}^\varphi = \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \nabla^\lambda \varphi \nabla_\lambda \varphi + V \right). \quad (6.59)$$

Los términos con las derivadas covariantes de V los agruparemos en el tensor $H_{\mu\nu}$ definido como:

$$H_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \nabla_\lambda V - \nabla_\mu \nabla_\nu V. \quad (6.60)$$

De acuerdo a (6.55)-(6.60) la variación total $\delta \mathcal{L}$ tiene la forma

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \delta \mathcal{L}_{RG} + \delta \mathcal{L}_{g\varphi} \\ = & \sqrt{-g} \left[G_{\mu\nu} (1 + \varepsilon V) + \Lambda g_{\mu\nu} + \varepsilon H_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}^\varphi \right] \delta g^{\mu\nu} + \\ & + 2\kappa \sqrt{-g} \left[\nabla_\mu \nabla^\mu \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \left(1 - \frac{\varepsilon R}{2\kappa} \right) \right] \delta \varphi. \end{aligned} \quad (6.61)$$

A partir de $\delta S = 0$ se obtiene las ecuaciones de campo⁵:

$$G_{\mu\nu} (1 + \varepsilon V) + \Lambda g_{\mu\nu} + \varepsilon H_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{\varphi} \quad (6.64)$$

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \left(1 - \frac{\varepsilon R}{2\kappa} \right) = 0. \quad (6.65)$$

Notar que si $\varepsilon \rightarrow 0$ se recupera las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica y un campo escalar:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{\varphi} \quad (6.66)$$

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \quad (6.67)$$



⁵El caso siguiente podría resultar interesante:

Si el escalar de Ricci es constante e igual a $2\kappa/\varepsilon$, la expresión (2.42) toma la forma simple:

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \varphi = 0. \quad (6.62)$$

Por otro lado, al contraer la ecuación (2.41) se obtiene:

$$\nabla^{\lambda} \varphi \nabla_{\lambda} \varphi - \frac{3\varepsilon}{\kappa} \nabla^{\lambda} \nabla_{\lambda} V + 2V + \frac{2}{\kappa\varepsilon} (2\Lambda\varepsilon - \kappa) = 0. \quad (6.63)$$

Capítulo 7

Soluciones cosmológicas aceleradas en la brana

7.1. Ecuaciones cosmológicas Friedmann-Robertson-Walker

Para estudiar cosmología, consideremos la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (ahora 4-dimensional):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2) \right], \quad k = 0, \pm 1. \quad (7.1)$$

A este elemento de línea corresponden las siguientes cantidades geométricas [78] (componentes diferentes de cero):

$$g_{00} = -1 \quad g_{11} = \frac{a^2}{1 - kr^2} \quad g_{22} = a^2 r^2 \quad g_{33} = a^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (7.2)$$

$$g^{00} = -1 \quad g^{11} = \frac{1 - kr^2}{a^2} \quad g^{22} = \frac{1}{a^2 r^2} \quad g^{33} = \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} & \Gamma^0_{22} &= a\dot{a}r^2 & \Gamma^0_{33} &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma^1_{01} &= \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma^1_{22} &= -r(1 - kr^2) & \Gamma^1_{33} &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta & \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \cot \theta \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} & R_{11} &= \frac{a^2}{1-kr^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2+k}{a^2} \right) \\
R_{22} &= a^2 r^2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2+k}{a^2} \right) & R_{33} &= a^2 r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2+k}{a^2} \right)
\end{aligned} \tag{7.5}$$

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2+k}{a^2} \right), \tag{7.6}$$

Como la métrica de Friedmann-Robertson-Walker describe un espacio-tiempo con parte espacial homogénea, el campo escalar φ dependerá sólo de la coordenada temporal:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{7.7}$$

Parece conveniente calcular por separado los términos que involucran derivadas covariantes de φ y $V(\varphi)$; estos toman la forma:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \varphi = -\ddot{\varphi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} \tag{7.8}$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu V = -\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \left(\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} \right) \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_0 \nabla_0 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \ddot{\varphi} & \nabla_1 \nabla_1 V &= -\frac{a^2}{1-kr^2} \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\
\nabla_2 \nabla_2 V &= -a^2 r^2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \dot{\varphi} & \nabla_3 \nabla_3 V &= -a^2 r^2 \sin^2 \theta \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \dot{\varphi}.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

A partir de (7.2) – (7.10) se obtiene $G_{\mu\nu}$, $H_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}^\varphi$:

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 3\frac{\dot{a}^2+k}{a^2} & G_{11} &= -\frac{a^2}{1-kr^2} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2+k}{a^2} \right) \\
G_{22} &= -a^2 r^2 \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2+k}{a^2} \right) & G_{33} &= -a^2 r^2 \sin^2 \theta \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2+k}{a^2} \right)
\end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned}
H_{00} &= 3\frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\
H_{11} &= -\frac{a^2}{1-kr^2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \left(\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} \right) \right] \\
H_{22} &= -a^2 r^2 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \left(\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} \right) \right] \\
H_{33} &= -a^2 r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \left(\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} \right) \right]
\end{aligned} \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned}
T_{00}^\varphi &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V & T_{11}^\varphi &= \frac{a^2}{1-kr^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V \right) \\
T_{22}^\varphi &= a^2 r^2 \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V \right) & T_{33}^\varphi &= a^2 r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V \right).
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Reemplazando (7.2), (7.6), (7.11), (7.12) y (7.13) en (6.64) y (6.65) se obtiene las ecuaciones¹:

$$3 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) (1 + \varepsilon V) - \Lambda + 3\varepsilon \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \kappa \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V \right) \tag{7.14}$$

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) (1 + \varepsilon V) - \Lambda + \varepsilon \left[\dot{\varphi}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \left(\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} \right) \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] = -\kappa \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V \right) \tag{7.15}$$

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \left[1 - \frac{3\varepsilon}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] = 0 \tag{7.16}$$

El siguiente paso es encontrar solución a este sistema para un potencial V dado. A continuación estudiaremos tres casos acelerados simples.

7.2. Solución I: Campo escalar constante y partícula de Klein-Gordon

Buscaremos una solución para el sistema (7.14)-(7.16) bajo el *ansatz* de campo escalar constante:

$$\varphi = \varphi_0 = cte. \tag{7.17}$$

En este caso, como $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$, las ecuaciones toman la forma:

$$3 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) (1 + \varepsilon V_0) - \Lambda = \kappa V_0 \tag{7.18}$$

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) (1 + \varepsilon V_0) - \Lambda = \kappa V_0 \tag{7.19}$$

¹Notar dos cosas:

i) Si $\varepsilon = 0$ se recuperan las ecuaciones Friedmann con un campo escalar y constante cosmológica (ver e.g. [79]):

$$\begin{aligned}
3 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) - \Lambda &= \kappa \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V \right) \\
2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda &= -\kappa \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V \right) \\
\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 0.
\end{aligned}$$

ii) En el caso que $V = \varphi^2$, los términos extra (correspondientes al término de acoplamiento no-minimal entre geometría y materia) que aparecen en las ecuaciones son iguales a los de [80], donde se considera una acción similar a la nuestra.

$$\frac{\partial V_0}{\partial \varphi} \left[1 - \frac{3\varepsilon}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] = 0, \quad (7.20)$$

donde

$$V_0 \equiv V(\varphi_0) \quad \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_0). \quad (7.21)$$

Ecuación (7.20). Para buscar una solución, consideremos primero (7.20) con $\partial V_0/\partial \varphi \neq 0$ ²:

$$1 - \frac{3\varepsilon}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = 0. \quad (7.22)$$

La ecuación (7.22) tiene soluciones aceleradas para los tres casos, $k = 0, \pm 1$, y son dadas por:

$$a(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{6\varepsilon}{\kappa}} \sinh(\sqrt{\frac{\kappa}{6\varepsilon}} t), & k = -1 \\ C \exp(\sqrt{\frac{\kappa}{6\varepsilon}} t), & k = 0 \\ \sqrt{\frac{6\varepsilon}{\kappa}} \cosh(\sqrt{\frac{\kappa}{6\varepsilon}} t), & k = +1, \end{cases} \quad (7.23)$$

donde C es una constante arbitraria y $\varepsilon > 0$.

Ecuaciones (7.18) y (7.19). Al evaluar (7.23) en (7.18) y (7.19) se obtiene la expresión:

$$\frac{\kappa}{2\varepsilon} (1 + \varepsilon V_0) - \Lambda = \kappa V_0. \quad (7.24)$$

A partir de ésta despejamos V_0 :

$$V_0 = \frac{\kappa - 2\varepsilon\Lambda}{\kappa\varepsilon}. \quad (7.25)$$

Campo de Klein-Gordon. Es posible interpretar al campo escalar como una partícula de Klein-Gordon, con potencial $V(\varphi) = (m^2/2)\varphi^2$. Para encontrar su masa hacemos:

$$V_0 = V(\varphi_0) = \frac{m^2}{2}\varphi_0^2 = \frac{\kappa - 2\varepsilon\Lambda}{\kappa\varepsilon}, \quad (7.26)$$

de donde obtenemos

$$m = \pm \frac{1}{\varphi_0} \sqrt{\frac{2(\kappa - 2\varepsilon\Lambda)}{\kappa\varepsilon}}, \quad (7.27)$$

con $\kappa - 2\varepsilon\Lambda > 0$ y donde se escoge el signo “+” cuando $\varphi_0 > 0$, y el signo “-” cuando $\varphi_0 < 0$.

En el caso que $\Lambda = 0$, tendremos una partícula con masa

$$m = \pm \frac{1}{\varphi_0} \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}. \quad (7.28)$$

Esta expresión también sirve como aproximación para el caso en que Λ sea pequeña. Esto es porque viene multiplicada por ε , que debe ser pequeña para hacer contacto con la Relatividad General.

²El $\partial V_0/\partial \varphi = 0$ no tiene mucha gracia.

Notar la diferencia con la Relatividad General. La solución que hemos encontrado, con $\varphi = \varphi_0 = cte$; y que parece trivial, no tiene análogo en la Relatividad General. Allí se obtienen las ecuaciones cosmológicas:

$$3 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) - \Lambda = \kappa \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V \right) \quad (7.29)$$

$$\left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) - \Lambda = -\kappa \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V \right) \quad (7.30)$$

$$\ddot{\varphi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \quad (7.31)$$

Si proponemos el *ansatz* de campo escalar constante, la expresión (7.31) toma la forma

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad (7.32)$$

que nos dice, que el potencial V debe ser constante, i.e. que no aparece φ . Osea, no es posible llegar a intepretar al campo escalar, por ejemplo, como una partícula de Klein-Gordon. Por otro lado, las ecuaciones (7.29) y (7.30) arrojan soluciones aceleradas con la misma forma que (7.23), pero ahora V (al no depender de φ) hace simplemente de constante cosmológica, y hasta parece redundante.

7.3. Solución II: Campo escalar como taquión

En esta solución consideraremos el caso plano. Con $k = 0$ el sistema (7.14)-(7.16) toma la forma:

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} (1 + \varepsilon V) - \Lambda + 3\varepsilon \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \kappa \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V \right) \quad (7.33)$$

$$\left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) (1 + \varepsilon V) - \Lambda + \varepsilon \left[\dot{\varphi}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \left(\ddot{\varphi} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} \right) \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] = -\kappa \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V \right) \quad (7.34)$$

$$\ddot{\varphi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \left[1 - \frac{3\varepsilon}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right] = 0. \quad (7.35)$$

Ecuación (7.35). Para empezar a buscar una solución tomemos la ecuación (7.35). Las cosas se simplifican notablemente si se iguala a cero el paréntesis cuadrado, de modo que obtenemos la ecuación

$$1 - \frac{3\varepsilon}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = 0, \quad (7.36)$$

cuya solución es

$$a(t) = C_1 e^{\sqrt{\kappa/6\varepsilon}t}, \quad (7.37)$$

donde C_1 es una constante arbitraria. Sin pérdida de generalidad, podemos hacer $C_1 = 1$. Notar que ε debe ser mayor que cero.

Por otro lado, con el paréntesis cuadrado igualado a cero y notando que $\dot{a}/a = \sqrt{\kappa/6\varepsilon}$, la ecuación (7.35) se transforma en

$$\ddot{\varphi} + \frac{\kappa}{2\varepsilon}\dot{\varphi} = 0, \quad (7.38)$$

cuya solución es

$$\varphi(t) = C_2 e^{-\sqrt{3\kappa/2\varepsilon}t} + C_3, \quad (7.39)$$

donde C_2 y C_3 son constantes arbitrarias. Escogemos $C_2 = 1$ y $C_3 = 0$.

Entonces, ya tenemos una solución para (7.35) :

$$a(t) = e^{\sqrt{\kappa/6\varepsilon}t} \quad \varphi(t) = e^{-\sqrt{3\kappa/2\varepsilon}t}. \quad (7.40)$$

Lo que estaría faltando es encontrar un potencial $V(\varphi)$ que sea consistente con estos resultados y con las ecuaciones (7.33) y (7.34).

Ecuación (7.33). En este punto introducimos un potencial con la forma

$$V(\varphi) = \lambda\varphi^n, \quad (7.41)$$

donde λ y n son constantes a determinar.

Al reemplazar (7.40) y (7.41) en (7.33) se obtiene la expresión

$$\left(\frac{\kappa}{2\varepsilon} - \Lambda\right) - \frac{\kappa}{2} \left[\frac{3\kappa}{2\varepsilon}\varphi^2 + (1 + 3n)V \right] = 0, \quad (7.42)$$

que se satisface con

$$\Lambda = \frac{\kappa}{2\varepsilon} \quad V(\varphi) = -\frac{3\kappa}{2\varepsilon(1+3n)}\varphi^2 = -\frac{3\Lambda}{(1+3n)}\varphi^2. \quad (7.43)$$

Entonces, de acuerdo a (7.41) y (7.43):

$$n = 2 \quad \lambda = -\frac{3\Lambda}{7}. \quad (7.44)$$

El valor de $n = 2$ nos indica que el campo φ podría representar una partícula de Klein-Gordon. Sin embargo, el valor negativo de λ no permite esta interpretación (notar que $\Lambda > 0$). A pesar de esto, tratemos de relacionar λ con cierta masa m ; para esto escribamos

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 = -\frac{3\Lambda}{7}\varphi^2. \quad (7.45)$$

De esta expresión, lo que obtenemos es una masa imaginaria:

$$m = i\sqrt{\frac{6\Lambda}{7}}. \quad (7.46)$$

Entonces interpretamos al campo φ como un taquión, partícula hipotética cuya velocidad es superior a la de la luz.

Ecuación (7.34). De la ecuación (7.34) sólo diremos que es consistente con los resultados obtenidos. No entrega nada nuevo.

Recapitulando. Hemos encontrado la solución (ahora escrita en términos de Λ)

$$a(t) = e^{\sqrt{\Lambda/3}t} \quad \varphi(t) = e^{-\sqrt{3\Lambda}t}, \quad (7.47)$$

para el sistema de ecuaciones (7.33)-(7.35), asociado a la métrica de Friedmann-Robertson-Walker plana y al campo escalar φ . A este último corresponde el potencial

$$V(\varphi) = -\frac{3\Lambda}{7}\varphi^2, \quad (7.48)$$

que describe una taquión con masa

$$m = i\sqrt{\frac{6\Lambda}{7}}. \quad (7.49)$$

7.4. Solución III: Campo escalar sin término cinético

En este caso no vamos tener en cuenta el aporte del término cinético $-\kappa\sqrt{-g}\nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi$ en la acción (6.51). Para justificar su exclusión notemos dicho término fue *metido a mano* en (6.49), de modo que parece razonable buscar una solución donde este no se considere.

Trabajaremos entonces con las ecuaciones de movimiento derivadas a partir de la acción

$$S[g, \varphi] = \int d^4x \sqrt{-g} [(R - 2\Lambda) + \varepsilon RV(\varphi) - 2\kappa V(\varphi)]. \quad (7.50)$$

Para la métrica de Friedmann-Robertson-Walker tenemos

$$3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} (1 + \varepsilon V) - \Lambda + 3\varepsilon\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}\frac{\partial V}{\partial\varphi} = \kappa V \quad (7.51)$$

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right) (1 + \varepsilon V) - \Lambda + \varepsilon \left[\dot{\varphi}^2\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \left(\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}\right)\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right] = \kappa V \quad (7.52)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} \left[1 - \frac{3\varepsilon}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right)\right] = 0 \quad (7.53)$$

Buscaremos una solución plana. Con $k = 0$ y $\partial V/\partial\varphi \neq 0$, (7.51), (7.52) y (7.53) toman la forma:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} (1 + \varepsilon V) - \Lambda + 3\varepsilon\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}\frac{\partial V}{\partial\varphi} - \kappa V = 0 \quad (7.54)$$

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) (1 + \varepsilon V) - \Lambda + C \left[\dot{\varphi}^2\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \left(\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi}\right)\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right] - \kappa V = 0 \quad (7.55)$$

$$1 - \frac{3\varepsilon}{\kappa} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) = 0, \quad (7.56)$$

Ecuación (7.56). Como en el caso anterior, consideramos primero la tercera ecuación del sistema, (7.56), cuya solución es

$$a(t) = C_1 e^{\sqrt{\kappa/6\varepsilon}t}. \quad (7.57)$$

donde C_1 es una constante arbitraria. Sin pérdida de generalidad, podemos hacer $C_1 = 1$. Aquí $\varepsilon > 0$.

Ecuación (7.54). A continuación, postulamos una función V con la forma

$$V(\varphi) = \lambda\varphi^n. \quad (7.58)$$

Al reemplazar (7.57) y (7.58) en (7.54) se encuentra la expresión

$$\left(\frac{\kappa}{2\varepsilon} - \Lambda\right) + \sqrt{\frac{\kappa}{2}}V \left[\sqrt{3\varepsilon n} \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} - \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \right] = 0, \quad (7.59)$$

que se satisface con

$$\Lambda = \frac{\kappa}{2\varepsilon} \quad \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\kappa}{6\varepsilon}} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (7.60)$$

La ecuación diferencial de (7.60) tiene la solución

$$\varphi(t) = C_2 e^{(1/n)\sqrt{\Lambda/3}t}, \quad (7.61)$$

donde C_2 es una constante arbitraria. Sin pérdida de generalidad, podemos hacer $C_2 = 1$.

Ecuación (7.55). De la ecuación (7.55) sólo diremos que es consistente con los resultados obtenidos. No entrega nada nuevo.

Es importante notar que los valores de n y λ de la función V no han sido restringidos por las ecuaciones.

Recapitulando. Hemos encontrado la solución (ahora escrita en términos de Λ)

$$a(t) = e^{\sqrt{\Lambda/3}t} \quad \varphi(t) = e^{(1/n)\sqrt{\Lambda/3}t}, \quad (7.62)$$

para el sistema de ecuaciones (7.54)-(7.56), asociado a la métrica de Friedmann-Robertson-Walker plana y al campo escalar φ . A este último corresponde la función

$$V(\varphi) = \lambda\varphi^n, \quad (7.63)$$

donde n y λ son constantes arbitrarias. Ya no tenemos el problema de la masa imaginaria, pero tampoco podemos interpretar φ de una manera adecuada, debido a que no está presente el término cinético.

Capítulo 8

Conclusiones: *Cosmología para una brana en la gravedad de Einstein-Chern-Simons*

En ésta, la tercera parte de esta tesis, titulada *Cosmología para una brana en la gravedad de Einstein-Chern-Simons*, hemos encontrado los siguientes resultados:

1. En el capítulo 6, bajo ciertas imposiciones en el lagrangiano de Einstein-Chern-Simons (torsión nula, geometría de branas y un ansatz para el campo h^a), hemos conseguido una acción más simple que la original, para una brana 4-dimensional inmersa en el espacio de la teoría de Einstein-Chern-Simons (ec. (6.51)). Resolviendo así el problema de las cinco dimensiones, que contrastan con las cuatro *experimentadas* (cumpliendo así uno de los objetivos secundarios planteados). En esta acción simplificada, el campo k^{ab} de la teoría desaparece, y el campo h^a se interpreta como un campo escalar (cumpliendo con el otro objetivo secundario; en el capítulo 7 se profundiza en esta interpretación). Dicha acción aparece escrita en lenguaje tensorial y contiene a los términos de Einstein-Hilbert y cosmológico, más términos de materia correspondientes al campo escalar, acoplada nominalmente a la geometría.

Al extremar la acción (6.51) se encuentran las ecuaciones de campo (6.64) y (6.65), a partir de las cuales, en el capítulo 6, encontramos soluciones cosmológicas aceleradas.

Del análisis de las *constantes* asociadas a la acción (6.51) (subsec. 6.4.3 y apéndices B y C) vemos que en el límite $l \rightarrow 0$ se recobra la Relatividad General, como se espera ocurra para la gravedad de Einstein-Chern-

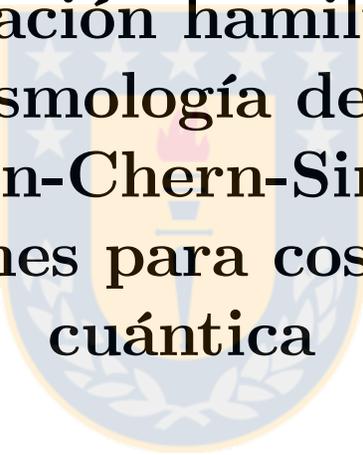
Simons; y que además es posible hacer contacto con la teoría Chern-Simons de [72]. Otras posibilidades, como una conexión con la teorías, escalar-tensorial en marco de Jordan, o de Brans-Dicke, se revisaron brevemente.

2. A partir de las ecuaciones de campo (6.64) y (6.65), en capítulo 7 encontramos tres tipos de soluciones cosmológicas tipo Friedmann-Robertson-Walker aceleradas (cumpliendo con el objetivo principal de esta tesis), correspondientes a diferentes potenciales para el campo escalar (interpretando de manera más precisa al campo h^a):
 - a) En la sec. 7.2 encontramos soluciones aceleradas para los casos plano, abierto y cerrado (ver (7.23)), e interpretamos al campo escalar asociado a h^a , que se en este caso se mantiene constante, como una partícula de Klein-Gordon, cuya masa es dada por (7.27), y viene escrita en términos de las constantes κ , Λ y ε . Mostramos que una solución análoga en la Relatividad General no existe.
 - b) En la sec. 7.3, procediendo de forma similar a lo hecho en la sec. 7.2, encontramos una solución que describe una dinámica exponencial acelerada (ec. (7.47)) para el caso plano. Aquí el campo escalar se interpreta como un taquión, cuya masa es dada por (7.46) (y que depende de Λ), y se comporta de manera exponencial (ec. (7.47)).
 - c) En la sec. 7.4 encontramos una solución acelerada exponencial (ec. (7.62)) para el caso plano despreciando el término cinético de la acción (imposición que parece razonable, ver sec. 7.4). Esta solución es válida para un potencial con la forma $V = \lambda\varphi^n$, donde λ y n son constantes arbitrarias; sin embargo, aquí, al no haber término cinético, la interpretación de φ no es completamente satisfactoria. El campo escalar describe un comportamiento exponencial (ec. (7.62)).

Para finalizar, quedan aquí algunos temas no resueltos: 1. Estudiar con mayor profundidad las consecuencias de escoger de una u otra forma *constantes* de la teoría; por ejemplo para obtener una teoría tipo Brans-Dicke, o similar. 2. Encontrar soluciones para las ecuaciones de campo de la brana (6.64) y (6.65) en contextos diferentes al de la cosmología. 3. Estudiar la posibilidad de extender el reducido número de soluciones cosmológicas encontradas.

Parte IV

Formulación hamiltoniana para cosmología de branas Einstein-Chern-Simons y ecuaciones para cosmología cuántica



Capítulo 9

Campo escalar con potencial cuadrático

En esta parte de la tesis construiremos la formulación hamiltoniana asociada a la cosmología para branas estudiada anteriormente (a partir del lagrangiano (6.51)), considerando dos casos particulares de potenciales para el campo escalar: uno cuadrático, que estudiaremos en este capítulo, y uno lineal (y donde se desprecia el término cinético), en el capítulo siguiente. A partir de estos resultados, encontraremos algunas soluciones aceleradas, y derivaremos un par de ecuaciones tipo Wheeler-de Witt para cosmología cuántica, para la que no daremos soluciones.

9.1. Hamiltoniano y ecuaciones canónicas en cosmología

Métrica. Consideremos una métrica similar a la de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = -N(t)dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2) \right], \quad k = 0, \pm 1, \quad (9.1)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala y $N(t)$ es la función lapse (la de las variables ADM, [46]).

Lagrangiano. Al evaluar (9.1) en (6.51), en el *gauge* $N = 1$, es posible derivar la acción tipo *partícula puntual*

$$S = \Sigma_3 \int dt L(a, \dot{a}, \varphi, \dot{\varphi}), \quad (9.2)$$

donde Σ_3 representa el volumen espacial y L el lagrangiano (tomado la constante gravitacional $\kappa = 1$)

$$L(a, \dot{a}, \varphi, \dot{\varphi}) = -3a(\dot{a}^2 - k)(1 + \varepsilon V) + a^3 \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V - \Lambda \right) - 3\varepsilon a^2 \dot{a} \dot{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \quad (9.3)$$

Momenta conjugados. A continuación construiremos el hamiltoniano asociado a (9.3). Para ello, el primer paso es definir los momenta conjugados

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -3a \left[2\dot{a}(1 + \varepsilon V) + \varepsilon a \dot{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] \quad (9.4)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = a^2 \left(a \dot{\varphi} - 3\varepsilon \dot{a} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \quad (9.5)$$

Hamiltoniano. El siguiente es despejar \dot{a} y $\dot{\varphi}$ en términos de a , φ , p_a y p_φ . De (9.4) y (9.5) podemos obtener la expresión

$$\dot{a} = - \frac{\left[\frac{p_a}{3a} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{p_\varphi}{a^2} \right]}{2 \left[1 + \varepsilon V + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 \right]}. \quad (9.6)$$

Para hacer el tratamiento más simple, consideramos V de modo que

$$\varepsilon V + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 = 0. \quad (9.7)$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$V(\varphi) = -\frac{1}{6\varepsilon} \varphi^2 \equiv \frac{\lambda}{2} \varphi^2, \quad (9.8)$$

que describe o una partícula de Klein-Gordon (con masa $m = \sqrt{\lambda}$), cuando $\varepsilon < 0$, o un taquión (con masa $m = i\sqrt{|\lambda|}$), cuando $\varepsilon > 0$.

Ahora es posible despejar

$$\dot{a} = \frac{1}{6a^2} (p_\varphi \varphi - p_a a) \quad (9.9)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{6a^3} [6p_\varphi - \varphi (p_\varphi \varphi - p_a a)]. \quad (9.10)$$

Ya estamos en pie de construir el hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H &= p_i \dot{q}_i - L \\ &= p_a \dot{a} + p_\varphi \dot{\varphi} - L \\ H &= \frac{p_\varphi^2}{2a^3} - \frac{(p_a a - p_\varphi \varphi)^2}{12a^3} + \frac{a^3 (\lambda \varphi^2 + 2\Lambda)}{2} - \frac{ka(6 - \varphi^2)}{2} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Ecuaciones canónicas. A este hamiltoniano corresponden las ecuaciones canónicas:

$$\dot{a} = \frac{\partial H}{\partial p_a} = \frac{1}{6a^2} (p_\varphi \varphi - p_a a) \quad (9.12)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{6a^3} [6p_\varphi - \varphi (p_\varphi \varphi - p_a a)] \quad (9.13)$$

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial a} = \frac{p_\varphi^2}{4a^4} (6 - \varphi^2) - \frac{p_a^2}{12a^2} + \frac{p_a p_\varphi \varphi}{3a^3} - \frac{3a^2 (\lambda \varphi^2 + 2\Lambda)}{2} + \frac{k(6 - \varphi^2)}{2} \quad (9.14)$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{p_\varphi}{6a^3} (p_\varphi \varphi - p_a a) - \lambda \varphi a^3 - k a \varphi \quad (9.15)$$

Además, debemos tener en cuenta el constraint:

$$H = 0. \quad (9.16)$$

9.2. Solución para $\varphi = cte.$

Es posible encontrar una solución acelerada simple con el *ansatz* $\varphi = \varphi_0 = cte.$ Con esta condición, las ecuaciones (9.12) – (9.16) arrojan los siguientes resultados:

$$a(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{6}{\Lambda}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}} t\right), & k = -1 \\ C \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}} t\right), & k = 0 \\ \sqrt{\frac{6}{\Lambda}} \cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}} t\right), & k = +1, \end{cases} \quad (9.17)$$

$$\varphi = \varphi_0 = \sqrt{6} \quad \varepsilon = \frac{1}{\Lambda} > 0 \quad p_a = 0 \quad (9.18)$$

$$p_\varphi(t) = \begin{cases} \frac{36}{\Lambda} \cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}} t\right) \sinh^2\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}} t\right), & k = -1 \\ \sqrt{6\Lambda} C^3 \exp\left(\sqrt{\frac{3\Lambda}{2}} t\right), & k = 0 \\ \frac{36}{\Lambda} \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}} t\right) \cosh^2\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}} t\right), & k = +1, \end{cases} \quad (9.19)$$

donde C es una constante arbitraria. Notar que como $\varepsilon > 0$ el campo escalar describe un taquión, el cual posee una masa $m = i\sqrt{\Lambda/3}$.

9.3. Ecuación tipo Wheeler-de Witt para cosmología cuántica

Una ecuación análoga a la Wheeler-de Witt, en nuestro caso para cosmología Friedmann-Robertson-Walker Einstein-Chern-Simons, se obtiene mediante el procedimiento de cuantización canónica. Haciendo $H\Psi = 0$, donde Ψ

es una función (funcional) de onda, e introduciendo los operadores $p_a \rightarrow -i\partial_a$ y $p_\varphi \rightarrow -i\partial_\varphi$, se consigue

$$[(6 - \varphi^2) \partial_\varphi^2 - a^2 \partial_a^2 + 2a\varphi \partial_\varphi \partial_a + 6a^6 (\lambda\varphi^2 + 2\Lambda) - 6ka^4 (6 - \varphi^2)] \Psi[a, \varphi] = 0, \quad (9.20)$$

notando que aquí se ha considerado el caso que parece más simple en lo que se refiere a la ordenación de los factores: poner todos los a y φ a la izquierda de los operadores de momentum. Hasta ahora no hemos encontrado soluciones para (9.20), ni para alguna ecuación similar obtenida considerando una ordenación diferente de los operadores.



Capítulo 10

Campo escalar con potencial lineal y sin término cinético

10.1. Hamiltoniano y ecuaciones canónicas

Lagrangiano. Cuando no consideramos el término cinético correspondiente al campo escalar en (6.51) es posible obtener ecuaciones algo más simples que las de la sección anterior. Excluirlo dicho término parece razonable ya que se introdujo *a mano* en (6.49).

A continuación construiremos el hamiltoniano correspondiente al lagrangiano (9.3) sin término cinético:

$$L(a, \dot{a}, \varphi, \dot{\varphi}) = -3a(\dot{a}^2 - k)(1 + \varepsilon V) - a^3(V + \Lambda) - 3\varepsilon a^2 \dot{a} \dot{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \quad (10.1)$$

Momenta conjugados. Definimos los momenta conjugados:

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -3a \left[2\dot{a}(1 + \varepsilon V) + \varepsilon a \dot{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] \quad (10.2)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -3\varepsilon a^2 \dot{a} \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \quad (10.3)$$

Hamiltoniano. El siguiente paso es despejar \dot{a} y $\dot{\varphi}$ en términos de a , φ , p_a y p_φ .

De (10.3) vemos que

$$\dot{a} = -\frac{p_\varphi}{3\varepsilon a^2 \frac{\partial V}{\partial \varphi}}. \quad (10.4)$$

Tener a φ en denominador, dentro de V , puede ser un poco molesto. De forma que consideramos el caso en que

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \alpha = cte. \quad \implies \quad V(\varphi) = \alpha\varphi, \quad (10.5)$$

Con este potencial las cosas se simplifican, y se obtiene

$$\dot{a} = -\frac{p_\varphi}{3\beta a^2}. \quad (10.6)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{2p_\varphi}{3\beta^2 a^3} (1 + \beta\varphi) - \frac{p_a}{3\beta a^2}, \quad (10.7)$$

donde se ha definido la constante $\beta \equiv \varepsilon\alpha$.

A continuación construimos el hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H &= p_i \dot{q}_i - L \\ &= p_a \dot{a} + p_\varphi \dot{\varphi} - L \\ H &= \frac{p_\varphi^2}{3\beta^2 a^3} (1 + \beta\varphi) - \frac{p_a p_\varphi}{3\beta a^2} + a^3 (\alpha\varphi + \Lambda) - 3ka (1 + \beta\varphi) \end{aligned} \quad (10.8)$$

Ecuaciones canónicas. A este hamiltoniano corresponden las ecuaciones canónicas:

$$\dot{a} = \frac{\partial H}{\partial p_a} = -\frac{p_\varphi}{3\beta a^2} \quad (10.9)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{2p_\varphi}{3\beta^2 a^3} (1 + \beta\varphi) - \frac{p_a}{3\beta a^2} \quad (10.10)$$

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial a} = \frac{p_\varphi^2}{\beta^2 a^4} (1 + \beta\varphi) - \frac{2p_a p_\varphi}{3\beta a^3} - 3a^2 (\alpha\varphi + \Lambda) + 3k (1 + \beta\varphi) \quad (10.11)$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{p_\varphi^2}{3\beta a^3} - \alpha a^3 + 3k\beta a \quad (10.12)$$

Además, debemos tener en cuenta el constraint:

$$H = 0. \quad (10.13)$$

10.2. Solución para $\varphi = cte$.

Es posible encontrar una solución acelerada simple con el ansatz $\varphi = \varphi_0 = cte$. Con esta condición, las ecuaciones (10.9) – (10.13) arrojan los siguientes resultados:

$$a(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{6}{\Lambda}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}} t\right), & k = -1 \\ C \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}} t\right), & k = 0 \\ \sqrt{\frac{6}{\Lambda}} \cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}} t\right), & k = +1, \end{cases} \quad (10.14)$$

$$\varphi = \varphi_0 = -\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{\alpha\varepsilon} \quad \varepsilon = \frac{1}{\Lambda} > 0 \quad p_a = 0 \quad (10.15)$$

$$p_\varphi(t) = \begin{cases} -\frac{18\beta}{\Lambda^2} \cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}t\right) \sinh^2\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}t\right), & k = -1 \\ -3\beta\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}C^3 \exp\left(\sqrt{\frac{3\Lambda}{2}}t\right), & k = 0 \\ -\frac{18\beta}{\Lambda^2} \sinh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}t\right) \cosh^2\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}t\right), & k = +1, \end{cases} \quad (10.16)$$

Notar que esta solución describe la misma dinámica que la de la sección anterior. Pero ahora no hay taquión, hay un potencial lineal y no hay término cinético.

10.3. Ecuación tipo Wheeler-de Witt para cosmología cuántica

Al hamiltoniano (10.8) corresponde la siguiente ecuación tipo Wheeler-de Witt para cosmología cuántica

$$[(1 + \beta\varphi) \partial_\varphi^2 - \beta a \partial_\varphi \partial_a + 3\beta^2 a^6 (\alpha\varphi + 2\Lambda) - 9\beta^2 k a^4 (1 + \beta\varphi)] \Psi[a, \varphi] = 0, \quad (10.17)$$

donde, del mismo modo que en la sección anterior, se ha considerado la ordenación de los factores que parece más simple, al momento llevar a cabo el procedimiento de cuantización canónica reemplazando $p_a \rightarrow -i\partial_a$ y $p_\varphi \rightarrow -i\partial_\varphi$. Aquí tampoco tenemos soluciones.

Capítulo 11

Conclusiones: *Formulación hamiltoniana para la cosmología de branas Einstein-Chern-Simons y ecuaciones para cosmología cuántica*

En ésta, la cuarta parte de la tesis, titulada *Formulación hamiltoniana para la cosmología de branas Einstein-Chern-Simons y ecuaciones para cosmología cuántica*, hemos encontrado los siguientes resultados, que cumplen con los objetivos propuestos (ver objetivos en la sec. 1.1):

1. En el capítulo 9 desarrollamos el formalismo hamiltoniano asociado a la cosmología de branas de la parte III para el caso en que el potencial del campo escalar es cuadrático. Pudimos encontrar soluciones aceleradas para geometrías plana, abierta y cerrada (ec. (9.17)), cuando el campo escalar toma un valor constante. Dicho campo se interpretó como un taquión, cuya masa está relacionada a la constante cosmológica: $m = i\sqrt{\Lambda/3}$.

Además, a partir del hamiltoniano encontrado (ec. (9.11)), y mediante el procedimiento de cuantización canónica, considerando la ordenación de los operadores de momentum que parece más simple, obtuvimos una ecuación para cosmología cuántica tipo Wheeler-de Witt (ec. (9.20)) para la cual no dimos soluciones.

2. En el capítulo 10 desarrollamos el formalismo hamiltoniano para la cosmología de branas Einstein-Chern-Simons en el caso donde se desprecia el

término cinético del campo escalar y se toma un potencial lineal. Pudimos encontrar soluciones aceleradas para geometrías plana, abierta y cerrada que describen la misma dinámica que en el caso del potencial cuadrático (ec. (10.14)); aquí también el campo escalar es constante.

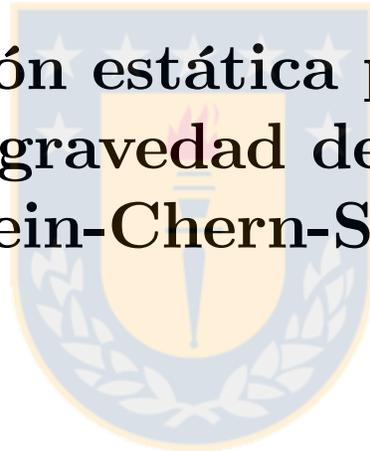
Además, a partir del hamiltoniano encontrado (ec. (10.8)), y mediante el procedimiento de cuantización canónica, considerando la ordenación de los operadores de momentum que parece más simple, obtuvimos una ecuación para cosmología cuántica tipo Wheeler-de Witt (ec. (10.17)) para la cual no dimos soluciones.

Para finalizar, diremos que el análisis aquí presentado podría ser profundizado en varios aspectos (esto sin desconocer la dificultad que su implementación implicaría): 1. Podría intentarse construir el formalismo hamiltoniano para potenciales del campo escalar diferentes a los aquí abordados. 2. Las soluciones aquí presentadas consideran el caso simple en el que campo escalar es constante, se podrían buscar soluciones dinámicas. 3. En el procedimiento de la cuantización canónica aquí realizado se consideró *una* ordenación de los operadores de momentum, habiendo más posibilidades, las que podrían ser exploradas. 4. No encontramos soluciones para ecuaciones de cosmología cuántica, esto por su evidente complejidad; sin embargo no hemos intentado buscarlas con métodos numéricos.



Parte V

Solución estática para la gravedad de Einstein-Chern-Simons



Capítulo 12

Solución estática con subespacio 3-dimensional maximalmente simétrico

En [27] se encontró una solución con simetría esférica para las ecuaciones de Einstein-Chern-Simons, la cual, en cierto límite, conduce a la solución estándar para gravedad de Einstein-Cartan. También se encontraron las condiciones bajo las cuales dichas ecuaciones admiten una solución de agujero negro.

En esta parte de la tesis encontraremos soluciones más generales que las encontradas en [27], considerando una variedad espacio-temporal 5-dimensional que contiene un subespacio 3-dimensional maximalmente simétrico; hay tres casos: abierto, plano, y cerrado. Aquí se incluye un lagrangiano de materia correspondiente al campo h^a —como en soluciones anteriores—, cuya derivada funcional se asocia a un segundo tensor de energía-momentum, el correspondiente al campo h^a , i.e. $T_{\mu\nu}^{(h)}$. Este tensor será modelado como un fluido anisótropo, caracterizado por su densidad de energía, y sus presiones radial y lateral. Los resultados encontrados conducen a identificar al campo h^a como un suerte de constante cosmológica. Los resultados de [27] se recobran a partir de estas soluciones más generales..

12.1. Soluciones de las ecuaciones de Einstein-Chern-Simons

Siguiendo lo expuesto en [82] y [83], asumiremos que es posible reemplazar la 3-esfera S^3 —considerada en [27]—por otra variedad 3-dimensional maximalmente simétrica Σ_3 , que llamaremos *variedad base*, de modo que el elemento de línea es dado por

$$ds^2 = -f^2(r) dt^2 + \frac{dr^2}{g^2(r)} + r^2 d\Sigma_3^2. \quad (12.1)$$

Es importante notar que este elemento de línea puede obtenerse siguiendo el mismo procedimiento usado para obtener el espacio que contiene a S^3 . Esto requiere encontrar los vectores de Killing que describen rotaciones espaciales 4-dimensionales. Como se muestra en [1], [24], [27], los vectores de Killing pueden obtenerse a partir de un espacio plano 4-dimensional dotado de una métrica $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1\}$.

Como la variedad 3-dimensional Σ_3 es maximalmente simétrica, posee curvatura constante, lo que se traduce en un escalar de Ricci con la forma

$$\tilde{R} = 6\gamma, \quad (12.2)$$

donde, $\gamma = 0$ para una variedad plana, $\gamma = -1$ para una variedad hiperbólica, y $\gamma = +1$ para una variedad esférica.

Así, introducimos el *vielbein*

$$e^T = f(r) dt, \quad e^R = \frac{dr}{g(r)}, \quad e^m = r\tilde{e}^m, \quad (12.3)$$

donde \tilde{e}^m , con $m = \{1, 2, 3\}$, es el *driebein* de la variedad base Σ_3 .

A partir la condición de torsión nula es posible obtener la conexión de espín en términos del vielbein; y a partir de la segunda ecuación de estructura de Cartan $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb}$ se calcula matriz de curvatura. Las componentes diferentes de cero son

$$\begin{aligned} R^{TR} &= - \left(\frac{f''}{f} g^2 + \frac{f'}{f} g' g \right) e^T e^R, \quad R^{Tm} = - \frac{f'}{f} g^2 e^T \tilde{e}^m \\ R^{Rm} &= -g' e^R \tilde{e}^m, \quad R^{mn} = \tilde{R}^{mn} - g^2 \tilde{e}^m \tilde{e}^n, \end{aligned} \quad (12.4)$$

donde $\tilde{R}^{mn} = d\tilde{\omega}^{mn} + \tilde{\omega}^m_p \tilde{\omega}^{pn}$ son las componentes de la curvatura en la variedad base. Para escribir la curvatura en la variedad base es necesario definir la conexión de espín $\tilde{\omega}^{mn}$ de la variedad. Esta conexión puede ser determinada en términos del \tilde{e}^m utilizando el lema de Weyl y la condición de torsión nula en la variedad base $\tilde{T}^m = 0$.

Reemplazando las componentes de la curvatura (12.4) en las ecuaciones (2.214), para el caso $\hat{T}_a = 0$ (vacío), se obtienen tres ecuaciones

$$B_u(r)\tilde{R}(\tilde{x}) + 6A_u(r) = 0, \quad u = \{0, 1, 2\}, \quad (12.5)$$

donde $\tilde{R}(\tilde{x})$ es el escalar de Ricci correspondiente a la variedad base y las fun-

ciones $A_u(r)$ y $B_u(r)$ son dadas por

$$A_0(r) = -2r (g^2 r^2)' + \operatorname{sgn}(\alpha) l^2 r (g^4)', \quad (12.6)$$

$$B_0(r) = 2r \left(2r - \operatorname{sgn}(\alpha) l^2 (g^2)' \right), \quad (12.7)$$

$$A_1(r) = 2r \left(-2r g^2 - 3 \operatorname{sgn}(\alpha) l^2 r^2 g^2 \frac{f'}{f} + 2 \operatorname{sgn}(\alpha) l^2 g^4 \frac{f'}{f} \right), \quad (12.8)$$

$$B_1(r) = 2r \left(2r - 2 \operatorname{sgn}(\alpha) l^2 g^2 \frac{f'}{f} \right), \quad (12.9)$$

$$A_2(r) = -2r^2 \left(2 (g^2 r^2)' + 4r g^2 \frac{f'}{f} + r^2 (g^2)' \frac{f'}{f} + 2r^2 g^2 \frac{f''}{f} \right) + \operatorname{sgn}(\alpha) l^2 r^2 \left(3 (g^4)' \frac{f'}{f} + 4g^4 \frac{f''}{f} \right) (g^4)', \quad (12.10)$$

$$B_2(r) = 2r \left\{ 2 - \operatorname{sgn}(\alpha) l^2 \left((g^2)' \frac{f'}{f} + 2g^2 \frac{f''}{f} \right) \right\}. \quad (12.11)$$

La ecuación (12.5) con $u = 0$ puede reescribirse como

$$-\frac{A_0(r)}{B_0(r)} = \frac{\tilde{R}(\tilde{x})}{6}. \quad (12.12)$$

Como el lado izquierdo depende sólo de r y el lado derecho sólo de \tilde{x} , entonces, ambos lados deben ser iguales a una constante γ , de modo que

$$\tilde{R}(\tilde{x}) = 6\gamma. \quad (12.13)$$

Esto muestra que la variedad base $\Sigma_3(\tilde{x})$ posee curvatura constante, como se anticipó. La solución de $A_0(r)/B_0(r) = -\gamma$ conduce a

$$g^2(r) = \gamma + \operatorname{sgn}(\alpha) \left(\frac{r^2}{l^2} - \beta \sqrt{\frac{r^4}{l^4} + \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{l^4}} \right), \quad (12.14)$$

donde μ es una constante de integración y $\beta = \pm 1$. Las ecuaciones (12.5) con $u = 0$ y $u = 1$ conducen a $f^2(r) = g^2(r)$, mientras que $u = 3$ nos dice que

$$\tilde{R} = 6\lambda, \quad (12.15)$$

de forma que la constante de integración λ debe ser igual a γ , por consistencia con (12.13).

Así, al elemento de línea (12.1) corresponden las funciones $f(r)$ y $g(r)$ dadas por

$$f^2(r) = g^2(r) = \gamma + \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{r^2}{l^2} - \operatorname{sgn}(\alpha) \beta \sqrt{\frac{r^4}{l^4} + \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{l^4}} \quad (12.16)$$

donde $\beta = \pm 1$ muestra la degeneración debida al carácter cuadrático de las ecuaciones de campo, μ es una constante de integración relacionada a la masa del sistema y γ es otra constante de integración relacionada al escalar de curvatura de la variedad base ($\tilde{R} = 6\gamma$): $\gamma = 0$ si es plana, $\gamma = -1$ si es hiperbólica or $\gamma = 1$ si es esférica.

12.2. Tensor de energía-momentum para el campo h^a

A partir del vielbein encontrado en la sección anterior podemos encontrar el tensor de energía-momentum asociado al campo h^a , i.e., podemos resolver la ecuación (2.213).

Consideremos el tensor de energía-momentum para h^a modelado como un fluido anisotrópico, descrito en términos de la densidad de energía y las presiones radial y lateral. En el marco de referencia comóvil tenemos

$$\hat{T}_{TT}^{(h)} = \rho^{(h)}(r), \quad \hat{T}_{RR}^{(h)} = p_R^{(h)}(r), \quad \hat{T}_{ii}^{(h)} = p_i^{(h)}(r). \quad (12.17)$$

Con esta definición, además de la solución encontrada (12.16) y reemplazando en las ecuaciones de campo (2.213), obtenemos

$$\rho^{(h)}(r) = -p_R^{(h)}(r) = -\frac{12}{l^2 \kappa_{\text{EH}}} \left\{ 2 - \beta \frac{2 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{r^4}}{\sqrt{1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{r^4}}} \right\}, \quad (12.18)$$

$$p_i^{(h)}(r) = \frac{4}{l^2 \kappa_{\text{EH}}} \left\{ 6 - \beta \frac{6 + 9 \text{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{r^4} + \frac{\mu^2}{r^8}}{\left(1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{r^4}\right)^{\frac{3}{2}}} \right\}. \quad (12.19)$$

12.3. Densidad de energía y presión radial

Ahora consideremos las condiciones que deben satisfacer la densidad de energía $\rho^{(h)}(r)$ y la presión radial $p_R^{(h)}(r)$.

De (12.18) podemos ver que la densidad de energía es cero para todo r , sólo si $\beta = 1$ y $\mu = 0$. Este es el único caso en $\rho^{(h)}(r)$ se anula. De otro modo, $\rho^{(h)}$ es o positivo o negativo.

Para simplificar el análisis, la densidad de energía puede reescribirse como

$$\rho^{(h)}(r) = -\frac{12}{l^2 \kappa_{\text{EH}}} \left\{ \frac{2\sqrt{1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{r^4}} - \beta \left(2 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{r^4}\right)}{\sqrt{1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{r^4}}} \right\}. \quad (12.20)$$

Como la solución (12.16) tiene que ser real, entonces se satisface que $1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{r^4} > 0$. Hecho que implica que los términos que aparecen en el numerador de (12.20) se ven restringidos por la expresión

$$0 < 2\sqrt{1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{r^4}} < \left(2 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{r^4}\right). \quad (12.21)$$

Este constraint se obtiene considerando que $\left(\text{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{r^4}\right)^2 > 0$, sumando en ambos lados $4\left(1 + \text{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{r^4}\right)$ y tomando la raíz cuadrada.

Así, si $\beta = -1$ la densidad de energía es menor que cero. Si $\beta = 1$ la densidad de energía es mayor que cero, a menos que $\mu = 0$, en cuyo caso se anula. La

presión radial es el negativo de densidad de energía, como lo dice la ecuación (12.18).

También podemos ver que si $\mu = 0$ la densidad de energía permanece constante. De otro modo, la densidad de energía es o monótonicamente creciente ($\beta = -1$) o decreciente ($\beta = 1$), siendo función de la coordenada radial.

Notar que si $\beta = -1$ entonces cuando $r \rightarrow \infty$, la densidad de energía y la presión radial tienen a un valor diferente de cero

$$\rho^{(h)}(r \rightarrow \infty) = -p_R^{(h)}(r \rightarrow \infty) = -\frac{48}{l^2 \kappa_{EH}}, \quad (12.22)$$

como si fuera una constante cosmológica negativa. En el caso que $\beta = +1$, la densidad de energía y la presión radial son asintóticamente cero, como en el caso de una constante cosmológica nula.

En resumen,

- Si $\mu = 0$, entonces la densidad de energía es constante en todo el espacio, cero si $\beta = 1$ o $-\frac{48}{l^2 \kappa_{EH}}$ si $\beta = -1$.
- Si $\beta = 1$ y $\mu \neq 0$, la densidad de energía es positiva y decrece a cero en el infinito.
- Si $\beta = -1$ y $\mu \neq 0$, la densidad de energía es negativa y su valor crece hacia $-\frac{48}{l^2 \kappa_{EH}}$.

Como se mostró, la presión radial es el negativo de la densidad de energía.

12.4. Presión tangencial

Podemos ver que la presión tangencial dada por (12.19) se anula si

$$\text{sgn}(\alpha) \frac{\mu}{r^4} = 9 + 4\beta\sqrt{6}. \quad (12.23)$$

Así tenemos

- Si $\beta = 1$, la presión tangencial se anula sólo si $\text{sgn}(\alpha)\mu > 0$.
- Si $\beta = -1$ la presión tangencial se anula sólo si $\text{sgn}(\alpha)\mu < 0$.
- En los otros casos, la presión tangencial no cambia de signo.

Además, es directo mostrar que hay sólo un punto crítico en $r = \sqrt[4]{\frac{\text{sgn}(\alpha)\mu}{5}}$, sólo si $\text{sgn}(\alpha)\mu > 0$.

Caso $\beta = 1$

Si $\beta = 1$ se distinguen tres casos, que dependen de la cantidad $\text{sgn}(\alpha)\mu$:

1. Para $\mu = 0$, tenemos el caso más simple. La presión tangencial es cero para todo r .
2. Si $\text{sgn}(\alpha)\mu > 0$ la presión tangencial diverge hacia menos infinito en $r = 0$, y es una función creciente que se anula en

$$r_1 = \sqrt[4]{\text{sgn}(\alpha)\mu \frac{4\sqrt{6}-9}{15}} \approx 0,48 \sqrt[4]{|\mu|}, \quad (12.24)$$

y se vuelve mayor que cero, alcanzando el valor máximo

$$p_i^{(h)\max} = \frac{4}{9 l^2 \kappa_{\text{EH}}} (54 - 19\sqrt{6}) \approx \frac{3,3}{l^2 \kappa_{\text{EH}}},$$

en

$$r_2 = \sqrt[4]{\frac{\text{sgn}(\alpha)\mu}{5}} \approx 0,67 \sqrt[4]{|\mu|} \quad (12.25)$$

y decrece a cero como r tiende a infinito.

3. Si $\text{sgn}(\alpha)\mu < 0$, entonces la presión tangencial diverge hacia el infinito positivo en

$$r_m = \sqrt[4]{-\text{sgn}(\alpha)\mu} = \sqrt[4]{|\mu|}; \quad (12.26)$$

por supuesto, la variedad no está definida para $r < r_m$ (ver coeficientes métricos en (12.16)). La presión tangencial es una función decreciente de r que se anula en el infinito, pero es siempre es mayor que cero.

Caso $\beta = -1$

Si $\beta = -1$ se distinguen tres casos

1. Para $\mu = 0$, tenemos el caso más simple. La presión tangencial es constante y mayor que cero para todo r

$$p_i^{(h)}(r) = \frac{48}{l^2 \kappa_{\text{EH}}}. \quad (12.27)$$

2. Si $\text{sgn}(\alpha)\mu > 0$, la presión tangencial diverge al infinito positivo en $r = 0$, es una función decreciente de r , alcanza un valor mínimo

$$p_i^{(h)\min} = \frac{4}{9 l^2 \kappa_{\text{EH}}} (54 + 19\sqrt{6}) \approx \frac{45}{l^2 \kappa_{\text{EH}}} \quad (12.28)$$

en

$$r = \sqrt[4]{\frac{\text{sgn}(\alpha)\mu}{5}} \approx 0,67 \sqrt[4]{|\mu|}, \quad (12.29)$$

y entonces crece hacia un valor constante en el infinito

$$p_i^{(h)}(r \rightarrow \infty) = \frac{48}{l^2 \kappa_{\text{EH}}}. \quad (12.30)$$

La presión tangencial es siempre mayor que cero.

3. Si $\text{sgn}(\alpha)\mu < 0$ la presión tangencial diverge hacia el infinito negativo en (recordar que la variedad no está definida para $r < r_m$)

$$r_m = \sqrt[4]{-\text{sgn}(\alpha)\mu} = \sqrt[4]{|\mu|}.$$

La presión tangencial es una función creciente de r que tiende a un valor positivo constante cuando $r \rightarrow \infty$

$$p_i^{(h)}(r \rightarrow \infty) = \frac{48}{l^2 \kappa_{\text{EH}}}.$$

Además, la presión tangencial se vuelve cero en

$$r = \sqrt[4]{-\text{sgn}(\alpha)\mu \frac{9 + 4\sqrt{6}}{15}} \approx 1,06 \sqrt[4]{|\mu|}.$$



Capítulo 13

Solución esférica a partir de la solución general

Consideremos ahora el caso de la solución con simetría esférica estudiado en [27] y revisado en sec. 2.8. Esta solución es descrita por el vielbein definido en (2.215), con las funciones $f(r)$ y $g(r)$ dadas por (2.216).

Esta solución corresponde al caso estático general encontrado en (12.16) donde la curvatura de la variedad base 3-dimensional es positiva. De [27] sabemos que los valores de la masa relativa M y la distancia l de esta solución conducen a agujeros negros o singularidades desnudas:

1. En el caso que $\alpha > 0$, la variedad tiene una singularidad en $r = 0$. De otro modo, si $\alpha < 0$, la variedad tiene una singularidad en

$$r_m = \sqrt[4]{\mu} = \sqrt[4]{\frac{\kappa_{\text{EH}}}{6\pi^2} M l^2}. \quad (13.1)$$

2. Hay una solución de agujero negro con horizonte de eventos definido por

$$r_0 = \sqrt{\frac{\mu - \text{sgn}(\alpha) l^4}{2l^2}} = \sqrt{\frac{\kappa_{\text{EH}}}{12\pi^2} M - \text{sgn}(\alpha) \frac{l^2}{2}}, \quad (13.2)$$

si $\mu > l^4$, o equivalentemente

$$\frac{\kappa_{\text{EH}}}{6\pi^2} M > l^2. \quad (13.3)$$

De otro modo, hay una singularidad desnuda.

13.1. Caso $\alpha > 0$

En este caso la densidad de energía decrece y se anula en el infinito, y la presión radial es su negativo (ver subsec. 12.3 con $\beta = 1$ y $\text{sgn}(\alpha) \mu > 0$).

Más interesante es el comportamiento de la presión tangencial. De hecho, como fue estudiado en la subsec. 12.4, la presión tangencial es menor que cero para $r < r_1$ (12.24), se anula en r_1 , se vuelve mayor que cero hasta llegar a un máximo en r_2 (12.25) y entonces decrece hasta llegar a cero en el infinito.

Comparación de r_0 , r_1 y r_2 para la solución de agujero negro

Cuando la solución es un agujero negro, entonces se debe satisfacer la condición (13.3) y hay un horizonte de eventos en r_0 dado por (13.2). Puede ser interesante estudiar los casos en que r_0 es mayor o menor que r_1 y r_2 .

Primero consideremos r_0 para l fijo, i.e., estudiamos el comportamiento de la función $r_0 = r_0(\mu)$. Para $\mu \geq l^4$ (solución de agujero negro), $r_0 = r_0(\mu)$ está bien definida, es continua, estrictamente creciente, y tiene un valor mínimo en $\mu = l^4$, donde se anula, i.e., $r_0(\mu = l^4) = 0$. Además, cuando $\mu \gg l^4$ la $r_0(\mu)$ función se comporta como $\sqrt{\mu}$.

Por otro lado, el estudio de las funciones $r_1(\mu)$ y $r_2(\mu)$ muestra que están bien definidas, que son continuas y estrictamente crecientes para $\mu \geq 0$, las que se anulan en $\mu = 0$. Mientras μ se incrementa, r_1 y r_2 crece proporcional a $\sqrt[4]{\mu}$.

A partir de las definiciones de r_1 y r_2 dadas por (12.24) y (12.25), y del análisis precedente, se ve que $r_2 > r_1 > r_0$ si $\mu = l^4$, y $r_0 > r_2 > r_1$ si $\mu \rightarrow \infty$. Esto significa que puede existir un único valor para la constante μ , denotado como μ_1 , tal que $r_0(\mu_1) = r_1(\mu_1)$ y un único μ_2 tal que $r_0(\mu_2) = r_2(\mu_2)$. Después de algunos cálculos se obtiene

$$\mu_1 = \frac{l^4}{15} \left(8\sqrt{6} - 3 + 2\sqrt{6(7 - 2\sqrt{6})} \right) \approx 1,58 l^4$$

y

$$\mu_2 = \frac{l^4}{5} (7 + 2\sqrt{6}) \approx 2,38 l^4.$$

De este análisis se concluye que, dependiendo del valor de la constante μ , proporcional a la masa, tenemos los siguientes casos:

- Si $l^4 \leq \mu < \mu_1$ entonces $r_0 < r_1$. Fuera del horizonte del agujero negro, hay una región $r_0 < r < r_1$ donde la presión tangencial es negativa.
- Si $\mu > \mu_1$ entonces $r_0 > r_1$, la zona en la que la presión tangencial es negativa está encerrada dentro del horizonte del agujero negro.

Un análisis análogo puede hacerse para estudiar la relación entre r_0 y r_2 : si $\mu < \mu_2$, el valor máximo de la presión tangencial está fuera del horizonte de eventos o, dentro si $\mu > \mu_2$.

Presiones radial y tangencial

En resumen, para $\alpha > 0$ vemos que la densidad de energía es siempre mayor que cero, mientras que la presión radial es siempre menor que cero, y ambas se anulan cuando r tiende a infinito.

Por otro lado, la presión lateral es menor que cero para $r < r_1$, se vuelve positiva para $r > r_1$ alcanzando un máximo en r_2 y entonces decrece hasta anularse cuando r tiende a infinito.

La solución puede ser una singularidad desnuda ($\mu < l^4$) o un agujero negro ($\mu > l^4$). En el caso del agujero negro hay un horizonte de eventos en $r = r_0$, el que esconde una zona de presión tangencial negativa ($\mu > \mu_1$) o de otro modo, queda descubierta.

13.2. Caso $\alpha < 0$

Consideremos ahora la constante de acoplamiento $\alpha < 0$. En este caso el espacio-tiempo posee un radio mínimo r_m , definido en (13.1), donde está ubicada la singularidad.

Del análisis efectuado en la subsec. 12.3 (con $\beta = 1$ y $\text{sgn}(\alpha)\mu < 0$) obtenemos que la densidad de energía se reduce progresivamente y se anula en el infinito. Por otro lado, la presión radial es el negativo de la densidad de energía.

Además, la presión tangencial positiva tiende a infinito en $r = r_m = \sqrt[4]{\mu}$ y decrece a cero en el infinito (ver subsec. 12.4 con $\beta = 1$ y $\text{sgn}(\alpha)\mu < 0$).



Capítulo 14

Conclusiones: *Solución estática para la gravedad de Einstein-Chern-Simons*

En esta, la parte V de la tesis, titulada *Solución estática para la gravedad de Einstein-Chern-Simons*, hemos encontrado un conjunto de soluciones para la gravedad de Einstein-Chern-Simons contruidas a partir de una métrica 5-dimensional que contiene un subespacio 3-dimensional maximalmente simétrico; distinguimos tres casos: plano, abierto y cerrado. Se estudiaron las soluciones para diversas combinaciones de los parámetros involucrados; y se mostró su conexión con los resultados de [27]. A continuación señalaremos los aspectos más interesantes de esta investigación.

Cuando el campo h^a , que aparece en el lagrangiano (2.171), se modela como un fluido anisótropo (ver ecs. (12.18)-(12.19)), encontramos soluciones para las ecuaciones de campo que predicen la existencia de una zona de presión tangencial negativa alrededor de las distribuciones de baja masa ($\mu < \mu_1$) cuando la constante de acoplamiento α es mayor que cero.

Adicionalmente ($\alpha > 0$), este modelo predice la existencia de un valor máximo para la presión tangencial, que puede ser observado fuera de la región de una distribución que satisface $\mu < \mu_2$.

También es importante notar que dentro de las soluciones se encuentran algunas que se comportan como modelos con una constante cosmológica negativa ($\beta = -1$). En tal situación, el campo h^a juega el rol de constante cosmológica ([24], [25]).

Resultados similares fueron a los obtenidos en este artículo pueden encontrarse en el contexto de la Relatividad General, cuando el tensor de energía-momentum describe materia anisótropo. En [86] se dan algunos ejemplos de soluciones con simetría esférica de las ecuaciones de campo de Einstein con un fluido anisótropo, para modelar el interior de estrellas. En [87], [88] se estudian casos donde no es posible encontrar un sistema de referencia comóvil con

diferentes fluidos cosmológicos en reposo. En estos casos es posible encontrar un marco de referencia donde el tensor de energía-momentum de un sistema de varios fluidos puede reescribirse como el de uno que incluye un único fluido anisótropo. Ejemplos detallados se encuentran en [89].



Parte VI
Conclusiones



Capítulo 15

Resumen y comentarios finales

Hemos comenzado esta tesis reconociendo la importancia del estudio de teorías para gravedad alternativas a la Teoría General de la Relatividad, y en particular de la cosmología (parte I); lo que motivó el planteamiento del objetivo principal de esta investigación: obtener soluciones cosmológicas tipo Friedmann-Robertson-Walker aceleradas en el contexto de la teoría para gravedad 5–dimensional de Einstein-Chern-Simons ([8]).

Ya que a esta teoría corresponde un espacio-tiempo 5-dimensional (en contraste con el 4-dimensional *experimentado*), e incluye campos de materia poco estudiados, es que nos propusimos dos objetivos secundarios: i) obtener soluciones tipo Friedmann-Robertson-Walker aceleradas consistentes con la noción de espacio-tiempo 4–dimensional y, ii) lograr una interpretación de los campos de materia incluídos en la teoría.

Tanto el objetivo principal, como los secundarios, fueron cumplidos dentro del desarrollo de esta investigación, cada uno en diferente medida en cada parte de esta tesis; ver *conclusiones*, capítulos 5, 8, 11 y 14. En estos se resumieron los resultados más interesantes, se revisaron algunas limitaciones de nuestras soluciones, y se presentaron algunas posibilidades de ampliación de la investigación. Aquí no repeterimos las conclusiones allí expuestas, sin embargo haremos un breve repaso de nuestros resultados:

1. En la parte II, encontramos soluciones tipo Friedmann-Robertson-Walker 5–dimensionales, obtenidas a partir de un conjunto de ecuaciones similar al de Einstein-Maxwell (que aparecen como un reordenamiento de las ecuaciones de Einstein-Chern-Simons de [8]). Vimos que el campo material h^a de la teoría de Einstein-Chern-Simons puede interpretarse como una constante cosmológica (resultados publicados en [25]). Para mayor detalle ver el capítulo 5: *Conclusiones: “Cosmología Einstein-Chern-Simons Friedmann-Robertson-Walker 5-dimensional acelerada”*.

2. En la parte III, bajo ciertas imposiciones al lagrangiano en consideración, conseguimos una acción para una brana 4-dimensional inmersa en el espacio de la teoría de Einstein-Chern-Simons, y a partir de ella soluciones de universo acelerado. Aquí el campo h^a se interpreta como un campo escalar acoplado no-minimalmente a la gravedad; en particular, fue asociado a una partícula de Klein-Gordon y a un taquión (artículo en construcción, [26]). Para mayor detalle ver el capítulo 8: *Conclusiones: “Cosmología para una brana en la gravedad de Einstein-Chern-Simons”*.
3. En la parte IV, desarrollamos el formalismo hamiltoniano correspondiente al modelo cosmológico tipo brana de la parte III, para potenciales del campo escalar cuadrático y lineal. En ambos casos obtuvimos una solución acelerada. Además, derivamos un par de ecuaciones tipo Wheeler-de Witt para cosmología cuántica; aquí no dimos soluciones. Para mayor detalle ver el capítulo 11: *Conclusiones: “Formulación hamiltoniana para la cosmología de branas Einstein-Chern-Simons y ecuaciones para cosmología cuántica”*.
4. En la parte V, aunque fuera de los objetivos propuestos, incluimos algunas soluciones estáticas para la gravedad de Einstein-Chern-Simons asociadas a una variedad que contiene un subespacio 3-dimensional maximalmente simétrico. Vimos que es posible hacer contacto con los resultados de [27], derivar soluciones de agujero negro e interpretar la materia h^a de la teoría como una constante cosmológica (artículo enviado, [28]). Para mayor detalle ver el capítulo 14: *Conclusiones: “Solución estática para la gravedad de Einstein-Chern-Simons”*.



Apéndice A

Obtención de las ecuaciones (4.9)-(4.13)

De las ecuaciones (28)-(32) de [24] sabemos que

$$48\alpha_3 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) + 24\alpha_1 l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = \beta_1 T_{00}, \quad (\text{A.1})$$

$$-24\alpha_3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] - 24\alpha_1 l^2 \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \beta_1 T_{11}, \quad (\text{A.2})$$

$$24\alpha_3 l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = \beta_2 T_{00}^{(h)}, \quad (\text{A.3})$$

$$-24\alpha_3 l^2 \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \beta_2 T_{11}^{(h)}, \quad (\text{A.4})$$

$$24\alpha_3 l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left[(g-f) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{g} \right] = 0 \quad (\text{A.5})$$

donde

$$h^0 = f(t) e^0 \quad (\text{A.6})$$

$$h^p = g(t) e^p, \quad p = 1, \dots, 4. \quad (\text{A.7})$$

En esta tesis hemos considerado $\beta_1 = \beta_2 = \kappa$. Efectuando el reemplazo en

(A.1)-(A.7) y dividiendo por $8\alpha_3$ tenemos

$$6 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) \left[3l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 \right] = \left(\frac{\kappa}{8\alpha_3} \right) T_{00}, \quad (\text{A.8})$$

$$-8 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) \left[3l^2 \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] = \left(\frac{\kappa}{8\alpha_3} \right) T_{11}, \quad (\text{A.9})$$

$$3l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = \left(\frac{\kappa}{8\alpha_3} \right) T_{00}^{(h)}, \quad (\text{A.10})$$

$$-3l^2 \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \left(\frac{\kappa}{8\alpha_3} \right) T_{11}^{(h)}, \quad (\text{A.11})$$

$$3l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left[(g-f) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{g} \right] = 0. \quad (\text{A.12})$$

Considerando ahora la definición de las constantes de sec. 3.1

$$\kappa_5 = \frac{\kappa}{8\alpha_3}, \quad \alpha = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \quad (\text{A.13})$$

las ecuaciones (A.8)-(A.12) toman la forma

$$6 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) - \alpha \left[3l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 \right] = \kappa_5 T_{00}, \quad (\text{A.14})$$

$$-8 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] + \alpha \left[3l^2 \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] = \kappa_5 T_{11}, \quad (\text{A.15})$$

$$3l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = \kappa_5 T_{00}^{(h)}, \quad (\text{A.16})$$

$$-3l^2 \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \kappa_5 T_{11}^{(h)}, \quad (\text{A.17})$$

$$3l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left[(g-f) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{g} \right] = 0. \quad (\text{A.18})$$

Reemplazando ahora (A.16) en el paréntesis cuadrado de (A.14), y (A.17) en el paréntesis cuadrado de (A.15), y pasando esos términos al lado derecho de las ecuaciones, obtenemos

$$6 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \kappa_5 T_{00} + \kappa_5 \alpha T_{00}^{(h)}, \quad (\text{A.19})$$

$$-8 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] = \kappa_5 T_{11} + \alpha \kappa_5 T_{11}^{(h)}, \quad (\text{A.20})$$

$$3l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = \kappa_5 T_{00}^{(h)}, \quad (\text{A.21})$$

$$-3l^2 \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \kappa_5 T_{11}^{(h)}, \quad (\text{A.22})$$

$$\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left[(g-f) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{g} \right] = 0. \quad (\text{A.23})$$

Acomodando los signos en (A.20) y (A.22), y agrupando términos en (A.19) y (A.20), tenemos

$$6 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \kappa_5 \left(T_{00} + \alpha T_{00}^{(h)} \right), \quad (\text{A.24})$$

$$8 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] = -\kappa_5 \left(T_{11} + \alpha T_{11}^{(h)} \right), \quad (\text{A.25})$$

$$3l^2 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = \kappa_5 T_{00}^{(h)}, \quad (\text{A.26})$$

$$3l^2 \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = -\kappa_5 T_{11}^{(h)}, \quad (\text{A.27})$$

$$\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left[(g-f) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{g} \right] = 0. \quad (\text{A.28})$$

En la sec. 4.1 consideramos un tensor de energía-momentum con la forma

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \alpha T_{\mu\nu}^{(h)} \quad (\text{A.29})$$

$$= \text{diag}(\rho, p, p, p, p) + \alpha \text{diag}(\rho^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}) \quad (\text{A.30})$$

$$= \text{diag}(\rho + \alpha\rho^{(h)}, p + \alpha p^{(h)}, p + \alpha p^{(h)}, p + \alpha p^{(h)}, p + \alpha p^{(h)}) \quad (\text{A.31})$$

$$= \text{diag}(\tilde{\rho}, \tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p}, \tilde{p}) \quad (\text{A.32})$$

donde

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p, p) \quad (\text{A.33})$$

$$T_{\mu\nu}^{(h)} = \text{diag}(\rho^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}, p^{(h)}). \quad (\text{A.34})$$

Escribiendo las funciones f y g como

$$f = h(0), \quad g = h, \quad (\text{A.35})$$

encontramos que las ecuaciones (A.24)-(A.28) toman la forma

$$6 \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = \kappa_5 \tilde{\rho}, \quad (\text{A.36})$$

$$3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \right] = -\kappa_5 \tilde{p}, \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{3l^2}{\kappa_5} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right)^2 = \rho^{(h)}, \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{3l^2}{\kappa_5} \frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) = -p^{(h)}, \quad (\text{A.39})$$

$$\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) \left[(h - h(0)) \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\varphi} \right] = 0. \quad (\text{A.40})$$

Que corresponden a las ecuaciones (4.9)-(4.13).

Apéndice B

Posibles elecciones de $f(\phi)$ y $g(\phi)$. Constantes A , B , C y E

En la subsección 4.2 se definió las *constantes* A , B , C y E como (6.28)-(6.31), cuyo valor dependería de la elección (arbitraria) que se hiciera de las funciones $f(\phi)$ y $g(\phi)$. Las integrales involucradas deben ser convergentes y, notando que trabajamos con una variedad *cilíndrica*, hay que ser cuidadoso con la continuidad y diferenciabilidad. En esta sección consideraremos algunas elecciones, que nos permitirán obtener resultados consistentes con la Relatividad General. Los casos aquí presentados son ilustrativos, y no hay que cerrarse a la posibilidad de encontrar una elección mejor.

Elección 1: $f(\phi) = cte.$ Con $f(\phi) = cte.$ se recobra la acción de Einstein-Hilbert 4-dimensional, ya que B , C , y E se anulan. En particular, con $f = 0$, A toma el valor $4\pi r_c \alpha_3$. Escogiendo $\alpha_3 = 1/4\pi r_c$, la acción (6.27) se transforma en

$$\tilde{S}_B = \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \tilde{R}^{mn} \tilde{\epsilon}^p \tilde{\epsilon}^q. \quad (\text{B.1})$$

En este caso, el elemento de línea (6.5) toma la forma

$$ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu + r_c^2 d\phi^2, \quad (\text{B.2})$$

que describe una compactificación tipo Kaluza-Klein de las más simples. Notar que aquí no es necesario dar $g(\phi)$, ya que $C = E = 0$.

Elección 2: $f(\phi) = \ln(\beta + \sin \phi)$. Primero escogeremos la función $f(\phi)$, después $g(\phi)$. En este caso consideraremos

$$f(\phi) = \ln(\beta + \sin \phi), \quad 1 < \beta = cte. \quad (\text{B.3})$$

A partir de (B.3) se obtiene

$$e^f = \beta + \sin \phi \quad (\text{B.4})$$

$$f' = \frac{\cos \phi}{\beta + \sin \phi} \quad (\text{B.5})$$

$$f'' = -\frac{1 + \beta \sin \phi}{(\beta + \sin \phi)^2}. \quad (\text{B.6})$$

Notar que todas estas funciones están bien definidas $0 \leq \phi < 2\pi$, y que $f(0) = f(2\pi)$, $f'(0) = f'(2\pi)$ y $f''(0) = f''(2\pi)$, de modo que no hay problemas con la continuidad y diferenciabilidad.

Reemplazando (B.4), (B.5) y (B.6) en (6.28) y (6.29), e integrando (con la calculadora de integrales online de *Mathematica*, ref. [76]), se obtiene las constantes:

$$A = \frac{2\pi}{r_c} [\alpha_3 r_c^2 (2\beta^2 + 1) + \alpha_1 l^2] \quad (\text{B.7})$$

$$B = \frac{\pi}{2r_c} \left[\alpha_3 (4\beta^2 + 1) - \frac{\alpha_1 l^2}{2r_c^2} \right]. \quad (\text{B.8})$$

Si queremos que A y B representen las constantes de la Relatividad General hacemos

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \\ \frac{2\pi}{r_c} [\alpha_3 r_c^2 (2\beta^2 + 1) + \alpha_1 l^2] &= -\frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\Lambda}{12} \\ \frac{\pi}{2r_c} \left[\alpha_3 (4\beta^2 + 1) - \frac{\alpha_1 l^2}{2r_c^2} \right] &= \frac{\Lambda}{12}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

donde Λ es la constante cosmológica. Despejando α_1 y α_3 de (B.9) y (B.10) se encuentra:

$$\alpha_1 = -\frac{r_c}{4\pi l^2} \left[1 + \frac{(4r_c^2 \Lambda - 3)(2\beta^2 + 1)}{3(10\beta^2 + 3)} \right] \quad (\text{B.11})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{12\pi r_c} \frac{(4r_c^2 \Lambda - 3)}{(10\beta^2 + 3)}. \quad (\text{B.12})$$

Ya tenemos las constantes $A = -1/2$ y $B = \Lambda/12$, y nos falta C y E . Para encontrarlas debemos introducir una función $g(\phi)$.

En el caso que $g(\phi) = cte.$ se recobra la Relatividad General 4-dimensional con constante cosmológica, ya que C y E se anulan. En particular, con $g = 0$ se

obtiene:

$$C = -\frac{4\alpha_3 l^2}{r_c} \cos \phi \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$E = \frac{4\alpha_3 l^2}{r_c^3} \cos^3 \phi \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad (\text{B.14})$$

De modo que la acción (6.27) toma la forma

$$\tilde{S}_B = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left(\tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q - \frac{\Lambda}{6} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right).$$

Otra posible elección para $g(\phi)$ es

$$g(\phi) = f(\phi) = \ln(\beta + \sin \phi), \quad 1 < \beta = \text{cte}. \quad (\text{B.15})$$

Al reemplazar (B.4), (B.5), (B.6) y (B.15) en (6.30) y (6.31), e integrando, se obtiene:

$$C = -4r_c^2 E = \frac{4\pi\alpha_3 l^2}{r_c} \quad (\text{B.16})$$

Y usando (B.12):

$$C = -4r_c^2 E = \frac{l^2}{3r_c^2} \frac{(4r_c^2 \Lambda - 3)}{(10\beta^2 + 3)}. \quad (\text{B.17})$$

De acuerdo a esto, tenemos la acción efectiva para la brana

$$\tilde{S}_B[\tilde{e}, \tilde{h}] = \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left(-\frac{1}{2} \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q + \frac{\Lambda}{12} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q + C \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{h}^q - \frac{C}{4r_c^2} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{h}^q \right), \quad (\text{B.18})$$

donde Λ es una constante arbitraria y C una constante dada por (B.17) (C también podría considerarse como arbitraria debido a la libertad que tenemos para escoger los parámetros l , r_c y β).

Notar que si $l \rightarrow 0$, entonces: i) $C \rightarrow 0$, y ii) las constantes A y B se comportan de manera adecuada, como lo muestran (B.7) y (B.8). De modo que, en ese límite se recupera la Relatividad General 4-dimensional con constante cosmológica:

$$\tilde{S}_B \Big|_{l \rightarrow 0}[\tilde{e}, \tilde{h}] = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_4} \tilde{\epsilon}_{mnpq} \left(\tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q - \frac{\Lambda}{6} \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q \right). \quad (\text{B.19})$$

Otra manera de recobrar la Relatividad General es con $\Lambda = 3/4r_c^2$, en cuyo caso $C = 0$. Lo bueno de esto es que la constante cosmológica fija un valor para el radio de compactificación r_c .

Apéndice C

Acción para una brana en la teoría de [72]

En [72] se construye un lagrangiano bastante parecido al que nosotros hemos considerado. La principal diferencia está en el término de Gauss-Bonnet; otra diferencia está en el parámetro l^2 . A continuación revisaremos brevemente como acomodar los resultados que hemos obtenido para la gravedad de Einstein-Chern-Simons a la acción de dicho trabajo.

El lagrangiano de Einstein-Chern-Simons fue dado en (6.1):

$$L_{ChS}^{(5)} = \alpha_1 l^2 \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \varepsilon_{abcde} \left(\frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + 2l^2 k^{ab} R^{cd} T^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right). \quad (C.1)$$

Haciendo $\alpha_1 = 0$ y $l^2 = \alpha_3 = 1$ se tiene

$$L_{ChS}^{(5)} = \varepsilon_{abcde} \left(\frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + 2k^{ab} R^{cd} T^e + R^{ab} R^{cd} h^e \right). \quad (C.2)$$

Que es el lagrangiano de [72]. Es claro que si repetimos los procedimientos de la parte III, ahora partiendo de (C.2), obtendremos una acción con la forma de (6.27):

$$S_B[\tilde{e}, \tilde{h}] = \int_{\Sigma_4} \tilde{\varepsilon}_{mnpq} \left(A \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{e}^q + B \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{e}^q + C \tilde{R}^{mn} \tilde{e}^p \tilde{h}^q + E \tilde{e}^m \tilde{e}^n \tilde{e}^p \tilde{h}^q \right). \quad (C.3)$$

La diferencia es que para esta teoría las *constantes* A , B , C y E vienen dadas por:

$$A = 2r_c \int_0^{2\pi} d\phi e^{2f} \quad (C.4)$$

$$B = -\frac{2}{3r_c} \int_0^{2\pi} d\phi e^{4f} (5f'^2 + 2f'') \quad (C.5)$$

$$C = -\frac{4}{r_c} \int_0^{2\pi} d\phi e^f e^g (f'^2 + f'') \quad (\text{C.6})$$

$$E = \frac{4}{r_c^3} \int_0^{2\pi} d\phi e^{3f} e^g f'^2 (f'^2 + f''). \quad (\text{C.7})$$

Para obtenerlas basta con hacer $\alpha_1 = 0$ y $l^2 = \alpha_3 = 1$ en (6.28)-(6.31).

Elección 1. En el caso que se escoja $f(\phi) = cte$; B , C y E se anulan, de modo que solo sobrevive el término de Einstein-Hilbert.

Elección 2. En caso que $f(\phi) = g(\phi) = \ln(\beta + \sin \phi)$, con $1 < \beta = cte$. (como en el apéndice B), tendremos:

$$A = 2\pi r_c (2\beta^2 + 1) \quad B = \frac{\pi}{2r_c} (4\beta^2 + 1) \quad C = -4r_c^2 E = \frac{4\pi}{r_c} \quad (\text{C.8})$$

Para hacer contacto con la Relatividad General hacemos $A = 1/2$ y $B = -\Lambda/12$. Notando que $\beta^2 > 1$ y que $r_c > 0$, llegamos a las siguientes conclusiones:

$$0 < r_c = \frac{1}{4\pi(2\beta^2 + 1)} < \frac{1}{12\pi} \quad (\text{C.9})$$

$$-\infty < \Lambda = -24\pi^2 (4\beta^2 + 1) (2\beta^2 + 1) < -360\pi^2 \quad (\text{C.10})$$

$$48\pi^2 < C = 16\pi^2 (2\beta^2 + 1) < \infty \quad (\text{C.11})$$

$$-\infty < E = 64\pi^4 (2\beta^2 + 1)^3 < -1728\pi^4 \quad (\text{C.12})$$

Vemos entonces que aquí las constantes están más restringidas que en la teoría de Einstein-Chern-Simons. Salvo por esta diferencia, todo lo demás queda igual: están los mismos términos en la acción, se obtiene las mismas ecuaciones de movimiento, etc.

Bibliografía

- [1] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & Sons, 1972.
- [2] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and company, 1973.
- [3] Øyvind Grøn, Sigbjørn Hervik. *Einstein's General Theory of Relativity*. Springer, 2007.
- [4] C. Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2004.
- [5] John Baez, Javier P. Muniain. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific, 1994.
- [6] P. Salgado. *Introducción a la (super)gravedad de Chern-Simons*.
- [7] Jorge Zanelli. *Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities*. ArXiv:hep-th/0502193.
- [8] F. Izaurieta, P. Minning, A. Pérez, E. Rodríguez, P. Salgado. Phys. Lett. B 678 (2009) 213.
- [9] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [10] Tony Rothman, Stephen Boughn. Found. Phys. vol. 36, no. 12, pp. 1801-1825, 2006.
- [11] J.N. Islam, *An Introduction to Mathematical Cosmology*. Second Edition. Cambridge University Press, 2001.
- [12] P. Coles, F. Lucchin. *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. John Wiley & Sons, 1996.
- [13] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [14] J.V. Narlikar. *An Introduction to Cosmology*. Cambridge University Press, 2002.
- [15] D. Atkatz. Am. J. Phys. 62 (7), July 1994.

- [16] J.J. Halliwell. *Introductory lectures on quantum cosmology* (dentro del libro *Quantum Cosmology and Baby Universes*), World Scientific, 1991.
- [17] J. B. Hartle. *The quantum mechanics of cosmology* (dentro del libro *Quantum Cosmology and Baby Universes*), World Scientific, 1991.
- [18] J. B. Hartle. *Predictions and observation in quantum cosmology* (dentro del libro *Gravitation in Astrophysics*), Plenum, New York, 1986.
- [19] S. Perlmutter et al. *Nature* 391, 51-54 (1 January 1998).
- [20] A. Riess et al. *Astron. J.* 116 (1998) 1009.
- [21] D.N. Spergel et al. *Astrophys. J.* 170 (2007) 377.
- [22] A. Guth. *Phys. Rev. D* 23, 347–356 (1981).
- [23] *The BICEP2 Collaboration*. *Phys. Rev. Lett.* 112, 241101, 2014.
- [24] F. Gómez, P. Minning, P. Salgado, *Phys. Rev. D* 84, 063506 (2011).
- [25] Mauricio Cataldo, Juan Crisóstomo, Sergio del Campo, Fernando Gómez, Cristian C. Quinzacara, Patricio Salgado. *Eur. Phys. J. C* (2014) 74: 3087.
- [26] F. Gómez, P. Salgado, ¿alguien más? *Acción para un brana en la gravedad de Einstein-Chern-Simons y soluciones cosmológicas aceleradas*.
- [27] C.A.C Quinzacara, P. Salgado. *Phys.Rev. D*85 (2012). 124026 arXiv:1401.1797 [gr-qc].
- [28] J. Crisóstomo, F. Gómez, C. Quinzacara, P. Salgado. *Static Solutions in Einstein-Chern-Simons Gravity* (enviado a *Eur. Phys. J. C*; 2015).
- [29] P. Salgado. *Apuntes de Relatividad General*.
- [30] Andrei Linde. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. ArXiv:hep-th/0503203, 2005.
- [31] Andrew Liddle. *The Cosmological Constant and its Interpretation* (dentro de libro *Encyclopedia of Astronomy & Astrophysics*. P. Murdin). IOP Publishing Ltd 2006.
- [32] Sean M. Carroll. *The Cosmological Constant*. *Living Rev. Relativity*, 4, (2001), 1.
- [33] Roy Maartens, Kazuya Koyama. *Brane-World Gravity*. arXiv:1004.3962 [hep-th].
- [34] Salvatore Capozziello, Valerio Faraoni. *Beyond Einstein Gravity. A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*. Springer, 2011.
- [35] David Lovelock, Hanno Rund. *Tensors, Differential Forms and Variational Principles*. Dover Publications, inc; New York (1989).

- [36] A. Palatini. *Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton*. Rend. Circ. Mat. Palermo 43, 203-212 (1919).
- [37] R.Hojman, C. Mukku. Traducción de A. Palatini. *Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton* (dentro del libro de P.G. Bergmann and V. De Sabbata *Cosmology and Gravitation*). Plenum Press, New York (1980).
- [38] J. Crisostomo. Apunte *Formulación lagrangiana de la Relatividad General*.
- [39] D. Lovelock. J.Math.Phys. 12 (1971) 498-501.
- [40] K. Andrew, B. Bolen, C. Middleton, Gen. Rel. & Grav. 39 (2007) 2061.
- [41] N. Mohammadi, Phys. Rev. D 65 (2002) 104018.
- [42] Lisa Randall, Raman Sundrum. Phys. Rev. Lett. 83 (17), (1999) pp. 3370–3373.
- [43] B. S. DeWitt. Phys. Rev. 160, 1113-1148 (1967)
- [44] J. A. Wheeler. *Superspace and the nature of quantum geometrodynamics* (Benjamin, New York, 1968).
- [45] Hanson, Regge, Teitelboim. *Constrained Hamiltonian Systems*, Accademia Nazionale dei Lincei (1976).
- [46] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner. Phys. Rev. 117, 1595–1602 (1960).
- [47] H. Goldstein, C. P. Poole, J. L. Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 3 edition (2001).
- [48] J. B. Hartle, S. W. Hawking. Phys. Rev. D 28, 2960-2974 (1983).
- [49] J. V. Narlikar, T. Padmanabhan. Astronomical Society of India, Bulletin, vol. 11, Dec. 1983, p. 297-302.
- [50] K. V. Kuchar, M. P. Ryan. *Can minisuperspace quantization be justified?*, (dentro de *Gravitational colapse and relativity*), World Scientific (1986).
- [51] K. V. Kuchar, M. P. Ryan. Phys. Rev. D 40, 3982–3996 (1989).
- [52] J. A. Wheeler. *Geometrodynamics*. Academic, New York, 1962.
- [53] A. Vilenkin. Phys. Rev. D 33, 3560-3569 (1986).
- [54] M. Razavy. *Quantum Theory of Tunneling*, World Scientific, 1st edition (2003).
- [55] G. W. Gibbons, L. P. Grishchuk. Nucl. Phys. B, 313, 736-748 (1989).
- [56] H. Everett, Rev. Mod. Phys. 29, 454-462 (1957).

- [57] M. Gell-Mann, J. B. Hartle. *Quantum mechanics in the light of quantum cosmology*, (dentro de *Complexity, Entropy and the physics of information*) Addison-Wesley, Reading, 1990, vol III.
- [58] J.J. Halliwell. Phys. Rev. D 36, 3626-3640 (1987).
- [59] L.H. Ford, Phys. Rev. D35, 2955 (1987).
- [60] N.D. Birrell and P.C.W. Davis. *Quantum fields in curved spacetime*. Cambridge University Press (1982).
- [61] M. B. Green, J. H. Schwarz, E.Witten. *Superstring Theory*. Cambridge University Press (1987).
- [62] A. Mardones and J. Zanelli. Class. and Quantum Grav. 8, 1545-1558 (1991).
- [63] Valery Rubakov. *Classical Theory of Gauge Fields*. Princeton University Press, 2002.
- [64] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Taylor and Francis 2003.
- [65] R. Gilmore. *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*. NY: Wiley, 1974.
- [66] R. Troncoso, J. Zanelli. Class. & Quant. Grav. 17 (2000) 4451.
- [67] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, Jour. Math. Phys. 47 (2006) 123512.
- [68] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, M. Picón, O. Varela. Nucl. Phys. B662, 185 (2003). [arXiv:hep-th/0212347].
- [69] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, Lett. Math. Phys. 80 (2007) 127.
- [70] C.A.C Quinzacara, P. Salgado. Eur.Phys.J. C73 (2013) 6, 2479.
- [71] S. del Campo, JCAP, 1212 (2012) 005.
- [72] José D. Edelstein, Mokhtar Hassaïne, Ricardo Troncoso, Jorge Zanelli; Phys. Lett. B 640 (2006) 278–284.
- [73] F. Lucchin, S. Matarrese, M.D. Pollock; Phys. Lett. B 167 (1986) 163–168..
- [74] Lewis Ryder; *Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press (2009).
- [75] S. Carloni et al; 2008 Class. Quantum Grav. 25 035008.
- [76] <http://integrals.wolfram.com/index.jsp>
- [77] Ingunn Kathrine Wehus and Finn Ravndal; Journal of Physics: Conference Series 66 (2007) 012024.
- [78] Sean Carroll; arXiv:gr-qc/9712019.

- [79] Alberto A. García, Alberto García-Quiroz, Mauricio Cataldo, Sergio del Campo; Phys. Rev. D 69, 041302(R) (2004).
- [80] L.N. Granda; Revista Colombiana de Física, Vol. 42, No. 2 de 2010.
- [81] F. Izaurieta, A. Perez, E. Rodriguez and P. Salgado, J. Math. Phys. 50 (2009) 073511.
- [82] G. Dotti, J. Oliva and R. Troncoso, Phys. Rev. D 76 (2007) 064038.
- [83] J. Oliva, J. Math. Phys. 54, (2013) 042501.
- [84] F. Gomez, P. Minning and P. Salgado, Phys. Rev. D 84 (2011) 063506 .
- [85] M. Cataldo, J. Crisóstomo, S. del Campo, F. Gómez, C. Quinzacara and P. Salgado, Eur. Phys. J. C (2014) 74:3087.
- [86] B. Khamesra, V. Suneeta, Phys. Rev. D 90 (2014) 024044.
- [87] P. S. Letelier, Phys. Rev. D 22 (1980) 807.
- [88] P. S. Letelier, P. S. C. Alencar, Phys. Rev. D 34 (1986) 343.
- [89] L. Herrera, N. Santos, Phys. Rep. 286 (1997) 53.

