



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
MAGÍSTER EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DE DINÁMICA POST-NEWTONIANA Y EMISIÓN DE ONDAS GRAVITACIONALES

Profesor Guía: Dr. Guillermo Francisco Rubilar Alegría
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Tesis presentada a la Dirección de Postgrado de la Universidad
de Concepción para optar al grado académico de Magíster en
Ciencias con Mención en Física

NATALY NICOLE IBARRA VERA
CONCEPCIÓN - CHILE 2016

Profesor Guía : Dr. Guillermo Rubilar.

Comisión : Dr. Guillermo Rubilar.
Dra. Paulina Assmann.
Dr. Jaime Araneda.



“Ladies and Gentleman, we ... have detected... gravitational waves!... we did it!”
(Señoras y Señores, hemos... detectado... ondas gravitacionales!..., lo hicimos!)

David Reitze, Director Ejecutivo del proyecto LIGO¹.
11 de febrero de 2016²



Dedicada a mi familia.

¹<http://www.ligo.org/>

²En el anuncio de la primera detección directa de Ondas Gravitacionales.

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido	v
Índice de Tablas	vii
Índice de Ilustraciones	x
Resumen	xi
Abstract	xiii
Agradecimientos	xv
1. Introducción	1
1.1. Nociones sobre Relatividad General	1
1.2. Ondas gravitacionales	2
1.3. Cúmulos Globulares	4
2. Ondas Gravitacionales y su detección	9
2.1. Teoría de RG linealizada	9
2.1.1. Gauge de Lorenz	11
2.1.2. Gauge Transversal sin traza	11
2.1.3. Ondas gravitacionales planas: dos polarizaciones	12
2.1.4. Transformación al gauge TT	12
2.1.5. Generación de ondas gravitacionales	13
2.1.6. Ondas gravitacionales emitidas por un sistema binario con órbitas keplerianas	13
2.1.7. Energía y momentum angular radiado	14
2.1.8. Lo que radía el sistema binario y la primera evidencia indirecta	14
2.1.9. Ecuaciones de Peters-Mathews	15
2.2. Ondas Gravitacionales y su detección	16
2.2.1. Perfiles de Polarización	16
2.2.2. Detección	17
2.2.3. Interferómetro	18
3. Cuerpos extendidos en Relatividad General	21
3.1. Expansión Multipolar de Cuerpos extendidos en RG	22
3.1.1. Formulación de Papapetrou (1951)	22
3.1.2. Diferentes Formulaciones	26
3.1.3. Partículas de prueba en la métrica de Schwarzschild	27
3.1.4. Ejemplo	28
3.2. Dinámica Postnewtoniana	29
3.2.1. Sistema autogravitante de N masas	29
3.2.2. Geometría del espaciotiempo a cuarto orden en $\epsilon \sim \sqrt{G}$	31
3.2.3. Tensor energía-momentum de un Fluido Perfecto	35

3.2.4.	Tensor energía-momentum de un sistema de N masas “puntuales”	36
3.2.5.	Imposición de gauges	37
3.2.6.	Imponiendo el gauge estándar	38
3.2.7.	Solucionando las ecuaciones de Einstein	39
3.2.8.	Aplicaciones de las aproximaciones postnewtonianas	42
3.2.9.	Principio de Acción	47
3.3.	Sistema Binario	48
3.3.1.	Ecuaciones de movimiento	48
3.3.2.	Lagrangeano	48
3.3.3.	Cantidades conservadas	48
3.3.4.	Centro de energía del sistema	49
3.3.5.	Ecuación de movimiento relativa	50
3.4.	Dinámica Postnewtoniana a orden 2.5PN incluyendo efectos de Spin	51
4.	Análisis Espectral	57
4.1.	Transformada de Fourier continua	57
4.1.1.	Teorema de Convolución	57
4.2.	Serie de Fourier	59
4.3.	Transformada de Fourier discreta	60
4.3.1.	Teorema de Nyquist-Shanon	61
4.3.2.	Ejemplo: Fuga Espectral	61
4.3.3.	Ejemplo: Funciones ventana	63
4.4.	Análisis de ondas gravitacionales	64
4.4.1.	“Strain” Característico	66
4.4.2.	Densidad Espectral de Potencia	66
4.4.3.	Amplitud de Densidad Espectral	66
4.4.4.	Densidad Espectral de Energía	66
5.	Simulaciones	67
5.1.	Adimensionalización	67
5.2.	Resolución de ecuaciones de movimiento y de precesión	67
5.2.1.	Ejemplo: sistema binario de masas iguales y sin spin	67
5.3.	Ondas Gravitacionales emitidas desde el Cúmulo Globular NGC 6266	69
5.3.1.	Modelando NGC 6266 con NB6++GPU/PN	69
5.3.2.	Condiciones iniciales	71
5.3.3.	Escalando nuestro modelo a NGC 6266	71
5.4.	Ondas gravitacionales emitidas desde NGC 6266	72
5.4.1.	Par P1	74
5.4.2.	Par P2	74
6.	Conclusiones y Proyecciones	83
A.	Notación y Convenciones	87
A.1.	Constantes y unidades	87
A.2.	Identidades	87
A.3.	Índices, signatura métrica y definiciones	88
B.	Leyes de Kepler	91
C.	Dos masas autogravitantes en el contexto newtoniano	93
	Bibliografía	101

Índice de Tablas

1.1. Parámetros estructurales observados de NGC 6266.	6
3.1. Terminología de órdenes de correcciones postnewtonianas.	52
5.1. Condiciones iniciales de nuestro modelo.	71
A.1. Valores de constantes Físicas en el SI.	87





Índice de Ilustraciones

1.1. Distribución de cúmulos globulares en la Vía Láctea.	4
1.2. Fotografía de NGC 6266 tomada por el telescopio espacial Hubble.	5
2.1. Retraso acumulado del periastro del púlsar binario de Hulse y Taylor PRS B1913 + 16.	15
2.2. Vectores arbitrarios de Polarización.	17
2.3. Esquema de detección.	17
2.4. Esquema de un detector interferométrico de ondas gravitacionales.	18
2.5. Onda gravitacional incidiendo en un detector interferométrico con los brazos a lo largo de los ejes x e y	19
3.1. Esquema de corrimiento del Perihelio (o afelio) de Mercurio.	21
3.2. Esquema representativo de la abstracción realizada al considerar la Expansión Multipolar.	23
3.3. Arbitrariedad en la elección de la línea de mundo del cuerpo.	24
3.4. Trayectoria de partícula de prueba en campo de Schwarzschild cuando no se considera su rotación interna.	29
3.5. Trayectoria de partícula de prueba en campo de Schwarzschild cuando sí se considera su rotación interna.	30
4.1. Gráfico de distribución gaussiana y su transformada de Fourier.	58
4.2. Gráfico de $h_1(t)$ y su transformada de Fourier $\tilde{h}_1(f)$	58
4.3. Gráfico de $h_2(t)$ y su transformada de Fourier $\tilde{h}_2(f)$	59
4.4. Gráfico de $h_3(t)$ y su transformada de Fourier $\tilde{h}_3(f)$	59
4.5. Gráfico de $h_4(t)$ y su extensión periódica.	61
4.6. Gráfico de la señal $h_4(t)$ muestreada y su DFT $\tilde{h}_4(f)$	62
4.7. Gráficos de la diferencia porcentual entre las soluciones numéricas y la analítica.	62
4.8. Extensión periódica y sampleada de $h_5(t)$, junto a su DFT $\tilde{h}_5(f)$	63
4.9. Gráfico con funciones ventanas típicas.	64
4.10. Gráficos de $h_4(t)$ “ventaneada” y sus transformadas de Fourier respectivas.	64
4.11. Curvas de sensibilidad de detectores de ondas gravitacionales y posibles fuentes.	65
5.1. Trayectorias postnewtonianas a distintos órdenes.	68
5.2. Comparación entre las distintas contribuciones a distintos órdenes en la energía.	69
5.3. Comparación entre las distintas contribuciones a distintos órdenes en el momentum angular.	70
5.4. Fases del proceso completo requerido para el computo de las ondas gravitacionales.	70
5.5. Número de agujeros negros en la simulación con spin 1 versus el tiempo de evolución.	72
5.6. Histograma del número de mergers en las simulaciones versus el tiempo de evolución.	73
5.7. Elección de la dirección de los brazos del interferómetro, cuando $\hat{n} = \hat{n}_3$	74
5.8. Esquema del proceso completo de calcular las ondas gravitacionales y su análisis espectral respectivo.	75
5.9. Señal de onda gravitacional emitida por la binaria P1 en la dirección \hat{n}_1	76
5.10. Señal de onda gravitacional emitida por la binaria P1 en la dirección \hat{n}_2	77
5.11. Strain de la onda gravitacional emitida por la binaria P1 en la dirección \hat{n}_1	77
5.12. Strain de onda gravitacional emitida por la binaria P1 en la dirección \hat{n}_2	78
5.13. Espectrograma (Strain) de onda gravitacional emitida por la binaria P1 en la dirección \hat{n}_1	78

5.14. Espectrograma (Strain) de onda gravitacional emitida por la binaria P1 en la dirección \hat{n}_2 .	79
5.15. Señal de onda gravitacional emitida por la binaria P2 en la dirección \hat{n}_2 .	79
5.16. Señal de onda gravitacional emitida por la binaria P2 en la dirección \hat{n}_3 .	80
5.17. Strain de onda gravitacional emitida por la binaria P2 en la dirección \hat{n}_2 .	80
5.18. Strain de onda gravitacional emitida por la binaria P2 en la dirección \hat{n}_3 .	81
5.19. Espectrograma (Strain) de onda gravitacional emitida por la binaria P2 en la dirección \hat{n}_2 .	81
5.20. Espectrograma (Strain) de onda gravitacional emitida por la binaria P2 en la dirección \hat{n}_3 .	82
B.1. Esquema de las dos primeras Leyes de Kepler con 2 planetas orbitando en torno al Sol.	91
C.1. Ley de Gravitación Universal de Newton.	93
C.2. Ley de Gravitación Universal de Newton en términos de la coordenada relativa.	94
C.3. Potencial newtoniano efectivo versus la coordenada radial.	96
C.4. Órbita elíptica evaluada apartir de la expresión analítica de la ecuación (C.38).	98
C.5. Órbita elíptica calculada apartir de la solución numérica de la ecuación (C.44).	99
C.6. Tercera ley de Kepler para planetas en el sistema solar en términos del período angular.	100



Resumen

En esta tesis se estudió la emisión de ondas gravitacionales por parte de sistemas binarios de objetos compactos (agujeros negros y/o estrellas de neutrones) en la fase de *inspiral* (previa a la fusión). Para ello, se llevó a cabo una extensa revisión bibliográfica de las teorías que sustentan el objetivo final de simular computacionalmente las ondas gravitacionales emitidas por los sistemas binarios en consideración.

Se escribió una serie de códigos en Python que resuelven, en el sistema de referencia (SR) del centro de energía de la binaria, las ecuaciones de movimiento postnewtonianas de la coordenada relativa y que calculan las ondas gravitacionales emitidas en alguna dirección determinada, donde a una cierta distancia se simula la respuesta de un detector interferométrico (en ausencia de ruido). Además del código que calcula las ondas gravitacionales y la salida del detector, se implementaron otros que calculan espectros y espectrogramas de las señales simuladas. Las cantidades espectrales de interés se definen en términos de la Transformada de Fourier de la salida del detector, y los códigos poseen la versatilidad de permitirle al usuario usar los algoritmos de la FFT o la NUFFT (ver capítulo 4), dependiendo de si dicha señal está uniformemente distribuida en el tiempo o no.

El propósito final de los códigos es tener como entrada los datos generados por simulaciones numéricas con códigos complejos para el tratamiento de N cuerpos, como por ejemplo, NBODY6++³, Amuse⁴ y otros. Para poner a prueba los códigos escritos, se realizaron experimentos numéricos de modelación del cúmulo globular NGC 6266 (M62) usando NB6++GPU/PN, incorporando correcciones postnewtonianas hasta orden 3.5 PN y términos de interacción spin-spin. De dichas simulaciones se extrajeron los datos de algunas binarias representativas, y se calculó la señal de la onda gravitacional observada por detectores a lo largo de direcciones particulares, intentando responder de esta forma, la pregunta de si las ondas gravitacionales emitidas desde NGC 6266 pueden o no ser detectadas por un detector similar a LIGO en las proximidades de la Tierra.

³Para mayor detalle consultar www.github.com/mtrenti/NBODY6/wiki.

⁴Para mayor detalle consultar www.amusecode.org.



Abstract

In this thesis I study the emission of gravitational waves by binary compact objects (black holes and/or neutron stars) in the inspiral phase (before merging). Because of that, an extensive bibliographical review of the theory that supports the final objective of computing the gravitational waves emitted by the binary systems under consideration has been carried out.

A series of Python codes have been written, which solve the postnewtonian equations of motion of the relative coordinate of the binary in the center of energy frame. The code also computes the gravitational waves emitted by them along some determined direction, where at a certain distance the response of an interferometric detector (in the absence of noise) has been simulated. Besides the code that computes the gravitational wave amplitudes and the output of the detector, I have written other codes which compute spectra and spectrograms of the simulated signals. The spectral quantities of interest are defined in terms of the Fourier Transform of the output of the detector, and the code has the versatility to allow the user to choose the FFT or NUFFT algorithms (see chapter 4), depending on whether the signal is uniformly distributed over time or not.

The final purpose of those codes is to process the data of the evolution generated by numerical simulations with complex codes for the treatment of N bodies interacting gravitationally; for instance, NBODY6++, Amuse and others. In order to test the codes, numerical experiments modeling the globular cluster NGC 6266 (M62) have been performed using NB6++GNU/PN, incorporating postnewtonian corrections up 3.5 PN level as well as spin-spin interaction terms. The data of representative binaries has been extracted from these simulations and the gravitational wave signal observed by detectors along particular directions has been calculated, trying to answer the question of whether the gravitational waves emitted from NGC 6266 may be detectable by a detector like LIGO in the proximity of the Earth.



AGRADECIMIENTOS

La caminata ha sido larga y alborotada, pero ya llega a su fin...

Nataly Nicole Ibarra Vera⁵

$x \in$ [diciembre de 2016, enero de 2017]⁶

Comenzar con estas líneas de agradecimientos es un acto que me embarga de tanta alegría y nostalgia, alegría por al fin cerrar un ciclo importante de mi vida y nostalgia por todos esos buenos y malos momentos que han moldeado y condicionado la persona que soy hoy, una mujer de 25 años, quién temerosamente entre frecuentes confusiones y dilemas con su interior, ha descubierto en sí misma, cuáles son las motivaciones que la animan a levantarse a diario de su cama y no rendirse ante la adversidad. Bajo la premisa de haber decidido vivir desconociendo lo que quiero o no en la vida, pero sí teniendo claro el cómo y junto a quienes lo quiero, me encuentro en una diaria búsqueda de quehaceres que satisfagan dichas motivaciones.

Son tantas las personas que me han acompañado y asistido en este cuarto de vida, quienes de una u otra forma, brindándome sabios consejos han influenciado de una u otra forma mis decisiones.

En primer lugar quisiera agradecer a cada uno de los integrantes de mi familia, por su paciencia en la crianza y especialmente durante los años de estudio universitario, quienes han debido bancarse mis mañanas y mis ausencias a eventos familiares, ya sea por estar estudiando o bien por estar descansando de tanto estudiar. Son ellos la gran motivación que me ha ayudado a combatir el abatimiento en los momentos difíciles de mi formación educacional. Es a ellos a quienes les dedico esta tesis, especialmente a quienes durante el proceso ya han partido, como son la Olguita, mi abuela Olga y mi tío Pelao, quienes de haber estado aún aquí, tengo la confianza, habrían estado orgullosísimos de mis logros académicos y personales.

Particularmente quisiera agradecer a mi ratona grande, mi querida prima Delia Paz, quién pese a la evidente diferencia de edad conmigo, ha sido parte importante de mi vida en estos años de Postgrado. Es ella quién con su juventud e inocencia, constantemente me recuerda que aún existe la bondad en los seres humanos y quién de paso renueva mi esperanza de algún día vivir en un mundo mejor.

En mi paso por el Departamento de Física, son varias las personas que han dejado una huella imborrable en mi memoria, ya sea por su forma de concebir la vida y la ciencia o por la particular manera de presentar y exponer sus ideas. Todos los profesores con quienes tuve la oportunidad de tomar asignaturas contribuyeron con su granito de arena a los cimientos de mi formación como científica. Entre los que sin lugar a dudas destacan por haber marcado un antes y un después de haberlos conocido, están los doctores Joaquin Diaz de Valdes, Jaime Araneda, Juan Crisóstomo, Guillermo Rubilar y Fernando Izaurieta (en orden de aparición y no favoritismo).

Quisiera poder agradecer a todos y cada uno de los compañeros con quienes he tenido profundas y energéticas discusiones tanto de Física como de otros temas más mundanos. Por distraerme planteándome entrenidas preguntas, quisiera agradecer a Matías Soto y a José

⁵Nacida un primero de abril de 1991, es hija de Norma I. Vera C. y Fernando A. Ibarra M. Desde sus dos años de infancia, tiene una hermana llamada Camila F. Ibarra V. En la actualidad posee muchos primos que entre jugueteos y hacerla pasar rabias, terminan alegrando sus días.

⁶Viajando a casa mientras avanza en la escritura de su tesis.

Barrientos. Por esas (casi-)diarias conversaciones y divagaciones con las que hemos soñado y arreglado el mundo (con especial atención en el funcionamiento del Postgrado en Física), quisiera agradecer a Daniela Narbona e Ignacio Ormazábal por haberme mostrado nuevos puntos de vista al respecto. Además quisiera agradecer a mis amigos, por quienes siento especial aprecio y profunda admiración como personas y como físicos, razones por las cuales tienen un lugar especial en mi corazoncito; éstos son Felipe Portales, Alexander Smith, Jorge Moya y Fabrizio Cordonier.

No podría no agradecer también, a quienes han formado parte de este proceso en distintas formas, a todas las secretarias, la Srta. Soledad, la Sra. Paty, la Sra. Marta y recientemente la Srta. Julia, quienes me han asistido con paciencia y una sonrisa en un sin número de trámites. A los auxiliares Don Heraldo y Don Carlos, quienes entre sus quehaceres compartíamos experiencias conversando en los momentos de ocio. A José Krol por escucharme en mis visitas “a lo Doctor”, endulzar mis días y con su carisma animarme en los momentos difíciles.

Debo señalar que el desarrollo de esta tesis no habría sido posible sin el aliento y la cercana compañía de mi profesor guía; el Dr. Guillermo Rubilar o “Don Guille” como disfruto llamarlo. Fueron muchos los momentos de buenas conversaciones, de risas e intensas discusiones sobre Física como de otras cuestiones más cotidianas. Gracias por su paciencia y dedicación, por estar conmigo en esos momentos de cansancio y desaliento, por ese sabio consejo, por esas caminatas por la Universidad o esa mirada alentadora con las que logró animarme a salir adelante y llegar a este día. Gracias por haber confiado y apostado en mí para guiarme. Espero jamás defraudarlo.

Para finalizar, quisiera agradecer a mi comisión de tesis, a los doctores Paulina Assmann y Jaime Araneda, por sus valiosos aportes durante el desarrollo y escritura de la tesis. Y como sin plata no baila el monito, quisiera agradecer el financiamiento económico proporcionado por CONICYT PAI/INDUSTRIA 79090016 (Beca Magíster Nacional Conicyt-2014).



Capítulo 1

Introducción

1.1. Nociones sobre Relatividad General

La teoría de Relatividad General (RG), tal como la formuló Albert Einstein y la dio a conocer al mundo en 1915, explica los fenómenos gravitacionales como una manifestación de la curvatura del espaciotiempo. Dicha formulación emplea la notación tensorial de la geometría riemanniana, donde el campo dinámico principal es la métrica $g_{\mu\nu}$ (simétrica) del espaciotiempo, la que codifica toda la información de las propiedades geométricas del mismo. Como no es el propósito de la presente tesis profundizar en los fundamentos de la RG, nos remitiremos a mencionar que con mucha astucia Einstein (Einstein, 1916) postuló las ecuaciones de campo (sin constante cosmológica) de un determinado sistema gravitacional como

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein definido por la ec. (A.10), que es un término representativo de la curvatura del espaciotiempo, G es la constante gravitacional de Newton, c la rapidez de la luz en el vacío¹ y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momentum de la materia, que representa la fuente del campo gravitacional. De esta forma, la ecuación (1.1) nos habla de una relación entre la curvatura del espaciotiempo y la fuente de materia que curva dicho espaciotiempo.

Si se multiplica la ec. (1.1) por la inversa de la métrica $g^{\mu\nu}$, se encuentra que

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T, \quad (1.2)$$

donde T es la traza del tensor energía-momentum definida por la ec. (A.5). Reescribiendo en la ec. (1.1) el escalar de curvatura R en función de la traza del tensor energía-momentum, hallamos que

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} K_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

forma en que es usual encontrarlas también en la literatura relativista, donde hemos definiendo

$$K_{\mu\nu} := T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

Es importante mencionar que la teoría de RG de Einstein elige las componentes de la conexión simplemente como los símbolos de Christoffel de la métrica, razón por la cual el espaciotiempo no tiene torsión y además $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ (tensor de no-metricidad nula), con ∇_ρ la derivada covariante definida por los símbolos de Christoffel. Como consecuencia, el tensor de Einstein es covariantemente constante,

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (1.5)$$

¹Puede encontrar los valores de las constantes en el apéndice A.

Análogamente, por la ecuación (1.1) vemos que necesariamente el tensor energía-momentum ha de ser covariantemente constante, vale decir

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.6)$$

Además, en este contexto las partículas masivas (de prueba) se mueven por curvas geodésicas (A.14) tipo tiempo ($ds^2 > 0$) y los fotones por geodésicas tipo luz ($ds^2 = 0$).

La primera solución a las ecuaciones de Einstein y que describe el campo gravitacional fuera de un cuerpo de masa M esféricamente simétrico en reposo, fue calculada por Karl Schwarzschild (Schwarzschild, 1916). Dicha métrica, en coordenadas de curvatura, con $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi]$, tiene elemento de línea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2r_0}{r}\right) (cdt)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2r_0}{r}\right)} - r^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2], \quad (1.7)$$

donde se ha definido convenientemente $r_0 := GM/c^2$. Note que la constante $2r_0$ determina una escala característica del cuerpo, la cuál es llamada *radio de Schwarzschild*. En resumen, la solución de Schwarzschild se caracteriza por ser

- Esféricamente simétrica.
- Estática.
- Asintóticamente plana, vale decir que para $r \rightarrow \infty$ el tensor de curvatura $R^{\gamma}_{\mu\nu\alpha} \rightarrow 0$. Dicho de otra forma, para $r \rightarrow \infty$, entonces $ds^2 \rightarrow c^2dt^2 - dr^2 - r^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2]$, correspondiente a la métrica del espacio plano en las usuales coordenadas esféricas.

1.2. Ondas gravitacionales

Después de un siglo de las predicciones realizadas por Schwarzschild (1916) y Einstein (1918), dos detecciones de ondas gravitacionales emitidas desde sistemas binarios de agujeros negros en el proceso de fusión han sido reportados (Abbott *et al.*, 2016a,b). Las ondas gravitacionales (también conocidas como “radiación gravitacional”) constituyen una de las más fascinantes predicciones de la teoría de Einstein de la gravitación y que, luego de 100 años desde la creación de la teoría, comienza a brindar una nueva forma de observar nuestro Universo. Uno de los aspectos que hace su estudio tan interesante para la comunidad de Físicos es que estas ondas simplemente no existen en la antigua teoría newtoniana de la gravedad, que fue nuestro mejor modelo para la interacción gravitacional por cerca de 200 años, pero que fue reemplazada por la revolucionaria teoría de Einstein. La ley de gravitación universal de Newton requiere de un comportamiento conocido como “acción instantánea a distancia”, pues dos masas separadas incluso a una gran distancia experimentan, de acuerdo a las leyes newtonianas, una fuerza atractiva de efecto instantáneo, lo cual inquietaba incluso al propio Newton. De hecho, esta propiedad de la teoría de Newton fue una de las que motivó a Einstein a formular una nueva teoría de la gravedad, que fuese compatible con y/o generalizara su recién formulada teoría de Relatividad Especial (1905), y que postula la existencia de una velocidad máxima de toda interacción (la velocidad de la luz). Una primera forma de entender las ondas gravitacionales es como cambios en el campo gravitacional que se desplazan por el espacio (y el tiempo), y que son producidos por el movimiento de objetos masivos.

Debieron transcurrir aproximadamente 8 años desde que Einstein tuviera la (genial) idea que sería la piedra angular sobre la que se sustentaría su nueva teoría de la gravedad (el “principio de equivalencia”, en 1907) hasta obtener lo que hoy consideramos la versión final de la teoría de la RG (Einstein, 1916), hace ya 100 años. Fue él mismo, quien en Einstein (1918), al estudiar su teoría, comprobó que ésta incluía naturalmente la posibilidad de que los cambios en el campo gravitacional se propaguen a una velocidad finita. La velocidad finita de propagación de algún campo es una de las características esenciales que en Física se requieren para definir lo que llamamos una onda, una onda de gravedad en este contexto: una onda gravitacional. La situación es análoga al caso electromagnético. Recordemos que cuando James Clerk Maxwell completó (en 1865) “sus” ecuaciones, que gobiernan los fenómenos eléctricos y magnéticos, reconoció que ellas admitían soluciones ondulatorias propagantes: ondas constituidas por campos eléctricos y magnéticos oscilantes, las ondas electromagnéticas.

La teoría de RG predice que la velocidad de las perturbaciones de la geometría (es decir, del campo gravitacional), y por lo tanto de las ondas gravitacionales, es igual a la velocidad de la luz. Esto significa que, si un sistema emite simultáneamente ondas electromagnéticas y gravitacionales, éstas llegarán al mismo tiempo a una región distante (por ejemplo, a los detectores situados en la Tierra). Análogamente, podemos plantearnos la siguiente situación hipotética: ¿qué ocurriría si súbita y misteriosamente desapareciera el Sol en nuestro sistema solar? ¿Cuánto tiempo después se apreciaría el efecto de la desaparición en la órbita de cada planeta? De acuerdo a la teoría de Newton, todos los planetas del sistema (junto con todos los asteroides, cometas, y otros cuerpos que se muevan bajo la acción gravitacional del Sol) continuarían moviéndose en línea recta (hasta que sobre ellos actuase otra fuerza que los obligara a cambiar su estado de movimiento), todos simultáneamente, en el mismo instante de la desaparición del Sol (y su campo). Por otro lado, la teoría de Einstein nos dice que los planetas comenzarán a moverse en línea recta, pero luego de distintos tiempos, precisamente el tiempo que tarda en propagarse el cambio en el campo gravitacional desde el instante de la desaparición del Sol en el centro del sistema, hasta cada planeta. Así, Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno dejarán sus órbitas (aproximadamente) elípticas y continuarán en trayectorias rectilíneas luego de aproximadamente 3.1 minutos, 5.8 minutos, 8 minutos, 12 minutos, 42 minutos, 1 hora con 16 minutos, 2 horas con 34 minutos y cuatro horas, respectivamente.

La teoría de ondas gravitacionales es un exquisito tópicos de estudio que abarca diversas áreas de la Física como son la RG, la Teoría de Campos, la Astrofísica y la Cosmología. En particular, la teoría de la Relatividad General plantea ecuaciones de campo que son altamente no-lineales en las componentes de la métrica, lo que acarrea gran complejidad al momento de intentar calcular soluciones analíticas exactas de la misma. Si bien, se han hallado algunas soluciones exactas, como ocurre con los agujeros negros de Schwarzschild (Schwarzschild, 1916) y Kerr (Kerr, 1963), éste es un problema altamente no trivial y como es habitual en teorías con ecuaciones no lineales, los métodos numéricos y la teoría de perturbaciones salen en ayuda, para estudiar algunas consecuencias (de manera aproximada obviamente) que las ecuaciones puedan predecir.

Formulada la RG, al emplear la teoría de perturbaciones en las ecuaciones de campo y expandir la métrica de determinado espaciotiempo $g_{\mu\nu}$ de interés, en torno a $\bar{g}_{\mu\nu}$ (la métrica correspondiente a un *espaciotiempo de fondo*), luego de la imposición de ciertos gauges (elección de un sistema de coordenadas específico) se pueden describir las Ondas Gravitacionales de forma particularmente simple; perturbaciones del campo gravitacional que se propagan a la velocidad de la luz y con dos estados de polarización independientes. Históricamente, la discusión de lo que se entiende por “espaciotiempo de fondo” y “fluctuaciones del mismo” ha resultado altamente no trivial y se requiere un profundo estudio de las fuentes que generan el campo gravitacional de fondo y cómo las ondas gravitacionales contribuyen a la curvatura del espaciotiempo completo.

Dada la extrema debilidad de las ondas esperadas y las grandes dificultades técnicas para su detección (que literalmente están expandiendo la frontera de lo que es posible medir), se requiere más de un detector operando. Primero, para corroborar la mera detección de una señal, es decir, para descartar una falsa detección producto de perturbaciones no deseadas o mal funcionamiento de un detector. Por otro lado, se necesita una red de detectores para poder extraer el perfil de la onda detectada y para determinar la dirección desde la que ella llega a la Tierra. De esta forma, el desafío de la detección de radiación gravitacional ha impulsado un esfuerzo de colaboración global. Por otro lado, para el análisis de los datos que se espera adquirir, e incluso para la propia identificación de una señal dentro del siempre existente “ruido” que acompaña a las mediciones, es imprescindible contar con detalladas predicciones de los perfiles de ondas gravitacionales esperados a partir de distintos tipos de fuentes. Es aquí donde el desarrollo de métodos analíticos aproximados, así como de resolución numérica de las ecuaciones de Einstein se hace también necesario.

En el caso de sistemas binarios en coalescencia, formados por pares de agujeros negros, o un agujero negro y una estrella de neutrones, o bien dos estrellas de neutrones (las fuentes más prometedoras para la detección directa de las ondas gravitacionales), es posible distinguir diversas fases en lo que respecta a su evolución y a las ondas gravitacionales que emiten. Estas fases requieren que las “plantillas” predichas para las ondas gravitacionales sean modeladas con distintos métodos y luego sean empalmadas construyendo una plantilla completa de la onda gravitacional. En el proceso de “inspiral”, cuando los cuerpos se comienzan a acercar y orbitar mutuamente decayendo gravitacionalmente, son empleados

variados métodos conocidos colectivamente como *aproximación postnewtoniana* (teoría perturbativa de la RG que proporciona ecuaciones “tipo Newton” para el sistema, más correcciones relativistas). Dicha aproximación es válida hasta que las velocidades de los cuerpos aumentan tanto que se vuelven comparables con la velocidad de la luz. Pasado ese punto es indispensable recurrir a la así llamada *Relatividad Numérica* (Baumgarte *et al.*, 1963), es decir la resolución de las ecuaciones de Einstein completas, con todas sus complejidades y no-linealidades, utilizando (super-)computadores. Dicha área de estudio ha logrado significativos avances en las últimas décadas, consiguiendo realizar las primeras predicciones de las propiedades de las ondas emitidas en las últimas fases de fusión de sistemas binarios.

Pues bien, el estudio de las aproximaciones postnewtonianas está íntimamente ligado al estudio de campo gravitacional débil, que como su nombre bien lo indica, corresponde a un espaciotiempo levemente curvado, lo que nos permite pensar en una métrica plana más una pequeña perturbación que curve dicho espaciotiempo. Así, en términos de la métrica es razonable suponer que está dada por la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ (en coordenadas cuasicartesianas en la forma (A.3)) más pequeñas perturbaciones a distintos órdenes en algún parámetro adimensional $\epsilon \ll 1$ que caracterice al sistema en consideración. Bajo los razonamientos planteados se postula por tanto, una métrica general en la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} g^{(n)}_{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

donde $g^{(n)}_{\mu\nu}$ indica el orden en que cada uno de los términos de la perturbación depende del parámetro ϵ en cuestión y además $|g^{(n)}_{\mu\nu}| \ll 1$ para cada n .

1.3. Cúmulos Globulares

La pregunta que surge naturalmente es ¿cuáles son las fuentes candidatas más prometedoras respecto a detección de ondas gravitacionales? Como señalabamos, sistemas binarios de objetos compactos son las fuentes más prometedoras, pero ¿cómo se forman? ¿dónde se encuentran? Pues bien, sistemas estelares densos son las fuentes más prometedoras, ya que en ellos la formación dinámica de sistemas binarios de agujeros negros es más probable.

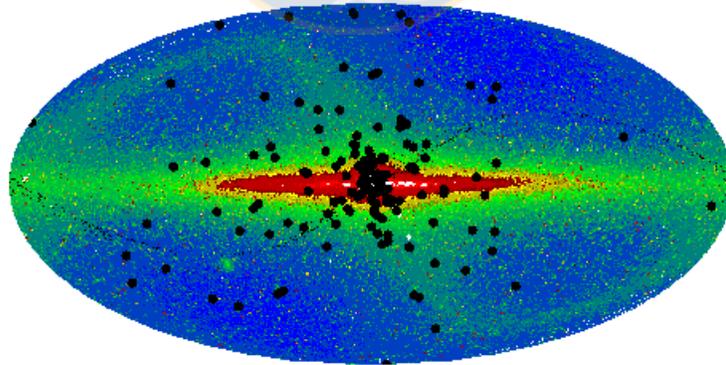


Figura 1.1: Distribución de cúmulos globulares en la Vía Láctea: Las posiciones fueron obtenidas del catálogo de Harris (1996 (edición 2010)) y son representadas gráficamente como círculos negros sobre el mapa “COBE FIRAS 2.2” de la Galaxia empleando proyección de Mollweide. Fuente: <http://www.dartmouth.edu/~chaboyer/mwgc.html>.

Los cúmulos globulares son sistemas estelares viejos y densos que contienen una población entre 10^4 a 10^6 estrellas (para consultar un buen artículo de revisión sobre cúmulos globulares ver Benacquista

& Downing (2011)). Se encuentran normalmente asociados a una galaxia anfitriona y muchas galaxias, incluida la Vía Láctea (VL), tienen cúmulos globulares tanto en su interior como en sus alrededores orbitando como satélites. Un buen catálogo con una estimación del número de cúmulos globulares en la Vía Láctea es frecuentemente actualizada por Harris (1996 (edición 2010)). En la figura 1.1 puede apreciar la distribución de cúmulos globulares en la Vía Láctea.

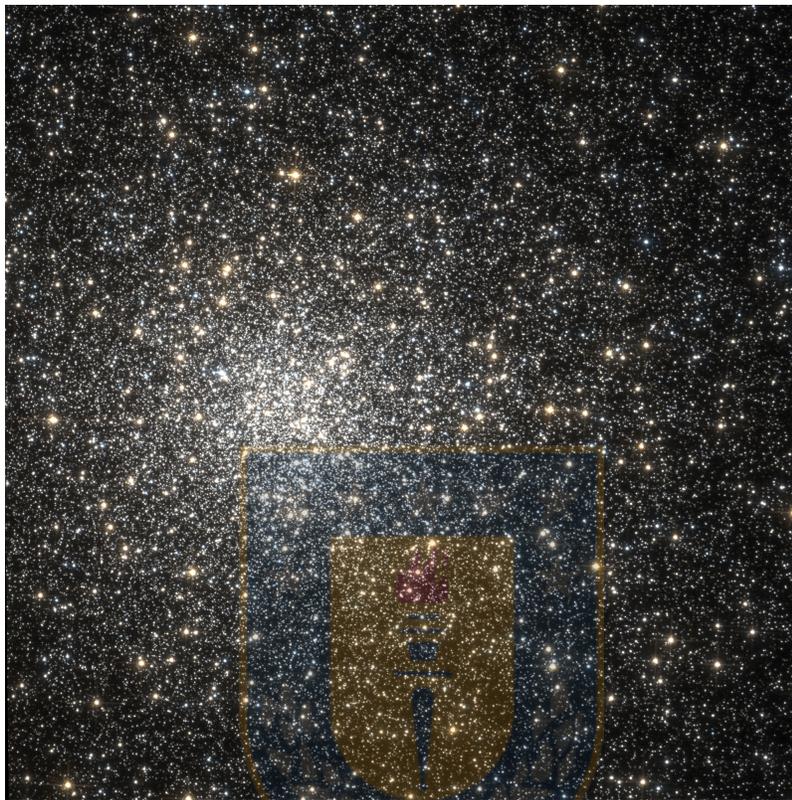


Figura 1.2: Fotografía de NGC 6266 tomada por el telescopio espacial Hubble. Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Messier_62_Hubble_WikiSky.jpg.

Como tales, los cúmulos globulares son el escenario de muchas interacciones interesantes, ya que contienen una variedad de estrellas en distintos estados evolutivos. Algunos de ellos son las estrellas de neutrones y agujeros negros, que son llamados en conjunto *objetos compactos*. Dichas interacciones dinámicas pueden alterar la evolución de estrellas individuales y pueden producir sistemas binarios conteniendo uno o más objetos, lo que va volviendo a los cúmulos más densos y más compactos. Un ejemplo de cúmulo globular es el NGC 6266. Este cúmulo, ubicado en el bulbo de la Vía Láctea, se destaca porque posee una población de púlsares binarios de milisegundos y más de 50 fuentes emisoras de rayos X se han reportado dentro del radio de masa media del cúmulo NGC 6266, sugiriendo que está en una fase dinámica activa, generando binarias por encuentros dinámicos (Beccari *et al.*, 2006), lo cual puede ser explicado por segregación de masa de restos compactos hacia el centro del cúmulo (Hut & Verbunt, 1983; Spitzer, 1987; Banerjee *et al.*, 2010). La formación de binarias de objetos compactos, como por ejemplo, estrellas de neutrones (NS por las siglas en inglés de *Neutron Star*) y agujeros negros (BH por las siglas en inglés de *Black Hole*) sería el resultado de la evolución de las estrellas más masivas del cúmulo. Estos objetos, que son más masivos que otras estrellas del cúmulo, serían rápidamente segregados al núcleo del mismo, un proceso que conduciría a la formación de subcúmulos densos (Lee, 1987; Miralda-Escude & Gould, 2000; Freitag *et al.*, 2006) conformados por estrellas de neutrones y agujeros negros (Hut & Verbunt, 1983; Hut *et al.*, 1992). Por consiguiente, dichos subcúmulos serían eficientes en la producción dinámica de binarias de objetos compactos, las cuales son fuentes de una amplia banda de ondas electromagnéticas y también de ondas gravitacionales (Banerjee *et al.*, 2010; Benacquista & Downing, 2011). Por esta razón, se ha elegido

Parámetro	Valor	Ref.
RA (J2000)	17 : 01 : 14.0	H
DEC (J2000)	−30 : 06 : 48.2	H
Longitud Galáctica l	353.57	H
Latitud Galáctica b	7.23	H
Distancia desde el Sol D	6.9 kpc	H
Radio del núcleo R_c	6.6''	NG
Concentración central c	1.70	H
Radio de masa media R_h	2.07 pc	H
Velocidad de dispersión σ	13.7 km/s	H
Metalicidad [Fe/H]	−1.29 dex	H
Masa total M_{tot}	$3.8 \times 10^5 M_\odot$	G

Tabla 1.1: Parámetros estructurales observados de NGC 6266. Fuente: Elaboración propia con datos provenientes de H=[Harris \(1996 \(edición 2010\)\)](#), NG=[Noyola & Gebhardt \(2006\)](#) y G=[Gnedin et al. \(2002\)](#).

uno de los cúmulos globulares más densos y viejos de nuestra Vía Láctea, el NGC 6266² (también llamado objeto Messier 62 o M62) para simular computacionalmente y estudiar si éste puede ser una fuente de ondas gravitacionales detectables. Dicho cúmulo fue descubierto en 1771 por Charles Messier, tiene una masa de $1.2 \times 10^6 M_\odot$ y un radio de masa media (*half mass radius* por su nombre en inglés) R_h de 2 pc aproximadamente. Su velocidad de dispersión σ es de 14.3 km/s y se encuentra a 2.4 kpc desde el centro de la Vía Láctea, en el bulbo de la misma ([Harris, 1996 \(edición 2010\)](#)). En la figura 1.2 puede encontrar una fotografía tomada por el telescopio espacial Hubble de este cúmulo y en la tabla 1.1 puede encontrar sus parámetros observados según diferentes autores.

En un cúmulo globular pueden existir dos tipos de poblaciones de binarias. Las llamadas binarias primordiales son los sistemas formados durante el proceso de formación estelar del cúmulo en la nube molecular y los sistemas binarios formados por la evolución dinámica de las estrellas del cúmulo. Dentro de este último tipo, la formación de sistemas binarios puede ser dividida en dos clases dependiendo de los encuentros entre estrellas:

- Encuentro por transferencia de energía: Sólo unas pocas binarias son formadas por encuentros de múltiples estrellas, donde a expensas de la energía relativa entre las otras dos que formarán el sistema binario, se transfiere energía a la tercera, la cual escapa dejando a la binaria aislada.
- Encuentro por intercambio de posiciones: Consiste en que si hay un sistema binario y se acerca una tercera estrella a perturbarla, entonces ésta intercambia la posición con una de las constituyentes del sistema binario inicial y debido a la equipartición de la energía, el miembro más liviano en la interacción usualmente escapa ([Hills & Fullerton, 1980](#); [Heggie & Rasio, 1996](#); [Khalisi et al., 2007](#)) dejando una nueva binaria formada.

Debido a la evolución estelar, los agujeros negros se vuelven rápidamente los objetos más masivos dentro del cúmulo, motivo por el cual se ven afectados fuertemente por configuraciones estelares densas y son por tanto propensos a formar sistemas binarios. Un importante efecto durante este proceso es la formación de *binarias duras* ([Heggie, 1975](#)), cuando la energía termal del cúmulo es menor que la energía de formación de la binaria, lo que conlleva a una reducción en la separación de ésta. Si la binaria está compuesta de agujeros negros, entonces es posible que ingrese a un régimen relativista, en cuyo caso se necesita tomar en cuenta de manera apropiada las correcciones postnewtonianas debido al decrecimiento de la energía del sistema por la emisión de ondas gravitacionales en el proceso.

Para hacer predicciones de la tasa de eventos de emisión de ondas gravitacionales, los procesos físicos de interacciones de objetos compactos remanentes deben ser bien entendidos. Hace más de 10 años atrás, [Gültekin et al. \(2004\)](#) y [O’Leary et al. \(2006\)](#) desarrollaron simulaciones de una población pura de binarias

²NGC es el prefijo de Nuevo Catálogo General de Nebulosas y Cúmulos de estrellas, por las siglas en inglés de *New General Catalogue of Nebulae and Clusters of Stars*, catálogo de los objetos del cielo profundo más conocido en Astronomía.

de agujeros negros con un fondo estelar uniforme. Además, [Brem et al. \(2013\)](#) añadió los efectos de spin a la misma configuración. En aquellas simulaciones, se supuso que BHs y binarias de BH-BH formaban un sub-sistema completamente segregado por masa, donde las binarias de agujeros negros interactuaban fuertemente la una con la otra, conduciendo a la formación y destrucción de binarias. Por primera vez, ellos también estudiaron el crecimiento de agujeros negros por fusiones sucesivas de agujeros negros. En particular, [O’Leary et al. \(2006\)](#) predijo 1 a 10 detecciones por año de fusiones de BH-BH para el interferómetro avanzado de LIGO. Más de un 70% de estas fusiones ocurren en binarias de BH-BH que han sido eyectadas desde el cúmulo. Progresando sobre este panorama clásico, hay estudios que toman en cuenta la evolución de sub-cúmulos de BHs con un número realista de BHs en un cúmulo anfitrión ([Portegies Zwart & McMillan, 2000](#); [Banerjee et al., 2010](#); [Morscher et al., 2012](#); [Antonini & Merrit, 2013](#)). Estos estudios estiman que la escala de tiempo de auto agotamiento del núcleo de BHs es típicamente del orden de unos pocos Gyrs. Sin embargo, en esos trabajos no hay consideración de la evolución estelar del cúmulo. Otras aproximaciones fueron realizadas por [Ivanova et al. \(2008\)](#) y [Sadowski et al. \(2008\)](#), quienes desarrollaron simulaciones de una población de binarias compactas en cúmulos estelares considerando evolución estelar, pero suponiendo que las binarias de BHs y BH-BH siempre permanecen en equilibrio dinámico con el resto del cúmulo. En este caso, el cúmulo no experimenta segregación de masa. Estas consideraciones conducen a tasas de detección de fusiones mucho más altas, del orden de 25-3000 por año dependiendo de las condiciones iniciales.

Todos estos modelos intentan explicar los procesos físicos involucrados en la evolución de binarias compactas dentro de cúmulos estelares, y sus efectos sobre la emisión de ondas gravitacionales. Sin embargo, las diferentes suposiciones iniciales conducen a predicciones bastante diferentes para la detección de ondas gravitacionales. Incluso cuando todos estos modelos clarificaron diferentes aspectos de la dinámica de binarias compactas dentro del cúmulo y su interacción con otras estrellas, no hay un modelo completo incluyendo todos estos aspectos en una misma simulación. Dado que la tasa de detección de ondas gravitacionales depende de la dinámica del cúmulo globular, es importante entenderla en detalle realizando la simulación lo más completa y realista posible, considerando un número realista de estrellas, con evolución estelar³ y una población de binarias primordiales⁴. Como primer paso, si bien no utilizamos un número real de estrellas, por primera vez se incluye la evolución estelar y una población de binarias primordiales. Esta es la meta que nos hemos planteado al modelar NGC 6266, el cual posee interesantes características que lo vuelven un excelente laboratorio para probar la versión actualizada del código NB6++GPU/PN.

³Modelos que predicen cómo evolucionan las estrellas dependiendo de su masa. Matemáticamente están descritos de acuerdo a la función de masa inicial (en este caso usamos [Kroupa \(2001\)](#)).

⁴Las estrellas en una nube molecular no nacen solas sino en sistemas de estrellas (eso se ha observado en [Haisch et al. \(2001\)](#)).



Capítulo 2

Ondas Gravitacionales y su detección

En este capítulo haremos una rápida revisión de cómo las ondas gravitacionales, emergen de manera simple en la teoría de RG cuando se estudia una versión linealizada de la misma. Además, estudiaremos algunas de sus propiedades¹ que son relevantes para el desarrollo de la presente tesis.

2.1. Teoría de RG linealizada

Recordando que las ecuaciones de campo (1.1) son altamente no lineales en las componentes de la métrica. Si consideramos un campo gravitacional débil, pero no necesariamente estacionario y lo caracterizamos mediante algún parámetro adimensional $\epsilon \ll 1$, postulando en un sistema de coordenadas cuasi-inerciales, una métrica en la forma (1.8), vale decir, una métrica y su inversa como

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}^{(1)}, \quad g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} + g^{\mu\nu (1)}, \quad (2.1)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ está dada por (A.3), con $g_{\mu\nu}^{(1)}$ y $g^{\mu\nu (1)}$ a primer orden en ϵ . Si definimos $h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu}^{(1)}$, al reemplazar (2.1) en (A.4), se concluye que a primer orden en ϵ , las componentes de perturbación de la inversa están dadas por $g^{\mu\nu (1)} = -\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}h_{\lambda\rho} =: -h^{\mu\nu}$.

Dado que existen infinitos sistemas de coordenadas en que la métrica puede expandirse como en (2.1), existen también infinitos $h_{\mu\nu}$, y como el espaciotiempo de fondo es plano, entonces el formalismo es naturalmente covariante bajo transformaciones de Lorentz del tipo $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, con la matriz Λ_μ^ρ definida tal que $\Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}$. Entonces las componentes de la métrica transforman como

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma g_{\rho\sigma}(x) \\ &= \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma (\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}(x)) \\ &= \eta_{\mu\nu} + \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma h_{\rho\sigma}(x). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Así, vemos que como $g_{\mu\nu}$ es un tensor bajo transformaciones de Lorentz (T.L.'s), entonces $h_{\mu\nu}$ también ha de serlo y por consiguiente debe transformar como $h'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma h_{\rho\sigma}(x)$. Además, en el contexto de la expansión realizada podemos subir y bajar índices usando la métrica del espacio plano η . Por ejemplo, $h := h^\mu_\mu = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ es la traza del tensor $h_{\mu\nu}$ y $\square := \partial_\mu \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ es el operador de onda, ambos escalares bajo T.L.'s. Con esto en mente, evaluando en (A.6)-(A.10) encontramos que los símbolos de Christoffel, la curvatura, el tensor de Ricci, el escalar de Ricci y el tensor de Einstein tienen la forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda (1)} \quad R^\rho_{\mu\lambda\nu} = R^\rho_{\mu\lambda\nu} (1) \quad R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} (1) \quad R = R (1) \quad G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} (1), \quad (2.3)$$

¹Para mayor detalle de los resultados expuestos en la presente sección, consulte [Maggiore \(2008\)](#) o [Rubilar \(2016\)](#).

con $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, $R_{\mu\lambda\nu}^{\rho}$, $R_{\mu\nu}$ y $G_{\mu\nu}$ a primer orden en ϵ , donde

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho} \left(\partial_{\mu} g_{\nu\rho}^{(1)} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho}^{(1)} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}^{(1)} \right) = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} h_{\nu}^{\lambda} + \partial_{\nu} h_{\mu}^{\lambda} - \partial^{\lambda} h_{\mu\nu}), \quad (2.4)$$

$$R_{\mu\nu\lambda}^{\rho} = \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} - \partial_{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\nu} h_{\lambda}^{\rho} - \partial_{\mu} \partial_{\lambda} h_{\nu}^{\rho} + \partial_{\lambda} \partial^{\rho} h_{\mu\nu} - \partial_{\nu} \partial^{\rho} h_{\mu\lambda}), \quad (2.5)$$

$$R_{\mu\lambda} = R_{\mu\rho\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \partial_{\nu} h^{\nu\lambda} + \partial_{\lambda} \partial^{\nu} h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\lambda} h - \square h_{\mu\lambda}), \quad (2.6)$$

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \partial^{\mu} \partial^{\nu} h_{\mu\nu} - \square h, \quad (2.7)$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} R = \frac{1}{2} [\partial_{\mu} \partial^{\lambda} h_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} \partial^{\lambda} h_{\lambda\mu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (\partial^{\lambda} \partial^{\rho} h_{\lambda\rho} - \square h)]. \quad (2.8)$$

Si consideramos un *cuerpo de prueba*² que se mueve con cuadrivelocidad $u^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$ en el campo gravitacional y suponemos que lo hace lentamente, es decir $|dx^i/dt| \ll c$, entonces podemos aproximar $d\tau \approx dt$ y por consiguiente $dx^i/d\tau \approx dx^i/dt$. Así, a orden cero en v^i/c , la ec. de la geodésica (A.14) se reduce a

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^{\mu} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} \approx 0. \quad (2.9)$$

Si además suponemos que el campo es estacionario ($\partial_t h_{\mu\nu} = 0$), entonces la componente $\mu = 0$ de ec. precedente no proporciona información relevante y la coomponente $\mu = i$ nos conduce a

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\frac{c^2}{2} \partial_i h_{00}. \quad (2.10)$$

Note que con las consideraciones tomadas, la ec. precedente debería reducirse a la ec. de movimiento newtoniana $d^2 x^i/dt^2 = -\partial_i \phi_{\text{new}}$, con ϕ_{new} el potencial gravitacional newtoniano. Por lo tanto, identificando $h_{00} \stackrel{!}{=} 2\phi_{\text{new}}/c^2$ encontramos que $g_{00} \approx 1 + 2\phi_{\text{new}}/c^2$, lo cual para ser consistentes requiere que $|2\phi_{\text{new}}/c^2| \ll 1$. Dado que el potencial newtoniano generado por una masa M a una distancia r está dado por $\phi_{\text{new}}(r) = -GM/r$, la condición mencionada requiere que $GM/c^2 r \ll 1$ ³.

Típicamente, en la literatura se encuentra que el parámetro que caracteriza campos gravitacionales débiles corresponde a $\epsilon = GM/c^2 R$, con R alguna escala de distancia característica del campo gravitacional, lo que permite reordenar los términos en las expansiones (2.3) como si la expansión se realizase en potencias de G , vale decir, como si el parámetro de expansión fuera G ($\epsilon \sim G$), que es lo que supondremos en los cálculos que se presentarán a continuación.

Definiendo el tensor $\bar{h}_{\mu\nu}$ asociado a $h_{\mu\nu}$ como $\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h/2$, entonces se encuentra que $\bar{t} := \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = -t$, y $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Por lo tanto podemos escribir

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2} [\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^{\lambda} \partial^{\rho} \bar{h}_{\lambda\rho} - \partial_{\mu} \partial^{\lambda} \bar{h}_{\lambda\nu} - \partial_{\nu} \partial^{\lambda} \bar{h}_{\lambda\mu}]. \quad (2.11)$$

Similarmente, se requiere considerar una expansión del tensor de energía-momentum de la materia en la forma $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(1)}$ con $T_{\mu\nu}^{(0)}$ a orden 0 en ϵ y $T_{\mu\nu}^{(1)}$ a primer orden. Por un conteo de órdenes de magnitud en la expansión de la ec. (1.1), tenemos luego que

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{8\pi G^{(0)}}{c^4} T_{\mu\nu}^{(0)}, \quad (2.12)$$

donde por consistencia, al derivar la ecuación anterior se encuentra que $\partial^{\mu} T_{\mu\nu}^{(0)} = 0$, vale decir la energía y el momentum descritos por $T_{\mu\nu}^{(0)}$ se conservan.

²En el capítulo 3 se discutirá el significado de un cuerpo de prueba en RG.

³Note que en las cercanías del Sol $GM/c^2 r \approx GM_{\odot}/c^2 R_{\odot} \sim 10^{-6}$ y en las cercanías de la Tierra $GM/c^2 r \approx GM_{\oplus}/c^2 R_{\oplus} \sim 10^{-7}$.

Note que ante transformaciones de coordenadas del tipo $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$, con $|\partial_\mu \xi_\nu|$ de orden ϵ al igual que $h_{\mu\nu}$, se infieren también nuevas descomposiciones del tipo (2.1). Así, vemos que

$$\begin{aligned}
g'_{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho}(x) \\
&= (\delta_\mu^\lambda - \partial_\mu \xi^\lambda(x)) (\delta_\nu^\rho - \partial_\nu \xi^\rho(x)) (\eta_{\lambda\rho} + h_{\lambda\rho}(x)) \\
&= \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x) - \eta_{\lambda\nu} \partial_\mu \xi^\lambda(x) - \eta_{\mu\rho} \partial_\nu \xi^\rho(x) \\
&=: \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x').
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Por lo tanto, en las coordenadas x' con la perturbación métrica $h'_{\mu\nu}$ a primer orden en ϵ definida por

$$h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \xi_\nu(x) - \partial_\nu \xi_\mu(x), \quad \xi_\mu := \eta_{\mu\nu} \xi^\nu, \tag{2.14}$$

también se tiene una métrica en la forma (2.1), pero con una perturbación $h'_{\mu\nu}$ relacionada con la original por medio de (2.14).

2.1.1. Gauge de Lorenz

Por la libertad en la elección de las coordenadas, siempre podemos imponer el gauge de Lorenz,

$$\partial^\nu h_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} 0, \tag{2.15}$$

ya que si tenemos coordenadas en que esto no se satisfaga, podemos hacer una transformación del tipo (2.13) donde sí se satisfaga. Así, es posible demostrar que con $\square \xi_\mu = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}$ la ec. (2.12) se reduce a

$$\square h'_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G^{(0)}}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{2.16}$$

Vale decir, en el gauge de Lorenz se reduce el número de ecuaciones independientes de 10 a 6 y además la perturbación $\bar{h}_{\mu\nu}$ satisface la ecuación de onda inhomogénea con el tensor energía-momento como fuente. Por lo tanto, en regiones sin materia $\bar{h}_{\mu\nu}$ satisface la ecuación de onda homogénea, lo que implica que pueden existir soluciones propagantes, que posean como velocidad de propagación la velocidad de la luz.

Por lo tanto, las soluciones particulares correspondientes a campos retardados asintóticamente nulos son

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \tag{2.17}$$

los que definen la métrica a primer orden en ϵ en la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}. \tag{2.18}$$

2.1.2. Gauge Transversal sin traza

En regiones libres de fuentes, donde $T_{\mu\nu} = 0$, siempre es posible elegir coordenadas tales que, adicionalmente a la condición de Lorenz (2.15), se satisfaga el *gauge transversal sin traza* (o TT-gauge, por “Transverse Traceless”) tal que

$$h \stackrel{!}{=} 0, \quad h_{0i} \stackrel{!}{=} 0. \tag{2.19}$$

Cabe mencionar que como $h = \bar{h} = 0$, en el gauge TT no es necesario hacer la distinción entre $h_{\mu\nu}$ y $\bar{h}_{\mu\nu}$, ya que $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}$. Como además $h = 0$, entonces $h_{00} = -h^i_i = h_{ii}$, lo que permite escribir cualquier expresión que involucre $h_{\mu\nu}$ como una función sólo de las componentes puramente espaciales h_{ij} . Finalmente, en el gauge TT la condición de gauge de Lorenz (2.15) se reduce a

$$\partial_0 h_{00} = 0, \quad \partial_i h^{ij} = 0. \tag{2.20}$$

2.1.3. Ondas gravitacionales planas: dos polarizaciones

Consideremos una región sin materia por la que se propaga una onda gravitacional plana de la forma

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = \Re [e_{\mu\nu}(k) \exp(ik_\lambda x^\lambda)], \quad (2.21)$$

con $e_{\mu\nu}$ el tensor (bajo TL) amplitud de la onda y k_λ el 4-vector (bajo TL) de onda. Introduciendo (2.21) en la ecuación de onda homogénea, $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, encontramos que $k_\lambda k^\lambda = 0$, mientras que la condición de gauge de Lorenz implica que $e_{\mu\nu} k^\nu = 0$.

Si fijamos la libertad residual eligiendo un campo ξ^μ tal que $\square \xi^\mu = 0$, como por ejemplo:

$$\xi^\mu(x) = -\Re [i\epsilon^\mu \exp(ik_\lambda x^\lambda)], \quad (2.22)$$

con $k^\mu = (k, 0, 0, k)$, entonces el valor de las constantes es

$$\epsilon^0 = \frac{1}{4k} (2e^{00} + e^{11} + e^{22}), \quad \epsilon^1 = \frac{1}{k} e^{01}, \quad \epsilon^2 = \frac{1}{k} e^{02}, \quad \epsilon^3 = \frac{1}{4k} (2e^{00} - e^{11} - e^{22}). \quad (2.23)$$

Note que esta elección de gauge satisface que $e'^\mu{}_\mu = 0$ y por lo tanto $\bar{h}' = h' = 0$, vale decir, la perturbación es de traza nula. Como además $h'_{\mu 0} = 0$ y $h'_{\mu 3} = 0$, se verifica que $e'_{\mu\nu}$ describe una solución en el gauge TT.

En efecto, reescribiendo e'^{11} y e'^{12} en términos de constantes reales como $e'^{11} =: h_+ e^{-i\varphi_+}$ y $e'^{12} =: h_\times e^{-i\varphi_\times}$, entonces la perturbación métrica está dada por

$$h'_{\mu\nu} = h_+ \cos(kct - kz + \varphi_+) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h_\times \cos(kct - kz + \varphi_\times) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

y por consiguiente el elemento de línea resulta ser

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 + h_+ \cos(kct - kz - \varphi_+) (dx^2 - dy^2) + 2h_\times \cos(kct - kz - \varphi_\times) dx dy. \quad (2.25)$$

Es directo ver que al considerar por separado las dos posibles polarizaciones linealmente independientes de la onda gravitacional plana, éstas corresponden a una rotación en $\pi/4$ (obviando su amplitud y fases eventualmente diferentes) de los ejes coordenados en el plano normal a la dirección de propagación de la onda. Por dicha razón, en la literatura suelen restringirse al estudio de las propiedades de sólo un estado de polarización de una onda gravitacional plana.

2.1.4. Transformación al gauge TT

Si se tiene una solución de onda $h_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$ que se propaga a lo largo de la dirección \hat{n} calculada en el gauge de Lorenz (2.15) pero no en el gauge TT, entonces la forma de convertirla al gauge TT es

$$h_{ij}^{TT}(\vec{x}, t) = \Lambda_{ij,kl} h_{kl}(\vec{x}, t), \quad (2.26)$$

donde se ha definido el operador $\Lambda_{ij,kl}(\hat{n})$ como

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) := \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{jl} n_i n_k - \delta_{ik} n_j n_l + \frac{1}{2} n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2} \delta_{ij} n_k n_l + \frac{1}{2} n_i n_j n_k n_l. \quad (2.27)$$

Es directo verificar que este operador es completamente transversal al vector n^i , en el sentido que satisface $n^i \Lambda_{ij,kl} = n^j \Lambda_{ij,kl} = \Lambda_{ij,kl} n^k = \Lambda_{ij,kl} n^l \equiv 0$ y además es libre de trazas, en el sentido que $\Lambda_{ii,kl} = \Lambda_{ij,kk} = 0$. Como consecuencia de estas propiedades, satisface además que

$$\Lambda_{ij,kl} \Lambda_{ij,pq} \equiv \Lambda_{kl,pq}. \quad (2.28)$$

2.1.5. Generación de ondas gravitacionales

Para fuentes pequeñas comparadas con la longitud de onda de su radiación (de tamaño $L \ll \lambda$), en su zona lejana donde $r \gg \lambda$ (tal como en el caso de ondas electromagnéticas) encontramos que el término dominante de (2.17) es

$$\bar{h}_{\text{rad}}^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \int T^{(0)\mu\nu}\left(\vec{x}', t - \frac{r}{c}\right) d^3x'. \quad (2.29)$$

Empleando la ley de conservación para el tensor de energía-momentum $T^{(0)\mu\nu}$ y suponiendo que la distribución que genera el campo gravitacional está confinada a una región acotada del espacio, podemos escribir la integral (retardada) $\int T^{ij} d^3x$ en términos de derivadas del momento cuadrupolar de la fuente como

$$\int T^{(0)ij} d^3x = \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int T^{(0)00} x^i x^j d^3x, \quad (2.30)$$

de donde concluimos que

$$\bar{h}_{\text{rad}}^{ij}(\vec{x}, t) = -\frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{c^2} \int T^{(0)00}(x') x^i x^j d^3x' \right] \Big|_{t_{\text{ret}}}. \quad (2.31)$$

donde hemos definido el tiempo retardado $t_{\text{ret}} := t - r/c$. En particular, si $T^{(0)00}/c^2 = \rho(\vec{x}, t)$ es la densidad de masa de la fuente (a primer orden), entonces podemos escribir

$$\bar{h}_{\text{rad}}^{ij}(\vec{x}, t) = -\frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \left[\ddot{M}^{ij} \right] \Big|_{t_{\text{ret}}}, \quad (2.32)$$

donde

$$M^{ij}(t) := \int \rho(\vec{x}, t) x^i x^j d^3x, \quad (2.33)$$

es el tensor momento de inercia (con traza) de la fuente.

Note que $\bar{h}_{\text{rad}}^{ij}$ decae con $1/r$ y que a diferencia de la situación de las ondas electromagnéticas, su primera contribución no nula corresponde a radiación cuadrupolar. Esto se debe a que la derivada temporal del momento dipolar gravitacional $\int \rho x^i d^3x$ no aporta a la energía radiada (que depende de la derivada de $\bar{h}_{\text{rad}}^{ij}$) ya que es proporcional al momentum lineal del sistema, el cual es conservado a primer orden.

2.1.6. Ondas gravitacionales emitidas por un sistema binario con órbitas keplerianas

Para un sistema binario con órbitas aproximadamente keplerianas, desde el apéndice C sabemos que su solución en términos de la coordenada relativa está dada por la ec. (C.38).

Como la densidad de masa de la binaria está dada por $\rho(\vec{x}, t) = m_1 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_1) + m_2 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_2)$, entonces el tensor de inercia resulta $I^{ij} = m_1 x_1^i x_1^j + m_2 x_2^i x_2^j$ y dado que \vec{x}_1 y \vec{x}_2 están dados por la ec. (C.7) en términos de la coordenada relativa, entonces encontramos que

$$I^{ij} = \mu r^i r^j, \quad (2.34)$$

expresión que al ser derivada conduce a que $\dot{I}^{ij} = \mu(\dot{r}^i r^j + r^i \dot{r}^j)$ y $\ddot{I}^{ij} = \mu(\ddot{r}^i r^j + 2\dot{r}^i \dot{r}^j + r^i \ddot{r}^j)$. Recordando la ec. (C.9) se halla que

$$\ddot{I}^{ij} = 2\mu \left(v^i v^j - \frac{GM}{r} n^i n^j \right). \quad (2.35)$$

De esta forma, al introducir (2.35) en (2.32), se halla que

$$h_{\text{rad}}^{ij}(\vec{x}, t) = -\frac{4G\mu}{c^4 D} \left(v^i v^j - \frac{GM}{r} n^i n^j \right) \Big|_{t_{\text{ret}}}. \quad (2.36)$$

2.1.7. Energía y momentum angular radiado

En Maggiore (2008) y en Rubilar (2016), se muestra que considerando sólo el término cuadrupolar en la expansión multipolar de la onda, el promedio temporal de la potencia y del momentum angular por unidad de tiempo radiado por éstas (es decir, pérdidas por el sistema), están dados por

$$\langle P \rangle := \frac{G}{5c^2} \langle \ddot{Q}^{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle \Big|_{t_{\text{ret}}}, \quad \langle \dot{L}_i \rangle := \frac{2G}{5c^5} \epsilon_{ijk} \langle \ddot{I}^{jb} \ddot{I}^{kb} \rangle \Big|_{t_{\text{ret}}}, \quad (2.37)$$

con Q^{ij} el momento cuadrupolar sin traza definido como

$$Q^{ij} := M^{ij} - \frac{1}{3} M^{kk} \delta^{ij}. \quad (2.38)$$

2.1.8. Lo que radía el sistema binario y la primera evidencia indirecta

Si se supone que la fuente de radiación gravitacional es un sistema binario decayendo mediante un continuo de órbitas elípticas, entonces tanto el semieje mayor a , la excentricidad e , la energía E , el momentum angular L^i y el período orbital T son funciones del tiempo en la forma

$$a = a(t), \quad e = e(t), \quad E = E(t), \quad L^i = L^i(t), \quad T = T(t), \quad (2.39)$$

donde para cada tiempo t son válidas las 3 Leyes de Kepler⁴. Así, si en (2.34) se evalúa la ec. (C.38) que es solución para las órbitas keplerianas, entonces es posible hallar que

$$\langle P \rangle = \frac{32}{5} \frac{G^4 \mu^2 M^3}{c^5 a^5} f(e), \quad \langle \dot{L} \rangle = \frac{32}{5} \frac{G^{7/2} \mu^2 M^{5/2}}{c^5 a^{7/2}} \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8} e^2 \right), \quad (2.40)$$

con

$$f(e) := \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{94} e^4 \right), \quad (2.41)$$

una función que depende de la excentricidad para cada instante de tiempo⁵ t . De la tercera Ley Kepler (C.45) sabemos que T^2 es proporcional a a^3 y si la diferenciamos se llega a que

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.42)$$

Análogamente, si diferenciamos la definición newtoniana del semieje mayor dada por (C.36), entonces encontramos que

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{E}}{E}. \quad (2.43)$$

Considerando la siguiente ecuación de balance para la energía de la binaria y las ondas gravitacionales, $\dot{E} = -\langle P \rangle$, es posible concluir que

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{96}{5} \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^5} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{-8/3} f(e), \quad (2.44)$$

predicción teórica que fue testada con gran precisión con el púlsar binario⁶ de Hulse & Taylor PSR B1913 + 16⁷. A continuación se adjunta un famoso gráfico sobre el retraso acumulado de los períodos orbitales del periastro de dicho sistema, el cual constituye la primera evidencia experimental de manera indirecta sobre la existencia de ondas gravitacionales.

⁴Para mayor detalle consultar los apéndices B y C.

⁵Una versión detallada del cálculo se puede encontrar en Rubilar (2016) y en Maggiore (2008).

⁶Un púlsar binario es un sistema de dos estrellas de las cuales una es un púlsar (“pulsating star” en inglés); vale decir, una estrella de neutrones que al rotar emite señales electromagnéticas al espacio en intervalos cortos y regulares de tiempo. Los púlsares son identificados por el prefijo PSR seguido por sus coordenadas ecuatoriales (α, δ) con $0 \leq \alpha \leq 24$ hr su ascensión y $\delta \in [-90^\circ, 90^\circ]$ su declinación. En el PSR B1913+16, $\alpha = 19\text{h}13\text{min}$ y $\delta = 16^\circ$.

⁷Para mayor detalle sobre el descubrimiento, puede consultar Hulse (1994), Taylor (1994) y Weisberg & Taylor (2005).

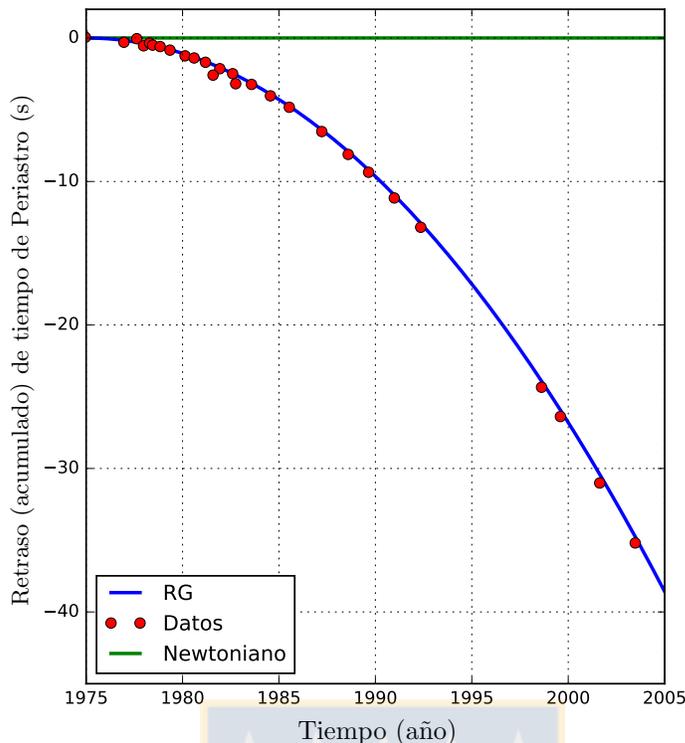


Figura 2.1: Retraso acumulado del periastro del pulsar binario de Hulse y Taylor PRS B1913 + 16: Contraste entre la predicción y la observación. Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos desde Weisberg & Taylor (2005).

Con los parámetros del sistema y la teoría de Einstein podemos calcular la potencia que debiese ser radiada en forma de ondas gravitacionales (Buonanno, 2007), es decir, cuánta energía se emite por unidad de tiempo. La predicción en este caso es de aproximadamente 7×10^{24} Watts, lo cual corresponde a un 2 % de la luminosidad que recibimos desde el Sol por radiación electromagnética. Como punto de comparación, si calculamos la potencia radiada por las ondas gravitacionales emitidas por Júpiter debido a que orbita en torno al Sol, encontramos que corresponde a unos 5000 Watts (algo así como el consumo de un par de estufas eléctricas de tamaño mediano).

2.1.9. Ecuaciones de Peters-Mathews

En Peters & Mathews (1963), luego de un análisis similar para la evolución del momentum angular, usando la ec. (2.40) encontraron que

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64 G^3 \mu M^2}{5 c^5 a^3} \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (2.45)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304 G^3 \mu M^2}{15 c^5 a^4} \frac{e}{(1 - e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2 \right), \quad (2.46)$$

que es un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales de primer orden para el semieje mayor y la excentricidad, no lineal en éstos. Dichas ecuaciones son popularmente conocidas como *ecuaciones de Peters-Mathews* en honor a los físicos que las derivaron. Dada la naturaleza de las mismas, no pueden ser resueltas analíticamente, salvo ciertos casos específicos como por ejemplo si nos reducimos a estudiar situaciones en que el decaimiento lo hace mediante órbitas (cuasi-)circulares, con $e = 0$, así

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64 G^3 \mu M^2}{5 a^3 c^3}, \quad (2.47)$$

e integrando se halla que

$$a(t) = \left[a_0^4 - \frac{256 G^3 \mu M^2}{5 c^5} (t - t_0) \right]^{1/4}, \quad (2.48)$$

donde $a_0 = a(t_0)$. De esta forma, al hacer $a(t_d) = 0$ y resolver para t_d , se encuentra entonces la predicción de Peters-Mathews para el tiempo de decaimiento (o tiempo de colapso) para el sistema binario, el cual se encuentra dado por

$$t_d = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3 \mu M^2} a_0^4 + t_0. \quad (2.49)$$

Cabe notar que pese a lo idealizado que pueda parecer el modelo de tener un sistema binario decayendo mediante órbitas elípticas, el modelo es efectivo cuando se estudian las trayectorias postnewtonianas y se contrastan diversas formas de definir cantidades a las que pudiéramos pretender llamar “semieje mayor” y “excentricidad” de la órbita cuando éstas dejan de ser elipses.

En Marzo de 2015 fue escrito un póster discutiendo las posibles definiciones de semieje mayor y excentricidad en el contexto postnewtoniano y simulando ondas gravitacionales mediante la ec. (2.36), el cual fue titulado *Post-Newtonian Dynamics of inspiralling compact binaries* y presentado en el congreso *MODEST15* organizado por Universidad de Concepción en Concepción, Chile.

2.2. Ondas Gravitacionales y su detección

En esta sección consideraremos la interacción una onda gravitacional con un detector de ondas gravitacionales, la cual posee componentes espaciales $h_{ij}^{TT}(t, \vec{x})$ y que se propaga en la dirección \hat{n} , donde $i, j = 1, 2, 3$. Por simplicidad en la notación, en lo sucesivo se suprimirá el superíndice TT.

Si ω_{GW} es la frecuencia angular de la onda gravitacional y L es una distancia característica del detector, suponiendo que $\omega_{\text{GW}}L/c \ll 1$, entonces podemos considerar que en las proximidades del detector

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) \approx h_{ij}(t). \quad (2.50)$$

2.2.1. Perfiles de Polarización

Sean $h_{ij}(t)$ las componentes espaciales de una onda gravitacional que se propaga en la dirección \hat{n} . Consideremos arbitrariamente dos vectores \hat{u} y \hat{v} como en la figura 2.2 satisfaciendo que $\hat{u} \perp \hat{n}$ y $\hat{v} \perp \hat{n}$, vale decir que son perpendiculares a la dirección de propagación. En términos de ellos es posible definir las matrices de polarización e_{ij}^+ y e_{ij}^\times , tales que $e_{ij}^+(\hat{n}) := \hat{u}_i \hat{u}_j - \hat{v}_i \hat{v}_j$ y $e_{ij}^\times(\hat{n}) := \hat{u}_i \hat{v}_j + \hat{v}_i \hat{u}_j$. Es directo demostrar que dichas matrices son ortogonales, ya que $e_{ij}^+ e_{ij}^+ = 2$, $e_{ij}^+ e_{ij}^\times = 0$, y $e_{ij}^\times e_{ij}^\times = 2$, de donde se deduce que $e_{ij}^* e_{ij}^{\bar{*}} = 2\delta^{*\bar{*}}$, con $*$, $\bar{*} = +, \times$.

Con la arbitrariedad señalada se definen los perfiles de polarización $h^+ = h^+(t)$ y $h^\times = h^\times(t)$ de la onda gravitacional tal que ésta pueda ser escrita como una combinación lineal de las matrices e_{ij}^+ y e_{ij}^\times , vale decir:

$$h_{ij}(t) = \sum_{* = +, \times} h^*(t) e_{ij}^* = h^+(t) e_{ij}^+ + h^\times(t) e_{ij}^\times. \quad (2.51)$$

Así, empleando la relación de ortogonalidad (2.2.1), se halla que $h^+ = e_{ij}^+ h_{ij}/2$ y $h^\times = e_{ij}^\times h_{ij}/2$. Vale decir, $h^*(t) = e_{ij}^* h_{ij}(t)/2$.

Note que si realizamos una rotación en torno al vector \hat{n} como en la figura 2.2, dada por un ángulo ψ tal que definimos \hat{u}' y \hat{v}' como

$$\hat{u}' := \hat{u} \cos(\psi) - \hat{v} \sin(\psi), \quad \hat{v}' := \hat{u} \sin(\psi) + \hat{v} \cos(\psi). \quad (2.52)$$

Posterior a un poco de álgebra se llega a que las matrices de polarización transforman como

$$(e_{ij}^+)' := \hat{u}'_i \hat{u}'_j - \hat{v}'_i \hat{v}'_j = e_{ij}^+ \cos(2\psi) - e_{ij}^\times \sin(2\psi), \quad (e_{ij}^\times)' := \hat{u}'_i \hat{v}'_j + \hat{v}'_i \hat{u}'_j = e_{ij}^\times \cos(2\psi) + e_{ij}^+ \sin(2\psi), \quad (2.53)$$

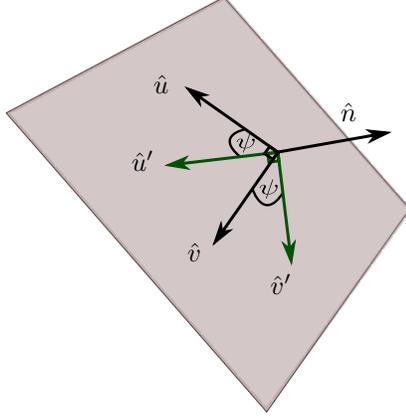


Figura 2.2: Vectores arbitrarios de Polarización. Fuente: Elaboración propia.

y en consecuencia los perfiles de polarización transforman como

$$(h^+)'(t) := \frac{1}{2}(e_{ij}^+)'h_{ij}(t) = h^+(t) \cos(2\psi) - h^\times(t) \sin(2\psi), \quad (2.54)$$

$$(h^\times)'(t) := \frac{1}{2}(e_{ij}^\times)'h_{ij}(t) = h^\times(t) \cos(2\psi) + h^+(t) \sin(2\psi). \quad (2.55)$$

2.2.2. Detección

Si se tiene un detector como en la figura 2.3 por la cual pasa una onda gravitacional y suponiendo ausencia de ruido, entonces la salida (el “output”) del mismo tiene la forma

$$h(t) = D^{ij}h_{ij}(t), \quad (2.56)$$

donde D^{ij} es un tensor constante llamado *el tensor del detector*, que depende de la geometría del aparato.

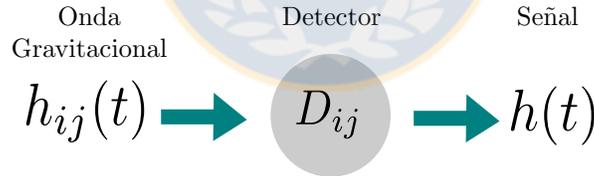


Figura 2.3: Esquema de detección. Fuente: Elaboración propia.

Por lo tanto

$$h(t) = D^{ij} \sum_{*=\pm, \times} h^*(t)e_{ij}^* = \sum_{*=\pm, \times} h^*(t)D^{ij}e_{ij}^*. \quad (2.57)$$

Definiendo convenientemente los patrones de polarización del detector tales que $F^* := D^{ij}e_{ij}^*$, entonces la salida del detector queda dada por

$$h(t) = \sum_{*=\pm, \times} h^*(t)F^*. \quad (2.58)$$

Por la arbitrariedad mencionada en la sección 2.2.1 sobre la elección de los vectores de polarización, al elegir vectores como en (2.52) se deduce que los patrones de polarización del detector transforman como

$$(F^+)' := D^{ij}(e_{ij}^+)' = F^+ \cos(2\psi) - F^\times \sin(2\psi), \quad (F^\times)' := D^{ij}(e_{ij}^\times)' = F^+ \sin(2\psi) + F^\times \cos(2\psi), \quad (2.59)$$

de donde es directo verificar que la salida del detector es un invariante bajo una rotación arbitraria en torno al vector \hat{n} , ya que $(h)' := (h^+)'(F^+) + (h^\times)'(F^\times) = h$.

2.2.3. Interferómetro

Son instrumentos similares en su diseño al usado por Michelson y Morley a fines del siglo IX para poner a prueba los modelos de cómo la luz se propagaba respecto al éter (que hoy consideramos inexistente, debido a los resultados negativos de esos experimentos, y al desarrollo de la teoría Especial de la Relatividad). En estos interferómetros se envía luz monocromática (láser)⁸ a un divisor de haz (un *beam splitter* por su nombre en inglés), el cual envía un haz por un primer camino (un “brazo” del interferómetro) y otro por el segundo, perpendicular al primero. Al final de cada brazo hay espejos altamente reflectantes, suspendidos por un complejo sistema de cables diseñados para aislar cualquier oscilación mecánica externa. Al reflejarse en cada espejo, cada uno de los haces regresa al beam splitter, donde ahora se recombinan. Nuevamente se divide el haz, uno de ellos regresa al láser y el otro viaja al fotodetector donde su intensidad es medida. Los detectores miden los cambios en la potencia entre la señal entrante y señal saliente del interferómetro, donde la potencia de la señal saliente pone de manifiesto los cambios en longitud en los brazos del detector (Maggiore, 2008). En resumen, este tipo de interferómetro láser es sensible a los cambios de (las diferencias de) las longitudes de los brazos. En la figura 2.4 se ha esquematizado un detector interferométrico como el de LIGO.

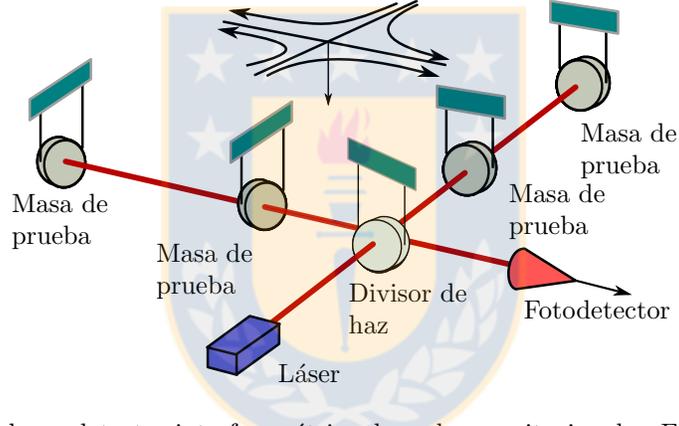


Figura 2.4: Esquema de un detector interferométrico de ondas gravitacionales. Fuente: Adaptada a partir de la figura original disponible en <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ligo.svg>.

Sensitividad Angular y funciones de Patrón

A continuación estudiaremos la respuesta de un interferómetro al paso de una onda gravitacional con dos estados de polarización propagándose a lo largo del eje z' como se esquematiza en la figura 2.5, donde en el sistema de referencia (x', y', z') de la onda gravitacional, h'_{ij} tiene la forma

$$h'_{ij}(t) = \begin{pmatrix} h_+(t) & h_\times(t) & 0 \\ h_\times(t) & -h_+(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij}, \quad (2.60)$$

y además se ha elegido $\hat{u} = (1, 0, 0)$ y $\hat{v} = (0, 1, 0)$. En este caso, si L es el largo característico de los brazos del interferómetro, entonces suponer que $\omega_{\text{GW}}L/c \ll 1$, es equivalente a suponer que la longitud de onda de la onda gravitacional es mucho mayor el largo de cada uno de los brazos del interferómetro. Para VIRGO⁹ y LIGO cuyos brazos miden 3 y 4 km respectivamente, con una sensibilidad máxima en frecuencia de 1 kHz, entonces $\omega_{\text{GW}}L/c$ es de orden 10^{-2} .

⁸En la primera detección realizada por LIGO se empleó un láser con longitud de onda de 1064 nm, estabilizado en amplitud y frecuencia.

⁹<http://public.virgo-gw.eu/language/en/>

Si los espejos en el interferómetro se modelan como partículas de prueba ante el paso de la onda gravitacional, entonces su movimiento relativo está gobernado por la ecuación de desvío geodésico (A.17). En Maggiore (2008) se demuestra que en el sistema de referencia del detector, dicha ecuación está dada por

$$\ddot{\xi}^i = \frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}\xi^i. \quad (2.61)$$

Así, para un espejo localizado en $\xi_1^i = (L + \delta x, 0, 0)$, vemos que los cambios de longitud del brazo en la dirección del eje x en el interferómetro se deben a los desplazamientos de ξ_1^x a lo largo del eje x los cuales, si $\delta x \sim h_{ij}$ se encuentran gobernados por:

$$\delta\ddot{x} = \frac{1}{2}\ddot{h}_{xx}L. \quad (2.62)$$

Análogamente, para un espejo localizado en $\xi_2^i = (0, L + \delta y, 0)$, sus desplazamientos están dados por

$$\delta\ddot{y} = \frac{1}{2}\ddot{h}_{yy}L. \quad (2.63)$$

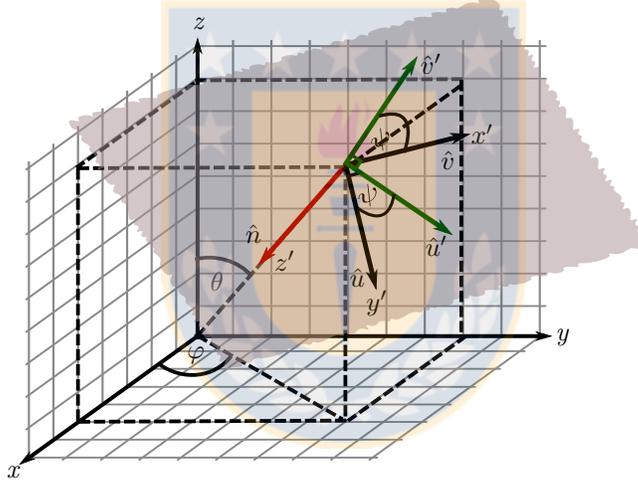


Figura 2.5: Onda gravitacional incidiendo en un detector interferométrico con los brazos a lo largo de los ejes x e y . Fuente: Adaptada a partir de la figura original disponible en https://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_esf%C3%A9ricas#/media/File:Spherical_with_grid.svg.

Para conocer las componentes de $h_{ij}(t)$ en el sistema de referencias (x, y, z) , debemos notar que éstas están dadas por $h_{ij}(t) = R_{ik}R_{jl}h'_{kl}(t)$, donde R_{ij} son las componentes de matriz de rotación que permite pasar desde el sistema de referencia (x', y', z') al sistema (x, y, z) , la cual consta de una rotación del ángulo θ en torno al eje y y de un ángulo φ en torno al eje z . Desde la figura 2.5 es directo ver que la matriz de rotación está dada por

$$R(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

lo que nos permite encontrar que las componentes de la diagonal de h_{ij} están dadas por

$$h_{xx}(t) = h_+(t)(\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) + 2h_\times(t)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi), \quad (2.65)$$

$$h_{yy}(t) = h_+(t)(\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) + 2h_\times(t)\cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi). \quad (2.66)$$

Note que para un interferómetro con forma de L y brazos apuntando en las direcciones \hat{x}_i y \hat{y}_i su tensor asociado corresponde a

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{x}_i \hat{x}_j - \hat{y}_i \hat{y}_j). \quad (2.67)$$

Suponiendo que la orientación de los brazos del interferómetro está dada por $\hat{x}_i = (1, 0, 0)$ e $\hat{y}_i = (0, 1, 0)$, entonces las funciones patrón del detector resultan ser

$$F_+(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2(\theta)) \cos(2\varphi), \quad F_\times(\theta, \varphi) = \cos(\theta) \sin(2\varphi). \quad (2.68)$$



Capítulo 3

Cuerpos extendidos en Relatividad General

Describir la naturaleza y el comportamiento de la materia en una forma útil es lo que pretenden todas las teorías físicas. Por “útil” entendemos que nos permita modelar con suficiente exactitud ciertas situaciones de interés sin tener que hacer una descripción más detallada de la materia. Por ejemplo, en la teoría más simple del sistema solar formulada por Isaac Newton en el siglo XVII, cuando se estudia el movimiento de los planetas orbitando en torno al Sol (ver apéndice C), se hace conforme a sus leyes de la mecánica y gravitación universal, modelando al Sol y los planetas como *partículas puntuales* e ignorando en el proceso la existencia de sus satélites. Al introducir el concepto de “partícula puntual” se desprecian todos los efectos de autointeracción gravitacional de cada uno de ellos; representando al astro en cuestión, como un punto en el espacio que posee ciertas propiedades, como su masa y posición que evoluciona en el tiempo. Así, el Sol (debido a su masa mucho mayor) permanece aproximadamente en reposo y los planetas orbitan en torno a él, describiendo órbitas elípticas (ver apéndice B).

En 1859 Le Verrier reportó una anomalía en la precesión del perihelio de Mercurio como se esquematiza en la fig. 3.1 de $38''$ por siglo, correspondiente a la discrepancia principal entre lo observado y lo predicho por las leyes de Kepler y por la teoría Newtoniana. Para incrementar la exactitud de la descripción, es posible considerar efectos de interacción mutua entre los planetas e introducir perturbaciones a sus órbitas, lo cual predice $43''$ por siglo en dicha anomalía. Una posterior mejora del modelo podría ser alejarse de la concepción esférica del Sol, lo cual causaría una precesión adicional de las órbitas planetarias.

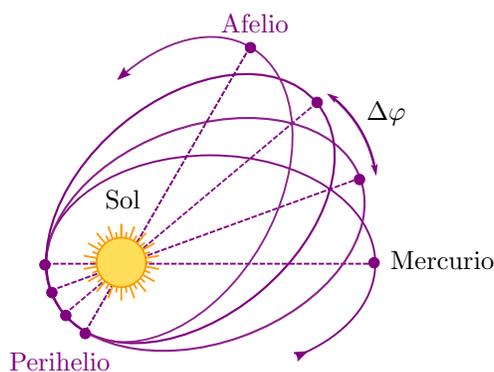


Figura 3.1: Esquema de corrimiento del Perihelio (o afelio) de Mercurio. Fuente: Adaptada a partir de la figura original disponible en https://en.wikipedia.org/wiki/File:Perihelion_precession.svg.

Entonces, es razonable pensar que una descripción más detallada del sistema solar o de cualquier cuerpo extendido en el espacio, requeriría de una teoría gravitacional más exacta que la de Newton. Aunque el ejemplo del sistema solar es útil por su familiaridad, los sistemas físicos que se estudiarán en la presente tesis incluyen efectos relativistas de interés, razón por la cual es la teoría de RG la requerida

para una descripción apropiada.

3.1. Expansión Multipolar de Cuerpos extendidos en RG

En RG, la determinación de ecuaciones de movimiento requiere al mismo tiempo la determinación del campo gravitacional de los cuerpos que se mueven. Si se recuerda cuan dificultoso es determinar el campo gravitacional de una distribución de materia, incluso en el caso más simple cuando se trata de un cuerpo aislado como ocurre con la solución de Schwarzschild (Schwarzschild, 1916) en la ec. (3.29), entonces comprendemos de inmediato la complejidad que conlleva enfrentar el problema completo. Una simplificación de utilidad y con la estamos familiarizados desde la teoría newtoniana es la que se hace cuando se consideran cuerpos pequeños comparados con otros, tan pequeños que pueda ser despreciada su influencia sobre el movimiento de los otros cuerpos. Tales cuerpos son llamados *partículas de prueba* y la descripción de su movimiento es bastante más simple que en el caso general. Para ello, primero se debe determinar el campo gravitacional de fondo (aquél existente cuando la presencia de la partícula es ignorada) en el que se moverán y segundo hallar su ecuación de movimiento. A esta segunda tarea es lo que nos abocaremos en esta sección.

Han habido varios intentos por determinar ecuaciones de movimiento de cuerpos masivos, particularmente el de cuerpos con masas comparables y velocidades pequeñas comparadas con la de la luz. El mismo Einstein destaca junto a otros colaboradores en Einstein & Infeld & Hoffmann (1938); Einstein & Infeld (1949) por haber brindado la primera solución a dicho problema. Su método principal consiste en resolver las ecuaciones de campo despreciando cualquier característica interna de dichos cuerpos. Como consecuencia de ello, las órbitas que siguen las partículas son curvas geodésicas del campo gravitacional de fondo $g_{\mu\nu}$. Destaca también el método propuesto en Fock (1939), el cual es mucho más simple que el empleado por Einstein y que luego fue empleado en Papapetrou (1951). Dicho método tiene como características principales el considerar la estructura interna de los cuerpos y además el emplear como ecuación dinámica la ley de balance del tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$ de los cuerpos, es decir

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.1)$$

Entre otras formulaciones de expansiones multipolares destacan por obtener resultados similares a los de Papapetrou las contribuciones de Mathisson (1937); Dixon (1970a, 1974); Ohashi (2003). Destaca también Obukhov & Puetzfeld (2015) en el contexto de teorías gravitacionales más generales que RG, como aquellas con campos escalares o estructuras geométricas adicionales, debido al amplio rango de teorías para las cuales proporciona ecuaciones de movimiento.

3.1.1. Formulación de Papapetrou (1951)

La formulación planteada en Papapetrou (1951) se hace para partículas de prueba, representando a un cuerpo extendido en RG por su *tubo de mundo* en vez de una *línea de mundo* como se hace con las partículas puntuales. En la fig. 3.2 se muestra la descripción local de partículas de prueba.

La idea general de la Expansión Multipolar es que el tubo de mundo Σ del cuerpo es representado por una línea de mundo L , donde se substituye el tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$ por un conjunto de momentos multipolares $M^{\mu\nu}$, $M^{\mu\nu\lambda}$, etc., a lo largo de la línea de mundo. Los resultados obtenidos con esta formulación tienen como ecuación dinámica sólo la ecuación (3.1) y consideran la estructura interna de los cuerpos, razón que los vuelve físicamente interesantes.

En Papapetrou (1951) se calcula las ecuaciones de movimiento de una partícula “monopolo-dipolo”, suponiendo que dicha partícula es esférica de radio R y que ésta es muy pequeña comparada con alguna longitud característica del campo gravitacional en el que se mueve; por ejemplo, la distancia desde el cuerpo central en el caso del campo de Schwarzschild. Vale decir, se supone que las dimensiones de la partícula tienden a cero y que dentro del tubo de mundo la línea L representa el movimiento de la partícula con coordenadas X^{μ} , las cuales deben depender de la coordenada t o del tiempo propio τ sobre la curva. De esta forma, con la suposición de que $R \rightarrow 0$, la arbitrariedad en la elección de la curva desaparece. Así, fijando la línea de mundo $X^{\mu}(\tau)$, se define $\delta x^{\mu} := x^{\mu} - X^{\mu}(\tau)$, con x^{μ} las coordenadas

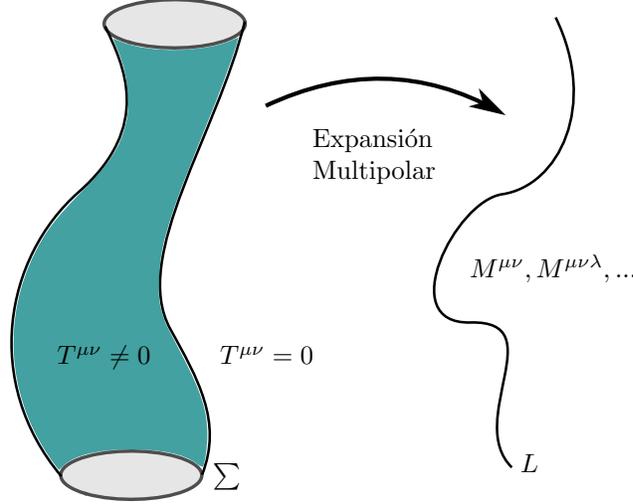


Figura 3.2: Esquema representativo de la abstracción realizada al considerar la Expansión Multipolar. Fuente: Elaboración propia.

de algún punto dentro del cuerpo y se consideran integrales sobre el espacio 3-dimensional para $t = \text{cte.}$, del tipo:

$$\int T^{\mu\nu} dV, \quad \int \delta x^\rho T^{\mu\nu} dV, \quad \int \delta x^\rho \delta x^\sigma T^{\mu\nu} dV, \quad (3.2)$$

donde se debe hacer una integración tridimensional en el espacio para $t = \text{constante}$. Con ello en consideración, se definen:

- La partícula monopolo (*single-pole* por su nombre en inglés), tal que $\int T^{\mu\nu} dV \neq 0$, con todas las otras integrales nulas.
- La partícula monopolo-dipolo (*pole-dipole* por su nombre en inglés), tal que $\int T^{\mu\nu} dV \neq 0$ y $\int \delta x^\rho T^{\mu\nu} dV \neq 0$, con todas las otras integrales con factores δx^ρ en su integrando nulas.

Partículas con multipolos de mayor orden pueden ser definidas de la misma forma.

Partícula Monopolo

Por la ecuación (3.1) vemos que $\partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\gamma\nu}^\mu T^{\gamma\nu} = 0$, de donde se encuentra que $\partial_\nu(x^\alpha T^{\mu\nu}) = T^{\mu\alpha} - x^\alpha \Gamma_{\gamma\nu}^\mu T^{\gamma\nu}$. Así, considerando las integrales espaciales de ambos términos se encuentra que

$$\frac{d}{dX^0} \left(\int T^{\alpha 0}(x^\gamma) dV \right) = - \int \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x^\gamma) T^{\mu\nu}(x^\gamma) dV, \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dX^0} \left(\int x^\alpha T^{\beta 0}(x^\gamma) dV \right) = \int T^{\alpha\beta}(x^\gamma) dV - \int x^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta T^{\mu\nu}(x^\gamma) dV. \quad (3.4)$$

Ya que dentro de la partícula, los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x^\gamma)$ pueden ser expandidos en serie en torno a X^γ , como $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x^\gamma) = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(X^\gamma + \delta x^\gamma) \approx \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(X^\gamma) + \partial_\sigma(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha)(X^\gamma) \delta x^\sigma + \dots$ y dado que para esta partícula las integrales con δx^γ son nulas, entonces

$$\frac{d}{dX^0} \left(\int T^{\alpha 0}(x^\gamma) dV \right) + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(X^\gamma) \int T^{\mu\nu}(x^\gamma) dV = 0, \quad (3.5)$$

$$\int T^{\alpha\beta}(x^\gamma) dV = \frac{dX^\alpha}{dX^0} \int T^{\beta 0}(x) dV. \quad (3.6)$$

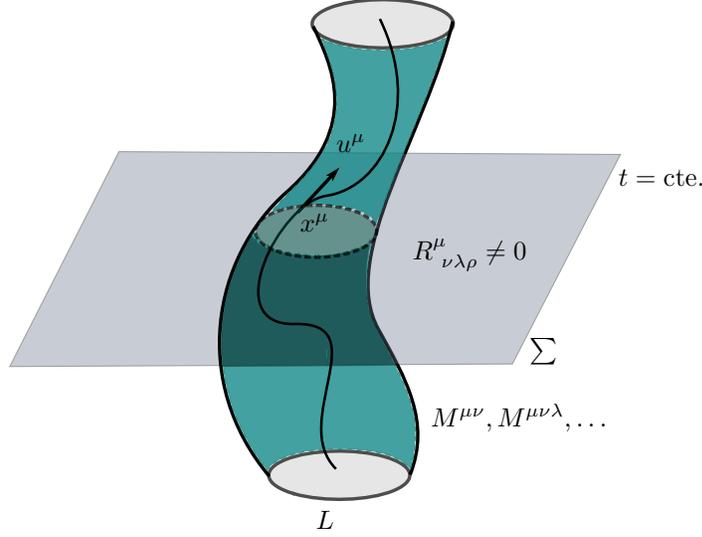


Figura 3.3: Arbitrariedad en la elección de la línea de mundo del cuerpo: La línea de mundo es arbitraria y no necesariamente corresponde a su centro de masa o de energía. Simplemente representa la trayectoria del cuerpo. Fuente: Elaboración propia.

Definiendo $u^\mu := dX^\mu/d\tau$ como la cuadrivelocidad de la partícula con $c^2 d\tau^2 = ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$, podemos definir además las siguientes cantidades simétricas

$$M^{\alpha\beta} := u^0 \int T^{\alpha\beta}(x^\gamma) dV, \quad (3.7)$$

las cuales al ser evaluadas en (3.5)-(3.6) nos conduce a que

$$\frac{d}{dX^0} \left(\frac{M^{\mu 0}}{u^0} \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(X^\gamma) \left(\frac{M^{\alpha\beta}}{u^0} \right) = 0, \quad (3.8)$$

$$M^{\alpha\beta} = u^\alpha \frac{M^{\beta 0}}{u^0}. \quad (3.9)$$

Por ello, al hacer $\beta = 0$ en (3.9) obtenemos que $M^{\alpha 0} = u^\alpha M^{00}/u^0$, término que al ser introducido en el segundo miembro de la ec. (3.9) y definiendo $m := M^{00}/(u^0)^2$ nos permite escribir

$$M^{\alpha\beta} = m u^\alpha u^\beta, \quad (3.10)$$

cantidades que al ser introducidas en la ecuación (3.8) y notando que $d/(dX^0) = d/(u^0 d\tau)$, nos permiten escribirla como

$$\frac{d}{d\tau} (m u^\alpha) + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0. \quad (3.11)$$

Note que la ec. (3.11) no sólo es una ecuación diferencial para la órbita del cuerpo, sino que también es una ecuación de evolución para m , ya que si la contraemos con u_α , teniendo presente que al derivar $1 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u_\mu u^\mu$ con respecto a τ se halla que

$$u_\alpha \frac{du^\alpha}{d\tau} + u_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0, \quad (3.12)$$

entonces

$$\frac{dm}{d\tau} = 0. \quad (3.13)$$

Por consiguiente, podemos escribir

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0, \quad (3.14)$$

de donde vemos que las órbitas de la partícula monopolar son geodésicas del campo gravitacional, donde m es la masa en reposo de la partícula, la cual se mantiene constante a lo largo del movimiento (puede probarse que m es un escalar bajo una transformación general de coordenadas).

Partícula Monopolo-Dipolo

De manera análoga al procedimiento presentado en 3.1.1, si definimos los momentos multipolares $M^{\alpha\beta} := u^0 \int_V T^{\alpha\beta} dV$ y $M^{\lambda\mu\nu} := -u^0 \int_V \delta x^\lambda T^{\mu\nu} dV$ como cantidades no nulas. Manipulando las integrales del tipo (3.2) se puede encontrar que

$$\frac{dS^{\alpha\beta}}{d\tau} + \frac{u^\alpha}{u^0} \frac{dS^{\beta 0}}{d\tau} - \frac{u^\beta}{u^0} \frac{dS^{\alpha 0}}{d\tau} + \left(\Gamma_{\gamma\nu}^\alpha - \frac{u^\alpha}{u^0} \Gamma_{\gamma\nu}^0 \right) M^{\beta\gamma\nu} - \left(\Gamma_{\gamma\nu}^\beta - \frac{u^\beta}{u^0} \Gamma_{\gamma\nu}^0 \right) M^{\alpha\gamma\nu} = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{M^{\nu 0}}{u^0} \right) + \Gamma_{\gamma\nu}^\mu M^{\gamma\nu} - \partial_\sigma \Gamma_{\gamma\nu}^\mu M^{\sigma\gamma\nu} = 0, \quad (3.16)$$

con $S^{\alpha\beta} := -(M^{\alpha\beta 0} - M^{\beta\alpha 0})/u^0$ antisimétrico. Las ecuaciones precedentes son popularmente conocidas como *ecuaciones de Mathisson-Papapetrou*, ya que Mathisson llegó a resultados similares (Mathisson, 1937).

Note que como el espacio es plano en el contexto de Relatividad Especial, en coordenadas cuasi-cartesianas tenemos que $\Gamma_{\gamma\nu}^\mu = 0$, de modo que las ecuaciones de evolución se reducen a

$$\frac{dS^{\alpha\beta}}{d\tau} + \frac{u^\alpha}{u^0} \frac{dS^{\beta 0}}{d\tau} - \frac{u^\beta}{u^0} \frac{dS^{\alpha 0}}{d\tau} = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{M^{\nu 0}}{u^0} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Definiendo $p^\mu := M^{\mu 0}/u^0$ y $J^{\alpha\beta} := S^{\alpha\beta} + X^\alpha p^\beta - X^\beta p^\alpha$, se encuentra que

$$\frac{dp^\alpha}{ds} = 0, \quad \frac{dJ^{\alpha\beta}}{ds} = 0, \quad (3.19)$$

ecuaciones que codifican la conservación de la energía, el momentum lineal y el momentum angular total a lo largo de la línea de mundo. Note que si $S^{\alpha\beta} = 0$, entonces $p^\mu \propto u^\mu$ y como p^μ se conserva, entonces la cuadrivelocidad también lo hace y por ende X^μ es una función lineal con τ . A partir de esto, vemos que si $S^{\alpha\beta} \neq 0$, entonces X^μ tendrá funciones arbitrarias de τ . En particular, si se elige un sistema de referencia en que $p^i = 0$, entonces $u^i \neq 0$; es decir, el cuerpo puede tener un movimiento interno.

Sin embargo, en el contexto de la teoría de RG podemos ver que las ecs. (3.15) y (3.16) no son evidentemente covariantes bajo una transformación general de coordenadas (TGC). Podemos notar además, que con dichas ecuaciones el movimiento no está únicamente determinado ya que se tienen:

- Diez incógnitas: M^{00} , tres componentes independientes de u^α y seis de $S^{\alpha\beta}$.
- Sólo siete ecuaciones linealmente independientes.

A partir de esos dos evidentes conflictos y al preguntarse qué hacer al respecto es que surgen las dos soluciones siguientes:

- “Covariantizar las ecuaciones (3.15) y (3.16)”. Es decir, escribir las ecuaciones explícitamente covariantes.
- Elegir alguna “Condición Suplementaria del spin” para poder fijar una única solución.

Con esa motivación en mente, es que Papapetrou demostró que los momentos multipolares no son tensores ante TGC's, ya que transforman como

$$M^{\lambda\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \left(\frac{dx^\lambda}{\partial x'^\rho} - \frac{u^\lambda}{u^0} \frac{\partial x^0}{\partial x'^\rho} \right) M'^{\rho\mu\nu}, \quad (3.20)$$

$$M^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} M'^{\mu\nu} - \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\rho} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho} \right) M'^{\rho\mu\nu} + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{u^0} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^0}{\partial x'^\rho} M'^{\rho\mu\nu} \right). \quad (3.21)$$

A partir de esto, se puede demostrar que $S^{\alpha\beta}$ efectivamente son las componentes de un tensor bajo TGC's; el tensor de spin $S^{\alpha\beta}$ y que la cantidad $m := (M^{\alpha 0} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha S^{\mu 0} u^\nu) u_\alpha / u^0$ es un escalar bajo TGC's; la masa en reposo m del cuerpo. Además, considerando la derivada (covariante) total de $S^{\mu\nu}$ a lo largo de la línea de mundo (con la definición proporcionada en la ec. (A.16)), entonces se puede escribir:

$$\frac{DS^{\alpha\beta}}{D\tau} + u^\alpha u_\rho \frac{DS^{\beta\rho}}{D\tau} - u^\beta u_\rho \frac{DS^{\alpha\rho}}{D\tau} = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{D}{D\tau} \left(m u^\alpha + u_\beta \frac{DS^{\alpha\beta}}{D\tau} \right) + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} u^\sigma R^\alpha_{\nu\sigma\mu} = 0, \quad (3.23)$$

donde $R^\alpha_{\nu\sigma\mu}$ es el tensor de curvatura en que la partícula se mueve, definido por la ec. (A.7). Note que (3.23) es una generalización de la ecuación (3.14), ya que se le recobra cuando se considera el tensor de spin nulo y que las ecuaciones (3.22)-(3.23) son evidentemente covariantes y además que para encontrar una única solución es necesario fijar una condición suplementaria sobre el tensor de spin $S^{\alpha\beta}$.

3.1.2. Diferentes Formulaciones

En la literatura se encuentran diversas formulaciones de la Expansión Multipolar como en Mathisson (1937); Fock (1939); Dixon (1970a,b, 1974), las cuales conducen a las mismas ecuaciones de movimiento (3.15) y (3.16). Mientras que la formulación de Papapetrou (1951) no es explícitamente covariante bajo TGC's desde un principio, algunas de ellas sí lo son. Lo que todas comparten en común, es que las ecuaciones de movimiento obtenidas no permiten determinar completamente el sistema, vale decir, no se puede fijar una única línea de mundo. En el caso de partículas monopolo-dipolo, se poseen 3 ecuaciones desconocidas que deben ser fijadas arbitrariamente para calcular una única solución. Dicho proceso es llamado: fijar las *condiciones suplementarias del spin*. Cada una de las elecciones sugeridas en la literatura posee un significado físico diferente, el cual lucía un tanto obscuro en las primeras formulaciones que trataban con partículas de prueba. A continuación se listan algunas de las que se han podido estudiar durante el desarrollo de la tesis:

- Corinaldesi & Papapetrou (1951):

$$S^{i0} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.24)$$

- Pirani (1956):

$$u_\sigma S^{\mu\sigma} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.25)$$

- Tulczyjew (1959):

$$p_\sigma S^{\mu\sigma} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.26)$$

- Kyrian & Semerák (2007):

$$\omega_\sigma S^{\mu\sigma} \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.27)$$

donde ω_σ es un vector tipo tiempo paralelamente transportado a lo largo de la línea de mundo, con $\omega_\sigma \omega^\sigma = -1$ y $D\omega^\mu/D\tau = 0$.

Aún hoy, no es clara la calidad de elección que poseen las condiciones de spin, lo que lo vuelve un problema poco entendido. Se suele discutir sobre las condiciones correctas o incorrectas para cada tipo de partícula, las cuales proporcionan diferentes soluciones para un mismo movimiento físico. Así, cada una de estas elecciones fija distintas líneas de mundo y define diferentes cantidades conservadas para la dinámica. Para mayor detalle de las consecuencias físicas que conlleva cada una de ellas, consultar [Kyrian & Semerák \(2007\)](#); [Costa & Natário \(2015\)](#).

3.1.3. Partículas de prueba en la métrica de Schwarzschild

Con el propósito de brindar alguna aplicación a las ecuaciones (3.15)-(3.16), en [Corinaldesi & Papapetrou \(1951\)](#) se estudió el comportamiento de una partícula de prueba rotante de tamaño macroscópico (con el centro de masa dentro del cuerpo) en el campo gravitacional de Schwarzschild producido por un cuerpo mucho más grande y masivo.

Por la necesidad de imponer alguna condición suplementaria para el spin para poder hallar una única solución a las ecuaciones, vemos que

$$S^{i0} \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.28)$$

es sugerente por su simplicidad, pero elegir la condición (3.28) sin especificar un sistema de referencia en que sea válido, no tiene ningún sentido físico. Por ejemplo, si la ec. (3.28) es satisfecha en el sistema de referencia comóvil con la partícula de prueba, con respecto al cual el cuerpo central está en movimiento. Entonces, no es del todo evidente que dicho sistema de referencia sea equivalente al SR en que el cuerpo central está en reposo. Por el contrario, se ha sugerido en [Rosen \(1940\)](#) que este segundo SR tiene especial importancia. Así, se debe suponer que la ec. (3.28) es válida en el SR comóvil al cuerpo que genera el campo de Schwarzschild. Dicha elección es equivalente a fijar la línea de mundo de la partícula de prueba, como su centro de masa .

Si bien, el elemento de línea del campo de Schwarzschild se encuentra dado por la ec. (3.29), en el artículo señalado se empleó la siguiente forma de escribirlo

$$ds^2 = e^\mu dt^2 - e^{-\mu} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \cos^2(\theta_{pp})d\phi^2), \quad (3.29)$$

donde $\theta_{pp} = \pi/2 - \theta$, con $\theta_{pp} \in [-\pi/2, \pi/2]$ y $e^\mu := (1 - 2r_0/r)$, correspondiente a la notación que emplearemos en esta sección para poder comparar fácilmente con los resultados del artículo.

Suponiendo que la partícula de prueba de masa m tiene coordenadas $X^\mu(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \theta_{pp}(\tau), \phi(\tau))$, en el campo de Schwarzschild tipo (3.29) e imponiendo (3.28), se encuentra que

$$(m + m_s)(\ddot{t} + \lambda^0) - \frac{3}{r}\dot{r}\dot{t}m_s = 0, \quad (3.30)$$

$$(m + m_s)(\ddot{r} + \lambda^1) - \frac{3}{r}\dot{r}^2m_s = 0, \quad (3.31)$$

$$(m + m_s)(\ddot{\theta}_{pp} + \lambda^2) - \frac{3}{r}\dot{r}\dot{\theta}_{pp}m_s + \frac{3\mu'}{2r}\dot{r}S^{12} + \frac{3r\mu'}{2}e^\mu \cos^2(\theta_{pp})\dot{\phi}S^{23} = 0, \quad (3.32)$$

$$(m + m_s)(\ddot{\phi} + \lambda^3) - \frac{3}{r}\dot{r}\dot{\phi}m_s - \frac{3\mu'}{2r}\dot{r}S^{31} - \frac{3r\mu'}{2}e^\mu \dot{\theta}_{pp}S^{23} = 0, \quad (3.33)$$

$$\dot{S}^{12} + \left(\frac{1}{r} - \mu'\right)\dot{r}\dot{S}^{12} + re^\mu \cos^2(\theta_{pp})\dot{\phi}S^{23} - \cos(\theta_{pp})\sin(\theta_{pp})\dot{\phi}S^{31} = 0, \quad (3.34)$$

$$\dot{S}^{23} + \left(\frac{\mu'}{2} - \frac{1}{r}\right)\dot{\phi}S^{12} + \left(\frac{2}{r}\dot{r} - \tan(\theta_{pp})\dot{\theta}_{pp}\right)S^{23} + \left(\frac{\mu'}{2} - \frac{1}{r}\right)\dot{\theta}_{pp}S^{31} = 0, \quad (3.35)$$

$$\dot{S}^{31} + \tan(\theta_{pp})\dot{\phi}S^{12} + re^\mu \dot{\theta}_{pp}S^{23} + \left[\left(\frac{1}{r} - \mu'\right)\dot{r} - \tan(\theta_{pp})\dot{\theta}_{pp}\right]S^{31} = 0, \quad (3.36)$$

donde se ha definido

$$\mu' := \frac{d\mu}{dr} = (2r_0/r^2)e^{-\mu}, \quad (3.37)$$

$$m_s := \frac{r^2\mu'}{2}(\cos(\theta_{\text{pp}})^2\dot{\phi}S^{31} - \dot{\theta}_{\text{pp}}S^{12}), \quad (3.38)$$

$$\lambda^0 := \mu'\dot{t}, \quad (3.39)$$

$$\lambda^1 := \frac{\mu'}{2}e^{2\mu}\dot{t}^2 - \frac{\mu'}{2}\dot{r}^2 - re^\mu\dot{\theta}_{\text{pp}}^2 - re^\mu\cos^2(\theta_{\text{pp}})\dot{\phi}^2, \quad (3.40)$$

$$\lambda^2 := \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}_{\text{pp}} + \cos(\theta_{\text{pp}})\sin(\theta_{\text{pp}})\dot{\phi}^2, \quad (3.41)$$

$$\lambda^3 := \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} - 2\tan(\theta_{\text{pp}})\dot{\theta}_{\text{pp}}\dot{\phi}, \quad (3.42)$$

con las siguientes constantes de movimiento:

$$E := e^\mu(m + m_s)\frac{dt}{ds}, \quad (3.43)$$

$$I_z := r^2\cos^2(\theta_{\text{pp}})\left[(m + m_s)\dot{\phi} + \frac{\mu'}{2}S^{31}\right] + S_z, \quad (3.44)$$

y $S_z := -r^2\cos(\theta_{\text{pp}})\sin(\theta_{\text{pp}}) - r\cos^2(\theta_{\text{pp}})S^{31}$.

3.1.4. Ejemplo

Notando que para un radio r_c , $t_c := 1/\sqrt{1 - 3r_0/r_c}$ y $\dot{\phi}_c := (\sqrt{r_0/(r_c - 3r_0)})/r_c$ son las condiciones iniciales que en el campo de Schwarzschild generan geodésicas (tipo tiempo) circulares estables en el plano xy .

Si suponemos que la partícula es esférica de radio $a = (7.4 \times 10^{-25}) \times r_0$ y masa $m = 3.7 \times 10^{-25}$ veces la masa M del cuerpo central que se encuentra inicialmente a una distancia $r_c = 100 \times r_0$ de él. Entonces, ésta puede tener una magnitud máxima de spin dada por $S_{\text{max}} = mac$.

Con las siguientes condiciones iniciales:

$$t(\tau = 0) = 0, \quad r(\tau = 0) = r_c, \quad \theta_{\text{pp}}(\tau = 0) = 0, \quad \phi(\tau = 0) = 0, \quad (3.45)$$

$$\dot{t}(\tau = 0) = \dot{t}_c, \quad \dot{r}(\tau = 0) = 0, \quad \dot{\theta}_{\text{pp}}(\tau = 0) = 0, \quad \dot{\phi}(\tau = 0) = 1.25 \times \dot{\phi}_c, \quad (3.46)$$

se han resuelto numéricamente las ecuaciones de movimiento en dos situaciones:

- Cuando se desprecian sus efectos de rotación interna, vale decir

$$S^{12}(\tau = 0) = 0, \quad S^{23}(\tau = 0) = 0, \quad S^{31}(\tau = 0) = 0. \quad (3.47)$$

- Cuando sus efectos de rotación son “pequeños”, como por ejemplo:

$$S^{12}(\tau = 0) = \frac{0.8 \times S_{\text{max}}}{r_c}, \quad S^{23}(\tau = 0) = 0, \quad S^{31}(\tau = 0) = 0. \quad (3.48)$$

Integrando las ecuaciones¹ (3.30)-(3.36) con una grilla equiespaciada de la variable τ con 10^4 valores entre $[0, \tau_{\text{max}}]$, donde $\tau_{\text{max}} = 5.2 \times 10^7$ se obtienen las trayectorias mostradas en las figuras 3.4 y 3.5 respectivamente. Note que en 3.4 el movimiento está siempre sobre el plano xy y se aprecia el corrimiento del perihelio de las órbitas aproximadamente elípticas. Por su parte, cuando se incorpora el spin en la dinámica el movimiento deja de estar en el plano xy , en este caso el efecto es débil debido a la elección particular de los valores iniciales para las componentes no nulas del tensor de spin.

¹Empleando el integrador `odeint` de `scipy` en Python.

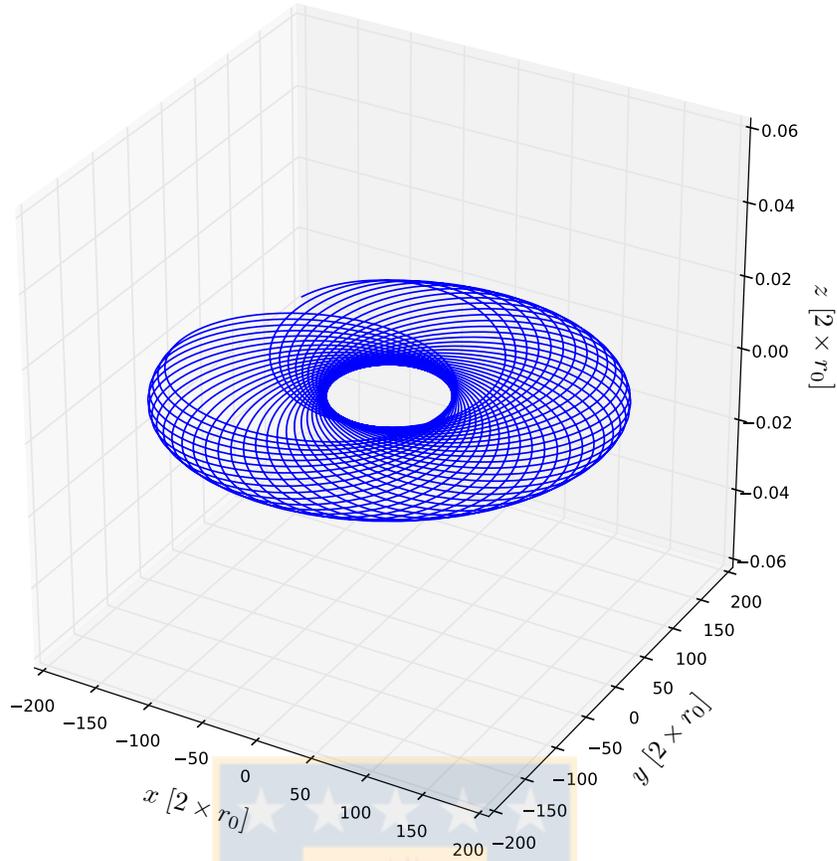


Figura 3.4: Trayectoria de partícula de prueba en campo de Schwarzschild cuando no se considera su rotación interna. Fuente: Elaboración propia.

3.2. Dinámica Postnewtoniana

En lo sucesivo, cuando hablemos de un *sistema autogravitante*, lo que entenderemos será “*sistema, cuya dinámica es causada exclusivamente por la interacción con su propio campo gravitacional*”. Habiendo aclarado esto, intentaremos encontrar algún parámetro perturbativo ϵ que lo caracterice en general y el cual usaremos para desarrollar nuestra expansión. En el apéndice C puede encontrar la descripción newtoniana de un sistema autogravitante de dos cuerpos masivos.

3.2.1. Sistema autogravitante de N masas

El problema de N masas autogravitantes es uno de los problemas clásicos de la Mecánica Celeste, el cual no tiene una solución exacta en RG, ni en el contexto Newtoniano. Pese a ello, como el teorema virial (Poisson *et al.*, 2014) es general para un sistema de N partículas es esperable que la ec. (C.48) (que fue estimada para un sistema autogravitante de dos masas en el contexto newtoniano) siga siendo válida para un sistema autogravitante de N masas.

Caracterizaremos por tanto, un sistema autogravitante de N masas como aquél en que si v , R_0 y M son una rapidez, una distancia y una masa (total) característica del mismo, éstos se relacionan en órdenes de magnitud por medio de

$$v^2 \sim \frac{GM}{R_0}. \quad (3.49)$$

Como estamos interesados en establecer un parámetro ϵ que caracterice a los sistemas autogravitantes y que cumpla que $\epsilon \ll 1$, recordando además que la teoría de RG restringe a las velocidades, pues $v < c$. Entonces, para velocidades como en (3.49) se tiene que $v \ll c$ y por tanto resulta completamente razonable

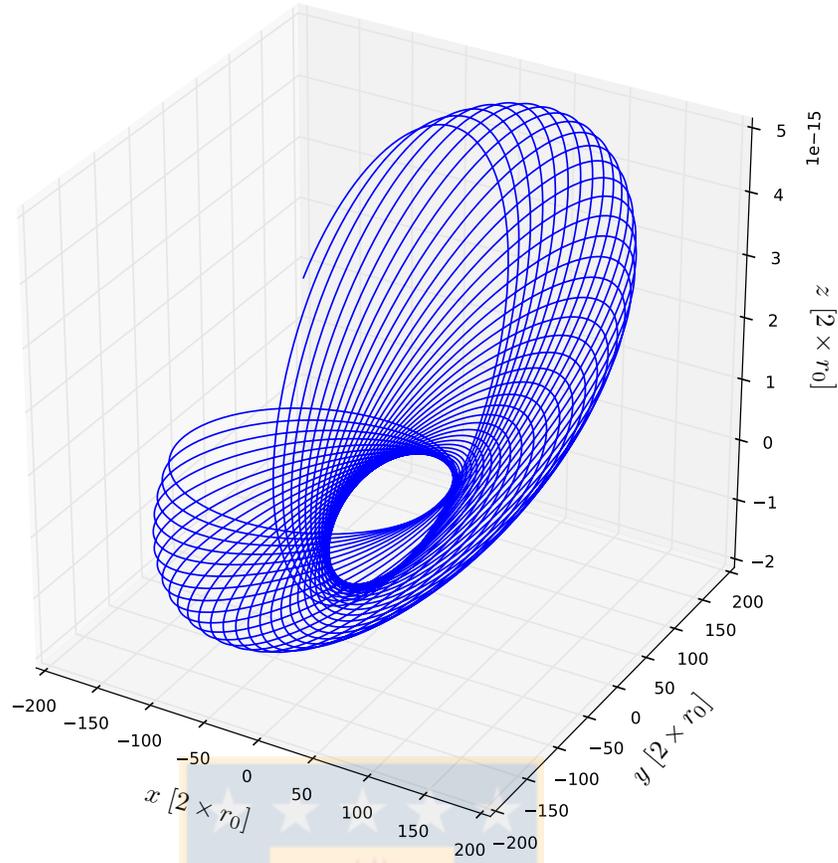


Figura 3.5: Trayectoria de partícula de prueba en campo de Schwarzschild cuando sí se considera su rotación interna. Fuente: Elaboración propia.

escoger el parámetro ϵ que estamos buscando como

$$\epsilon \sim \frac{v}{c} \sim \sqrt{\frac{GM}{R_0 c^2}}, \quad (3.50)$$

donde para poder establecer una correspondencia con los resultados obtenidos en la expansión en G , se impone una especie de “gauge global”, aquél que fije el empleo de coordenadas cuasi-cartesianas donde la coordenada x^0 sea siempre tipo tiempo ($ds^2 > 0$ al fijar x^i) y satisfaga que $\partial_0 \sim \epsilon$ (se supone que la métrica es cuasi-estática) y las coordenadas x^i sean siempre tipo espacio ($ds^2 < 0$ al fijar x^0).

Como se justificará mejor en la sección donde estudiaremos la elección de gauges particulares para la resolución de las ecuaciones linealizadas, siempre podremos hacer cambios de coordenadas (entre las cuasi-cartesianas ya escogidas), que nos permitan escribir las componentes de la métrica y su inversa en la siguiente forma:

$$g_{00} = 1 + g_{00}^{(2)} + g_{00}^{(4)} + \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad g^{00} = 1 + g^{(2)00} + g^{(4)00} + \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad (3.51)$$

$$g_{0i} = g_{0i}^{(3)} + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad g^{0i} = g^{(3)0i} + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad (3.52)$$

$$g_{ij} = -\delta_{ij} + g_{ij}^{(2)} + g_{ij}^{(4)} + \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad g^{ij} = -\delta^{ij} + g^{(2)ij} + g^{(4)ij} + \mathcal{O}(\epsilon^6). \quad (3.53)$$

3.2.2. Geometría del espaciotiempo a cuarto orden en $\epsilon \sim \sqrt{G}$

Métrica a cuarto orden en ϵ

Con todas las consideraciones ya señaladas, si postulamos una métrica $g_{\mu\nu}$ y su inversa $g^{\mu\nu}$ en potencias del parámetro ϵ como en (3.51)-(3.53), como éstas deben satisfacer la ecuación (A.4), se tiene entonces:

$$g_{00}g^{00} + g_{0b}g^{b0} = \delta_0^0 = 1, \quad (3.54)$$

$$g_{00}g^{0i} + g_{0b}g^{bi} = \delta_0^i = 0, \quad (3.55)$$

$$g_{i0}g^{00} + g_{ib}g^{b0} = \delta_i^0 = 0, \quad (3.56)$$

$$g_{i0}g^{0j} + g_{ib}g^{bj} = \delta_i^j. \quad (3.57)$$

Por consiguiente, al reemplazar (3.51)-(3.53) en (3.54)-(3.57), se concluye que a cuarto orden en ϵ , las componentes de la inversa están relacionadas con las de la métrica $g_{\mu\nu}$ en la siguiente forma:

$$g^{(2)00} = -g_{00}^{(2)}, \quad g^{(4)00} = -g_{00}^{(4)} + g_{00}^{(2)}g_{00}^{(2)}, \quad (3.58)$$

$$g^{(3)0i} = g_{0i}^{(3)}, \quad (3.59)$$

$$g^{(2)ij} = -g_{ij}^{(2)}, \quad g^{(4)ij} = -g_{ij}^{(4)} - g_{ib}^{(2)}g_{bj}^{(2)}. \quad (3.60)$$

Símbolos de Christoffel a cuarto orden en ϵ

Al evaluar (3.51)-(3.53) y (3.58)-(3.60) en (A.6), es posible hallar que los símbolos de Christoffel a cuarto orden en el parámetro ϵ tienen la siguiente estructura:

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{00}^0^{(3)} + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{0i}^0^{(2)} + \Gamma_{0i}^0^{(4)} + \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad \Gamma_{ij}^0 = \Gamma_{ij}^0^{(3)} + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad (3.61)$$

$$\Gamma_{00}^l = \Gamma_{00}^l^{(2)} + \Gamma_{00}^l^{(4)} + \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad \Gamma_{0i}^l = \Gamma_{0i}^l^{(3)} + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad \Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ij}^l^{(2)} + \Gamma_{ij}^l^{(4)} + \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad (3.62)$$

donde se han definido convenientemente las contribuciones a distintos órdenes como

$$\Gamma_{00}^0^{(3)} := \frac{1}{2}\partial_0 g_{00}^{(2)}, \quad (3.63)$$

$$\Gamma_{0i}^0^{(2)} := \frac{1}{2}\partial_i g_{00}^{(2)}, \quad (3.64)$$

$$\Gamma_{0i}^0^{(4)} := \frac{1}{2}(\partial_i g_{00}^{(4)} - g_{00}^{(2)}\partial_i g_{00}^{(2)}), \quad (3.65)$$

$$\Gamma_{ij}^0^{(3)} := \frac{1}{2}(\partial_i g_{j0}^{(3)} + \partial_j g_{0i}^{(3)} - \partial_0 g_{ij}^{(2)}), \quad (3.66)$$

$$\Gamma_{00}^l^{(2)} := \frac{1}{2}\partial_l g_{00}^{(2)}, \quad (3.67)$$

$$\Gamma_{00}^l^{(4)} := -\partial_0 g_{0l}^{(3)} + \frac{1}{2}(\partial_l g_{00}^{(4)} + g_{lb}^{(2)}\partial_b g_{00}^{(2)}), \quad (3.68)$$

$$\Gamma_{0i}^l^{(3)} := -\frac{1}{2}(\partial_0 g_{il}^{(2)} + \partial_i g_{l0}^{(3)} - \partial_l g_{0i}^{(3)}), \quad (3.69)$$

$$\Gamma_{ij}^l^{(2)} := -\frac{1}{2}(\partial_i g_{jl}^{(2)} + \partial_j g_{li}^{(2)} - \partial_l g_{ij}^{(2)}), \quad (3.70)$$

$$\Gamma_{ij}^l^{(4)} := -\frac{1}{2}(\partial_i g_{jl}^{(4)} + \partial_j g_{li}^{(4)} - \partial_l g_{ij}^{(4)}) - \frac{1}{2}g_{lb}^{(2)}(\partial_i g_{jb}^{(2)} + \partial_j g_{bi}^{(2)} - \partial_b g_{ij}^{(2)}). \quad (3.71)$$

Tensor de Ricci a cuarto orden en ϵ

Evaluando las componentes de las métrica y de los símbolos de Christoffel para los distintos valores de las componentes del tensor de Ricci (A.8), encontramos que

$$R_{00} = \overset{(2)}{R}_{00} + \overset{(4)}{R}_{00} + \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad R_{0i} = \overset{(3)}{R}_{0i} + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad R_{ij} = \overset{(2)}{R}_{ij} + \overset{(4)}{R}_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad (3.72)$$

donde se han definido

$$\overset{(2)}{R}_{00} := \frac{1}{2} \partial_l \partial_l \overset{(2)}{g}_{00}, \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \overset{(4)}{R}_{00} := & \frac{1}{2} \partial_l \partial_l \overset{(4)}{g}_{00} + \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 \overset{(2)}{g}_{00} - \partial_0 \partial_l \overset{(3)}{g}_{0l} + \frac{1}{2} (\partial_l \overset{(2)}{g}_{lb}) (\partial_b \overset{(2)}{g}_{00}) + \frac{1}{2} \overset{(2)}{g}_{lb} (\partial_l \partial_b \overset{(2)}{g}_{00}) \\ & - \frac{1}{4} (\partial_b \overset{(2)}{g}_{00}) (\partial_b \overset{(2)}{g}_{00}) - \frac{1}{4} (\partial_l \overset{(2)}{g}_{00}) (\partial_l \overset{(2)}{g}_{00}), \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\overset{(3)}{R}_{0i} := \frac{1}{2} \partial_l \partial_l \overset{(3)}{g}_{0i} - \frac{1}{2} \partial_i \partial_l \overset{(3)}{g}_{l0} - \frac{1}{2} \partial_0 \partial_l \overset{(3)}{g}_{il} + \frac{1}{2} \partial_0 \partial_i \overset{(2)}{g}_{00}, \quad (3.75)$$

$$\overset{(2)}{R}_{ij} := \frac{1}{2} \partial_l \partial_l \overset{(2)}{g}_{ij} + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j \overset{(2)}{g}_{00} - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j \overset{(2)}{g}_{00} - \frac{1}{2} \partial_i \partial_l \overset{(2)}{g}_{jl} - \frac{1}{2} \partial_j \partial_l \overset{(2)}{g}_{li}, \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \overset{(4)}{R}_{ij} := & \frac{1}{2} (\partial_i \partial_j \overset{(4)}{g}_{00} - \partial_j \partial_i \overset{(4)}{g}_{00} - \partial_i \partial_l \overset{(4)}{g}_{jl} + \partial_l \partial_i \overset{(4)}{g}_{ij}) - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j \overset{(4)}{g}_{00} \\ & + \frac{1}{2} \partial_0 (\partial_i \overset{(3)}{g}_{0j} + \partial_j \overset{(3)}{g}_{i0}) - \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 \overset{(2)}{g}_{ij} + \frac{1}{4} (\partial_i \overset{(2)}{g}_{00}) (\partial_j \overset{(2)}{g}_{00}) + \frac{1}{2} \overset{(2)}{g}_{00} (\partial_i \partial_j \overset{(2)}{g}_{00}) \\ & - \frac{1}{4} (\partial_b \overset{(2)}{g}_{00} + 2 \partial_l \overset{(2)}{g}_{lb} - \partial_b \overset{(2)}{g}_{0l}) (\partial_i \overset{(2)}{g}_{jb} + \partial_j \overset{(2)}{g}_{bi} - \partial_b \overset{(2)}{g}_{ij}) \\ & + \frac{1}{4} (\partial_j \overset{(2)}{g}_{lb} + \partial_l \overset{(2)}{g}_{bj} - \partial_b \overset{(2)}{g}_{jl}) (\partial_i \overset{(2)}{g}_{lb} + \partial_l \overset{(2)}{g}_{bi} - \partial_b \overset{(2)}{g}_{il}) \\ & + \frac{1}{2} \overset{(2)}{g}_{lb} (\partial_i \partial_j \overset{(2)}{g}_{lb} - \partial_j \partial_b \overset{(2)}{g}_{il} - \partial_i \partial_l \overset{(2)}{g}_{jb} + \partial_l \partial_b \overset{(2)}{g}_{ij}). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Escalar de curvatura a cuarto orden en ϵ

Análogamente, en este caso tenemos que el escalar de curvatura (A.9) está dado por

$$R = \overset{(2)}{R} + \overset{(4)}{R} + \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad (3.78)$$

con

$$\overset{(2)}{R} := \partial_l \partial_l \overset{(2)}{g}_{00} + \partial_l \partial_b \overset{(2)}{g}_{lb} - \partial_l \partial_l \overset{(2)}{g}_{bb}, \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \overset{(4)}{R} := & \partial_l \partial_l \overset{(4)}{g}_{00} - (\partial_l \partial_b \overset{(4)}{g}_{lb} - \partial_l \partial_l \overset{(4)}{g}_{bb}) - 2 \partial_0 \partial_b \overset{(3)}{g}_{0b} + \frac{3}{2} \partial_0 \partial_0 \overset{(2)}{g}_{00} - \overset{(2)}{g}_{00} (\partial_l \partial_l \overset{(2)}{g}_{00}) \\ & - \frac{1}{2} (\partial_b \overset{(2)}{g}_{00}) (\partial_b \overset{(2)}{g}_{00} + \partial_l \overset{(2)}{g}_{lb} + \partial_l \overset{(2)}{g}_{0l}) + \frac{1}{4} (2 \partial_l \overset{(2)}{g}_{lp} - \partial_p \overset{(2)}{g}_{ll}) (2 \partial_b \overset{(2)}{g}_{bp} - \partial_p \overset{(2)}{g}_{bb}) \\ & - \frac{1}{2} (\partial_p \overset{(2)}{g}_{lb}) (\partial_b \overset{(2)}{g}_{lp} - \partial_p \overset{(2)}{g}_{bl} + \frac{1}{2} \partial_l \overset{(2)}{g}_{pb}) + \overset{(2)}{g}_{lb} (\partial_l \partial_b \overset{(2)}{g}_{00} - \partial_p \partial_p \overset{(2)}{g}_{lb} + 2 \partial_l \partial_p \overset{(2)}{g}_{bp} - \partial_l \partial_b \overset{(2)}{g}_{pp}). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Tensor de Einstein a cuarto orden en ϵ

En este caso, el tensor se Einstein (A.10) está dado por

$$G_{00} = \overset{(2)}{G}_{00} + \overset{(4)}{G}_{00} + \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad G_{0i} = \overset{(3)}{G}_{0i} + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad G_{ij} = \overset{(2)}{G}_{ij} + \overset{(4)}{G}_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad (3.81)$$

donde

$$G_{00}^{(2)} := \frac{1}{2}(\partial_l \partial_l g_{bb}^{(2)} - \partial_l \partial_b g_{lb}^{(2)}), \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} G_{00}^{(4)} := & \frac{1}{2}(\partial_l \partial_l g_{bb}^{(4)} - \partial_l \partial_b g_{lb}^{(4)}) + \frac{1}{4} \partial_0 \partial_0 g_{ll}^{(2)} + \frac{1}{2} g_{lb}^{(2)} (\partial_p \partial_p g_{lb}^{(2)} - 2 \partial_l \partial_p g_{bp}^{(2)} + \partial_l \partial_b g_{pp}^{(2)}) \\ & - \frac{1}{8} (2 \partial_l g_{lp}^{(2)} - \partial_p g_{ll}^{(2)}) (2 \partial_b g_{bp}^{(2)} - \partial_p g_{bb}^{(2)}) + \frac{1}{4} (\partial_p g_{lb}^{(2)}) (\partial_b g_{lp}^{(2)} - \partial_p g_{bl}^{(2)} + \frac{1}{2} \partial_l g_{pb}^{(2)}) \\ & + \frac{1}{2} g_{00}^{(2)} (\partial_l \partial_l g_{bb}^{(2)} - \partial_l \partial_b g_{lb}^{(2)}), \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$G_{0i}^{(3)} := \frac{1}{2}(\partial_l \partial_l g_{0i}^{(3)} - \partial_i \partial_l g_{l0}^{(3)}) + \frac{1}{2}(\partial_0 \partial_i g_{ll}^{(2)} - \partial_0 \partial_l g_{li}^{(2)}), \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(2)} := & \frac{1}{2}(\partial_l \partial_l g_{ij}^{(2)} - \partial_i \partial_j g_{00}^{(2)} + \partial_i \partial_j g_{ll}^{(2)} - \partial_i \partial_l g_{jl}^{(2)} - \partial_j \partial_l g_{li}^{(2)}) \\ & + \delta_{ij} (\partial_l \partial_l g_{00}^{(2)} + \partial_l \partial_b g_{lb}^{(2)} - \partial_l \partial_l g_{bb}^{(2)}), \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$G_{ij}^{(4)} := ? \quad (3.86)$$

De esta forma, conociendo el tensor energía-momentum $T_{\mu\nu}$ a distintos órdenes en el parámetro ϵ y las condiciones de borde del sistema gravitacional a considerar, nos podemos dedicar a la compleja tarea de resolver las ecuaciones (3.88), (3.89) y (3.90), con la motivación de calcular las componentes de la métrica.

Ecuaciones de campo de Einstein a cuarto orden en ϵ

Notar que en el contexto de aproximaciones consideradas $G/c^2 \sim \epsilon^2$, entonces, de la ec. (A.10), vemos que el tensor energía-momentum tiene la forma

$$T_{00} = T_{00}^{(0)} + T_{00}^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad T_{0i} = T_{0i}^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad T_{ij} = T_{ij}^{(0)} + T_{ij}^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (3.87)$$

En el contexto de considerar todos los términos geométricos a cuarto orden en ϵ tendríamos que dedicarnos a resolver las 17 ecuaciones siguientes:

$$G_{00}^{(2)} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}^{(0)}, \quad G_{00}^{(4)} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}^{(2)}, \quad (3.88)$$

$$G_{0i}^{(3)} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{0i}^{(1)}, \quad (3.89)$$

$$G_{ij}^{(2)} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}^{(0)}, \quad G_{ij}^{(4)} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}^{(2)}. \quad (3.90)$$

Tensor energía-momentum a cuarto orden en ϵ

Para un sistema gravitacional determinado, por las ecuaciones (3.88), (3.89) y (3.90) que constituyen la estructura supuesta para las componentes covariantes del tensor energía-momentum, esperamos también que para las componentes contravariantes $T^{\mu\nu}$ del mismo, se puedan escribir como

$$T^{00} = T^{00(0)} + T^{00(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad T^{0i} = T^{0i(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad T^{ij} = T^{ij(0)} + T^{ij(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (3.91)$$

Como las componentes covariantes $T_{\mu\nu}$ y las contravariantes $T^{\mu\nu}$, están relacionadas por $T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}$, entonces la versión covariante del tensor energía-momentum tiene la forma de (3.87), donde

se han definido las distintas contribuciones como

$$T_{00}^{(0)} := T^{00}, \quad (3.92)$$

$$T_{00}^{(2)} := T^{00} + 2g_{00}^{(2)} T_{00}^{(0)}, \quad (3.93)$$

$$T_{00}^{(4)} := 2g_{00}^{(2)} T_{00}^{(2)} + (2g_{00}^{(4)} + g_{00}^{(2)} g_{00}^{(2)}) T_{00}^{(0)} + 2g_{0b}^{(3)} T^{0b}, \quad (3.94)$$

$$T_{0i}^{(1)} := -T^{0i}, \quad (3.95)$$

$$T_{0i}^{(3)} := g_{i0}^{(3)} T^{00} + g_{ib}^{(2)} T^{0b} - g_{00}^{(2)} T^{0i} - g_{0l}^{(3)} T^{li}, \quad (3.96)$$

$$T_{ij}^{(0)} := T^{ij}, \quad (3.97)$$

$$T_{ij}^{(2)} := T^{ij} - g_{jb}^{(2)} T^{ib} - g_{il}^{(2)} T^{lj}, \quad (3.98)$$

$$T_{ij}^{(4)} := g_{jb}^{(4)} T^{ib} - g_{il}^{(4)} T^{lj} + g_{il}^{(2)} g_{jb}^{(2)} T^{lb} - g_{i0}^{(3)} T^{0j} - g_{j0}^{(3)} T^{i0} - g_{jb}^{(2)} T^{ib} - g_{il}^{(2)} T^{lj}. \quad (3.99)$$

Traza del tensor energía-momentum a segundo orden en ϵ

Como la traza del tensor energía-momentum se ha definido por (A.5), entonces

$$T = T^{(0)} + T^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (3.100)$$

con

$$T := T^{(0)00} - T^{(0)bb}, \quad T^{(2)} := T^{(2)00} + g_{00}^{(2)} T^{(0)00} - T^{(2)bb} + g_{lb}^{(2)} T^{lb}. \quad (3.101)$$

Componentes del tensor $K_{\mu\nu}$ a segundo orden en ϵ

Al evaluar las ecuaciones (3.92)-(3.99) y (3.101) en (1.4), se encuentra que

$$K_{00} = K_{00}^{(0)} + K_{00}^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad K_{0i} = K_{0i}^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad K_{ij} = K_{ij}^{(0)} + K_{ij}^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (3.102)$$

donde

$$K_{00}^{(0)} := \frac{1}{2} T^{(0)00} + \frac{1}{2} T^{(0)bb}, \quad (3.103)$$

$$K_{00}^{(2)} := \frac{1}{2} (T^{(2)00} + 2g_{00}^{(2)} T^{(0)00} + T^{(2)bb} - g_{ij}^{(2)} T^{ij} - g_{00}^{(2)} T^{bb}), \quad (3.104)$$

$$K_{0i}^{(1)} := -T^{0i}, \quad (3.105)$$

$$K_{ij}^{(0)} := T^{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} (T^{(0)00} - T^{(0)bb}), \quad (3.106)$$

$$K_{ij}^{(2)} := T^{ij} - g_{jk}^{(2)} T^{ik} - g_{il}^{(2)} T^{lk} - \frac{1}{2} g_{ij}^{(2)} (T^{(0)00} - T^{(0)bb}) + \frac{1}{2} \delta_{ij} (T^{(2)00} + g_{00}^{(2)} T^{(0)00} + g_{ij}^{(2)} T^{ij} - T^{(2)bb}). \quad (3.107)$$

Por lo tanto, de la ec. (1.3) vemos que en esta nueva forma de enfrentar el problema, debemos resolver las 17 ecuaciones siguientes

$$R_{00}^{(2)} = \frac{8\pi G^{(0)}}{c^4} K_{00}, \quad R_{00}^{(4)} = \frac{8\pi G^{(2)}}{c^4} K_{00}, \quad (3.108)$$

$$R_{0i}^{(3)} = \frac{8\pi G^{(1)}}{c^4} K_{0i}, \quad (3.109)$$

$$R_{ij}^{(2)} = \frac{8\pi G^{(0)}}{c^4} K_{ij}, \quad R_{ij}^{(4)} = \frac{8\pi G^{(2)}}{c^4} K_{ij}. \quad (3.110)$$

3.2.3. Tensor energía-momentum de un Fluido Perfecto

En la presente sección estudiaremos las componentes del tensor energía-momentum de un fluido perfecto en la aproximación $p/\rho c^2 \ll 1$ y el caso límite (e idealizado) de un sistema de N masas puntuales autogravitantes, el cual permite modelar de manera apropiada ciertos sistemas autogravitantes de la mecánica celeste.

Recordamos que el tensor energía-momentum para un fluido perfecto, con densidad propia de masa ρ , presión isotrópica p y cuadrivelocidad de las partículas $u^\mu := dx^\mu/d\tau$, está dado por

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (3.111)$$

Pero para muchos de los sistemas gravitacionales de interés astrofísico $p/\rho c^2 \ll 1$. Por ejemplo, para el sistema solar $p/\rho c^2 \sim 10^{-5}$, razón por la cual el tensor energía-momentum se puede aproximar a

$$T^{\mu\nu} \approx \rho u^\mu u^\nu, \quad (3.112)$$

que corresponde a modelar el sistema gravitacional en cuestión, como simple polvo. Además, podemos escribir (3.111) como

$$T^{\mu\nu} \approx \rho \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{-2}. \quad (3.113)$$

Por lo tanto, las componentes del tensor energía-momentum de un fluido perfecto en la aproximación $p/c^2 \ll \rho$ son

$$T^{00} \approx \rho c^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{-2}, \quad T^{0i} \approx \rho c v^i \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{-2}, \quad T^{ij} \approx \rho v^i v^j \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{-2}. \quad (3.114)$$

Como el tiempo propio de una partícula moviéndose con velocidad v^i está dado por

$$c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} c^2 dt^2 + 2g_{0l} c dt dx^l + g_{lb} dx^l dx^b, \quad (3.115)$$

entonces

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = g_{00} + 2g_{0l} \frac{v^l}{c} + g_{lb} \frac{v^l v^b}{c^2}. \quad (3.116)$$

Usando las componentes de la métrica dadas en (3.51)-(3.53) y expandiendo en términos del parámetro ϵ , se puede hallar que las componentes del tensor energía-momentum tiene la forma de (3.91), donde

$$T^{(0)00} := \rho c^2, \quad (3.117)$$

$$T^{(2)00} := \rho c^2 \left(-g_{00}^{(2)} + \frac{v^b v^b}{c^2}\right), \quad (3.118)$$

$$T^{(4)00} := \rho c^2 \left(-2g_{0l}^{(3)} \frac{v^l}{c} - g_{00}^{(4)} - g_{lb}^{(2)} \frac{v^l v^b}{c^2} + g_{00}^{(2)} g_{00}^{(2)} - 2g_{00}^{(2)} \frac{v^b v^b}{c^2} + \left(\frac{v^b v^b}{c^2}\right)^2\right), \quad (3.119)$$

$$T^{(1)0i} := \rho c v^i, \quad (3.120)$$

$$T^{(3)0i} := \rho c v^i \left(-g_{00}^{(3)} + \frac{v^b v^b}{c^2}\right), \quad (3.121)$$

$$T^{(0)ij} := 0, \quad (3.122)$$

$$T^{(2)ij} := \rho v^i v^j, \quad (3.123)$$

$$T^{(4)ij} := \rho v^i v^j \left(-g_{00}^{(2)} + \frac{v^b v^b}{c^2}\right). \quad (3.124)$$

3.2.4. Tensor energía-momentum de un sistema de N masas “puntuales”

En la teoría de RG, el tensor energía-momentum

$$T_{RG}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_a m_a c \int \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dx_a^\nu}{d\tau_a} \delta^{(4)}(x^\gamma - x_a^\gamma(\tau_a)) d\tau_a, \quad (3.125)$$

de un sistema de N masas puntuales ha sido construido como una generalización del tensor energía-momentum correspondiente en la teoría de Relatividad Especial con $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $g = -1$, donde m_a es la masa, $dx^\mu/d\tau_a$ la cuadrivelocidad y $x^\gamma(\tau_a)$ la trayectoria en el espaciotiempo de la a -ésima partícula.

Usando la identidad de la ec. (A.2) se conduce a que la ec. (3.125) se puede escribir

$$T_{RG}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_a m_a \frac{dx_a^\mu}{dt} \frac{dx_a^\nu}{dt} \left(\frac{d\tau_{a,0}}{dt} \right)^{-1} \delta^{(3)}(x^i - x_a^i(t)), \quad (3.126)$$

donde se ha reemplazado $x^0 \stackrel{!}{=} ct$.

Si la métrica $g_{\mu\nu}$ tiene la forma de la ec. (3.51)-(3.53), entonces su determinante a segundo orden en el parámetro ϵ , corresponde a

$$g = \begin{vmatrix} 1 + \overset{(2)}{g}_{00} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \mathcal{O}(\epsilon^3) & \mathcal{O}(\epsilon^3) & \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ \mathcal{O}(\epsilon^3) & -1 + \overset{(2)}{g}_{11} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \mathcal{O}(\epsilon^3) & \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ \mathcal{O}(\epsilon^3) & \mathcal{O}(\epsilon^3) & -1 + \overset{(2)}{g}_{22} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ \mathcal{O}(\epsilon^3) & \mathcal{O}(\epsilon^3) & \mathcal{O}(\epsilon^3) & -1 + \overset{(2)}{g}_{33} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{vmatrix} \quad (3.127)$$

$$= (1 + \overset{(2)}{g}_{00} + \mathcal{O}(\epsilon^4))(-1 + \overset{(2)}{g}_{11} + \mathcal{O}(\epsilon^4))(-1 + \overset{(2)}{g}_{22} + \mathcal{O}(\epsilon^4))(-1 + \overset{(2)}{g}_{33} + \mathcal{O}(\epsilon^4)) \quad (3.128)$$

$$= -1 - \overset{(2)}{g}_{00} + \overset{(2)}{g}_{bb} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (3.129)$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \overset{(2)}{g}_{00} - \overset{(2)}{g}_{bb} + \mathcal{O}(\epsilon^4)}}. \quad (3.130)$$

Expandiendo $(1/\sqrt{-g})(d\tau_a/dt)^{-1}$ en términos del parámetro ϵ , se halla que las componentes del tensor $T_{RG}^{\mu\nu}$ tienen la forma de (3.91), donde

$$T_{RG}^{(0)00} = \sum_a m_a c^2 \delta^{(3)}(x^i - x_a^i(t)), \quad (3.131)$$

$$T_{RG}^{(2)00} = \sum_a m_a c^2 \left(\frac{1}{2} \frac{v_a^b}{c} \frac{v_a^b}{c} - \overset{(2)}{g}_{00} + \frac{1}{2} \overset{(2)}{g}_{bb} \right) \delta^{(3)}(x^i - x_a^i(t)), \quad (3.132)$$

$$T_{RG}^{(1)0i} = \sum_a m_a c v_a^i \delta^{(3)}(x^i - x_a^i(t)), \quad (3.133)$$

$$T_{RG}^{(0)ij} = 0, \quad (3.134)$$

$$T_{RG}^{(2)ij} = \sum_a m_a v_a^i v_a^j \delta^{(3)}(x^i - x_a^i(t)). \quad (3.135)$$

Tensor $K_{\mu\nu}$

Por la definición del tensor $K_{\mu\nu}$ en la ec. (1.4), vemos que para sistemas con tensores energía-momentum en la forma (3.91), con $T^{(0)ij} = 0$ como ocurre con el fluido perfecto en la aproximación

$p/\rho c^2 \ll 1$ o con el sistema de las N masas puntuales estudiados en la sección anterior, entonces las componentes a distintos órdenes en el parámetro ϵ (3.103)-(3.137) están dados por

$$K_{00}^{(0)} = \frac{1}{2} T^{00}, \quad (3.136)$$

$$K_{00}^{(2)} = \frac{1}{2} (T^{00} + 2g_{00}^{(2)} T^{00} + T^{bb}), \quad (3.137)$$

$$K_{0i}^{(1)} = -T^{0i}, \quad (3.138)$$

$$K_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} \delta_{ij} T^{00}, \quad (3.139)$$

$$K_{ij}^{(2)} = T^{ij} - \frac{1}{2} g_{ij}^{(2)} T^{00} + \frac{1}{2} \delta_{ij} (T^{00} + g_{00}^{(2)} T^{00} - T^{bb}). \quad (3.140)$$

3.2.5. Imposición de gauges

Como es habitual al tratar con este tipo de ecuaciones diferenciales acopladas y no lineales en las incógnitas (las componentes de la métrica), es usual imponer determinados gauges, los cuales imponen condiciones sobre la métrica y además fijan ciertos conjuntos de coordenadas en los cuales la solución hallada es válida. En el presente trabajo, hemos empleado dos tipos de gauges, los cuales según su acción, los hemos clasificado en gauges globales y gauges particulares. A continuación se discutirá el empleo de ambos tipos de gauges.

Gauge global

Es aquél que fija la estructura general de la métrica y además condiciones sobre la naturaleza de las coordenadas a emplear. Por ejemplo, en el presente estudio se ha impuesto que la métrica propuesta tenga la forma (3.51)-(3.53) y que la coordenada x^0 sea tipo tiempo y las coordenadas x^i sean tipo espacio, donde además se cumpla que al derivar con respecto a la coordenada x^0 se aumente en un orden el conteo de la dependencia en el parámetro ϵ .

De la ec. (A.11) es claro que si poseemos una métrica general con dependencia en el parámetro ϵ como en la ec. (1.8), que no posea la estructura de la ec. (3.51)-(3.53) siempre podremos hacer una transformación de coordenadas en la forma $x^\mu \mapsto x'^\mu = x'^\mu(x^\nu, \epsilon)$ tal que en la nuevas coordenadas se imponga dicha estructura. Así, sólo restaría resolver las ecuaciones que de (A.11) se desprendan.

Gauge particular

Es aquél que fija condiciones extras sobre las componentes de la métrica y sus derivadas, las cuales por lo demás simplifican la estructura de las ecuaciones, lo que permite solucionarlas con relativa sencillez.

Notando que para una transformación de coordenadas general, las componentes de la métrica, su inversa y los símbolos de Christoffel transforman como (A.11), (A.12) y (A.13). Entonces, en las nuevas coordenadas se tiene que

$$g'^{\mu\nu} \Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta} g^{\gamma\delta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right). \quad (3.141)$$

Pero por regla de la cadena, como $(\partial x'^\mu / \partial x^\gamma)(\partial x^\alpha / \partial x'^\mu) = \partial x^\alpha / \partial x^\gamma = \delta_\gamma^\alpha$, entonces

$$g'^{\mu\nu} \Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (3.142)$$

Así, desarrollando las sumas del primer miembro de la ecuación precedente, se tiene que

$$g'^{00} \Gamma'_{00}{}^\lambda + 2g'^{0b} \Gamma'_{0b}{}^\lambda + g'^{bl} \Gamma'_{bl}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (3.143)$$

De la ec. (3.143) es claro que si poseemos una métrica general con dependencia en el parámetro ϵ como en la ec. (1.8), que no posea la estructura de la ec. (3.51)-(3.53) siempre podremos hacer una transformación de coordenadas en la forma $x^\mu \mapsto x'^\mu = x'^\mu(x^\nu, \epsilon)$ tal que en la nuevas coordenadas se imponga dicha estructura. Así, sólo restaría resolver las ecuaciones que de (A.11) se desprendan.

A continuación discutiremos el uso de dos gauges famosos que suelen encontrarse en la literatura existente sobre aproximaciones postnewtonianas, éstos son los gauges estándar y el armónico.

- **Gauge estándar:** Es aquél en que las componentes de la métrica y los símbolos de Christoffel satisfacen que

$$g^{ij}\Gamma_{ij}^0 = 0, \quad (3.144)$$

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^k = 0. \quad (3.145)$$

Así, si tenemos unas coordenadas en que el gauge estándar no sea satisfecho, siempre podemos hacer una transformación de coordenadas tal que en la nuevas coordenadas impongamos que

$$g'^{ij}\Gamma'_{ij}{}^0 \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.146)$$

$$g'^{\mu\nu}\Gamma'_{\mu\nu}{}^k \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.147)$$

Entonces, por la ec. (3.143), debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$g'^{00}\Gamma'_{00}{}^0 + 2g'^{0b}\Gamma'_{0b}{}^0 = \frac{\partial x'^0}{\partial x^\rho} g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}{}^\rho - g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^0}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \quad (3.148)$$

$$0 = \frac{\partial x'^k}{\partial x^\rho} g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}{}^\rho - g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \quad (3.149)$$

el cual nos permite calcular aquellas coordenadas en que efectivamente (por imposición) se satisface el gauge estándar. Cabe señalar que las ecuaciones precedentes no proporcionan soluciones únicas, sino que una familia de coordenadas que satisfacen el gauge estándar.

- **Gauge armónico:** Es aquél en las componentes de la métrica y los símbolos de Christoffel satisfacen que

$$g^{\rho\lambda}\Gamma_{\rho\lambda}{}^\mu = 0. \quad (3.150)$$

De manera análoga al gauge estándar, si tuviéramos coordenadas en que el gauge armónico no sea satisfecho, siempre podemos hacer una transformación de coordenadas tal que en la nuevas coordenadas impongamos que

$$g'^{\rho\lambda}\Gamma'_{\rho\lambda}{}^\mu \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.151)$$

De esta manera, por la ec. (3.143), debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$0 = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}{}^\rho - g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \quad (3.152)$$

el cual en este caso, nos permitiría calcular aquellas coordenadas en que efectivamente (por imposición) se satisfaga el gauge armónico. Nuevamente las ecuaciones precedentes no proporcionan soluciones únicas, sino que una familia de coordenadas armónicas que satisfacen el gauge armónico.

3.2.6. Imponiendo el gauge estándar

En el presente trabajo se empleará el gauge post-newtoniano estándar dado por las ecs. (3.144) y (3.145). Por lo tanto, para una métrica como en la ec. (3.51)-(3.53), con los símbolos de Christoffel como

en la ecs. (3.61)-(3.62), se tiene que

$$g^{ij}\Gamma_{ij}^0 = -\Gamma_{ii}^{(3)0} + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad (3.153)$$

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^k = \Gamma_{00}^{(2)k} + \Gamma_{00}^{(4)k} + g^{(2)00}\Gamma_{00}^{(2)k} - \Gamma_{bb}^{(2)k} - \Gamma_{bb}^{(4)k} + g^{(2)bl}\Gamma_{bl}^{(2)k} + \mathcal{O}(\epsilon^5). \quad (3.154)$$

Así, a cuarto orden en la parámetro ϵ , el gauge estándar ha impuesto que

$$0 \stackrel{!}{=} \Gamma_{bb}^{(3)0}, \quad (3.155)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \Gamma_{00}^{(2)k} - \Gamma_{bb}^{(2)k}, \quad (3.156)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \Gamma_{00}^{(4)k} + g^{(2)00}\Gamma_{00}^{(2)k} - \Gamma_{bb}^{(4)k} + g^{(2)bl}\Gamma_{bl}^{(2)k}. \quad (3.157)$$

Evaluando los valores para los distintos órdenes en que los símbolos de Christoffel dependen de las componentes de la métrica, se tiene que

$$0 = \partial_b g_{0b}^{(3)} - \frac{1}{2}\partial_0 g_{bb}^{(2)}, \quad (3.158)$$

$$0 = \frac{1}{2}\partial_k g_{00}^{(2)} + \partial_b g_{bk}^{(2)} - \frac{1}{2}\partial_k g_{bb}^{(2)}, \quad (3.159)$$

más una ecuación que depende de $g_{ij}^{(4)}$ y ha sido omitida ya que no es necesaria para el cálculo de las ecuaciones de movimiento de un cuerpo autointeractuante con un determinado campo gravitacional. Por dicha razón, en lo sucesivo todo cuanto dependa de éstas, no serán consideradas o simplemente se les destacará en negrita haciendo notar que para un estudio completo de las cantidades hasta cuarto orden en el parámetro ϵ debieran aparecer.

Si derivamos con respecto a la cordenanda l -ésima la ec. (3.159), se tiene que

$$\partial_l \partial_b g_{bk}^{(2)} - \frac{1}{2}\partial_l \partial_k g_{bb}^{(2)} + \frac{1}{2}\partial_l \partial_k g_{00}^{(2)} = 0, \quad (3.160)$$

ecuación que al ser simetrizada respecto a k y l , nos permite encontrar que

$$\partial_l \partial_b g_{bk}^{(2)} + \partial_k \partial_b g_{bl}^{(2)} + \partial_l \partial_k g_{00}^{(2)} - \partial_k \partial_l g_{bb}^{(2)} = 0. \quad (3.161)$$

Luego de imponer el gauge estándar, las componentes del tensor de Ricci resultan ser

$$R_{00}^{(2)} = \frac{1}{2}\partial_l \partial_l g_{00}^{(2)}, \quad (3.162)$$

$$R_{00}^{(4)} = \frac{1}{2}\partial_l \partial_l g_{00}^{(4)} + \frac{1}{2}(\partial_l g_{lb}^{(2)})(\partial_b g_{00}^{(2)}) + \frac{1}{2}g_{lb}^{(2)}(\partial_l \partial_b g_{00}^{(2)}) - \frac{1}{4}(\partial_b g_{00}^{(2)})(\partial_b g_{ll}^{(2)}) - \frac{1}{4}(\partial_l g_{00}^{(2)})(\partial_l g_{00}^{(2)}), \quad (3.163)$$

$$R_{0i}^{(3)} = \frac{1}{2}\partial_l \partial_l g_{0i}^{(3)} - \frac{1}{2}\partial_0 \partial_l g_{il}^{(2)} + \frac{1}{4}\partial_i \partial_0 g_{ll}^{(2)}, \quad (3.164)$$

$$R_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2}\partial_l \partial_l g_{ij}^{(2)}, \quad (3.165)$$

más el término $R_{ij}^{(4)}$ que ha sido omitido por depender de $g_{ij}^{(4)}$.

3.2.7. Solucionando las ecuaciones de Einstein

Usando el tensor $K_{\mu\nu}$ dado en las ecs. (3.103)-(3.107), podemos escribir las ecuaciones (3.108) y (3.110) a segundo orden en ϵ como

$$\frac{1}{2}\partial_l \partial_l g_{00}^{(2)} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\frac{1}{2}T^{00} \right), \quad \frac{1}{2}\partial_l \partial_l g_{ij}^{(2)} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\frac{1}{2}\delta_{ij}T^{00} \right), \quad (3.166)$$

lo cual corresponde simplemente a resolver 4 veces la ecuación de Poisson. Eligiendo por tanto, aquellas soluciones asintóticamente nulas, se tiene

$${}^{(0)}g_{ij}(\vec{x}, t) = -\delta_{ij} \frac{2G}{c^4} \int_{V'} \frac{{}^{(0)}T^{00}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (3.167)$$

Se define el potencial $\phi = \phi(\vec{x}, t)$ como

$$\phi(\vec{x}, t) := -\frac{G}{c^2} \int_{V'} \frac{{}^{(0)}T^{00}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \quad (3.168)$$

tal que podamos escribir

$${}^{(0)}g_{00} = 2\frac{\phi}{c^2}, \quad {}^{(0)}g_{ij} = 2\delta_{ij} \frac{\phi}{c^2}. \quad (3.169)$$

Cabe notar que con ϕ definido en la forma (3.168), cuando ${}^{(0)}T^{00} = \rho c^2$, se recobra el potencial newtoniano. De esta forma, usando ${}^{(2)}g_{\mu\nu} = (2\delta_{\mu\nu}\phi)/c^2 = 6\phi/c^2$, encontramos que

$$\partial_l \partial_l {}^{(3)}g_{0i} = -\left(\frac{16\pi G}{c^4}\right) {}^{(1)}T^{0i} - \frac{\partial_0 \partial_i \phi}{c^2}, \quad (3.170)$$

que nuevamente son 3 ecuaciones de Poisson. Análogamente a lo realizado para las componentes de la métrica a orden 2, elegimos aquellas soluciones asintóticamente nulas, entonces

$${}^{(3)}g_{0i}(\vec{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int_{V'} \frac{{}^{(1)}T^{0i}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi c^2} \int_{V'} \frac{\partial_0 \partial_i \phi(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (3.171)$$

Ahora usamos la identidad dada por la ec. (A.1) para escribir el potencial $\phi(\vec{x}, t)$ definido en la ec. (3.168) como

$$\phi(\vec{x}, t) = \partial_i \partial_i \left(-\frac{G}{2c^2} \int_{V'} \frac{{}^{(0)}T^{00}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \right). \quad (3.172)$$

Se definen pues, los potenciales $\chi = \chi(\vec{x}, t)$ y $\xi_i = \xi_i(\vec{x}, t)$, como

$$\chi(\vec{x}, t) := -\frac{G}{2c^2} \int_{V'} \frac{{}^{(0)}T^{00}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \quad \xi_i(\vec{x}, t) := -\frac{4G}{c^2} \int_{V'} \frac{{}^{(1)}T^{0i}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \quad (3.173)$$

tal que $\phi(\vec{x}, t) = \partial_i \partial_i \chi(\vec{x}, t)$ y tal que podamos escribir las componentes ${}^{(3)}g_{0i}$ elegidas en la ec. (3.171) como

$${}^{(3)}g_{0i} = -\frac{\xi_i}{c^2} - \frac{\partial_0 \partial_i \chi}{c^2}. \quad (3.174)$$

De evaluar la ec. (3.107) en (3.110), se tiene además que

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R_{00} &= \frac{1}{2} \partial_l \partial_l {}^{(4)}g_{00} + \frac{1}{2} (\partial_l {}^{(2)}g_{lb}) (\partial_b {}^{(2)}g_{00}) + \frac{1}{2} g_{lb} (\partial_l \partial_b {}^{(2)}g_{00}) - \frac{1}{4} (\partial_b {}^{(2)}g_{00}) (\partial_b {}^{(2)}g_{ll}) - \frac{1}{4} (\partial_l {}^{(2)}g_{00}) (\partial_l {}^{(2)}g_{00}) \\ &= \left(\frac{8\pi G}{c^4}\right) \frac{1}{2} ({}^{(2)}T^{00} + 2g_{00} {}^{(0)}T^{00} + T^{bb}). \end{aligned} \quad (3.175)$$

Evaluando las componentes de la métrica en términos de los potenciales en la ec. (3.175) y notando que $\partial_b(\phi^2) = 2\phi(\partial_b\phi)$, $\partial_b\partial_b(\phi^2) = 2(\partial_b\phi)(\partial_b\phi) + 2\phi(\partial_b\partial_b\phi)$, se deduce entonces que

$$\partial_l \partial_l {}^{(4)}g_{00} = \left(\frac{8\pi G}{c^4}\right) ({}^{(2)}T^{00} + T^{bb}) + 2\frac{\partial_b \partial_b (\phi^2)}{c^4}. \quad (3.176)$$

Definiendo el potencial $\psi = \psi(\vec{x}, t)$ como

$$2\frac{\psi}{c^4} := {}^{(4)}g_{00} - 2\frac{\phi^2}{c^4}, \quad (3.177)$$

entonces la ec. (3.176) adopta la forma $\partial_t \partial_t \psi = 4\pi G({}^{(2)}T^{00} + {}^{(2)}T^{bb})$, es decir a una ecuación de Poisson para el campo ψ . Eligiendo una solución asintóticamente nula, tenemos

$$\psi(\vec{x}, t) = -G \int_{V'} \frac{({}^{(2)}T^{00} + {}^{(2)}T^{bb})(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (3.178)$$

Por lo tanto, las componentes de la perturbación de la métrica en función de los potenciales ϕ , ξ , χ y ψ ya definidos, son:

$${}^{(2)}g_{00} = 2\frac{\phi}{c^2}, \quad {}^{(4)}g_{00} = 2\frac{\psi}{c^4} + 2\frac{\phi^2}{c^4}, \quad (3.179)$$

$${}^{(3)}g_{0i} = -\frac{\xi_i}{c^2} - \frac{\partial_0 \partial_i \chi}{c^2}, \quad (3.180)$$

$${}^{(2)}g_{ij} = 2\frac{\phi}{c^2} \delta_{ij}, \quad {}^{(4)}g_{ib}, \quad (3.181)$$

donde como se señaló, ${}^{(4)}g_{ij}$ no ha sido calculado. Además, dichos potenciales en el gauge considerado satisfacen la siguiente relación

$$\partial_i \xi_i + 4\partial_0 \phi = 0. \quad (3.182)$$

En resumen, con las componentes de la perturbación de la métrica calculadas previamente, se tiene que las componentes de la métrica, el elemento de línea y los símbolos de Christoffel resultan ser

$$g_{00} = 1 + 2\frac{\phi}{c^2} + 2\frac{\psi}{c^4} + 2\frac{\phi^2}{c^4} + \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad (3.183)$$

$$g_{0i} = -\frac{\xi_i}{c^2} - \frac{\partial_0 \partial_i \chi}{c^2} + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad (3.184)$$

$$g_{ij} = -\delta_{ij} + 2\frac{\phi}{c^2} \delta_{ij} + {}^{(4)}g_{ib} + \mathcal{O}(\epsilon^6). \quad (3.185)$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.186)$$

$$= (1 + 2\frac{\phi}{c^2} + 2\frac{\psi}{c^4} + 2\frac{\phi^2}{c^4})c^2 dt^2 + 2(-\frac{\xi_b}{c^2} - \frac{\partial_0 \partial_b \chi}{c^2})c dt dx^b + (-\delta_{bl} + 2\frac{\phi}{c^2} \delta_{bl} + {}^{(4)}g_{lb})dx^b dx^l. \quad (3.187)$$

$$\Gamma_{00}^{(3)} = \frac{1}{2} \partial_0^{(2)} g_{00} = \frac{\partial_0 \phi}{c^2}, \quad (3.188)$$

$$\Gamma_{0i}^{(2)} = \frac{1}{2} \partial_i^{(2)} g_{00} = \frac{\partial_i \phi}{c^2}, \quad (3.189)$$

$$\Gamma_{0i}^{(4)} = \frac{\partial_i \psi}{c^4} + \frac{\partial_i \phi^2}{c^4} - 2 \frac{\phi}{c^2} \left(\frac{\partial_i \phi}{c^2} \right) = \frac{\partial_i \psi}{c^4}, \quad (3.190)$$

$$\Gamma_{ij}^{(3)} = -\frac{1}{2c^2} (\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i) - \frac{\partial_0 \partial_i \partial_j \chi}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial_0 \phi}{c^2} \delta_{ij}, \quad (3.191)$$

$$\Gamma_{00}^{(2)l} = \frac{1}{2} \partial_l^{(2)} g_{00} = \frac{1}{2} \partial_l (2 \frac{\phi}{c^2}) = \frac{\partial_l \phi}{c^2}, \quad (3.192)$$

$$\Gamma_{00}^{(4)l} = \frac{\partial_0 \xi_l}{c^2} + \frac{\partial_0 \partial_0 \partial_l \chi}{c^2} + \frac{\partial_l (\psi + 2\phi^2)}{c^4}, \quad (3.193)$$

$$\Gamma_{0i}^{(3)l} = \frac{1}{2c^2} (\partial_i \xi_l - \partial_l \xi_i) - \frac{\partial_0 \phi}{c^2} \delta_{il}, \quad (3.194)$$

$$\Gamma_{ij}^{(2)l} = \frac{1}{c^2} (\partial_l \phi \delta_{ij} - \partial_i \phi \delta_{jl} - \partial_j \phi \delta_{li}), \quad (3.195)$$

$$\Gamma_{ij}^{(4)l} = -\frac{1}{2} (\partial_i^{(4)} g_{jl} + \partial_j^{(4)} g_{li} - \partial_l^{(4)} g_{ij}) - \frac{1}{2} g_{lb}^{(2)} (\partial_i^{(2)} g_{jb} + \partial_j^{(2)} g_{bi} - \partial_b^{(2)} g_{ij}). \quad (3.196)$$

3.2.8. Aplicaciones de las aproximaciones postnewtonianas

En la presente sección, emplearemos las componentes de la métrica calculada y los símbolos de Christoffel correspondientes, para encontrar la ecuación de movimiento de un cuerpo libre de fuerzas no gravitacionales cayendo en un sistema autogravitante. Se calculará también la evolución temporal de spin para un cuerpo libre de fuerzas y torques no gravitacionales.

Además, se encontrarán las ecuaciones de Einstein-Infeld-Hoffmann, correspondientes a las ecuaciones de movimiento de un conjunto de N masas puntuales y para finalizar, se calculará la velocidad angular de precesión de una c -ésima partícula, efecto que newtonianamente no tiene precedente.

Ecuación de movimiento para un cuerpo masivo en un campo gravitacional.

Recordando que para un cuerpo masivo libre de fuerzas no gravitacionales “cayendo” en cierto campo gravitacional, su ecuación de movimiento corresponde a la ecuación de la geodésica (A.14). Debido a que las coordenadas usadas son “cuasi-inerciales”, es conveniente parametrizar las geodésicas usando la coordenada temporal t . Entonces, podemos interpretar a $x^i = x^i(t)$ como la trayectoria que describe el cuerpo masivo visto por un observador “cuasi-inercial”, con coordenadas x^μ . Así, escogiendo $\lambda \stackrel{!}{=} t$, de la ecuación precedente, se encuentra que

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{00}^\mu \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} + 2\Gamma_{0b}^\mu \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^b}{dt} + \Gamma_{bl}^\mu \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^l}{dt} = f(t) \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (3.197)$$

Si además definimos la velocidad de la partícula v^{i2} en la forma usual $v^i := dx^i/dt$, con $x^0 = ct$. Luego

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{00}^\mu c^2 + 2\Gamma_{0b}^\mu c v^b + \Gamma_{bl}^\mu v^b v^l = f(t) \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (3.198)$$

Si hacemos $\mu = 0$ en la ec. (3.198), podemos encontrar una expresión para $f(t)$ como

$$f(t) = \Gamma_{00}^0 c + 2\Gamma_{0b}^0 v^b + \Gamma_{bl}^0 \frac{v^b v^l}{c}. \quad (3.199)$$

²Cabe notar que por el momento, esta velocidad no tiene porqué depender del parámetro ϵ .

Análogamente, si hacemos $\mu = i$, en la ec. (3.198) se encuentra que

$$\frac{dv^i}{dt} = -\Gamma_{00}^i c^2 - 2\Gamma_{0b}^i c v^b - \Gamma_{bl}^i v^b v^l + f(t) v^i. \quad (3.200)$$

Introduciendo la expresión para $f(t)$ desde la ec. (3.199) en (3.200), se tiene

$$\frac{dv^i}{dt} = -\Gamma_{00}^i c^2 - 2\Gamma_{0b}^i c v^b - \Gamma_{bl}^i v^b v^l + \Gamma_{00}^0 c v^i + 2\Gamma_{0b}^0 v^b v^i + \Gamma_{bl}^0 \frac{v^b v^l}{c} v^i. \quad (3.201)$$

Usando las ecuaciones (3.188)-(3.196), se encuentra que la ecuación de movimiento del cuerpo masivo está dada por

$$\begin{aligned} \frac{dv^i}{dt} = & -\partial_i(\phi + \frac{\psi}{c^2} + \frac{2\phi^2}{c^2}) - \partial_0 \xi_i - \partial_0 \partial_0 \partial_i \chi - (\partial_b \xi_i - \partial_i \xi_b) \frac{v^b}{c} + 3(\partial_0 \phi) \frac{v^i}{c} + 4 \frac{\partial_b \phi}{c^2} v^b v^i \\ & - \frac{\partial_i \phi}{c^2} v^b v^b - (\partial_b \xi_l) \frac{v^b v^l v^i}{c^3} - (\partial_0 \partial_b \partial_l \chi) \frac{v^b v^l v^i}{c^3} - \frac{1}{2} (\partial_0 \phi) \frac{v^b v^b v^i}{c^3} - \partial_0 \partial_0 \partial_i \chi \\ & + 2(\frac{\partial_b \psi}{c^4}) v^b v^i - \mathbf{\Gamma}_{bl}^i v^b v^l + \mathcal{O}(\epsilon^6). \end{aligned} \quad (3.202)$$

En particular, si el cuerpo masivo considerado es autointeractuante, entonces $|v^i| \sim \epsilon$ y en consecuencia se justifica la independencia de $g_{ij}^{(4)}$ como se mencionó cuando se impuso el gauge estándar. Por dicha razón, la ec. (3.202) al notar que $(\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \xi))_i = -v^b (\partial_b \xi_i - \partial_i \xi_b)$, puede ser escrita en lenguaje vectorial como

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} = & -\vec{\nabla}(\phi + \frac{\psi}{c^2} + \frac{2\phi^2}{c^2}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\nabla} \chi}{\partial t^2} + \frac{\vec{v}}{c} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\xi}) + 3 \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ & + 4 \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi) - (\vec{\nabla} \phi) \frac{\vec{v}^2}{c^2} + \mathcal{O}(\epsilon^6). \end{aligned} \quad (3.203)$$

Evolución de Spin para un cuerpo libre de fuerzas y torques no gravitacionales

Eligiendo el vector de spin S^μ para un cuerpo libre de fuerzas y torques no gravitacionales³, tal que $S^\mu u_\mu = 0$ y que $S^\mu S_\mu = cte$, entonces su evolución está dada por

$$\frac{DS^\mu}{D\tau} = 0, \quad (3.204)$$

donde $D/D\tau$ corresponde a la derivada covariante con respecto al tiempo propio de la partícula que se mueve en una geodésica. Luego

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} S^\beta = 0. \quad (3.205)$$

Expandiendo esta expresión, encontramos

$$\frac{dS^\mu}{dt} + \Gamma_{00}^\mu c S^0 + \Gamma_{0b}^\mu c S^b + \Gamma_{b0}^\mu v^b S^0 + \Gamma_{bl}^\mu v^b S^l = 0. \quad (3.206)$$

Así, si hacemos $\mu = i$ en la ec. (3.206), se tiene que

$$\frac{dS^i}{dt} = -\Gamma_{00}^i c S^0 - \Gamma_{0b}^i c S^b - \Gamma_{b0}^i v^b S^0 - \Gamma_{bl}^i v^b S^l, \quad (3.207)$$

como $S^\mu u_\mu = 0$, o equivalentemente $g_{\mu\nu} S^\mu u^\nu = 0$, entonces

$$g_{\mu\nu} S^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (3.208)$$

³Para mayor detalle en cuanto a la justificación de la validez de esta ecuación consultar Rubilar (2016).

En función del parámetro t , lo anterior se reduce a

$$S^0(g_{00}c + g_{0b}v^b) + g_{b0}S^b c + g_{bl}S^b v^l = 0. \quad (3.209)$$

Recordando las ecuaciones (3.51)-(3.53), si expandimos S^0 en términos del parámetro ϵ , entonces se halla que

$$\begin{aligned} S^0 = & S^b \frac{v^b}{c} - \overset{(2)}{g}_{bl} S^b \frac{v^l}{c} - \overset{(2)}{g}_{00} \left(S^b \frac{v^b}{c} \right) - \overset{(3)}{g}_{b0} S^b - \left(\overset{(3)}{g}_{0b} \frac{v^b}{c} \right) \left(S^l \frac{v^l}{c} \right) \\ & - \overset{(4)}{g}_{bl} S^b \frac{v^l}{c} + \overset{(2)}{g}_{00} \left(\overset{(2)}{g}_{bl} S^b \frac{v^l}{c} \right) + \left(-\overset{(4)}{g}_{00} + \overset{(2)}{g}_{00} \overset{(2)}{g}_{00} \right) \left(S^b \frac{v^b}{c} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^5), \end{aligned} \quad (3.210)$$

ecuación que en función de los potenciales al ser evaluada junto con (3.188)-(3.196) en (3.207), nos permite encontrar la ecuación de evolución del spin del cuerpo masivo

$$\begin{aligned} \frac{dS^i}{dt} = & -c \left(\frac{\partial_i \phi}{c^2} \right) \left(S^b \frac{v^b}{c} \right) - c \left(\frac{\partial_i \phi}{c^2} \right) \left(-4 \frac{\phi}{c^2} \left(S^b \frac{v^b}{c} \right) \right) \\ & - c \left(\frac{\partial_0 \xi_i}{c^2} + \frac{\partial_0 \partial_0 \partial_i \chi}{c^2} + \frac{\partial_i (\psi + 2\phi^2)}{c^4} \right) \left(S^b \frac{v^b}{c} \right) \\ & - c \left(\frac{1}{2c^2} (\partial_b \xi_i - \partial_i \xi_b) - \frac{\partial_0 \phi}{c^2} \delta_{bi} \right) S^b - v^b \left(\frac{1}{2c^2} (\partial_b \xi_i - \partial_i \xi_b) - \frac{\partial_0 \phi}{c^2} \delta_{bi} \right) \left(S^l \frac{v^l}{c} \right) \\ & - \frac{1}{c^2} (\partial_i \phi \delta_{bl} - \partial_b \phi \delta_{li} - \partial_l \phi \delta_{ib}) v^b S^l - \overset{(4)}{\Gamma}_{bl}^i v^b S^l + \mathcal{O}(\epsilon^5). \end{aligned} \quad (3.211)$$

Ahora bien, si la partícula en consideración es autogravitante con el sistema gravitacional en cuestión, entonces $|v^i| \sim \epsilon$ y notando que $\epsilon_{ijk} S^i \epsilon_{klm} v^l \partial_m \phi = S^m v^i (\partial_m \phi) - S^l v^l (\partial_i \phi)$, entonces la ec. (3.211) en lenguaje vectorial se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{S}}{dt} = & \left(-\frac{1}{2c} (\vec{\nabla} \times \vec{\xi}) - \frac{3}{2c^2} (\vec{v} \times \vec{\nabla} \phi) \right) \times \vec{S} \\ & + \frac{1}{2c^2} \left(2(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi) \vec{S} - (\vec{v} \cdot \vec{S}) \vec{\nabla} \phi - (\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \phi) \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \vec{S} + \mathcal{O}(\epsilon^5). \end{aligned} \quad (3.212)$$

Definiendo

$$\vec{\Omega} := \vec{\Omega}_{\text{GEO}} + \vec{\Omega}_{\text{LS}}, \quad (3.213)$$

donde $\vec{\Omega}_{\text{GEO}} := -3(\vec{v} \times \vec{\nabla} \phi)/2c^2$ corresponde a la velocidad angular de precesión geodésica y $\vec{\Omega}_{\text{LT}} := -(\vec{\nabla} \times \vec{\xi})/2c$ corresponde a la velocidad angular de precesión de Lense-Thirring en honor a los científicos que predijeron el efecto, conocido como *frame-dragging*⁴. En consecuencia, podemos escribir la ec. (3.212) como

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{S} + \frac{1}{2c^2} \left(2(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi) \vec{S} - (\vec{v} \cdot \vec{S}) \vec{\nabla} \phi - (\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \phi) \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \vec{S} + \mathcal{O}(\epsilon^5). \quad (3.214)$$

Ecuaciones de movimiento de un sistema de N masas puntuales autointeractuantes

Como se señaló al comenzar este trabajo, el problema de hallar las ecuaciones de movimiento de un sistema de N masas puntuales, no tiene una solución exacta en la mecánica de Newton, ni en la RG de Einstein, pero las aproximaciones postnewtonianas han proporcionado ecuaciones analíticas que computándolas de manera apropiada, permiten contrastar con la evidencia experimental y poner a prueba de esta forma, la teoría.

En la presente sección, calcularemos los potenciales ϕ , ψ , χ y ξ_i para un sistema de N masas puntuales autogravitantes con tensor energía-momentum postulado y estudiado en la sección (3.2.4). En tal caso,

⁴Para mayor detalle al respecto, puede revisar <http://en.wikipedia.org/wiki/Frame-dragging>

para la métrica calculada en la sección (3.2.7), vemos que las componentes del tensor de energía-momentum a distintos órdenes en ϵ , en términos de los potenciales resulta ser

$$T^{(0)00}(\vec{x}, t) = \sum_a m_a c^2 \delta^{(3)}(x^i - x_a^i(t)), \quad (3.215)$$

$$T^{(2)00}(\vec{x}, t) = \sum_a m_a \left(\frac{1}{2} v_a^m v_a^m + \phi(\vec{x}, t) \right) \delta^{(3)}(x^i - x_a^i(t)), \quad (3.216)$$

$$T^{(1)0i}(\vec{x}, t) = \sum_a m_a c v_a^i \delta^{(3)}(x^i - x_a^i(t)), \quad (3.217)$$

$$T^{(0)ij}(\vec{x}, t) = 0, \quad (3.218)$$

$$T^{(2)ij}(\vec{x}, t) = \sum_a m_a v_a^i v_a^j \delta^{(3)}(x^i - x_a^i(t)). \quad (3.219)$$

Cabe notar, que en lo sucesivo se explicitará toda dependencia en la variable temporal t . Y como en general, la velocidad de la a -ésima partícula es tal que $v_a^i = v_a^i(t)$. Así, al introducir las componentes del tensor energía-momentum en las expresiones para los potenciales, se tiene que

$$\phi(\vec{x}, t) = -G \sum_a \frac{m_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a(t)|}, \quad (3.220)$$

$$\xi_i(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c} \sum_a \frac{m_a v_a^i(t)}{|\vec{x} - \vec{x}_a(t)|}, \quad (3.221)$$

$$\chi(\vec{x}, t) = -\frac{G}{2} \sum_a |\vec{x} - \vec{x}_a(t)| m_a, \quad (3.222)$$

$$\psi(\vec{x}, t) = -\frac{3G}{2} \sum_a \frac{v_a^m(t) v_a^m(t) m_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a(t)|} - G \sum_a \frac{\phi(\vec{x}_a(t), t) m_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a(t)|}, \quad (3.223)$$

$$\phi^2(\vec{x}, t) = G^2 \sum_a \frac{m_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a(t)|} \sum_b \frac{m_b}{|\vec{x} - \vec{x}_b(t)|}. \quad (3.224)$$

Entonces, al evaluar los potenciales dados por las ecuaciones (3.220)-(3.224) en las ecuaciones (3.183), (3.184) y (3.185), las componentes de la métrica resultan ser

$$\begin{aligned} g_{00}(\vec{x}, t) &= 1 - \frac{2G}{c^2} \sum_a \frac{m_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a(t)|} - \frac{3G}{c^4} \sum_a \frac{v_a^m(t) v_a^m(t) m_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a(t)|} \\ &\quad + \frac{G^2}{c^4} \sum_a \frac{m_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a(t)|} \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{|\vec{x}_a(t) - \vec{x}_b(t)|} \\ &\quad + \frac{2G^2}{c^4} \sum_a \frac{m_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a(t)|} \sum_b \frac{m_b}{|\vec{x} - \vec{x}_b(t)|} + \mathcal{O}(\epsilon^6), \end{aligned} \quad (3.225)$$

$$g_{0i}(\vec{x}, t) = \frac{G}{2c^3} \sum_a \frac{m_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a(t)|} \left[7v_a^i(t) - \frac{m_a(x^i - x_a^i(t))}{|\vec{x} - \vec{x}_a(t)|^2} (x^m - x_a^m(t)) v_a^m(t) \right], \quad (3.226)$$

$$g_{ij}(\vec{x}, t) = -\delta_{ij} - \delta_{ij} \frac{2G}{c^2} \sum_a \frac{m_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a(t)|} + \mathbf{g}_{ib}^{(4)} + \mathcal{O}(\epsilon^6). \quad (3.227)$$

Por otro lado, por la ec. (3.203), sabemos que la ecuación de movimiento (vectorial) para la c -ésima

partícula del sistema autogravitante está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}_c(t)}{dt} = & -\vec{\nabla} \left(\phi + \frac{\psi}{c^2} + \frac{2\phi^2}{c^2} \right) (\vec{x}_c, t) - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right) (\vec{x}_c, t) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \vec{\nabla} \chi}{\partial t^2} \right) (\vec{x}_c, t) \\
& + \frac{\vec{v}_c}{c} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\xi})(\vec{x}_c, t) + 3 \frac{\vec{v}_c}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) (\vec{x}_c, t) + 4 \frac{\vec{v}_c}{c^2} \left(\vec{v}_c \cdot (\vec{\nabla} \phi)(\vec{x}_c, t) \right) \\
& - \frac{\vec{v}_c^2}{c^2} (\vec{\nabla} \phi)(\vec{x}_c, t) + \mathcal{O}(\epsilon^6).
\end{aligned} \tag{3.228}$$

Al evaluar los potenciales dados por las ecuaciones (3.220)-(3.224) junto con sus derivadas en la ecuación de movimiento de la c -ésima partícula, podemos distinguir términos de la misma a distintos órdenes en el parámetro ϵ . Como estamos interesados en soluciones finitas y cada uno de los potenciales diverge en la posición de la partícula en cuestión, por dicha razón es que al evaluar los potenciales en \vec{x}_c , se han excluido de la sumatorias los términos aportados por la c -ésima partícula, vale decir se han suprimido los efectos de autointeracción gravitacional. Además, si definimos $\vec{x}_{ca} := \vec{x}_c - \vec{x}_a$ y $r_{ca} := |\vec{x}_{ca}|$ omitiendo la dependencia temporal explícita de las cantidades y expandiendo las sumas apropiadamente, luego de un poco de álgebra se halla la expresión compacta y usual en que se encuentra esta ecuación en la literatura:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}_c}{dt} = & -G \sum_{a \neq c} m_a \frac{\vec{x}_{ca}}{r_{ca}^3} \left[1 - \frac{4G}{c^2} \sum_{b \neq c} \frac{m_b}{r_{cb}} + \frac{G}{c^2} \sum_{b \neq c, a} m_b \left(-\frac{1}{r_{ab}} + \frac{\vec{x}_{ca} \cdot \vec{x}_{ab}}{2r_{ca}^3} \right) \right. \\
& \left. - \frac{5G}{c^2} \frac{m_c}{r_{ca}} + \frac{\vec{v}_c^2}{c^2} - \frac{4\vec{v}_c \cdot \vec{v}_a}{c^2} + \frac{2\vec{v}_a^2}{c^2} - \frac{3}{2c^2} \left(\frac{\vec{v}_a \cdot \vec{x}_{ca}}{r_{ca}} \right)^2 \right] \\
& - \frac{7G^2}{2c^2} \sum_{a \neq c} \frac{m_a}{r_{ca}} \sum_{b \neq a, c} m_b \frac{\vec{x}_{ab}}{r_{ab}^3} + \frac{G}{c^2} \sum_a m_a \left(\frac{\vec{x}_{ca}}{r_{ca}^3} \cdot (4\vec{v}_c - 3\vec{v}_a) \right) (\vec{v}_c - \vec{v}_a).
\end{aligned} \tag{3.229}$$

Así, se han encontrado las famosas *ecuaciones de Einstein-Infeld-Hoffmann* (Einstein & Infeld & Hoffmann, 1938) que describen la dinámica de un sistema de N masas puntuales en el contexto de las aproximaciones postnewtonianas. Es importante recalcar que dicho resultado ha sido encontrado suponiendo campo débil, considerando que el tensor energía-momento para el sistema de N masas puntuales en RG es el correcto e imponiendo el gauge estándar para calcular la métrica.

Velocidad angular de precesión de una c -ésima partícula libre de fuerzas y torques no gravitacionales.

Para completitud de este trabajo, a continuación calcularemos la velocidad angular de precesión de la c -ésima partícula libre de fuerzas y torques no gravitacionales con spin \vec{S}_c , cuya evolución temporal está dada por la ec. (3.214). Para ello, recordamos que dicha velocidad está dada por la ec. (3.213), que para la c -ésima partícula de un conjunto de N masas puntuales se traduce en

$$\vec{\Omega}_c(t) = -\frac{3}{2c^2} \vec{v}_c \times (\vec{\nabla} \phi)(\vec{x}_c, t) - \frac{1}{2c} (\vec{\nabla} \times \vec{\xi})(\vec{x}_c, t). \tag{3.230}$$

Así, evaluando los potenciales (3.220)-(3.224) en la ecuación precedente se encuentra que

$$\Omega_c^i(t) = \epsilon_{ijk} \left(-\frac{3G}{2c^2} \sum_a v_c^j(t) \frac{(x_c^k(t) - x_a^k(t))}{|\vec{x}_c(t) - \vec{x}_a(t)|^3} + \frac{2G}{c^2} \sum_a m_a v_a^k(t) \frac{(x_c^j(t) - x_a^j(t))}{|\vec{x}_c(t) - \vec{x}_a(t)|^3} \right). \tag{3.231}$$

De esta forma, la ecuación precedente nos proporciona la velocidad angular de precesión de la c -ésima partícula autointeractuante de un conjunto de N masas puntuales.

3.2.9. Principio de Acción

Obtener ecuaciones de movimiento a partir de un Principio de Acción es usual en Física teórica y particularmente nuestro objetivo en esta sección. Definiendo la acción de una partícula en un campo gravitacional como

$$S = c^2 \int d\tau = \int \frac{d\tau}{dt} dt, \quad (3.232)$$

si expandimos la expresión para $(d\tau/dt)$ en términos del parámetro ϵ dada por la raíz cuadrada de la ecuación (3.116) y recordamos las expresiones para los distintos órdenes de las perturbaciones métricas en términos de los potenciales dados por las ecs. (3.179)-(3.181), haciendo un poco de álgebra se encuentra que

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{1}{2} \frac{v^b v^b}{c^2} - \frac{1}{8} \frac{v^b v^b}{c^2} \frac{v^l v^l}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{\phi}{c^2} + \frac{\psi}{c^4} + \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{c^4} - \left(\frac{\xi}{c^2} + \frac{\partial_0 \partial_l \xi}{c^2} \right) \frac{v^l}{c} + \frac{3}{2} \frac{\phi}{c^2} \frac{v^b v^b}{c^2} + \mathcal{O}(\epsilon^6). \quad (3.233)$$

Por la arbitrariedad existente en la definición de un Lagrangeano que proporcione las mismas ecuaciones de movimiento, postulamos

$$L := c^2 \left(1 - \frac{d\tau}{dt} \right), \quad (3.234)$$

en tal caso se halla que

$$L = \frac{1}{2} v^b v^b - \frac{1}{8} \frac{v^b v^b}{c} \frac{v^l v^l}{c} + \frac{1}{2} \phi + \frac{\psi}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{c^2} - \left(\xi + \partial_0 \partial_l \xi \right) \frac{v^l}{c} + \frac{3}{2} \frac{\phi}{c^2} v^b v^b + \mathcal{O}(\epsilon^6). \quad (3.235)$$

Como los potenciales para un sistema de N masas supuestas puntuales están dados por las ecs. (3.220)-(3.224), al evaluarlos en la ecuación precedente suprimiendo a mano la autointeracción consigo misma, se encuentra que el Lagrangeano de la a -ésima partícula está dado por

$$L_a = \frac{1}{2} \vec{v}_a^2 + \frac{1}{8} \frac{(\vec{v}_a^2)^2}{c^2} + G \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}} - \frac{G^2}{2c^2} \sum_{b \neq a} \sum_{c \neq b, a} \frac{m_b m_c}{r_{ab} r_{ac}} - \frac{G^2}{2c^2} \sum_{b \neq a} \sum_{c \neq a} \frac{m_c m_b}{r_{bc} r_{ab}} + \frac{3}{2} G \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}} \vec{v}_a^2 - \frac{G}{2c^2} \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}} \left(7 \vec{v}_a \cdot \vec{v}_b + \frac{(\vec{v}_a \cdot \vec{x}_{ab}) \vec{v}_b \cdot \vec{x}_{ab}}{r_{ab}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^6). \quad (3.236)$$

Al construir el Lagrangeano que proporcione las ecuaciones de movimiento del sistema completo, esperamos que sea una expresión simétrica en m_a , \vec{x}_a y \vec{v}_a , para $a = 1, \dots, N$, vale decir con la propiedad de que

$$\lim_{m_a \rightarrow 0} \frac{L}{m_a} =: L_a, \quad (3.237)$$

así, no es difícil que

$$L = \sum_a \frac{1}{2} m_a \vec{v}_a^2 + \sum_a \frac{1}{8} \frac{m_a \vec{v}_a^4}{c^2} + \frac{1}{2} G \sum_{a \neq b} \frac{m_a m_b}{r_{ab}} + \frac{3}{2} G \sum_a m_a \vec{v}_a^2 \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}} - \sum_{a \neq b} \frac{G m_a m_b}{4 r_{ab}} \left[7 \vec{v}_a \cdot \vec{v}_b + \frac{(\vec{v}_a \cdot \vec{x}_{ab}) (\vec{v}_b \cdot \vec{x}_{ab})}{r_{ab}} \right] - \frac{G^2}{2} \sum_a \sum_{b \neq a} \sum_{c \neq a} \frac{m_a m_b m_c}{r_{ab} r_{ac}}, \quad (3.238)$$

satisface la condición (3.237) y además, que al variar la acción

$$\delta \left(\int L_a dt \right) = 0, \quad (3.239)$$

y escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange, se recobran exitosamente las ecuaciones de Einstein-Infeld-Hofmann (3.229).

3.3. Sistema Binario

En la presente sección estudiaremos el problema de un sistema binario. Vale decir, el de dos masas puntuales autointeractuantes gravitacionalmente, pero en el contexto de las aproximaciones postnewtonianas a orden cuarto en v/c .

3.3.1. Ecuaciones de movimiento

De las ecuaciones de movimiento de Einstein-Infeld-Hoffmann en (3.229), vemos que para un sistema de dos masas puntuales

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_1}{dt} = & -Gm_2 \frac{\vec{x}_{12}}{r_{12}^3} \left[1 - \frac{4Gm_2}{c^2 r_{12}} - \frac{5Gm_1}{c^3 r_{12}} + \frac{\vec{v}_1^2}{c^2} - \frac{4\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} + \frac{2\vec{v}_2^2}{c^2} - \frac{3}{2c^2} \left(\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{x}_{12}}{r_{12}} \right)^2 \right] \\ & + \frac{Gm_2}{c^2} \left(\frac{\vec{r}_{21} \cdot (4\vec{v}_2 - 3\vec{v}_1)}{r_{21}^3} \right) (\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \end{aligned} \quad (3.240)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_2}{dt} = & -Gm_1 \frac{\vec{x}_{21}}{r_{21}^3} \left[1 - \frac{4Gm_1}{c^2 r_{21}} - \frac{5Gm_2}{c^3 r_{21}} + \frac{\vec{v}_2^2}{c^2} - \frac{4\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}{c^2} + \frac{2\vec{v}_1^2}{c^2} - \frac{3}{2c^2} \left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{x}_{21}}{r_{21}} \right)^2 \right] \\ & + \frac{Gm_1}{c^2} \left(\frac{\vec{r}_{12} \cdot (4\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2)}{r_{12}^3} \right) (\vec{v}_1 - \vec{v}_2). \end{aligned} \quad (3.241)$$

3.3.2. Lagrangeano

De la ecuación para el Lagrangeano de un sistema de N masas puntuales dado por la ec. (3.238), vemos que para 2 masas

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 + \frac{1}{8} m_1 \frac{\vec{v}_1^4}{c^2} + \frac{1}{8} m_2 \frac{\vec{v}_2^4}{c^2} + \frac{1}{2} G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{1}{2} G \frac{m_2 m_1}{r_{21}} \\ & + \frac{3}{2} \frac{G m_1 \vec{v}_1^2 m_2}{r_{12}} + \frac{3}{2} \frac{G m_2 \vec{v}_2^2 m_1}{r_{21}} - \frac{G^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2 r_{12}^2} \\ & - \frac{G m_1 m_2}{4 r_{12}} \left(7 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{x}_{12})(\vec{v}_2 \cdot \vec{x}_{12})}{r_{12}} \right) \\ & - \frac{G m_2 m_1}{4 r_{12}} \left(7 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 + \frac{(\vec{v}_2 \cdot \vec{x}_{21})(\vec{v}_1 \cdot \vec{x}_{21})}{r_{21}} \right). \end{aligned} \quad (3.242)$$

Debido a que $\vec{x}_{21} = -\vec{x}_{12}$, entonces $r_{21} = r_{12}$. Por lo tanto al definir $r := r_{12} = r_{21}$, tras un poco de álgebra se halla que

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \vec{v}_2^2 + \frac{1}{2} \vec{v}_1^2 + \frac{G m_1 m_2}{r} + \frac{1}{8} m_1 \frac{\vec{v}_1^4}{c^2} + \frac{1}{8} m_2 \frac{\vec{v}_2^4}{c^2} \\ & + \frac{G m_1 m_2}{2r} \left[3(\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2) - 7\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 - \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{x}_{12})(\vec{v}_2 \cdot \vec{x}_{12})}{r} - \frac{G(m_1 + m_2)}{r} \right]. \end{aligned} \quad (3.243)$$

3.3.3. Cantidades conservadas

Como el Lagrangeano de la ec. (3.243) es de la forma $L = L(x_A^i, v_A^i, a_A^i)$, con $v_A^i := dx_A^i/dt$, $a_A^i := dv_A^i/dt$, $i = 1, 2, 3$ e $A = 1, 2$, permite obtener las ecuaciones de movimiento calculando la siguiente derivada funcional

$$\frac{\delta L}{\delta x_A^i} = \frac{\partial L}{\partial x_A^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_A^i} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial a_A^i} \right) = 0. \quad (3.244)$$

Dicho lagrangeano no es único, ya que si se le suma la derivada temporal de una función $F = F(\vec{x}_i, \vec{v}_i)$ con $i = 1, 2$, entonces no se alteraría la dinámica del problema pues proporcionaría las mismas ecuaciones de movimiento. Además, si definimos p_A^i y q_A^i los momenta conjugados de las posiciones x_A^i y las

velocidades v_A^i de la A -ésima partícula tales que

$$p_A^i := \frac{\delta L}{\delta v_A^i} = \frac{\partial L}{\partial v_A^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial a_A^i} \right), \quad q_A^i := \frac{\delta L}{\delta a_A^i} = \frac{\partial L}{\partial a_A^i}, \quad (3.245)$$

entonces, al emplear el teorema de Neother relativo a las simetrías de traslación infinitesimal en el tiempo, traslación infinitesimal en el espacio y rotaciones en el Lagrangeano, se pueden calcular las siguientes cantidades conservadas on-shell

$$E := \sum_A (v_A^i p_A^i + a_A^i q_A^i) - L, \quad p^i := \sum_A p_A^i, \quad L_i := \epsilon_{ijk} \sum_A (x_A^j p_A^k + v_A^j q_A^k), \quad (3.246)$$

la energía, el momentum lineal y el momentum angular del sistema.

3.3.4. Centro de energía del sistema

Definiendo el centro de energía del sistema binario a orden 1PN, como el punto con coordenadas \vec{x}_{ce} correspondiente a una perturbación del centro de masas (en el contexto newtoniano) dado por

$$\vec{x}_{ce} := \frac{m_1^* \vec{x}_1 + m_2^* \vec{x}_2}{m_1^* + m_2^*}, \quad (3.247)$$

con

$$m_a^* := m_a + \frac{1}{2} \frac{v_a^2}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{G m_a m_b}{r_{ab}}, \quad a \neq b = 1, 2, \quad (3.248)$$

luego de un poco de álgebra y emplear las ecuaciones de movimiento (3.240)-(3.241), es posible demostrar que

$$\frac{d^2 \vec{x}_{ce}}{dt^2} = \vec{0}. \quad (3.249)$$

En consecuencia $d\vec{x}_{ce}/dt = \vec{v}_{ce}$ es un vector constante, de manera que $\vec{x}_{ce} = \vec{v}_{ce} t + \vec{x}_0$, con \vec{x}_0 fijo tal que $\vec{x}_{ce}(t=0) = \vec{x}_0$. Por lo tanto, la coordenada del centro de energía se mueve a velocidad constante, lo que nos permite simplificar el problema y sin pérdida de generalidad escoger el S.R. comóvil al centro de energía del sistema $\vec{x}_{ce} \stackrel{!}{=} \vec{0}$ y desde ese punto describir la dinámica del sistema binario, de manera similar a como se hizo en el apéndice C donde se estudió el problema de dos masas autogravitantes en el contexto de la gravedad Newtoniana. De la ec. (3.247) vemos que $\vec{x}_1 = -(m_2^*/m_1^*)\vec{x}_2$ y si definimos la coordenada relativa \vec{r} del sistema por $\vec{r} := \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, entonces

$$\vec{r} = - \left(\frac{m_1^* + m_2^*}{m_1^*} \right) \vec{x}_2. \quad (3.250)$$

A partir de esto, se llega a que las posiciones de cada una de las masas en término de la coordenada relativa están dadas por

$$\vec{x}_1 = \frac{m_2^*}{m_1^* + m_2^*} \vec{r}, \quad \vec{x}_2 = - \frac{m_1^*}{m_1^* + m_2^*} \vec{r}. \quad (3.251)$$

Expandiendo en serie hasta segundo orden en ϵ los factores que acompañan en las ecuaciones de (3.251), se encuentra que

$$\frac{m_1^*}{m_1^* + m_2^*} \approx \frac{m_1}{M} + \frac{m_1 m_2}{2M c^2} (v_1^2 - v_2^2) + \frac{G m_1 m_2}{2c^2 M^2 r} (m_1 - m_2), \quad (3.252)$$

$$\frac{m_2^*}{m_1^* + m_2^*} \approx \frac{m_2}{M} + \frac{m_1 m_b}{2M c^2} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{G m_2 m_1}{2c^2 M^2 r} (m_2 - m_1). \quad (3.253)$$

Por otro lado, se ve que si \vec{x}_1 y \vec{x}_2 están dados por (3.251), entonces a primer orden en $|\vec{v}|$ con $\vec{v} := d\vec{r}/dt = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, se tiene que

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} + \mathcal{O}(|\vec{v}|^2), \quad \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} + \mathcal{O}(|\vec{v}|^2). \quad (3.254)$$

Entonces encontramos que

$$\frac{m_1^*}{m_1^* + m_2^*} \approx \frac{m_1}{M} + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (m_2 - m_1)}{M^2 c^2} \left(\vec{v}^2 - \frac{GM}{r} \right), \quad (3.255)$$

y de manera análoga haciendo $1 \leftrightarrow 2$, hallamos que

$$\frac{m_2^*}{m_1^* + m_2^*} \approx \frac{m_2}{M} + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (m_1 - m_2)}{M^2 c^2} \left(\vec{v}^2 - \frac{GM}{r} \right). \quad (3.256)$$

Si definimos la masa reducida del sistema $\mu := m_1 m_2 / M$ y los parámetros $\nu := \mu / M$, $\Delta := (m_1 - m_2) / M$ y $P := (1/2c^2)(\vec{v}^2 - GM/r)$, reescribimos (3.255) y (3.256) como

$$\frac{m_1^*}{m_1^* + m_2^*} \approx \frac{m_1}{M} + \frac{\nu \Delta}{2c^2} P, \quad \frac{m_2^*}{m_1^* + m_2^*} \approx \frac{m_2}{M} - \frac{\nu \Delta}{2c^2} P. \quad (3.257)$$

Luego, las posiciones de cada una de las masas en término de la coordenada relativa son respectivamente

$$\vec{x}_1 = \left(\frac{m_2}{M} + \nu \Delta P \right) \vec{r}, \quad \vec{x}_2 = \left(\frac{-m_1}{M} + \nu \Delta P \right) \vec{r}. \quad (3.258)$$

Cabe notar que antes de escoger el sistema del centro de energía, las coordenadas de las partículas eran a orden 0 en el parámetro ϵ , pero al derivar temporalmente se aumentaba un orden a modo que $|\vec{v}_1| \sim \epsilon$ y $|\vec{v}_2| \sim \epsilon$. Curiosamente, al escoger el sistema de referencia del centro de energía hemos en cierta forma traspasado la información de los órdenes de magnitud a las coordenadas de cada una de las partículas, pues en tal caso \vec{x}_1 y \vec{x}_2 son al menos de orden 2 en ϵ .

3.3.5. Ecuación de movimiento relativa

Habiendo elegido el sistema de referencia en el centro de energía, nos resta poder escribir la ecuación de movimiento relativo entre las partículas. Para ello lo que se hace es restar la ec. (3.241) a la ec. (3.240), hallando que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d\vec{v}_1}{dt} - \frac{d\vec{v}_2}{dt} \\ &= -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{x}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{4G^2}{c^2} (m_1^2 + m_2^2) \frac{\vec{x}_{12}}{r_{12}^4} + \frac{10G^2 m_1 m_2 \vec{x}_{12}}{r_{12}} \\ &\quad - \frac{G}{c^2} (m_1 \vec{v}_1^2 + m_2 \vec{v}_2^2) \frac{\vec{x}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{4G(m_1 + m_2)}{c^2} (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \frac{\vec{x}_{12}}{r_{12}^3} - \frac{2G}{c^2} (m_1 \vec{v}_1^2 + m_2 \vec{v}_2^2) \frac{\vec{x}_{12}}{r_{12}^3} \\ &\quad + \frac{3G}{2c^2} [m_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{x}_{12})^2 + m_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{x}_{12})^2] \frac{\vec{x}_{12}}{r_{12}^5} - \frac{G}{c^2} \frac{\vec{x}_{12}}{r_{12}^3} [m_1 (4\vec{v}_2 - 3\vec{v}_1) - m_2 (4\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2)] (\vec{v}_1 - \vec{v}_2). \end{aligned} \quad (3.259)$$

Si definimos el vector unitario $\hat{n} := \vec{r}/r$ en la dirección de la coordenada relativa y $\dot{r} := \vec{v} \cdot \hat{n}$, luego de un poco de álgebra encontramos que la ec. (3.259) se reduce a

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{GM}{r^2} \left[\left(1 + \frac{1}{c^2} \left(-\frac{3}{2} \nu \dot{r}^2 + \vec{v}^2 + 3\mu \vec{v}^2 - \frac{GM}{r} (4 + 2\nu) \right) \right) \hat{n} + \frac{1}{c^2} (-4\dot{r} + 2\dot{r}\nu) \vec{v} \right], \quad (3.260)$$

así, si definimos A y B convenientemente como

$$A := \frac{1}{c^2} \left(-\frac{3}{2} \nu \dot{r}^2 + \vec{v}^2 + 3\mu \vec{v}^2 - \frac{GM}{r} (4 + 2\nu) \right), \quad B := \frac{1}{c^2} (-4\dot{r} + 2\dot{r}\nu), \quad (3.261)$$

entonces podemos escribir la ecuación de movimiento para la coordenada relativa (3.259) en la forma

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2} [(1+A)\hat{n} + B\vec{v}]. \quad (3.262)$$

Comparando la ec. (3.262) con (C.8) en el contexto newtoniano, es inmediato decir que A y B son las perturbaciones postnewtonianas introducidas a la Ley de Gravitación Universal de Newton escrita en el centro de masa del sistema binario.

3.4. Dinámica Postnewtoniana a orden 2.5PN incluyendo efectos de Spin

Son varios los grupos de investigación que con diversas e ingeniosas formulaciones, han contribuido al desarrollo de la dinámica postnewtoniana de objetos compactos a lo largo de los años, en primera aproximación despreciando sus efectos de rotación interna y luego incluyéndolos para conseguir una mejor descripción de la dinámica del sistema. Debido a que no es el propósito de esta tesis, el contribuir con la derivación de alguna ecuación a esta teoría, sino que más bien la implementación computacional de las ecuaciones calculadas por otros autores, en la presente sección presentaremos las ecuaciones principales implementadas en los códigos escritos hasta el orden 2.5 PN (por simplicidad hasta este orden, aunque en los códigos se ha implementado hasta el orden 3.5PN). Además, presentaremos dichos resultados siguiendo la formulación planteada en Faye *et al.* (2007) y referenciaremos cuando corresponda, los artículos científicos en los cuales puede encontrar detalladamente los cálculos y argumentos físicos considerados para conseguir tales resultados.

Note que para un cuerpo compacto de masa m y tamaño típico a , se tiene que $a \sim Gm/c^2$. Si éste rota con una velocidad superficial de giro v_{spin} , entonces su magnitud de spin $S^{\text{real}} \sim mav_{\text{spin}}$. Así, en términos de sus parámetros de rotación podemos distinguir dos tipos de cuerpos compactos rotantes, aquellos que son maximalmente rotantes, en cuyo caso $v_{\text{spin}} \sim c$ y por lo tanto $S^{\text{real}} = Gm^2/c$. Por otra parte, encontramos a los que son lentamente rotantes y se caracterizan porque $v_{\text{spin}} \ll c$, razón por la cual $S^{\text{real}} \sim Gm^2 v_{\text{spin}}/c^2$.

En Faye *et al.* (2007), se supone que se tiene dos cuerpos compactos maximalmente rotantes y se define el spin S a orden “newtoniano”, vale decir $S^{\text{real}} = S/c$. Para formular apropiadamente la dinámica postnewtoniana incluyendo los efectos de spin, se modela el tensor energía-momentum de la fuente en la forma $T^{\mu\nu} = T_M^{\mu\nu} + T_S^{\mu\nu}$, donde $T_M^{\mu\nu}$ corresponde a la contribución monopolar y $T_S^{\mu\nu}$ a la contribución dipolar al tensor energía-momentum completo, los cuales son supuestos como

$$T_M^{\mu\nu} = c^2 \sum_A \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_A p_A^{(\mu} u_A^{\nu)} \frac{\delta^{(4)}(x - x_A)}{\sqrt{-g_A}}, \quad (3.263)$$

$$T_S^{\mu\nu} = -c \sum_A \nabla_\rho \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_A S_A^{\rho(\mu} u_A^{\nu)} \frac{\delta^{(4)}(x - x_A)}{\sqrt{-g_A}} \right], \quad (3.264)$$

con $\delta^{(4)}$ la Delta de Dirac quadri-dimensional, ∇_ρ la derivada covariante asociada con la métrica $g_{\mu\nu}$ en el punto con coordenadas x , p_A^μ el momentum lineal de la A -ésima partícula y $S_A^{\mu\nu}$ el tensor antisimétrico de spin que representa el momentum angular de spin (o intrínseco) de la A -ésima partícula.⁵

En la misma publicación se adopta la condición suplementaria del spin $S_A^{\mu\nu} p_\nu^A \stackrel{!}{=} 0$, lo cual permite una definición natural del quadri-vector de spin S_μ^A en forma

$$S_A^{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g_A}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{p_\rho^A}{m_{Ac}} S_\sigma^A, \quad (3.265)$$

donde $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo de Levi-Civita antisimétrico, tal que $\varepsilon^{0123} = 1$. Con todos estos ingredientes en mente, en Faye *et al.* (2007) son capaces de calcular en coordenadas armónicas las siguientes las siguientes ecuaciones:

⁵El símbolo $F^{(\mu\nu)}$ denota la simetrización de los índices μ y ν en el tensor $F^{\mu\nu}$. Así, se define $F^{(\mu\nu)} := (F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu})/2$.

Término	PN	ϵ
$\propto (1/c)^0$	0	2
$\propto (1/c)^2$	1	4
$\propto (1/c)^3$	1.5	5
$\propto (1/c)^4$	2	6
$\propto (1/c)^5$	2.5	7
\vdots	\vdots	\vdots
$\propto (1/c)^n$	n	$2n + 2$

Tabla 3.1: Terminología de órdenes de correcciones postnewtonianas.

- Ecuación de movimiento:

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{A}_N + \frac{1}{c^2} \vec{A}_{1PN} + \frac{1}{c^3} \vec{A}_{S1.5PN} + \frac{1}{c^4} [\vec{A}_{2PN} + \vec{A}_{SS2PN}] + \frac{1}{c^5} [\vec{A}_{2.5PN} + \vec{A}_{S2.5PN}] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right) \quad (3.266)$$

donde debemos hacer $1 \leftrightarrow 2$ para conocer la evolución de \vec{x}_2 . Los términos \vec{A}_N y \vec{A}_{1PN} , pueden ser encontrados en la ec. (3.240), los términos \vec{A}_{2PN} y $\vec{A}_{2.5N}$ en la ec. (203) de [Blanchet \(2014\)](#), mientras que \vec{A}_{SS2PN} y $\vec{A}_{SS2.5PN}$ pueden ser encontrados en las ecuaciones (5.3a,b) de [Faye et al. \(2007\)](#) respectivamente.

En terminología postnewtoniana, en la ec. (3.266) el término newtoniano es llamado a orden 0PN y el n -ésimo término proporcional a $1/c^n$ es llamado a orden nPN. Ahora bien, si el conteo se hace en potencias del parámetro $\epsilon \sim v/c$, con $GM/r \sim \epsilon^2$ entonces se puede establecer la relación mostrada en la tabla 3.1.

- Ecuaciones de precesión del spin:

$$\frac{d\vec{S}_1}{dt} = \frac{1}{c^2} \vec{T}_{S1PN} + \frac{1}{c^3} \vec{T}_{SS1.5PN} + \frac{1}{c^4} \vec{T}_{S2PN} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^5}\right), \quad (3.267)$$

donde debemos hacer $1 \leftrightarrow 2$ para conocer la evolución de \vec{S}_2 . Note que los términos \vec{T}_{S1PN} y \vec{T}_{S2PN} pueden ser encontrados en las ecuaciones (6.2) y (6.3) de [Faye et al. \(2007\)](#). Por su parte, el término $\vec{T}_{SS1.5PN}$ puede ser encontrado en las ecs. (4.17b,c) de [Kidder \(1995\)](#).

- Si consideramos la ecuación de movimiento (3.266) dejando afuera el término de aceleración $\vec{A}_{2.5PN}$, en [Faye et al. \(2007\)](#) y en [de Andrade et al. \(2000\)](#) para cuerpos no rotantes, se señala que dicha ecuación de movimiento puede ser derivada desde un principio de acción, con un Lagrangeano cuyas simetrías nos permite calcular cantidades que podemos llamar, energía, momentum lineal o momentum angular.

- Se define la energía E de la binaria como

$$E = E_N + \frac{1}{c^2} E_{1PN} + \frac{1}{c^3} E_{S1.5PN} + \frac{1}{c^4} [E_{2PN} + E_{SS2PN}] + \frac{1}{c^5} E_{S2.5PN} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right). \quad (3.268)$$

tal que tal que $dE/dt = 0$. Note que los términos E_N , E_{1PN} , E_{2PN} se encuentra en la ec. (205) y $E_{2.5PN}$ en la ec. (206) de [Blanchet \(2014\)](#). Además, los términos $E_{S1.5PN}$ y $E_{S12.5PN}$ se encuentran en las ecs. (7.2a,b) de [Faye et al. \(2007\)](#), mientras que el término E_{SS2PN} se encuentra en la ec. (2.7e) de [Kidder \(1995\)](#).

- Se define el momentum angular total $\vec{J} := \vec{L} + \vec{S}_1/c + \vec{S}_2/c$ tal que $d\vec{J}/dt = \vec{0}$, donde:

$$\vec{L} = \vec{L}_N + \frac{1}{c^2} \vec{L}_{1PN} + \frac{1}{c^3} \vec{L}_{S1.5PN} + \frac{1}{c^4} [\vec{L}_{2PN} + \vec{L}_{SS2PN}] + \frac{1}{c^5} \vec{L}_{S2.5PN} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right). \quad (3.269)$$

Note que los términos \vec{L}_N , \vec{L}_{1PN} , \vec{L}_{2PN} se encuentran en la ec. (4.4) y $\vec{L}_{2.5N}$ se encuentra en la ec. (4.6c) de [de Andrade et al. \(2000\)](#). Además, los términos $\vec{L}_{S1.5PN}$ y $\vec{L}_{S2.5PN}$ se encuentran en las ecs. (7.7a,b) de [Faye et al. \(2007\)](#), mientras que el término \vec{L}_{SS2PN} se encuentra en la ec. (2.9d) de [Kidder \(1995\)](#).

- Si consideramos partículas no rotantes, cuya dinámica está descrita por la ecuación de movimiento (3.266), sin considerar los términos que incluyen spin. En [de Andrade et al. \(2000\)](#) se asegura que dicha ecuación no puede ser derivada desde un principio de acción. Sin embargo, es posible definir convenientemente una generalización de energía \bar{E} , de momentum lineal \bar{p}^i , de momentum angular \bar{L}^i , y de centro de energía \bar{x}_{ce}^i ,

$$\bar{E} := E + \frac{4G^2 m_1^2 m_2}{5c^5 r_{12}^2} (\hat{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) \left[(\vec{v}_1^2 - \vec{v}_2^2)^2 + \frac{2G(m_2 - m_1)}{r_{12}} \right] + 1 \leftrightarrow 2, \quad (3.270)$$

$$\bar{p}^i := p^i + \frac{4G^2 m_1^2 m_2}{5c^5 r_{12}^2} n_{12}^i \left((\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{2Gm_1}{r_{12}} \right) + 1 \leftrightarrow 2, \quad (3.271)$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_i := L_i + \frac{4Gm_1 m_2}{5c^2} \epsilon_{ijk} \left[\vec{v}_1^2 v_1^j v_2^k + 2 \frac{Gm_1}{r_{12}} v_1^j v_2^k - \frac{2Gm_1}{r_{12}^2} (\hat{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (v_1^j x_2^k + x_1^j v_1^k) \right. \\ \left. - \frac{Gm_1}{r_{12}^3} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 x_1^j x_2^k + \frac{2G^2 m_1^2}{r_{12}^4} x_1^j x_2^k \right] + 1 \leftrightarrow 2, \end{aligned} \quad (3.272)$$

$$\bar{x}_{ce}^i := x_{ce}^i + \frac{4Gm_1 m_2}{5c^5} v_1^i \left((\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{2G(m_1 + m_2)}{r_{12}} \right) + 1 \leftrightarrow 2, \quad (3.273)$$

$$\bar{K}^i := \bar{x}_{ce}^i - t \bar{p}^i, \quad (3.274)$$

tales que

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^7}\right), \quad \frac{d\bar{p}^i}{dt} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^7}\right), \quad (3.275)$$

$$\frac{d\bar{L}_i}{dt} = -\frac{2G}{5c^5} \epsilon_{ijk} \frac{d^2 Q^{jl}}{dt^2} \frac{d^3 Q^{kl}}{dt^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^7}\right), \quad \frac{d\bar{K}^i}{dt} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^7}\right), \quad (3.276)$$

donde Q^{ij} corresponde al momento cuadrupolar sin traza definido en (2.38). De esta forma, al considerar en las ecuaciones de movimiento los términos a orden 2.5PN igual se ha podido definir un centro de energía del sistema, \bar{x}_{ce}^i tal que

$$\frac{d\bar{x}_{ce}^i}{dt} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^7}\right). \quad (3.277)$$

Comparando las ecuaciones (3.275) y (3.276) con las ecuaciones para la potencia radiada y el momentum angular por unidad de tiempo promedio emitido por ondas gravitacionales en (2.37), se encuentra que

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\langle P \rangle, \quad \frac{d\bar{L}_i}{dt} = -\langle \dot{L}_i \rangle, \quad (3.278)$$

ecuaciones que claramente describen la pérdida de energía y el momentum angular en el sistema binario debido al término 2.5PN en las ecuaciones de movimiento mediante la emisión de ondas gravitacionales, balanceando de esta forma la energía y el momentum angular del sistema completo dado por el sistema binario más las ondas gravitacionales.

De la ec. (3.278), resulta lógico decir que “el término 2.5PN en las ecuaciones de movimiento postnewtonianas es el responsable de la pérdida de la energía y el momentum angular del sistema que lo llevan a su colapso gravitacional mediante la emisión de ondas gravitacionales”.

Tradicionalmente, la conservación de la energía de ciertos sistemas clásicos, es utilizada como chequeo numérico de que la implementación computacional ha sido bien ejecutada. Debido a que en

dinámica postnewtoniana al incluir los términos a orden 2.5PN en las ecuaciones de movimiento, las cantidades que entendemos por energía y momentum angular no son conservadas, para la resolución numérica se vuelve necesaria la construcción de cantidades conservadas (siendo detallistas, aproximadamente conservadas) que sean de utilidad en la implementación computacional.

En agosto de 2015 fue escrito un póster discutiendo estos tópicos, el cual fue titulado *Testing PN numerical evolution of compact binaries using energy and angular momentum balance equations* y presentado en *School on Gravitational Waves: from data to theory and back* y *Workshop on Astrophysics and Relativity: Astro-GR 2015*, eventos organizados por ICTP-SAIFR en Sao Paulo, Brazil.

Aún con partículas rotantes, es posible la elección de nulidad del vector centro de energía del sistema, definido como la integral conservada asociada a la invarianza de *boost* de la ec. (3.266), cuya discusión puede encontrar en el apéndice A de [Faye et al. \(2007\)](#). Con dicha elección, se definen convenientemente las variables de spin introducidas en [Kidder \(1995\)](#), como

$$\vec{S} := \vec{S}_1 + \vec{S}_2, \quad \vec{\Sigma} := m \left(\frac{\vec{S}_2}{m_2} - \frac{\vec{S}_1}{m_1} \right), \quad (3.279)$$

donde se ha definido $m := m_1 + m_2$, $\delta m = m_1 - m_2$ y $\nu = m_1 m_2 / m$, con $\nu \in [0, 1/4]$. El procedimiento es análogo a lo realizado en la sección 3.3.4. A partir de esto, las posiciones de cada uno de los cuerpos en el centro de energía a orden 1.5PN, se encuentran dadas por

$$\vec{x}_1 = \left[\frac{m_2}{m} + \frac{\nu}{2c^2} \frac{\delta m}{m} \left(v^2 - \frac{Gm}{r} \right) \right] \vec{r} + \frac{\nu}{m c^3} \vec{v} \times \vec{\Sigma} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^4} \right), \quad (3.280)$$

$$\vec{x}_2 = \left[-\frac{m_1}{m} + \frac{\nu}{2c^2} \frac{\delta m}{m} \left(v^2 - \frac{Gm}{r} \right) \right] \vec{r} + \frac{\nu}{m c^3} \vec{v} \times \vec{\Sigma} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^4} \right). \quad (3.281)$$

Correcciones hasta orden 3PN pero sin spin, pueden ser encontradas en las ecs. (216) y (217) de [Blanchet \(2014\)](#). Además, las ecuaciones de evolución para cada uno de los cuerpos pueden ser reescritas en términos de la coordenada relativa \vec{r} y de las nuevas variables de spin \vec{S} y $\vec{\Sigma}$.

- Ecuación de movimiento relativa: En términos de la coordenada relativa, la ecuación de movimiento (3.266) puede ser escrita como

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{B}_N + \frac{1}{c^2} \vec{B}_{1PN} + \frac{1}{c^3} \vec{B}_{S1.5PN} + \frac{1}{c^4} \left[\vec{B}_{2PN} + \vec{B}_{SS2PN} \right] + \frac{1}{c^5} \left[\vec{B}_{2.5PN} + \vec{B}_{S2.5PN} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^6} \right). \quad (3.282)$$

Note que los términos \vec{B}_N , \vec{B}_{1PN} , \vec{B}_{2PN} se encuentran en la ec. (310a,b) de [Blanchet & Iyer \(2003\)](#). Por su parte, los términos $\vec{B}_{S1.5PN}$ y $\vec{B}_{S2.5PN}$ se encuentran en las ec.s (5.7a,b) de [Faye et al. \(2007\)](#) respectivamente, mientras que el término \vec{B}_{SS2PN} se encuentra en la ec. (2.2e) de [Kidder \(1995\)](#).

- Cantidades conservadas: La energía y el momentum angular puede ser escritos como

$$E = m \nu c^2 \left\{ e_N + \frac{1}{c^2} e_{1PN} + \frac{1}{c^3} e_{S1.5PN} + \frac{1}{c^4} \left[e_{2PN} + e_{SS2PN} \right] + \frac{1}{c^5} e_{S2.5PN} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^6} \right) \right\}, \quad (3.283)$$

$$\vec{L} = \nu \left\{ \vec{\ell}_N + \frac{1}{c^2} \vec{\ell}_{1PN} + \frac{1}{c^3} \vec{\ell}_{S1.5PN} + \frac{1}{c^4} \left[\vec{\ell}_{2PN} + \vec{\ell}_{SS2PN} \right] + \frac{1}{c^5} \vec{\ell}_{S2.5PN} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^6} \right) \right\}, \quad (3.284)$$

donde los términos e_N , e_{1PN} y e_{2PN} pueden ser encontrados en la ec. (4.6) de [Blanchet & Iyer \(2003\)](#). Además, los términos $e_{S1.5PN}$ y $e_{S2.5PN}$ se encuentran en las ecs. (7.4a,b) de [Faye et al. \(2007\)](#), mientras que e_{SS2PN} se encuentra en la ec. (2.7e) de [Kidder \(1995\)](#). Por su parte, los términos $\vec{\ell}_N$, $\vec{\ell}_{1PN}$, $\vec{\ell}_{2PN}$ se encuentran en la ec. (4.7) de [Blanchet & Iyer \(2003\)](#), mientras que $\vec{\ell}_{S1.5PN}$ y $\vec{\ell}_{S2.5PN}$ se encuentran en las ecs. (7.11a,b) de [Faye et al. \(2007\)](#). Desconocemos donde encontrar el término $\vec{\ell}_{SS2PN}$.

- Las ecuaciones de precesión del spin de las variables \vec{S} y $\vec{\Sigma}$ al orden 2PN son:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{c^2} \vec{U}_{\text{S}1\text{PN}} + \frac{1}{c^3} \vec{U}_{\text{SS}1.5\text{PN}} + \frac{1}{c^4} \vec{U}_{\text{S}2\text{PN}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^5}\right), \quad (3.285)$$

$$\frac{d\vec{\Sigma}}{dt} = \frac{1}{c^2} \vec{V}_{\text{S}1\text{PN}} + \frac{1}{c^3} \vec{V}_{\text{SS}1.5\text{PN}} + \frac{1}{c^4} \vec{V}_{\text{S}2\text{PN}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^5}\right). \quad (3.286)$$

Note que los términos $\vec{U}_{\text{S}1\text{PN}}$, $\vec{U}_{\text{S}2\text{PN}}$, $\vec{V}_{\text{S}1\text{PN}}$ y $\vec{V}_{\text{S}2\text{PN}}$ se encuentran en las ecs. (6.5a,b) y (6.6a,b) de [Faye et al. \(2007\)](#) respectivamente. En [Faye et al. \(2007\)](#) se dice que los términos $\vec{U}_{\text{SS}1.5\text{PN}}$ y $\vec{V}_{\text{SS}1.5\text{PN}}$ se encuentran en las ecs. (2)-(3) de [Buonanno \(2003\)](#). En dicha referencia las ecuaciones señaladas se han calculado en el límite adiabático de órbitas cuasi-circulares, y como estamos interesados en las ecuaciones “más generales” (sin recurrir a ese tipo de aproximaciones extras) es motivo suficiente para considerar por “desconocidos” dichos términos.





Capítulo 4

Análisis Espectral

En Física es usual que estemos interesados en realizar el análisis espectral de ciertas cantidades que denominamos señales (típicamente son funciones que dependen del tiempo). En el presente capítulo estudiaremos las herramientas matemáticas sobre análisis de señales, necesarias para enfrentar en el capítulo 5 la tarea de analizar espectralmente la respuesta simulada de un detector de ondas gravitacionales. Se presentan algunas definiciones y se muestran dos problemas clásicos al respecto: el de considerar una señal para un segmento de tiempo finito T y el de muestrear la señal para un número N de puntos.

4.1. Transformada de Fourier continua

Sea $h(t)$ una función con $t \in]-\infty, +\infty[$, se define la transformada de Fourier (FT por las siglas en inglés de *Fourier Transform*) continua $\mathcal{F}[h(t)](f) := \tilde{h}(f)$, como aquella transformación que aplicada sobre la función original, la descompone en una superposición continua de funciones periódicas con frecuencias f . En esta tesis, se ha empleado las siguientes definiciones utilizadas en Moore *et al.* (2015) para la Transformada de Fourier \mathcal{F} y su inversa \mathcal{F}^{-1} :

$$\tilde{h}(f) := \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi ft} dt, \quad h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(f)e^{i2\pi ft} df. \quad (4.1)$$

Ejemplo

Consideremos por ejemplo, la distribución gaussiana $f(t) = Ae^{-t^2/\alpha^2}$, con $\alpha > 0$ y A constantes. Tras un simple cálculo se demuestra que su transformada de Fourier analítica está dada por $\tilde{h}(f) = A\alpha\sqrt{\pi}e^{-(\alpha\pi f)^2}$. En la fig. 4.1 puede encontrar un gráfico de la distribución gaussiana y de su transformada de Fourier para cualquier valor de los parámetros α y A .

4.1.1. Teorema de Convolución

Sean $h_1(t)$ y $h_2(t)$ dos funciones con transformada de Fourier $\tilde{h}_1(f)$ y $\tilde{h}_2(f)$ respectivamente, entonces el teorema de convolución proporciona una relación entre la transformada de Fourier del producto de funciones y las transformadas de Fourier de cada una de ellas:

$$\mathcal{F}[h_1(t) \cdot h_2(t)](f) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_1(f - f') \cdot \tilde{h}_2(f') df'. \quad (4.2)$$

Análogamente, se tiene que la relación entre las transformadas inversas es

$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{h}_1(f) \cdot \tilde{h}_2(f)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t') \cdot h_2(t - t') dt'. \quad (4.3)$$

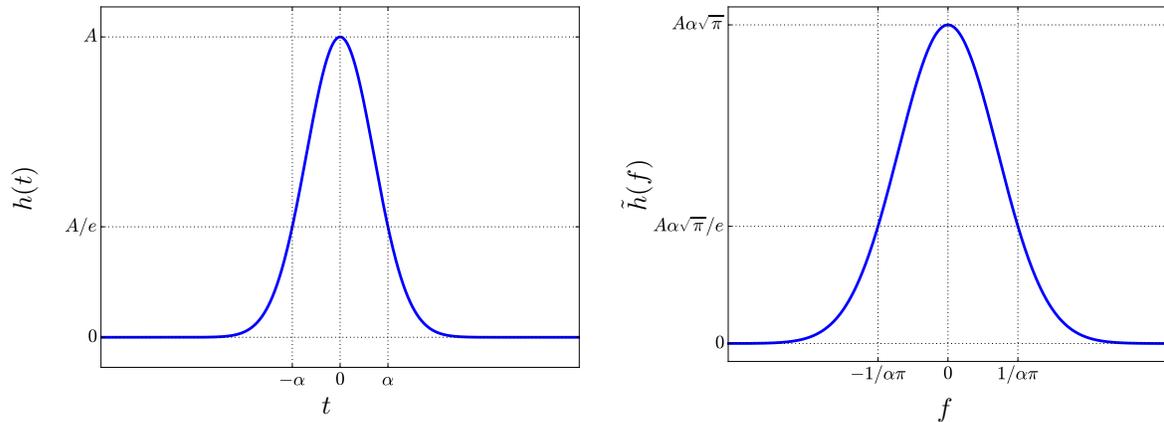


Figura 4.1: Gráfico de distribución gaussiana y su transformada de Fourier. Fuente: Elaboración propia.

Ejemplo

Sean las funciones

$$h_1(t) := \cos [2\pi f' t], \quad \text{y} \quad h_2(t) := \begin{cases} 1, & \text{si } |t| < t_0, \\ 0, & \text{si } |t| > t_0, \end{cases} \quad \text{para } t \in]-\infty, \infty[, \quad (4.4)$$

con f' y t_0 constantes, vale decir, tenemos una función periódica de frecuencia f' y una función cuadrada con altura 1 y ancho $2t_0$. Luego de un cálculo simple encontramos que $\tilde{h}_1(f) = (\delta(f - f') + \delta(f + f'))/2$ y $\tilde{h}_2(f) = (1/\pi f) \sin(2\pi f t_0)$. En las figuras 4.2 y 4.3 se muestran gráficos de estas funciones y de sus transformadas de Fourier.

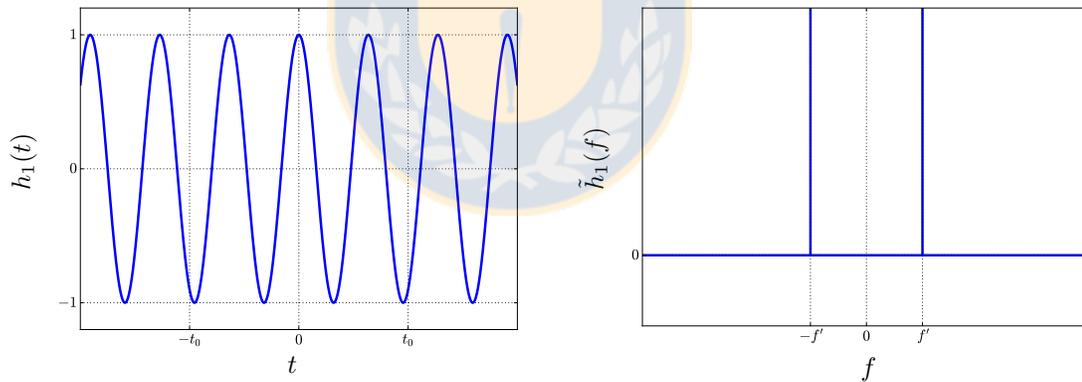


Figura 4.2: Gráfico de $h_1(t)$ y su transformada de Fourier $\tilde{h}_1(f)$: Las líneas verticales en $-f'$ y f' simbolizan las deltas de Dirac $\delta(f + f')$ y $\delta(f - f')$, respectivamente. Fuente: Elaboración propia.

Considere ahora la función $h_3(t) := h_1(t) \cdot h_2(t)$, entonces por el Teorema de Convulación encontramos que

$$\tilde{h}_3(f) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(2\pi(f - f')t_0)}{f - f'} + \frac{\sin(2\pi(f + f')t_0)}{f + f'} \right]. \quad (4.5)$$

Note que si se tiene una función periódica de extensión infinita como $h_1(t)$ con frecuencia f' , entonces su transformada de Fourier será una superposición de deltas de Dirac (con amplitud infinita) centradas en $-f'$ y f' como se muestra en la fig. 4.2. Ahora bien, si esa función es distinta de cero sólo para $t \in [-t_0, t_0]$, como ocurre con la función $h_3(t)$, entonces el teorema de convolución permite apreciar cómo las deltas de Dirac se “difunden”, introduciendo funciones sinc centradas en las frecuencias principales,

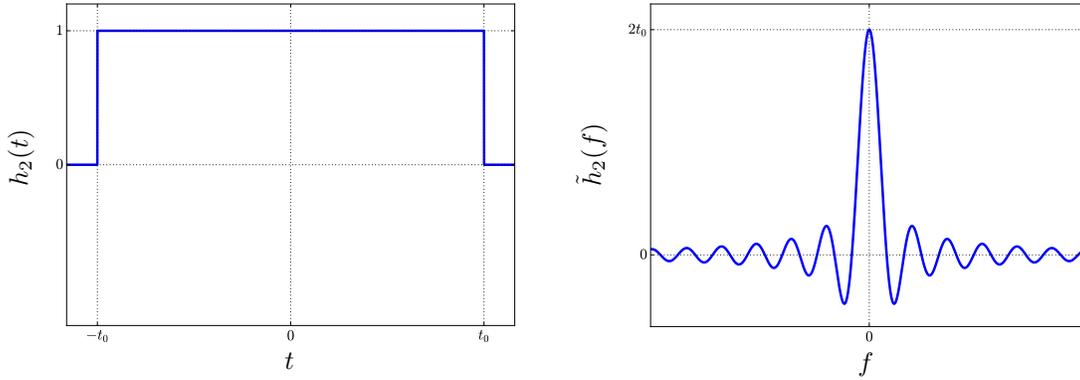


Figura 4.3: Gráfico de $h_2(t)$ y su transformada de Fourier $\tilde{h}_2(f)$. Fuente: Elaboración propia.

con oscilaciones de menor amplitud en torno al máximo principal (la energía se concentra en torno a las frecuencias principales). Preste atención a la fig. 4.4, en la cual se está evaluando la expresión analítica señalada.

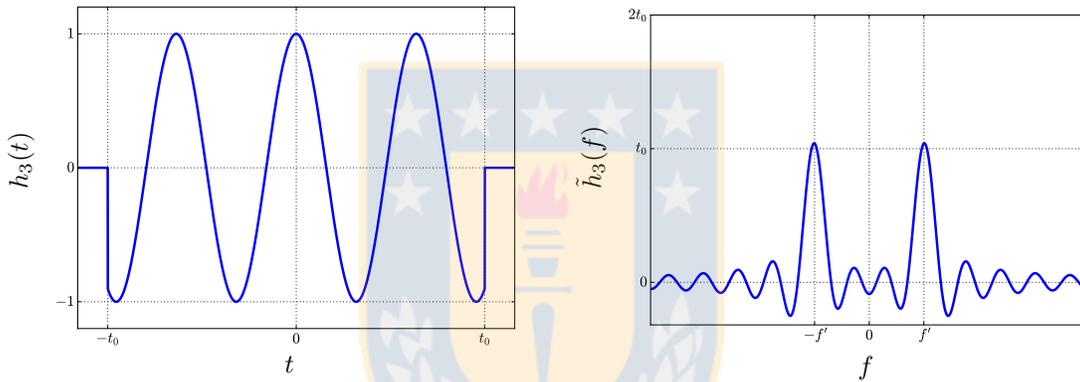


Figura 4.4: Gráfico de $h_3(t)$ y su transformada de Fourier $\tilde{h}_3(f)$. Fuente: Elaboración propia.

4.2. Serie de Fourier

Sea $h(t)$ una función periódica $h(t) = h(t + T)$ de período T , con $t \in [a, b]$ y $T = b - a$, entonces se definen los coeficientes de Fourier h_k como

$$h_k := \frac{1}{T} \int_a^b h(t) e^{-i2\pi f_k t} dt, \quad (4.6)$$

donde se ha definido la *frecuencia fundamental* $f_1 := 1/T$ y las frecuencias armónicas $f_k := kf_1$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. De esta forma, la función original se puede escribir

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} h_k e^{i2\pi f_k t}. \quad (4.7)$$

Note que si la función $h(t)$ se define en el intervalo $t \in [a, b]$, entonces siempre se puede calcular la Serie de Fourier considerando su extensión periódica de período T . Además, si la extensión periódica presenta discontinuidades en los extremos de la región definida (ya que no es intrínsecamente periódica), entonces la suma parcial hasta cierto orden n de interés, manifiesta oscilaciones en torno a unos “saltos” cerca de los extremos, los cuales aumentan a medida que n aumenta. Dichos saltos son conocidos como fenómeno de Gibbs y pueden llegar a un 18% con relación al valor real de la función en esos puntos.

4.3. Transformada de Fourier discreta

Cuando la señal a estudiar corresponde a datos provenientes de un laboratorio o se han conseguido simulando algún fenómeno físico en el computador, no se tiene una expresión analítica a evaluar en la ec. (4.1)(a) o en (4.6)(a), sino que se tiene un conjunto de N pares de números (t_j, h_j) , con $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Pese a ello, considerando la extensión periódica de la señal muestreada durante un tiempo T (tiempo total del muestreo), igual podemos definir la Transformada de Fourier Discreta (DFT por las siglas en inglés de *Discrete Fourier Transform*) como se indicará a continuación.

- Cuando la señal está uniformemente distribuida en el tiempo, tal que $t_j = j\Delta t$ con $j = 0, 1, \dots$ y Δt el espaciamiento temporal, entonces se define la Transformada de Fourier discreta de la señal y su inversa como

$$\tilde{h}_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h_j e^{-i2\pi k j / N}, \quad h_j := \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{h}_k e^{i2\pi k j / N}. \quad (4.8)$$

Note que la ec. (4.6)(a) se reduce a (4.8)(a) cuando se muestrea y aproxima la integral de Riemann correspondiente, con $T = N\Delta t$ y $f_k := k/T$.

- Cuando la señal no está uniformemente distribuida en el tiempo, entonces no se puede emplear las ecuaciones en (4.8), pero en analogía se definen las Transformadas de Fourier discretas de tipo 1 y 2 como

$$d_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{\pm i k p_j}, \quad c_j := \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} d_k e^{\pm i p_j k}, \quad (4.9)$$

donde $p_j \in [-\pi, \pi]$ y M el largo de la transformada definido a conveniencia. Note que la ec. (4.9)(a) al ser truncada hasta $j = N - 2$, con $c_j := N h_j \Delta t_j$, $\Delta t_j := t_{j+1} - t_j$, $p_j := 2\pi t_j \Delta f$, Δf la resolución en frecuencia a considerar y k el rotulador de las frecuencias en la DFT, se reduce a la versión muestreada de la ec. (4.1)(a), donde no se tomó en consideración el par $(N - 1)$ -ésimo.

Si se elige $M/2$ como la parte entera de $N/2$, entonces todas las sumatorias definidas requerirían realizar un número $\mathcal{O}(N^2)$ de operaciones.

En la literatura lo que típicamente se presenta como la DFT corresponde al caso en que la señal se encuentra uniformemente muestreada, en cuyo caso la inversa (4.8) reconstruye de manera exacta la señal original, como por ejemplo lo presentado en Newman (2012). Note que la DFT de tipo 2 no corresponde necesariamente a la inversa, simplemente es la evaluación de la DFT en una expresión que cuando la señal se encuentra igualmente sampleada, entonces se reduce a la inversa de la señal. Diversos algoritmos que implementan la DFT se pueden encontrar en la literatura. Una que destaca por su eficiencia es la *Transformada de Fourier rápida*¹ (FFT por sus siglas en inglés de *Fast Fourier Transform*) propuesta en Cooley & Tukey (1965), la cual evalúa la ec. (4.8) realizando un número $\mathcal{O}(N \log(N))$ de operaciones en vez de $\mathcal{O}(N^2)$ y requiere por tanto que la señal a estudiar sea igualmente espaciada. Otra característica esencial de ese algoritmo, es que es óptimo cuando $N = 2^r$ con r un número entero positivo. Por su parte, para señales no igualmente espaciadas (tanto en tiempo como en frecuencia) existen varias implementaciones de la ec. (4.9) llamadas colectivamente como *Transformadas de Fourier Rápidas no Uniformes* (NUFFT por las siglas en inglés de *Nonuniform Fast Fourier Transform*), las cuales en el proceso emplean algoritmos de interpolación para conseguir una señal igualmente espaciada y luego emplear la FFT en una grilla sobremuestreada. Una implementación que destaca por alcanzar eficiencia de $\mathcal{O}(N \log(N) + N \log(1/\delta))$ operaciones es la propuesta en Dutt & Rokhlin (1993), con δ la precisión del cómputo empleado², la cual ha sido acelerada en Greengard & Lee (2004) y se han ejemplificado sus aplicaciones en Lee & Greengard (2005), alcanzando una eficiencia de $\mathcal{O}(N \log(N))$ operaciones.

¹En este tesis se ha usado la FFT implementada por scipy. Para su documentación revisar <https://docs.scipy.org/doc/scipy-0.18.1/reference/fftpack.html>.

²En nuestras simulaciones se ha fijado $\delta = 10^{-15}$.

4.3.1. Teorema de Nyquist-Shanon

En el caso de señales igualmente muestreadas, se define la frecuencia de muestreo (o sampleo) f_s como el número de muestras N por unidad de tiempo T que se toman de una señal continua para producir la señal discreta,

$$f_s := \frac{N}{T}. \quad (4.10)$$

Además, la frecuencia f_1 mínima que se puede detectar mediante el análisis de Fourier es

$$f_1 := \frac{1}{T}, \quad (4.11)$$

razón por la cual podemos escribir $f_s = Nf_1$.

El teorema de Nyquist-Shanon plantea que si se tiene una señal periódica de frecuencia máxima f_{\max} , igualmente muestreada y con una frecuencia de muestreo f_s , entonces para poder reconstruir la señal original a partir de su transformada de Fourier, se requiere que $f_s \geq f_{\text{NS}}$, donde $f_{\text{NS}} := 2f_{\max}$ es denominada la frecuencia de Nyquist-Shanon.

4.3.2. Ejemplo: Fuga Espectral

Suponga que tenemos una señal $h_4(t)$ definida en un intervalo de tiempo finito $T = 2t_0$, algo así como la región no nula de $h_3(t)$. Para estudiar su descomposición espectral podríamos realizar la Serie de Fourier estudiada en la sección 4.2, considerando su extensión periódica de período T , como muestra la figura 4.5.

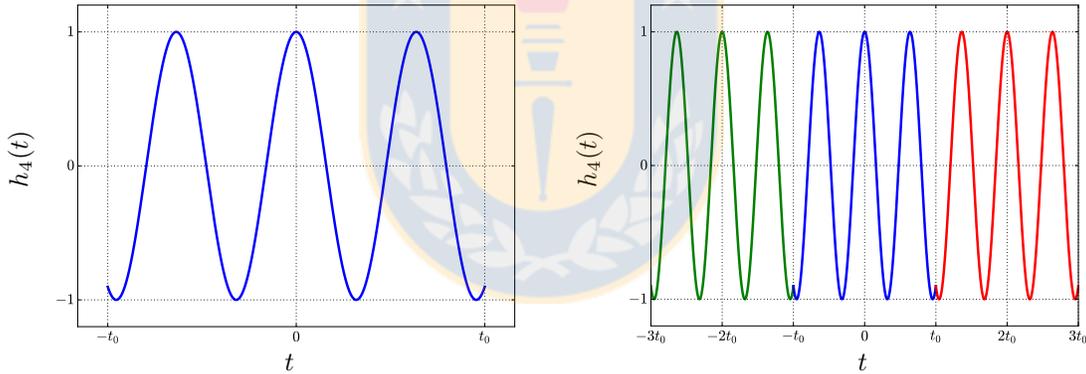


Figura 4.5: Gráfico de $h_4(t)$ y su extensión periódica: a) Gráfico de $h_4(t)$. b) Extensión periódica de $h_4(t)$. La curva azul corresponde a la señal $h_4(t)$, mientras que las curvas verde y roja a sus réplicas. Fuente: Elaboración propia.

Si en vez de ello, la muestreamos equiespaciadamente con $N = 2^9$, eligiendo $f' = 0.5$ Hz, $t_0 = \pi$ s, entonces por el teorema de Nyquist-Shanon se tiene que

$$f_s \approx 81.33 \text{ Hz}, \quad f_1 \approx 0.16 \text{ Hz}, \quad f_{\max} \approx 40.66 \text{ Hz}. \quad (4.12)$$

Además, si se calcula la DFT definida en la sección 4.3 empleando los algoritmos de FFT y de NUFFT, comparando con la solución analítica $|\tilde{h}_3(f)|$ sampleada en las frecuencias de la solución numérica, entonces se consiguen los gráficos en la fig. 4.6.

Desde el segundo gráfico en la fig. 4.6, vemos que ambos valores absolutos de las soluciones numéricas se superponen muy bien al valor absoluto de la solución analítica en torno a la frecuencia f' contenida en la señal. Ahora bien, a frecuencias mayores que se alejan de f' y donde la amplitud decae rápidamente a cero, desde la fig. 4.7(a) vemos que se aprecia una *diferencia porcentual* de un 100% en el caso de la FFT y de un 160% en el caso de la NUFFT, dependiendo de la frecuencia evaluada. Ahora bien, de

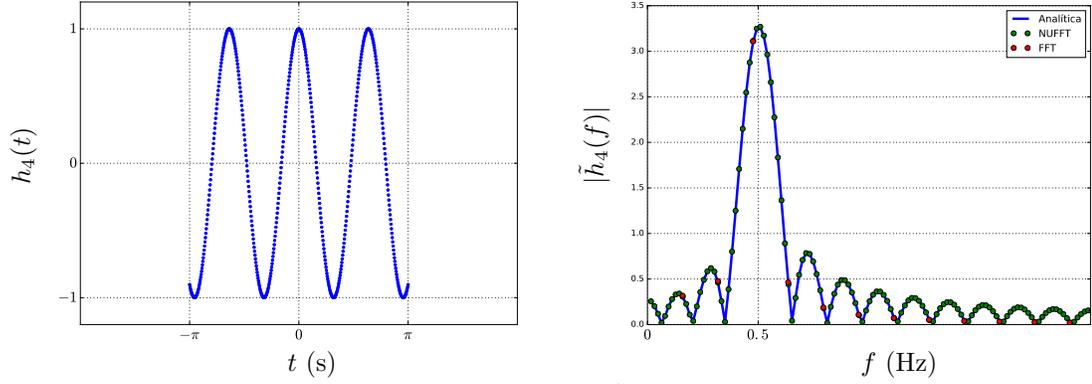


Figura 4.6: Gráfico de la señal $h_4(t)$ muestreada y su FDT $\tilde{h}_4(f)$: Se comparan las implementaciones de la FFT de Numpy y la NUFFT de Greengard & Lee (2004), donde se ha calculado la NUFFT con una resolución en frecuencia $\Delta f = f_1/10$. Fuente: Elaboración propia.

la fig. 4.7 vemos que la *diferencia absoluta* decrece en el caso de la FFT y aumenta en el caso de la NUFFT oscilando en un rango de $[0, 0.004]$. Por lo tanto, podemos concluir que cerca de la frecuencia de interés ambos algoritmos se acercan a la solución anlytica al menos en términos de su amplitud. En dichos gráficos, la diferencia porcentual y la diferencia absoluta entre las soluciones numéricas $\tilde{h}_{\text{num}}(f)$ y la analítica $\tilde{h}_{\text{anali}}(f)$, han sido definidas como

$$\Delta \% \left[|\tilde{h}(f)| \right] := \left| \frac{|\tilde{h}_{\text{num}}(f)| - |\tilde{h}_{\text{anali}}(f)|}{|\tilde{h}_{\text{anali}}(f)|} \right| \times 100 \%, \quad \Delta \left[\tilde{h}(f) \right] := \left| |\tilde{h}_{\text{num}}(f)| - |\tilde{h}_{\text{anali}}(f)| \right|. \quad (4.13)$$

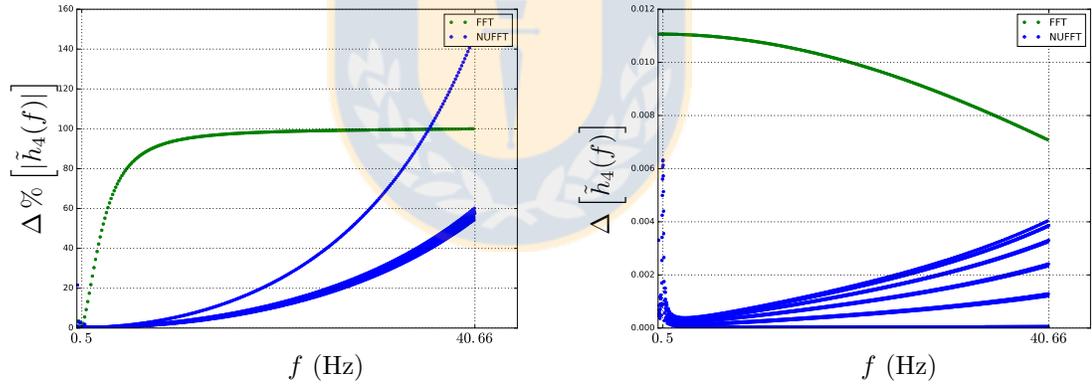


Figura 4.7: Gráficos de la diferencia porcentual entre las soluciones numéricas y la analítica para la señal $h_4(t)$. Fuente: Elaboración propia.

Por lo mostrado en la sección 4.1.1, sabemos que considerar una función en un intervalo finito es “equivalente” a convolucionar la función original con una función cuadrada definida no nula en dicho intervalo. Note que el espectro $|\tilde{h}_4(f)|$ posee un máximo principal en torno a f' y ha sufrido una evidente deformación (una pérdida o fuga de energía desde el máximo principal a los máximos secundarios) desde la delta de Dirac. Dicho fenómeno es técnicamente llamado *fuga espectral* o *spectral leakage* por su nombre en inglés y se debe al hecho de haber cortado la señal a una región finita de tiempo. Vale la pena recalcar que esto no es un artefacto de haber sampleado la señal o de la implementación de la DFT usada.

Si se considera la extensión periódica de una señal, suponiendo que ésta se repite infinitamente en el tiempo, entonces la mayoría de las extensiones tendrán discontinuidades debido a que en los extremos no necesariamente coinciden, como ocurre con la señal $h_5(t) := \cos[2\pi f'(t - 0.5)]$ definida en el mismo intervalo de tiempo finito T que $h_4(t)$. En la fig. 4.8 se puede apreciar la extensión periódica de $h_5(t)$ y su DFT, la cual ha sido muestreada con la misma tasa de sampleo que $h_4(t)$.

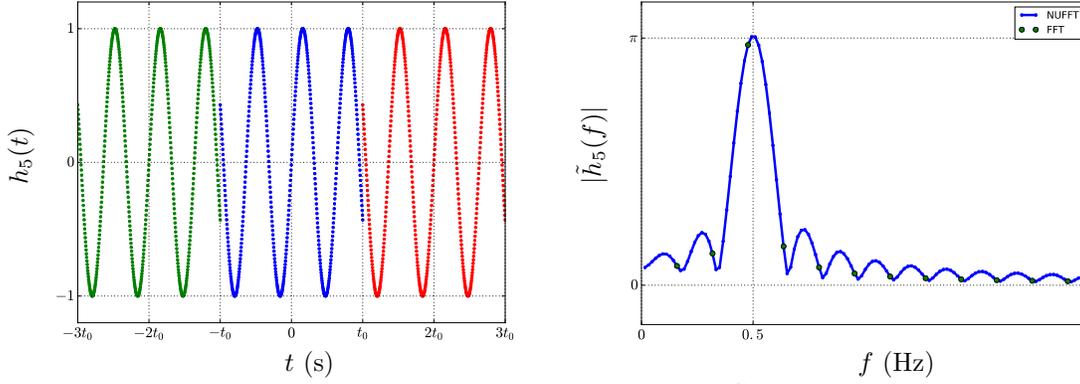


Figura 4.8: Extensión periódica y sampleada de $h_5(t)$, junto a su DFT $\tilde{h}_5(f)$: Se comparan las implementaciones de la FFT de Numpy y la NUFFT de Greengard & Lee (2004), donde se ha calculado la NUFFT con una resolución en frecuencia $\Delta f = f_1/10$. Fuente: Elaboración propia.

La fuga espectral será más intensa para señales que posean grandes discontinuidades. Esto se aprecia claramente en la fig. 4.8, donde se han calculado las DFT's de $h_5(t)$, cuya extensión periódica posee una discontinuidad mayor que la de $h_4(t)$. Como resultado, vemos que la amplitud del lóbulo principal decrece un poco, mientras que las de los lóbulos secundarios aumentan con relación a $h_4(t)$.

En resumen, la fuga espectral introduce dos problemas: cualquier componente espectral dada contendrá no sólo su energía correspondiente, sino también el ruido del resto del espectro y una componente espectral con una gran fuga enmascarará otras componentes más pequeñas a distintas frecuencias. Las señales que por coincidencia o diseño no posean discontinuidades, entonces poseerán una fuga mínima. En el caso de señales que decaigan suavemente a cero en los extremos, tampoco tendrían discontinuidades y en consecuencia no sufrirían de fuga espectral.

4.3.3. Ejemplo: Funciones ventana

Se entiende por “ventanear” una función $h(t)$ a la acción de “tomar la función de interés y multiplicarla por una función ventana $F(n)$ ”, tal que se termina estudiando el análisis espectral de la señal resultante $h(t)F(n)$ suprimiendo los efectos que se producen con la transformada de Fourier por poseer una señal en una región finita y que es no nula en los extremos. A continuación se muestra una breve descripción de las funciones ventana empleadas durante el desarrollo de la tesis:

- Kaiser:

$$F(n, \beta) := \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1 - \frac{4n^2}{(N-1)^2}}\right)}{I_0(\beta)}, \quad (4.14)$$

con I_0 la función modificada de Bessel a orden cero y $-(N-1)/2 < n < (N-1)/2$ y β un parámetro a elección.

- Hanning: $F(n) := 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/(N-1))$, con $0 \leq n \leq N-1$.
- Hamming: $F(n) := 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/(N-1))$, con $0 \leq n \leq N-1$.
- Ones: $F(n) := 1$, con $0 \leq n \leq N-1$. Note que esta función ventana es la función identidad.
- Blackman: $F(n) := 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n/N) + 0.08 \cos(4\pi n/N)$ con $0 \leq n \leq N-1$.
- Bartlett: $F(n) := (2/(N-1))((N-1)/2 - |n - (N-1)/2|)$ con $0 \leq n \leq N-1$.

En la fig. 4.9 se muestra un gráfico con las funciones ventana a disposición evaluadas para $t \in [-t_0, t_0]$. Además, en la fig. 4.10 puede apreciar que el efecto de ventanear la función $h_4(t)$ por cada una de las funciones a disposición es anular a la función resultante en los extremos, modificando por consiguiente

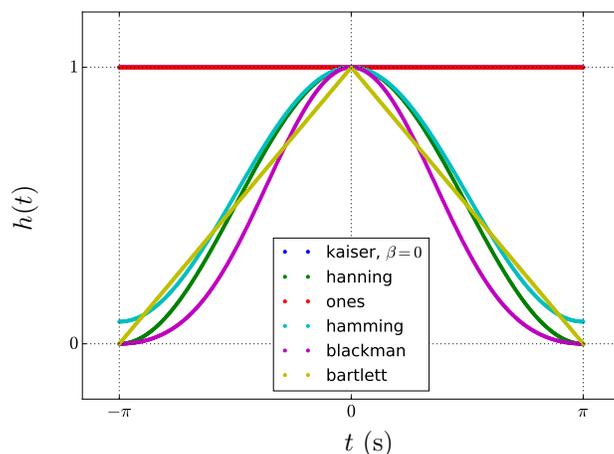


Figura 4.9: Gráfico con funciones ventanas típicas. Fuente: Elaboración propia.

la amplitud de la misma en las zonas intermedias. Como consecuencia, se han suprimido los máximos secundarios en torno a la frecuencia f_0 , que sabemos es la única frecuencia contenida en la señal, y además el valor absoluto de la transformada de Fourier resultante ha alcanzado menores amplitudes en su máximo principal. Elegir apropiadamente una función ventana es una labor que dependerá de la señal considerada y lo que se busque conseguir con el ventaneo.

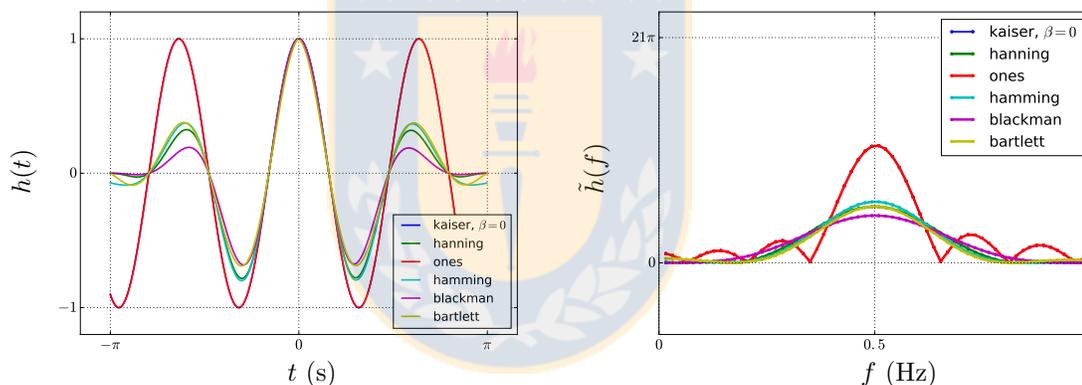


Figura 4.10: Gráficos de $h_4(t)$ "ventaneada" y sus transformadas de Fourier respectivas: Se ha usado la implementación NUFFT. Fuente: Elaboración propia.

4.4. Análisis de ondas gravitacionales

Posterior a las dos detecciones ya confirmadas de ondas gravitacionales y la reciente nueva toma de datos por parte de LIGO, los años que vienen prometen detecciones con cierta frecuencia, lo que consolidaría la anhelada *Astronomía de Ondas Gravitacionales* como una forma diferente de observar al Universo.

Existe una serie de convenciones empleadas por la comunidad de personas que estudian ondas gravitacionales para describir la intensidad de la señal que arriba y la sensibilidad de los detectores empleados, las cuales son comúnmente confusas para alguien que se inicia en el tema, aún cuando existe una extensa literatura revisando el potencial de todos los detectores construidos ante las posibles fuentes emisoras. En [Moore et al. \(2015\)](#) se discuten las diferentes convenciones comúnmente usadas y como práctica usual se resume dicha información en un gráfico como el de la figura 4.11, donde las curvas continuas representan la sensibilidad del detector. La idea es que si una señal se encuentra por sobre dichas curvas, entonces puede ser detectada por el aparato en consideración. En dicho gráfico se ha indicado también las fuentes

esperadas en distintos rangos de amplitud y frecuencia. Como se señaló en la sección 2.2.2, cuando pasa

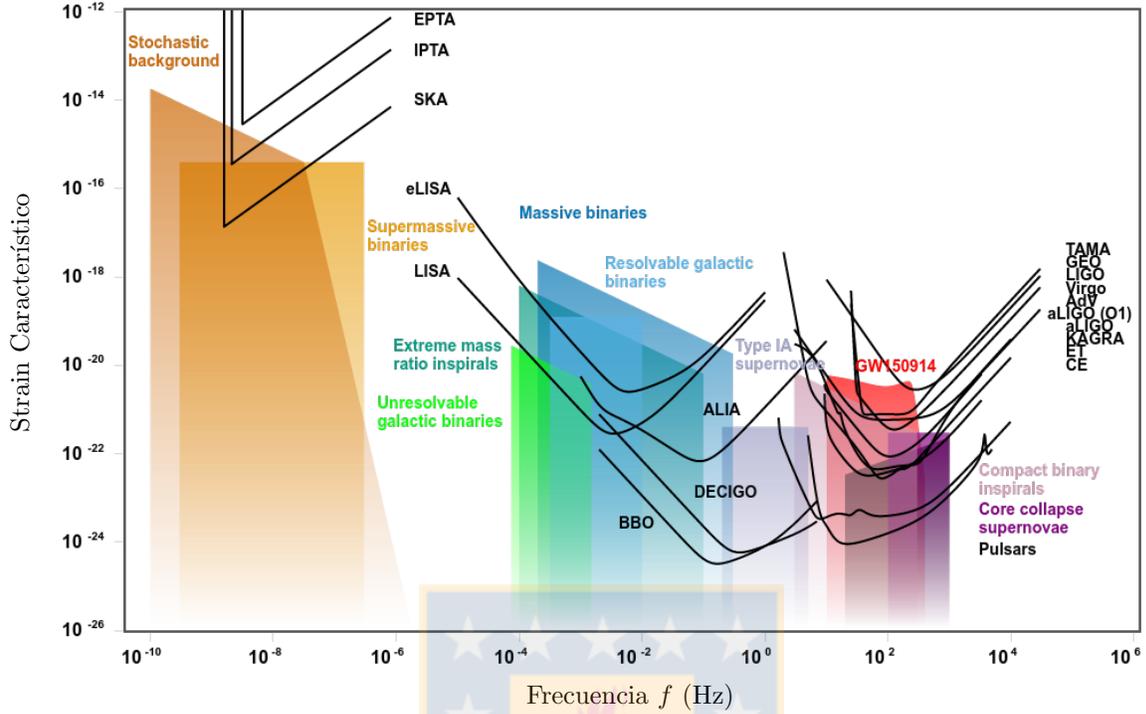


Figura 4.11: Curvas de sensibilidad de detectores de ondas gravitacionales y posibles fuentes. Fuente: Adaptada apartir de imagen original disponible en <http://rhcole.com/apps/GWplotter/>.

una onda gravitacional por un detector se tendrá una señal de salida $h(t)$ almacenando la información de la fuente que la genera, donde se pensó en un detector ideal que no introduce ruido a la medición. Ahora bien, en un modelo más realista debemos pensar en la sensibilidad del detector tal que la salida del detector $s(t)$ sea la superposición del ruido $n(t)$ (propio del aparato) y la posible señal $h(t)$,

$$s(t) = n(t) + h(t). \quad (4.15)$$

Si se supone por simplicidad que el ruido en el detector es estacionario y gaussiano, entonces está completamente caracterizado por la “densidad espectral de potencia de un lado”, $S_n(f)$ (con unidades de inverso de frecuencia) definida como

$$\langle \tilde{n}(f) \tilde{n}^*(f') \rangle =: \frac{1}{2} \delta(f - f') S_n(f), \quad (4.16)$$

donde los paréntesis $\langle \dots \rangle$ denotan el promedio de ensemble sobre muchas realizaciones, el cual puede ser reemplazado por un promedio temporal ya que el ruido es estacionario. La idea entonces es medir el ruido durante un tiempo T suficientemente largo y entonces calcular la transformada de Fourier $\tilde{n}(f)$ con una resolución en frecuencia $\Delta f = T^{-1}$; luego repetir el procedimiento varias veces y calcular un promedio.

Mientras que la magnitud de la transformada de Fourier de una señal provee una cuantificación simple de la amplitud de la onda gravitacional en función de la frecuencia, tiene la deficiencia de que muchos sistemas binarios en proceso de inspiral tienen una amplitud varios órdenes menor que el ruido en el detector. Por ello, se introduce una cantidad denominada *relación señal-ruido*³ ρ (SNR por las siglas en inglés de *Signal to Noise Ratio*), que como su nombre bien lo indica nos da cuenta de cuánto ruido contiene la señal, cuyo cuadrado está definido por

$$\rho^2 := \int_0^\infty df \frac{4|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} = \left(\tilde{h}(f) \left| \tilde{h}(f) \right. \right), \quad (4.17)$$

³Las dos primeras detecciones de ondas gravitacionales tuvieron una relación señal-ruido de 24 y 13 respectivamente.

donde $(\tilde{h}(f)|\tilde{h}(f))$ denota el producto interno de $\tilde{h}(f)$ consigo misma, definido por la ec. (14) en Moore *et al.* (2015). Note de la ecuación precedente que para calcular ϱ^2 es necesario conocer la forma de la señal $\tilde{h}(f)$.

4.4.1. “Strain” Característico

Se define el *Strain característico* de la señal y del ruido respectivamente como

$$h_c(f) := 2f|\tilde{h}(f)|, \quad h_n(f) := \sqrt{fS_n(f)}, \quad (4.18)$$

tal que el SNR pueda ser escrito como

$$\varrho^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d(\log f) \left[\frac{h_c(f)}{h_n(f)} \right]^2. \quad (4.19)$$

4.4.2. Densidad Espectral de Potencia

Se define la *Densidad Espectral de Potencia* (PSD por las siglas en inglés de *Power Spectral Density*) de la señal y del ruido respectivamente en términos del strain característico como

$$PSD_c(f) := \frac{h_c(f)^2}{f}, \quad PSD_n(f) := \frac{h_n(f)^2}{f}. \quad (4.20)$$

4.4.3. Amplitud de Densidad Espectral

La *Amplitud de Densidad Espectral* (ASD por las siglas en inglés de *Amplitud Spectral Density*) de la señal y del ruido se definen como las raíces cuadradas de sus densidades espectrales de potencia respectivas.

$$ASD(f)_c := \sqrt{PSD_c(f)}, \quad ASD(f)_n := \sqrt{PSD_n(f)}. \quad (4.21)$$

4.4.4. Densidad Espectral de Energía

La *Densidad Espectral de Energía* (SED por las siglas en inglés de *Spectral Energy Density*) de la señal y del ruido se definen en términos de la densidad espectral de potencia mediante la siguiente expresión:

$$SED_c(f) := \frac{\pi c^2}{4G} f^2 PSD_c(f), \quad SED_n(f) := \frac{\pi c^2}{4G} f^2 PSD_n(f). \quad (4.22)$$

Note que si $h(t)$ y $n(t)$ son cantidades adimensionales y la variable temporal está medida en segundos, entonces $\tilde{h}(f)$ y $\tilde{n}(f)$ tienen unidades de s o Hz^{-1} . Por consiguiente, los strain característicos asociados a ambas cantidades son también adimensionales. Así, cuando se gráficas en escala log-log, el área entre la curva de la fuente y del detector es proporcional a ϱ^2 (4.19), lo que permite estimar rápidamente la detectabilidad de una fuente (ver figura 4.11). Una desventaja evidente de graficar el strain característico $h_c(f)$ es que no se relaciona directamente con la amplitud de la onda recibida.

Por su parte, la PSD tiene unidades de Hz^{-1} , la ASD tiene unidades de $\text{Hz}^{-1/2}$ y la SED unidades de $\text{kg s}^{-1}\text{m}^{-2}$.

Capítulo 5

Simulaciones

En el presente capítulo se describen los códigos principales escritos durante el desarrollo de la tesis. Todos éstos han sido escritos en Python y con una estructura modular que facilita la comunicación entre las distintas clases que calculan cantidades de diversa naturaleza.

Para ejemplificar la utilidad de los códigos, se adjuntan diversos gráficos de interés físico que han sido creados con ellos.

5.1. Adimensionalización

En los códigos, todas las cantidades fueron adimensionalizadas según las siguientes reglas:

$$\bar{x} := \frac{x}{\left(\frac{GM}{c^2}\right)}, \quad \bar{t} := \frac{t}{\left(\frac{GM}{c^3}\right)}, \quad \bar{v} := \frac{v}{c}, \quad \bar{a} := \frac{GM}{c^4}a, \quad (5.1)$$

$$\bar{E} := \frac{E}{\mu c^2}, \quad \bar{L}^i := \frac{c}{GM\mu}L^i, \quad \bar{P} := \frac{G}{c^5}P, \quad (5.2)$$

donde M y μ son la masa total y la masa reducida del sistema binario, x es una variable de longitud, t es un tiempo, v una velocidad, a una aceleración, E una energía, L^i un momentum angular y P una potencia. Las variables con una barra en su parte superior son las variables adimensionalizadas.

5.2. Resolución de ecuaciones de movimiento y de precesión

Se ha escrito un código que resuelve numéricamente las ecuaciones de movimiento postnewtonianas (3.282) y de precesión (3.286) en términos de la coordenada relativa, que sólo requieren información de las condiciones iniciales y los parámetros del sistema, como los valores de las masas y el orden postnewtoniano hasta el que se desea calcular. Además, se han implementado rutinas que permiten calcular las diversas definiciones para la energía y el momentum angular.

5.2.1. Ejemplo: sistema binario de masas iguales y sin spin

Supongamos por simplicidad, un sistema binario de masas iguales con $m_1 = m_2 = 1 M_\odot$ y sin spin. Se ha resuelto numéricamente las ecuaciones de movimiento a distintos órdenes postnewtonianos con las mismas condiciones iniciales y empleando para la integración numérica un tiempo máximo adimensionalizado $\bar{t}_{\max} = 0.6 \times 10^5$ con un equiespaciamiento de 10000 unidades.

Las condiciones iniciales consideradas son

$$\vec{r}_0 = (100, 0, 0), \quad \vec{v}_0 = (0, 0.06, 0), \quad \vec{S}_0 = (0, 0, 0), \quad \vec{\Sigma}_0 = (0, 0, 0). \quad (5.3)$$

En la fig. 5.1 se han graficado las órbitas en el plano xy (el movimiento no sale del plano xy) a distintos órdenes postnewtonianos. Evidentemente los términos 0PN, 1PN y 2PN son conservativos, pese a que

a estos órdenes las órbitas dejan de ser elipses cerradas, ya que éstas se van corriendo (corrimiento del perihelio), podemos ver que la coordenada relativa oscila siempre entre un mismo mínimo y máximo. Por su parte, cuando se resuelve hasta orden 2.5PN las órbitas, además de correrse, éstas disminuyen su tamaño evidenciando la pérdida de energía y momentum angular por parte del sistema en el proceso de colapso gravitacional.

Para hablar con propiedad sobre la conservación o no conservación de la energía y el momentum angular, en las figs. 5.2 y 5.3, se muestran las distintas contribuciones a la energía y el momentum angular del sistema cuando se ha resuelto las ecuaciones de movimiento a orden 2PN y 2.5PN respectivamente. Si bien los efectos de cada una de las correcciones relativistas son pequeñas, al superponerlas para estudiar los valores totales de E y L_i corregidos relativísticamente, ambos manifiestan pérdidas considerables debido a la emisión de ondas gravitacionales.

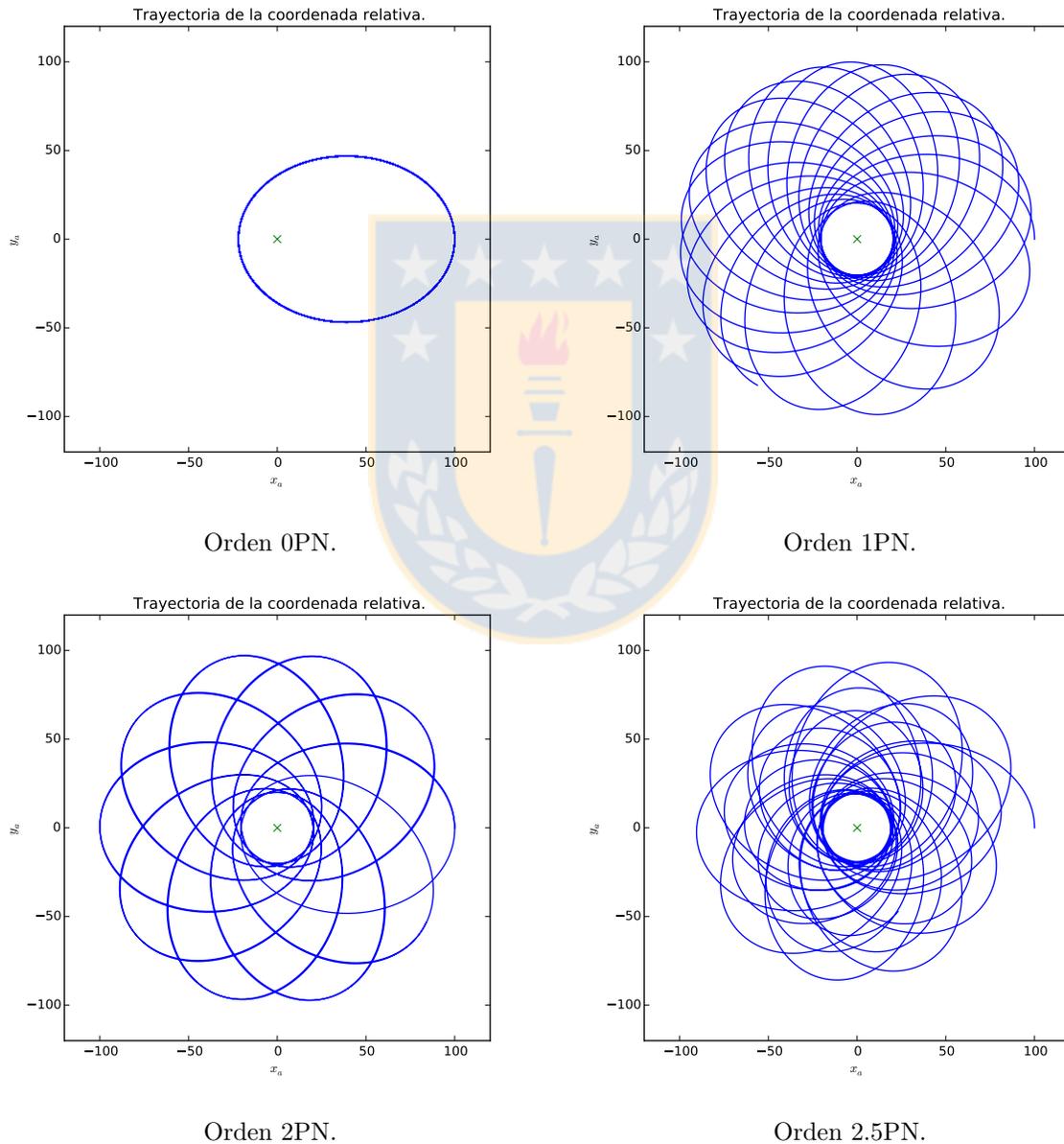


Figura 5.1: Trayectorias postnewtonianas a distintos órdenes. Fuente: Elaboración propia.

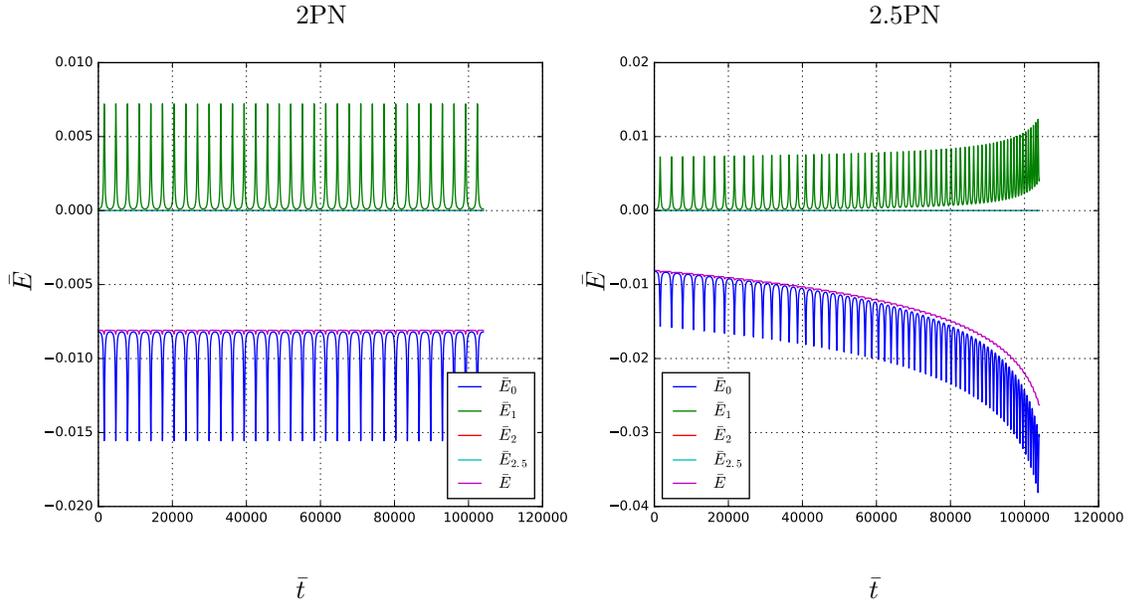


Figura 5.2: Comparación entre las distintas contribuciones a distintos órdenes en la energía cuando se ha resuelto las ecuaciones postnewtonianas a orden 2PN y 2.5 PN. Fuente: Elaboración propia.

5.3. Ondas Gravitacionales emitidas desde el Cúmulo Globular NGC 6266

En esta sección calculamos ondas gravitacionales emitidas por sistemas binarios de objetos compactos en fase de inspiral, formados en el cúmulo globular M62, cuya evolución es modelada usando el código postnewtoniano de suma directa NB6++GPU/PN. Con el objetivo de estudiar la evolución de binarias compactas relativistas, se implementan correcciones postnewtonianas al orden 3.5, así como interacciones spin-spin y spin-órbita en la actual versión del código (Wang *et al.*, 2015).

En el modelo se considera la función de masa inicial de Kroupa, con un rango de masas entre 0.08 y $100M_{\odot}$, y las binarias compactas son el resultado de la evolución estelar del cúmulo. Además, incluimos un 10% de binarias primordiales¹ lo cual permite implementar un escenario dinámico más realista. Las simulaciones corren para un tiempo de aproximadamente la edad del Universo (catorce Gyrs), y encontramos que la mayoría de las fusiones de sistemas binarios de agujeros negros ocurrió en el primer giga año de la evolución del cúmulo de estrellas. Además, extrajimos las órbitas de cada sistema binario y calculamos las ondas gravitacionales emitidas por ellas vista por observadores ubicados en alguna dirección específica.

También, hemos simulado la respuesta de un interferómetro similar a LIGO ubicado a una distancia de 6.9 kpc desde la fuente, y aplicamos el correspondiente análisis espectral de la señal. Intentamos responder la pregunta de si las ondas gravitacionales emitidas desde NGC 6266 pueden ser detectadas.

En la fig. 5.4, se han esquematizado las fases que conllevan simular las ondas gravitacionales emitidas por sistemas binarios, cuyas variables dinámicas provienen de simulaciones computacionales de cúmulos globulares.

5.3.1. Modelando NGC 6266 con NB6++GPU/PN

Estas simulaciones son llevadas a cabo haciendo un intenso uso del programa simulador de N cuerpos NBODY6++GPU (Wang *et al.*, 2015) incorporando las rutinas postnewtonianas con spin (Brem *et al.*, 2013), así la nueva versión ha sido llamada NB6++GPU/PN. Este código ha sido diseñado para la solución precisa del movimiento de muchos cuerpos como por ej: cúmulos globulares, sistemas planetarios, núcleos galácticos, etc. Está basado en la integración directa de las ecuaciones de movimiento newtonianas incluyendo, cuando es relevante, las correcciones postnewtonianas a orden 3.5 en la aceleración y los términos de acoplamiento spin órbita y acoplamiento spin-spin, resolviendo además las ecuaciones de precesión del spin. En esta versión, el tratamiento postnewtoniano de las binarias compactas es similar

¹Sistemas binarios de estrellas compuestas de estrellas que no son compactas relativistas.

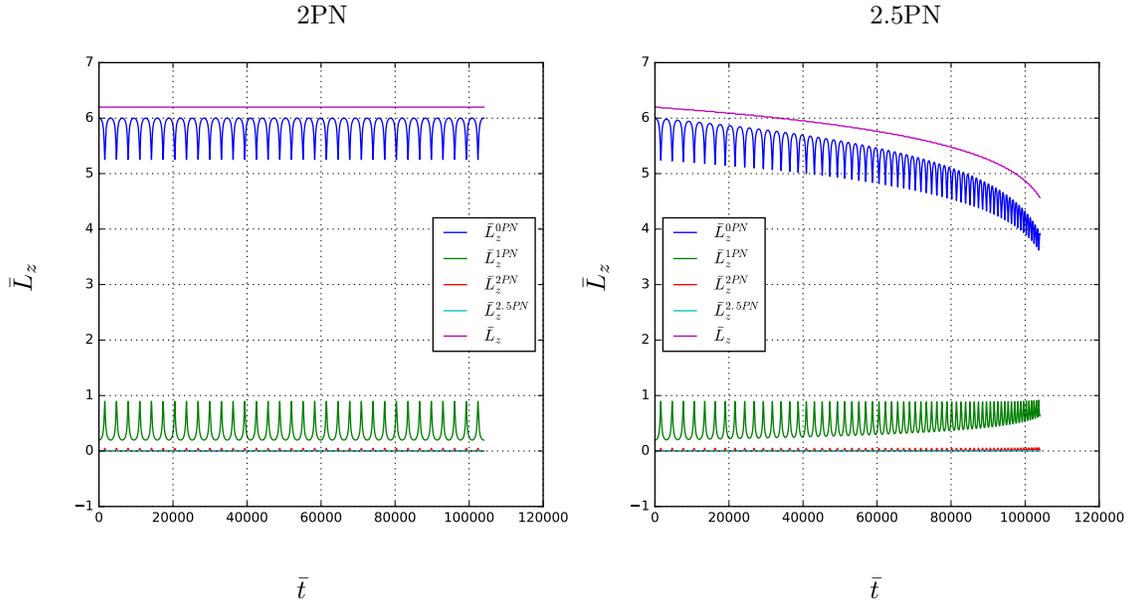


Figura 5.3: Comparación entre las distintas contribuciones a distintos órdenes en el momentum angular cuando se ha resuelto las ecuaciones postnewtonianas a orden 2 y 2.5 PN. Fuente: Elaboración propia.

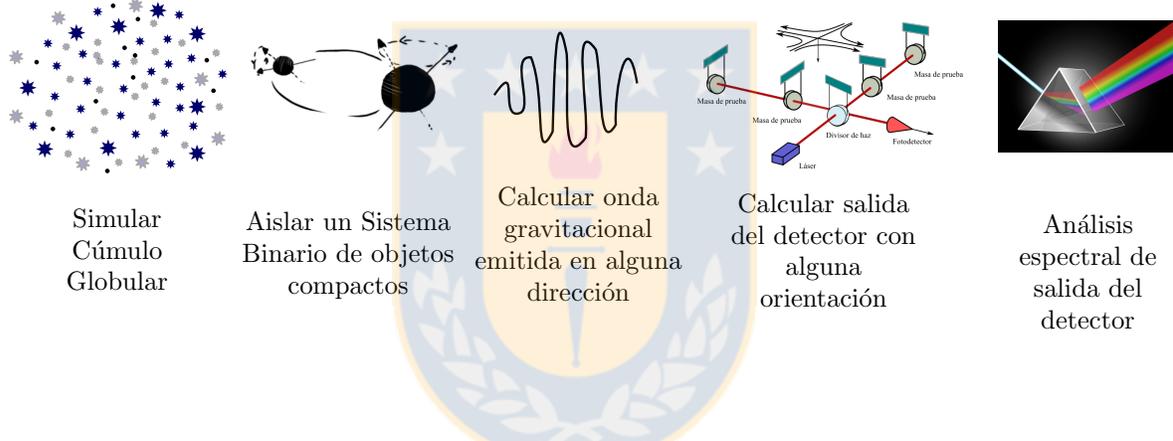


Figura 5.4: Fases del proceso completo requerido para el compute de las ondas gravitacionales. Fuente: Elaboración propia con segunda, cuarta y quinta figuras descargadas desde internet.

a la implementación de [Brem et al. \(2013\)](#). Sin embargo, el criterio que empleamos para encender los términos postnewtonianos son algo diferentes, como explicaremos a continuación.

NB6++GPU/PN es un descendiente de la familia de códigos NBODY iniciados por Sverre Aarseth ([Aarseth, 1963](#)), es óptimo para la evolución secular de sistemas colisionales, donde se requiere alta precisión e integración para largos tiempos y ha sido paralelizado para emplear procesadores GPU ([Spurzem, 1999](#); [Berczik et al., 2013a,b](#); [Kunkel et al., 2013](#)). Las características básicas del código que incrementan su eficiencia se deben a cuatro implementaciones incorporadas: método (o esquema) para predicción-corrección de Hermite a cuarto orden, pasos individuales y de bloques temporales, regularización Kustaanheimo-Stiefel (KS) para encuentros cerrados y subsistemas de pocos cuerpos, y el esquema del vecino (*Ahmad-Cohen scheme*).

La solución de la evolución del sistema incluyendo las correcciones postnewtonianas, puede ser computacionalmente costosa. Por esta razón, dichas correcciones son tomadas en consideración sólo cuando las binarias compactas cumplen las siguientes condiciones,

$$v > \beta c, \quad \Delta\varphi > \theta, \quad (5.4)$$

donde el ángulo $\Delta\varphi$ es el corrimiento del perihelio por revolución y los parámetros β y θ son elegidos empíricamente como $\beta = 0.02$ y $\theta = 10^{-4}$. El formalismo postnewtoniano es útil sólo durante la fase de

Parámetros	Valor
$r_{h,s}$	3.8 pc
$m_{t,s}$	$5.0 \times 10^4 M_{\odot}$
Z	0.002 ([Fe/H] = -1.29 dex)
N	5.0×10^4
C_s	12.768 km/s
a	0; 0.5; 1.0; random

Tabla 5.1: Condiciones iniciales de nuestro modelo. Fuente: Elaboración propia.

inspiral de las binarias, mientras que los procesos de “merger” (fusión) y “ringdown” deben ser modelados usando RG completa. El tratamiento de mergers en nuestras simulaciones es similar al usado en [Brem *et al.* \(2013\)](#); elegimos una distancia final de $5R_S$, con $R_S = 2G(m_1 + m_2)/c^2$ es el radio de Schwarzschild combinado. Cuando la binaria alcanza esta distancia relativa, es combinado en un único cuerpo final ([Brem *et al.*, 2013](#)).

5.3.2. Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales de los modelos calculados son resumidos en la tabla 5.3.2. Inicialmente todos estos modelos tienen perfiles de “King” con $W_0 = 6$ ([King, 1966](#)), un radio de masa media escalado de 3.8 pc, una metalicidad $Z = 0.001$ y un número total de cuerpos N de 5×10^4 . Los detalles sobre como escalamos nuestro modelo para parecerse a NGC 6266 son dados a continuación. Las estrellas de nuestro cúmulo de estrellas obedecen la función de masa inicial regular propuesta por [Kroupa \(2001\)](#). Esta función es una distribución con ley de potencia de la forma $\xi(m) \propto m^{-\alpha}$, con $\alpha = 2.3$ para el rango de masas de $0.08 < m \leq 100 M_{\odot}$. Estas binarias primordiales tienen una distribución log(semi) con un rango entre 50 y 0.0050 AU. Las excentricidades de binarias obedecen una distribución termal. Además, configuramos valores para los parámetros de spin a de los objetos compactos de la simulación, los cuales son el resultado de los procesos de evolución estelar. Continuando con las mismas convenciones de [Brem *et al.* \(2013\)](#), consideramos cuatro condiciones iniciales diferentes de spin para objetos compactos al mismo tiempo $t = 0$. Estos son $a = 0$, $a = 0.5$, $a = 1.0$ (no confundir con la letra a empleada para llamar al semieje mayor en otros capítulos) tanto como magnitud y orientación aleatoria.

5.3.3. Escalando nuestro modelo a NGC 6266

En este modelo hemos empleado 5×10^4 estrellas, las cuales representan aproximadamente la (1/40) parte del número total de miembros en NGC 6266. Este valor es estimado usando la función de masa inicial de [Kroupa \(Kroupa, 2001\)](#). Para reproducir tanto como sea posible la dinámica de este cúmulo globular, fijamos el cociente entre el tiempo de vida t_{ms} de aproximadamente 112 Myr de una estrella de secuencia principal de $4M_{\odot}$ y el tiempo de relajación t_{rh} de 1.3 Gyr ha de ser el mismo en nuestra simulación. Con esta elección, la mitad de la masa queda en el interior de un radio $r_h = 3.8$ pc.

Un procedimiento similar es usado para binarias compactas del sistema con dinámica postnewtoniana. Así, configuramos en nuestro modelo el cociente entre el tiempo de coalescencia y el tiempo de relajación t_{rh} de NGC 6266. Para estimar el tiempo de coalescencia empleamos la ecuación (10) de [Peters \(1964\)](#), vale decir,

$$t_{pn} = \frac{5c^5 \xi^4}{64m_1 m_2 (m_1 + m_2)} \frac{(1 - e^2)^{7/2}}{\left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)}, \quad (5.5)$$

donde m_1 y m_2 son las masas de cada de los cuerpos, c es la rapidez de la luz, ξ y e son el semieje mayor y la excentricidad de la órbita de la coordenada relativa, respectivamente. El tiempo de coalescencia de binarias de BH-BH con masas iguales de $10M_{\odot}$, fijando el semieje mayor ξ a 1.1×10^{-2} unidades nbody (NBU por las siglas en inglés de *Nbody Units*, las unidades adimensionalizadas definidas internamente por Nbody6), $e = 0.9$, y la rapidez de la luz $c = 299792.458 \text{ kms}^{-1}$ (la cual en unidades nbody es

equivalente a 50000) es cercana a 3961 NBU. Esto significa que el cociente entre el tiempo de coalescencia y el de relajación es aproximadamente 2.96. Para mantener este cociente constante en nuestro modelo encontramos que el tiempo de coalescencia de una binaria de BHs de $10 M_{\odot}$ cada uno, debe ser 116 NBU, con ξ igual a 1.5×10^{-4} y rapidez de la luz de 12768 kms^{-1} .

5.4. Ondas gravitacionales emitidas desde NGC 6266

La dinámica de cúmulos globulares tiene una profunda influencia sobre la naturaleza de las poblaciones de binarias en cúmulos y muchas de estas binarias o sus productos finales serán fuentes de radiación gravitacional detectable. En la simulaciones, el tiempo total de evolución del cúmulo es superior a 13.7 Gyr, vale decir, el tiempo de evolución es mayor a la edad del Universo. Inicialmente, el cúmulo posee una población de un 10 % de binarias primordiales, donde una fracción de ellas es esperado que evolucionen a una binaria de BH-BH. Mientras tanto, otras se formarán por la evolución dinámica del cúmulo. En la fig. 5.5 se muestra la evolución de agujeros negros dentro del núcleo del cúmulo estelar. Se puede ver que los sistemas de binarias compactas se forman durante el primer Gyr de la evolución y que la tasa de formación de binarias de BH-BH decrece con el tiempo, lo que conlleva a una baja tasa de emisión de ondas gravitacionales, lo cual se puede apreciar claramente en el histograma de fusiones mostrado en la fig. 5.6.

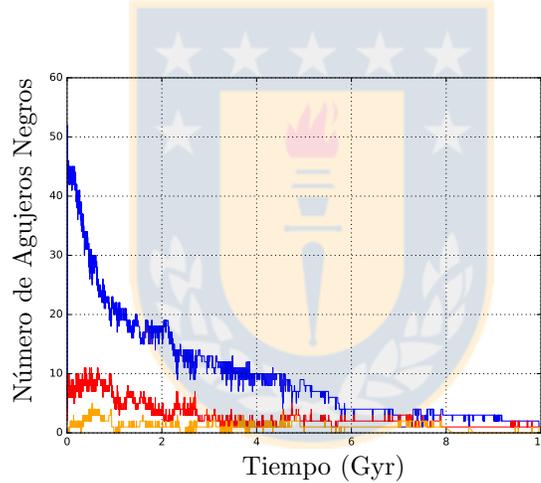


Figura 5.5: Número de agujeros negros en las simulación con spin 1 versus el tiempo de evolución. La curva azul corresponde al número de BHs aislados, la roja representa el número de binarias de BHs y la curva amarilla corresponde al número de binarias de BH-BH formados durante la evolución del cúmulo. Fuente: Elaboración propia.

Calculamos la amplitud de la onda gravitacional de cada binaria en el gauge transversal sin traza h_{ij}^{TT} , como se define en (2.19). Implementamos las ecuaciones (3.21) y (3.22) de Kidder (1995), las cuales son válidas en el centro de masa de la binaria. Estas amplitudes de ondas gravitacionales producidas por sistemas binarios de nuestras simulaciones fueron evaluadas a lo largo de direcciones determinadas por un vector unitario \hat{n} . En particular, consideramos las elecciones $\hat{n}_1 := (1, 0, 0)$, $\hat{n}_2 := (0, 1, 0)$, y $\hat{n}_3 := (0, 0, 1)$, en el sistema de coordenadas de la simulación.

La respuesta h de un detector en ausencia de ruido está dada por la ec. (2.56). Por simplicidad, en la simulación suponemos un interferómetro con forma de L, cuyos brazos son perpendiculares a la dirección de propagación \hat{n} . Por ejemplo, si $\hat{n} = \hat{n}_1$ elegimos $\hat{x} = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $\hat{y} = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Para $\hat{n} = \hat{n}_2$, $\hat{x} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ y $\hat{y} = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, y finalmente para $\hat{n} = \hat{n}_3$ escogemos $\hat{x} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ y $\hat{y} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.

Dos pares de binarias BH-BH representativos han sido seleccionados de nuestras simulaciones. El par (P1) tiene masas de 25.6 y $25.9 M_{\odot}$ y spin inicial de 1. El segundo par (P2) tiene un valor inicial aleatorio

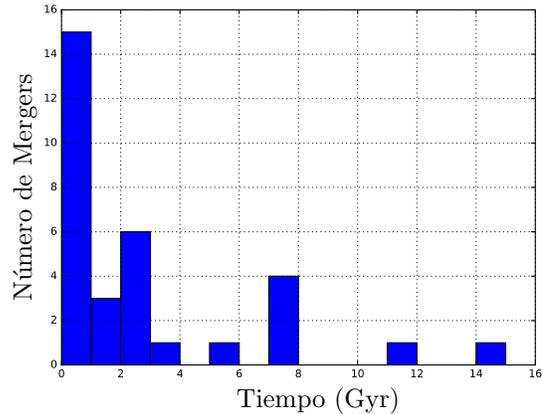


Figura 5.6: Histograma del número de mergers en las simulaciones versus el tiempo de evolución. Fuente: Elaboración propia.

para el spin y masas de 23.6 y $25.0 M_{\odot}$. Para ambos pares, la respuesta h fue calculada para los últimos 30 segundos de su evolución, como sería observada por un interferómetro ideal ubicado a lo largo de las direcciones \hat{n}_1 , \hat{n}_2 y \hat{n}_3 , a una distancia de 6.9 kpc.

Graficamos los correspondientes strain característicos $h_c(f)$, como se definió en la ec. (4.18), en el rango de frecuencia of interés, además se grafican las curvas de sensibilidad del interferómetro LIGO. También mostramos los correspondientes espectrogramas (graficando el strain característico en escala lineal) en las figuras 5.13, 5.14, 5.19 y 5.20.

Los datos de las variables dinámicas de posición relativa, velocidad y spin de la binaria, como una salida de NBODY6 no están distribuidos uniformemente en tiempo. Esto es porque en la integración en el esquema KS para la binarias compactas, el paso temporal cambia decreciendo mientras la órbita de las estrellas se acercan al perihelio. Entonces los valores de amplitud calculada y la salida del detector simulada también no están uniformemente distribuidas en tiempo. Por esta razón, hemos empleado la NUFFT, con el algoritmo propuesto en Greengard & Lee (2004) el cual ha sido implementado en Python por Foreman-Mackey.

Particularmente, en el código que calcula el espectrograma se requiere fijar ciertos parámetros los cuales deben ser elegidos adecuadamente conociendo alguna información de la señal a estudiar y su distribución en el tiempo, como por ejemplo, el ancho en el tiempo por ventana (ww por las siglas en inglés de *window width*), el número mínimo de puntos por ventana (nppwmin por las siglas en inglés de *minimal number of points per window*) a considerar y el número a puntos a superponer (overlap por el significado en inglés de traslape) entre ventanas. Dadas las propiedades de las señales estudiadas se han configurado por defecto los siguientes parámetros, nppwmin = 256, overlap = 128. Además, cada intervalo temporal ha sido ventaneado con la función Blackman, y tiene una duración de 0.4 s para P1 y 0.3 s para P2.

En la fig. 5.8 se han esquematizado los códigos que permiten calcular las ondas gravitacionales y el análisis espectral cuando se han seleccionado los pares desde la simulación del cúmulo y sus variables dinámicas (VD), como la posición \vec{x} , la velocidad \vec{v} y los spines \vec{S} y $\vec{\Sigma}$ han sido aisladas.

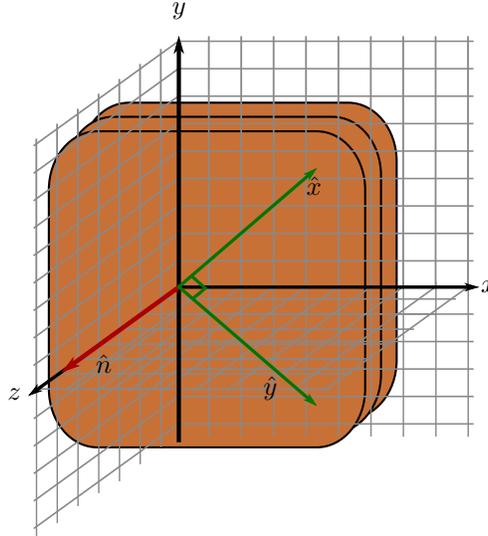


Figura 5.7: Elección de la dirección de los brazos del interferómetro, cuando $\hat{n} = \hat{n}_3$. Fuente: Elaboración propia.

5.4.1. Par P1

La onda gravitacional emitida por el primer par durante los últimos 30 segundos de evolución, y a lo largo de la dirección \hat{n}_1 es presentada en la fig. 5.9. Esta dirección es aproximadamente perpendicular al plano orbital de la binaria. En la parte inferior de la fig. 5.9, mostramos la señal correspondiente a los primeros 6 segundos. Como es esperado, su amplitud (de orden 10^{-17}) y frecuencia crecen en el tiempo. La modulación observada de la amplitud, con un período en torno a 2.4 s en la parte inicial del gráfico, puede ser atribuida al corrimiento del perihelio de la órbita.

La fig. 5.10 muestra la onda gravitacional emitida por el mismo par, como sería observada desde la dirección \hat{n}_2 (la onda emitida a lo largo de la dirección \hat{n}_3 , como es esperado, es muy similar y por tanto no mostrado aquí). La amplitud es más pequeña que en el caso previo por un factor de 1/4 aproximadamente. Adicionalmente, apreciamos una modulación de la amplitud con un período de 6.6 s, el cual es un resultado de la precesión del plano de la órbita debido a la dinámica del spin.

El strain característico de las ondas gravitacionales (de órdenes 10^{-16} y 10^{-17} respectivamente) propagando en las direcciones indicadas previamente, han sido graficadas en las figs. 5.11 y 5.12, junto con las curvas de sensibilidad de los detectores (LIGO collaboration, 2016). Como un resultado de los parámetros dinámicos tanto como de la distancia al cúmulo, vemos que las amplitudes predichas están sobre las curvas de sensibilidad, y deben por tanto ser en principio detectadas por los instrumentos de LIGO.

Además, en las figs. 5.13 y 5.14 los espectrogramas de la señal son mostrados en el mismo rango de frecuencia. En ambos casos sus frecuencias varían entre 5 y 18 Hz aproximadamente. En particular, en 5.14 podemos apreciar la modulación de amplitud de la señal como regiones negras intermitentes en los gráficos.

5.4.2. Par P2

Las ondas gravitacionales emitidas en las direcciones \hat{n}_2 y \hat{n}_3 , son presentadas en las figs. 5.15 y 5.16 para los últimos 30 segundos de evolución. En la parte inferior de los gráficos, mostramos la señal correspondiente a los primeros y últimos 3 segundos. En la tercera dirección, la amplitud es más pequeña que en la segunda dirección y en ambos casos no podemos apreciar una modulación en amplitud como ocurrió con el par P1. Su amplitud (de orden 10^{-17}) y frecuencia están incrementando con el tiempo como es esperado.

También hemos graficado el strain característico de las ondas gravitacionales (de orden 10^{-17}) propagándose en las direcciones indicadas previamente en las figs. 5.17 y 5.18. En las figs. 5.19 y 5.20 los

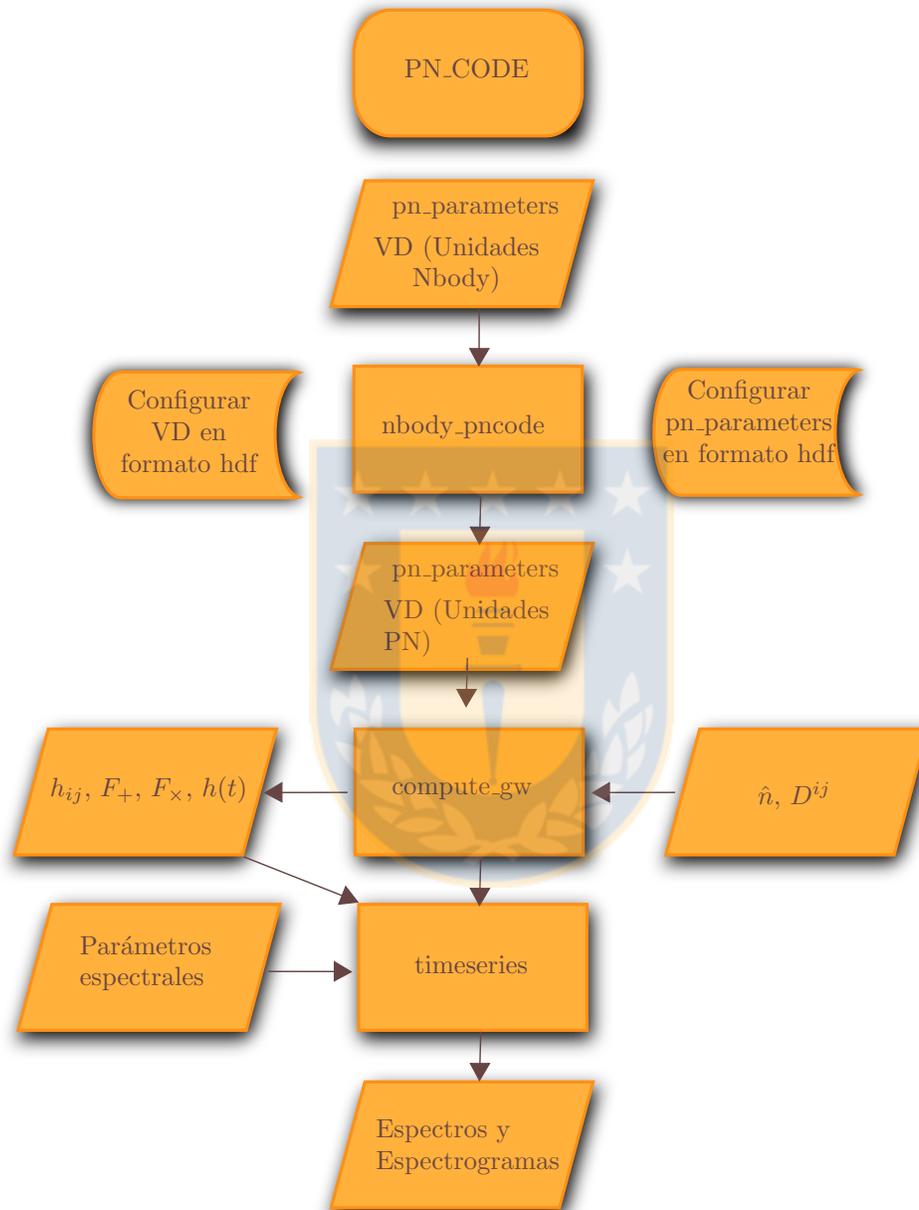


Figura 5.8: Esquema del proceso completo de calcular las ondas gravitacionales y su análisis espectral respectivo. Fuente: Elaboración propia.

espectrogramas de las señales son mostrados. En ambos casos sus frecuencias varían entre 6 y 20 Hz aproximadamente. Similar a lo ocurrido con el par P1, la onda de la señal en ambas direcciones debiesen poder ser detectadas por los instrumentos de LIGO.

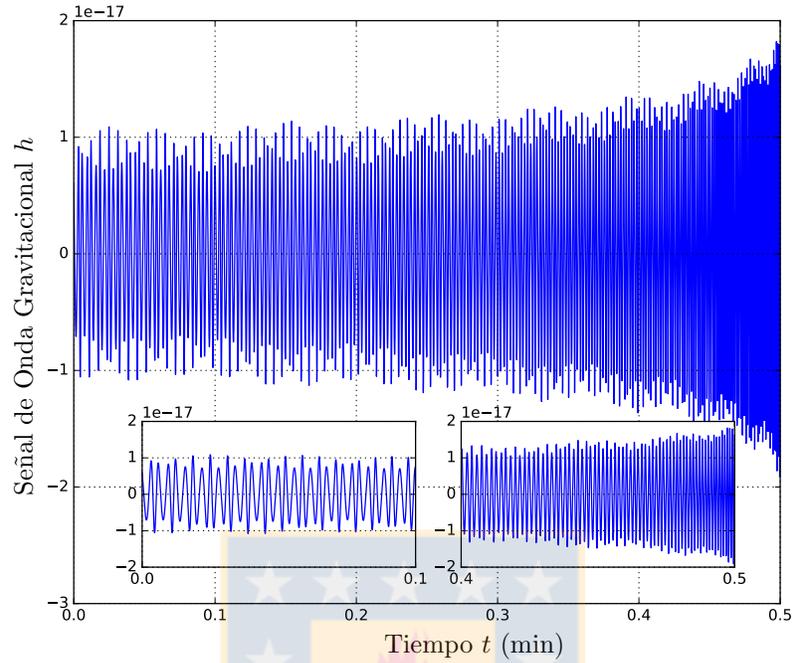


Figura 5.9: Señal de onda gravitacional emitida por la binaria P1, detectada por un interferómetro a lo largo de la dirección \hat{n}_1 . Fuente: Elaboración propia.

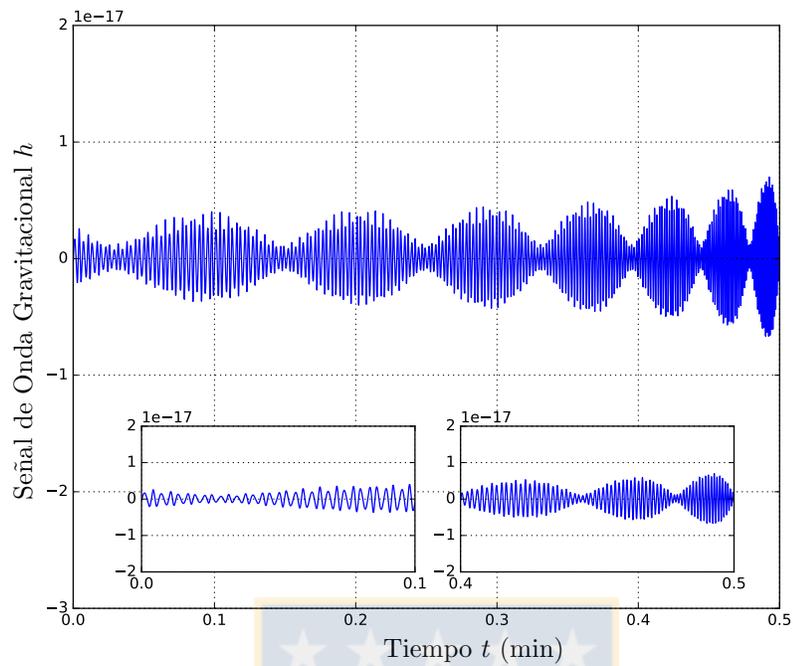


Figura 5.10: Señal de onda gravitacional emitida por la binaria P1, detectada por un interferómetro a lo largo de la dirección \hat{n}_2 . Fuente: Elaboración propia.

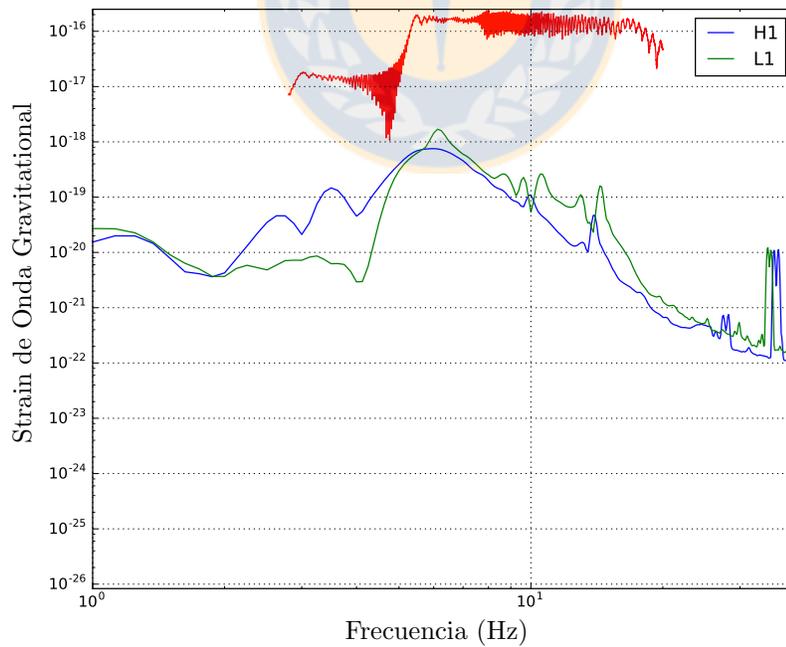


Figura 5.11: La curva roja es el strain de la onda gravitacional emitida por la binaria P1 en la dirección \hat{n}_1 . Las curvas azul y verde son las curvas de sensibilidad de los interferómetros de LIGO en Hanford y Livingston respectivamente. Fuente: Elaboración propia.

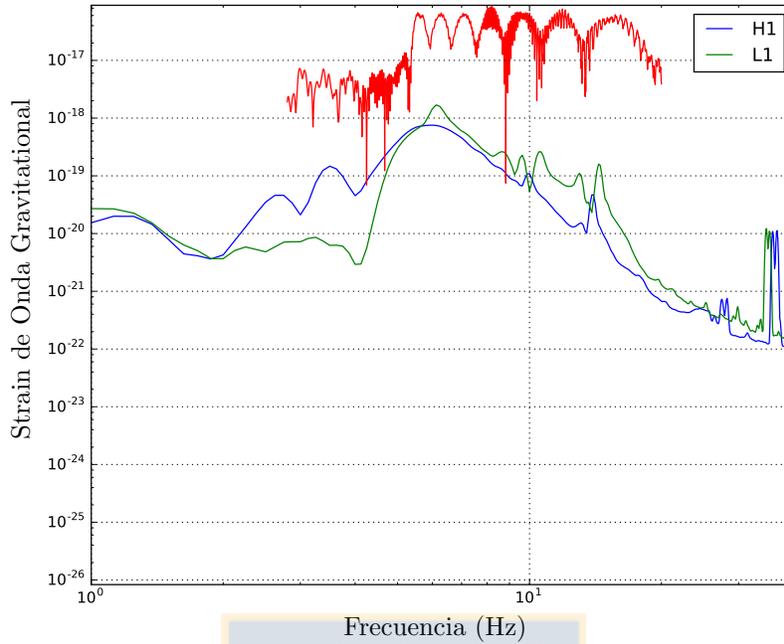


Figura 5.12: La curva roja es el strain de la onda gravitacional emitida por la binaria P1 en la dirección \hat{n}_2 . Las curvas azul y verde son las curvas de sensibilidad de los interferómetros de LIGO en Hanford y Livingston respectivamente. Fuente: Elaboración propia.

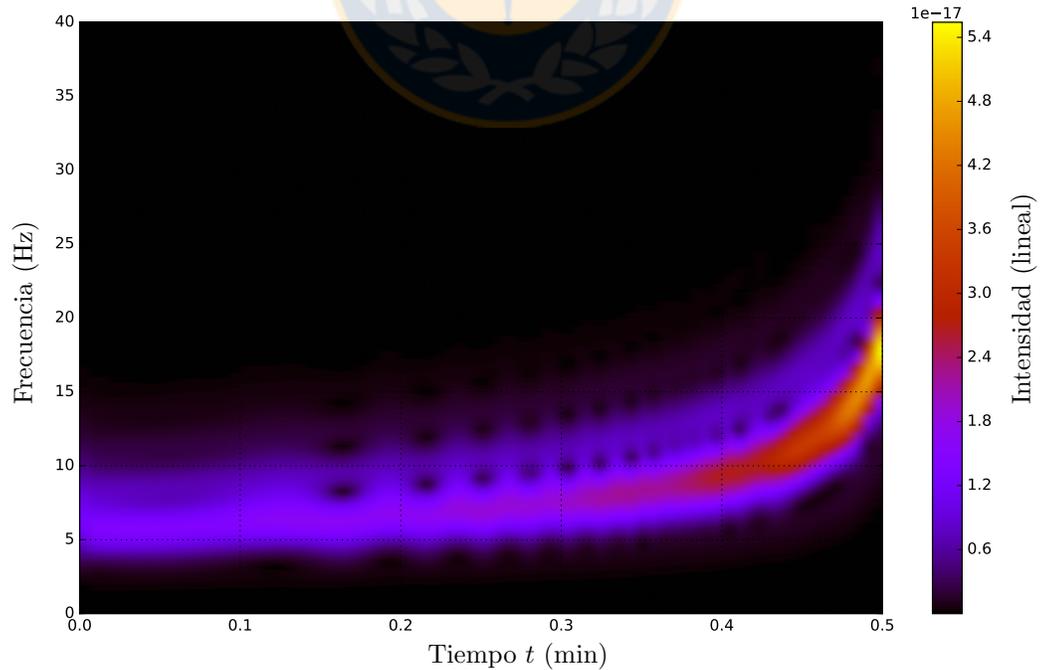


Figura 5.13: Espectrograma (Strain) de onda gravitacional emitida por la binaria P1 en la dirección \hat{n}_1 . Fuente: Elaboración propia.

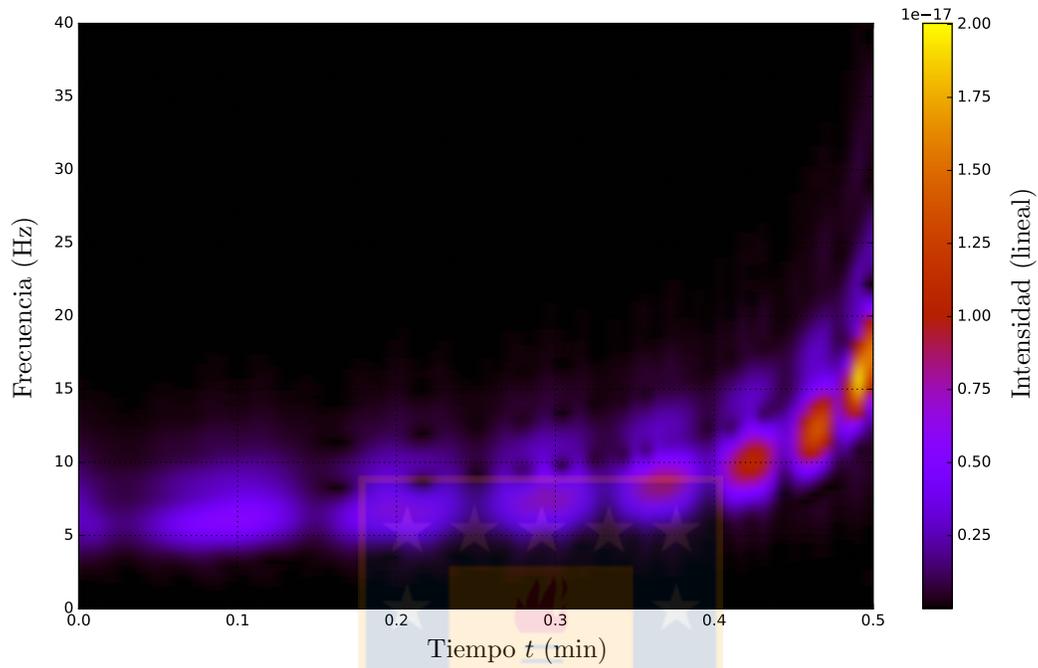


Figura 5.14: Espectrograma (Strain) de onda gravitacional emitida por la binaria P1 en la dirección \hat{n}_2 . Fuente: Elaboración propia.

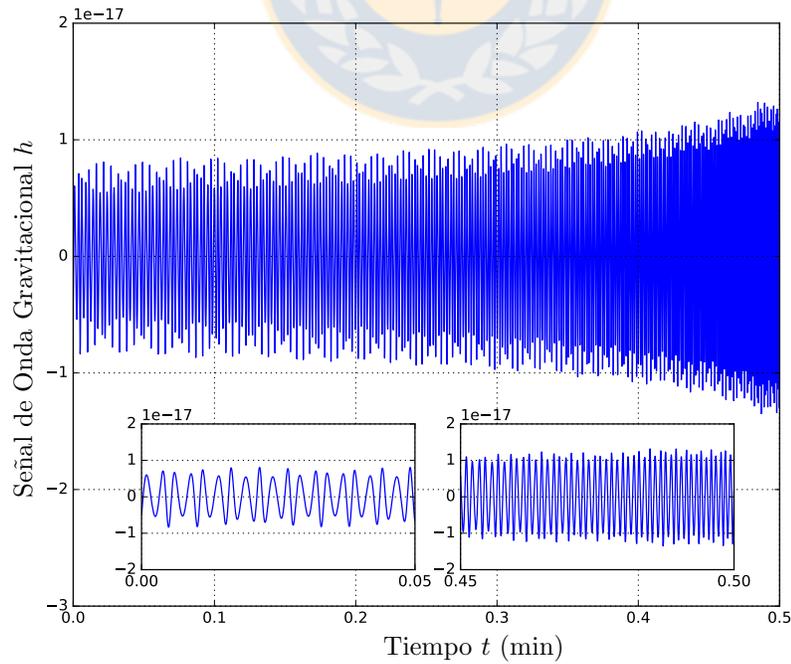


Figura 5.15: Señal de onda gravitacional emitida por la binaria P2, detectada por un interferómetro a lo largo de la dirección \hat{n}_2 . Fuente: Elaboración propia.

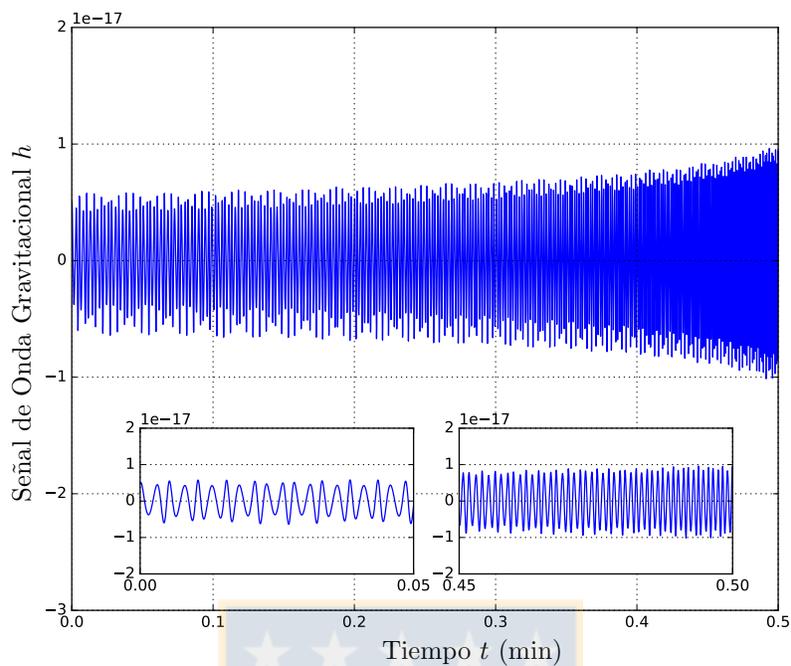


Figura 5.16: Señal de onda gravitacional emitida por la binaria P2, detectada por un interferómetro a lo largo de la dirección \hat{n}_3 . Fuente: Elaboración propia.

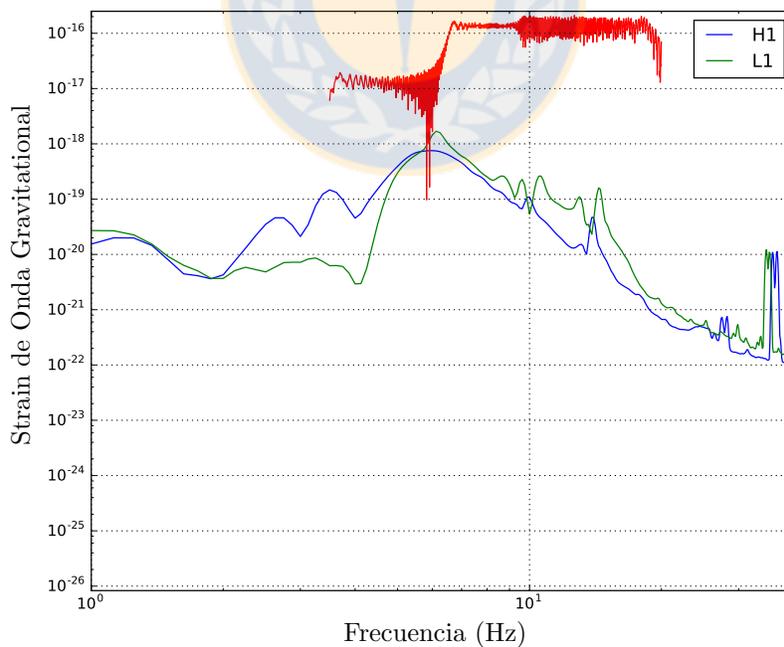


Figura 5.17: La curva roja es el strain de la onda gravitacional emitida por la binaria P2 en la dirección \hat{n}_2 . Las curvas azul y verde son las curvas de sensibilidad de los interferómetros de LIGO en Hanford y Livingston respectivamente. Fuente: Elaboración propia.

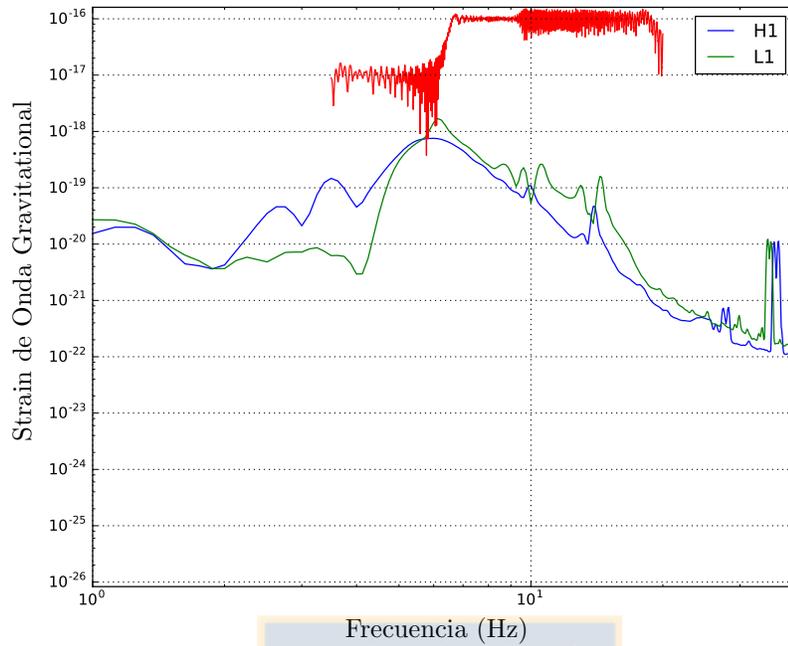


Figura 5.18: La curva roja es el strain de la onda gravitacional emitida por la binaria P2 en la dirección \hat{n}_3 . Las curvas azul y verde son las curvas de sensibilidad de los interferómetros de LIGO en Hanford y Livingston respectivamente. Fuente: Elaboración propia.

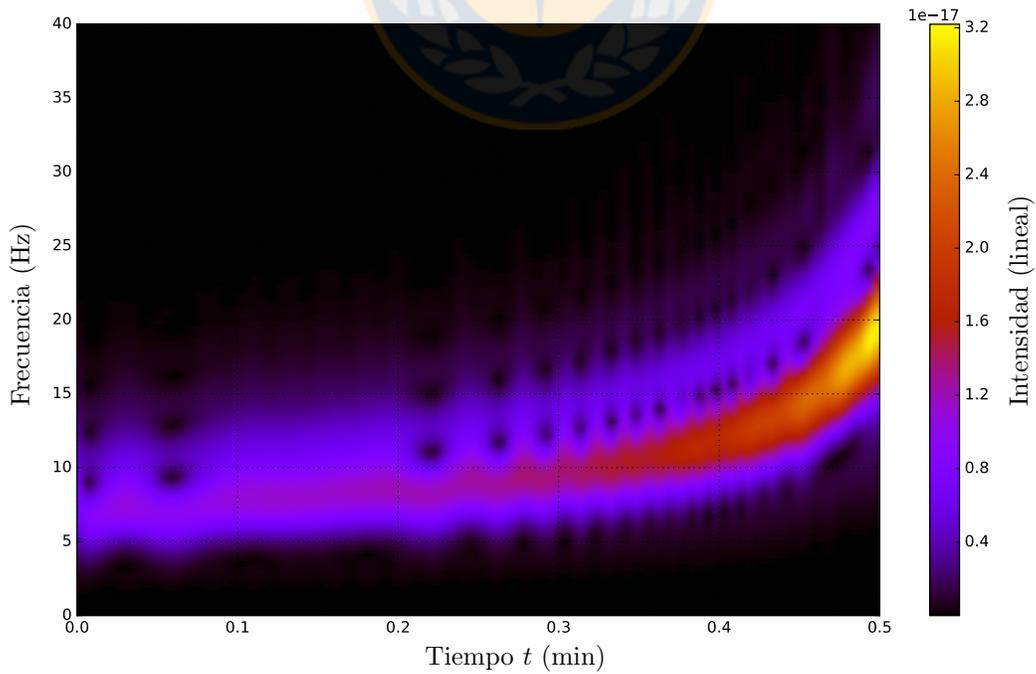


Figura 5.19: Espectrograma (Strain) de onda gravitacional emitida por la binaria P2 en la dirección \hat{n}_2 . Fuente: Elaboración propia.

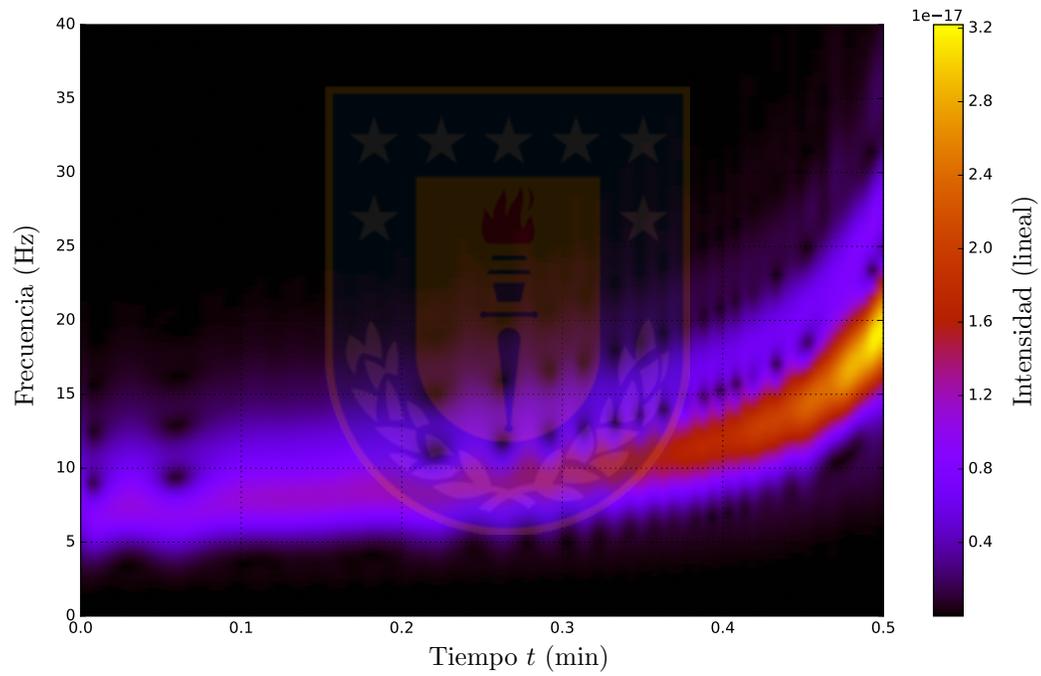


Figura 5.20: Espectrograma (Strain) de onda gravitacional emitida por la binaria P2 en la dirección \hat{n}_3 . Fuente: Elaboración propia.

Capítulo 6

Conclusiones y Proyecciones

En el desarrollo de la presente tesis, se estudió la emisión de ondas gravitacionales por sistemas binarios de objetos compactos en la fase de inspiral. Como se señaló en el capítulo 1, la radiación gravitacional no existe en la teoría newtoniana, vale decir, las ondas gravitacionales sólo existen en el contexto de RG o teorías relativistas de la gravedad. Por dicha razón, en la sección 1.1 se presentaron las nociones básicas sobre RG que consideramos son necesarias para proceder a dar lectura al cuerpo de la tesis. En las secciones 1.2 y 1.3 respectivamente, se discutió la motivación de estudiar las ondas gravitacionales y los cúmulos globulares, planteando la idea de que éstos puedan ser fuentes emisoras detectables de dichas ondas. Básicamente, en el capítulo 1 hemos justificado la motivación de calcular las ondas gravitacionales emitidas desde cúmulos globulares simulados computacionalmente, empleando códigos para el tratamiento de N cuerpos, como por ejemplo NB6++GPU/PN.

En el capítulo 2 se revisó más detalladamente la predicción de la existencia de estas ondas (sección 2.1) y sus características principales, con particular atención al proceso de detección mediante interferómetros terrestres como el de LIGO (sección 2.2). Como un modelo aproximado, en la sección 2.1.6 se presentó la onda gravitacional (2.36) en el sistema de referencia del centro de masas, de un sistema binario decayendo mediante órbitas keplerianas.

En la fase de inspiral estudiada, la teoría que describe apropiadamente la dinámica del sistema en consideración es la teoría postnewtoniana. Describir la dinámica de cuerpos con rotación interna, ha demandado una revisión de su formulación incluyendo los efectos de spin de los cuerpos, lo cual nos condujo a introducirnos en las teorías de Expansión Multipolar de cuerpos extendidos en RG (capítulo 3), un exquisito tópico de estudio en constante desarrollo y que nos ha permitido vislumbrar la complejidad de calcular ecuaciones de movimiento para cuerpos con una extensión finita en el espacio, reproduciendo los cálculos de Papapetrou (1951) en la sección 3.1.1, así como también, las sutilezas del cálculo mismo. La elección de la condición suplementaria del spin requerida permite fijar la línea de mundo para el cuerpo en consideración como se indica en la sección 3.1.2, lo cual ha resultado particularmente interesante, pues con distintas elecciones se obtienen diferentes ecuaciones de movimiento que describen la dinámica de la misma situación física. Como una primera aplicación de la formulación, en la sección 3.1.4 se resolvió numéricamente las ecuaciones de movimiento para partículas de prueba en la métrica de Schwarzschild calculadas en la sección 3.1.3. De los gráficos obtenidos en dicha sección, se puede apreciar claramente que cuando no se considera el spin, la órbita manifiesta un corrimiento en su perihelio y si se incluye, entonces además se puede apreciar una leve precesión de la órbita con respecto al plano original de movimiento. Con el propósito de introducir a la teoría postnewtoniana, en la sección 3.2 se mostó cómo deducir las ecuaciones de movimiento postnewtonianas a orden 1PN y sus correspondientes cantidades conservadas. Además, en la sección 3.4 se presentó un resumen con las ecuaciones relevantes de la teoría postnewtoniana al orden 2.5PN, incluyendo términos de spin.

Para consolidar el estudio teórico señalado y cumpliendo con lo planificado en la elaboración del proyecto de esta tesis, se escribió un código que resuelve las ecuaciones de movimiento postnewtonianas de la coordenada relativa en el centro de energía de la binaria, dados ciertos parámetros de configuración (masas y parámetros que encienden o apagan los términos postnewtonianos a considerar) y condiciones iniciales. Con él, hemos podido comprender la utilidad de las ecuaciones, al describir apropiadamente el

corrimiento del perihelio de las órbitas, la disminución en su tamaño debido a la pérdida de energía y momentum angular del sistema, ocasionada por la emisión de ondas gravitacionales en el proceso o la precesión de éstas al incluir las correcciones con acomplamiento spin-spin y spin-órbita a las ecuaciones de movimiento. En particular, en la sección 5.2.1 se presentó un ejemplo de la evolución de la coordenada relativa de dos objetos compactos de masas iguales y sin spin, donde se mostraron las distintas predicciones al considerar distintos términos postnewtonianos.

Aún en el caso de cuerpos sin spin, se estudiaron métodos para testear la exactitud numérica de las soluciones calculadas. Para ello, se escribió un código en Python que chequea la solución numérica empleando diferentes ecuaciones de balance de energía y momentum angular entre la binaria y las ondas gravitacionales emitidas, al estilo de la ec. (3.278). Extender dicho estudio al caso en que los cuerpos tienen rotación interna fue intentado, pero lamentablemente resultó infructífero encontrar en la literatura las ecuaciones necesarias para llevarlo a cabo. Proceder a la labor de calcularlas habría sido extenso, lo cual habría escapado de los objetivos de la tesis. En el futuro resultaría interesante revisar más profundamente la literatura existente a la fecha y si dichas ecuaciones ya han sido calculadas, entonces poder incorporarlas en el código que se posee, generalizando así, los algoritmos construidos. Con la actual versión del código, o con las eventuales extensiones, se plantea la posibilidad de resolver las ecuaciones de movimiento empleando diversos algoritmos de integración numérica, lo cual en principio, podría proporcionarnos algún criterio para discernir apropiadamente cuál integrador, entre la amplia variedad de integradores existentes, usar en nuestras simulaciones. Todo con el claro objetivo, de conseguir mayor precisión en el posterior cálculo de las ondas gravitacionales.

Según lo planificado, además se escribió un código que calcula la onda gravitacional emitida, implementando las ecuaciones (3.21) y (3.22) de Kidder (1995), las cuales son válidas en el centro de energía de la binaria. La amplitud de la onda depende del inverso de la distancia al punto de observación y requiere ser evaluada a lo largo de direcciones determinadas por un vector unitario \hat{n} indicando la dirección en que el observador se encuentra. Como idea surgida durante el desarrollo de la tesis, anexo al código que calcula la onda gravitacional emitida, se implementó el cómputo de la respuesta h de un detector interferométrico (en ausencia de ruido) con sus brazos perpendiculares a la dirección de propagación de la onda, a una cierta distancia de la binaria y su consecuente análisis espectral.

En el capítulo 4 se realizó una revisión de las herramientas matemáticas para el análisis de señales, requeridas para enfrentar la labor de escribir los códigos que calculan los espectros y espectrogramas de las señales medidas por los detectores. Dichos códigos permiten calcular diversas cantidades espectrales que son de interés en la comunidad de científicos trabajando con ondas gravitacionales, como por ejemplo, el strain característico, la densidad espectral de potencia, la amplitud de densidad espectral y la densidad espectral de energía de la señal medida. Todas estas cantidades se definen en términos de la Transformada de Fourier de la salida del detector, y los códigos desarrollados poseen la versatilidad de permitirle al usuario elegir entre los algoritmos de la FFT o la NUFFT (ver capítulo 4), dependiendo de si dicha señal está uniformemente distribuida en el tiempo o no. En el caso en que sea necesario emplear la NUFFT para calcular el espectro o espectrograma de alguna de las cantidades mencionadas, se debe ingresar la resolución en frecuencia y la frecuencia máxima con las que se desea calcular.

Como aplicación final de las herramientas estudiadas e implementadas, en el capítulo 5 se presentó resultados de nuestras simulaciones del cúmulo globular NGC 6266, desarrolladas usando un código post-newtoniano de suma-directa NB6++/GPU. Estas simulaciones incluyen la formación y evolución de sistemas binarios de objetos compactos. Se extrajeron los datos de la fase de inspiral de algunas binarias representativas, y calculado la señal de la onda gravitacional detectada por observadores a lo largo de direcciones particulares. El strain y los espectrogramas de las señales fueron también calculados y el strain fue contrastado con las curvas de sensibilidad de LIGO. Aunque nuestros resultados sugieren que estas señales están dentro del espacio de parámetros necesarios para ser detectadas (las frecuencias presentes durante la fase de inspiral de nuestros están entre 5 - 25 Hz), la mayoría de los mergers emitiendo las ondas ocurren durante el primer Gyr de la evolución del cúmulo y por tanto deben haber pasado por la Tierra hace mucho tiempo.

Dada la limitación temporal para desarrollar la presente tesis, no se ha escrito un código que cuantifique la detectabilidad de las ondas en el caso en que su amplitud es comparable con el ruido del detector. Por ello, para el futuro se plantea la posibilidad de llevarlo a cabo, calculando la relación señal-ruido definida en la ec. (4.17) y automatizando de paso el proceso de cuantificar la detectabilidad entre el conjunto de

binarias que en las simulaciones conducen a fusión.

Si bien los efectos de propagación entre la fuente y un detector interferométrico en la Tierra, como la dispersión en el medio interestelar son totalmente irrelevantes dada la pequeñez de la sección transversal gravitacional, el movimiento relativo entre la fuente y el detector introduce una modulación en amplitud y un corrimiento en frecuencia de la onda (efecto Doppler) (Maggiore, 2008, sección 7.6). Dado que en los códigos implementados las ecuaciones para la onda gravitacional son válidas en el centro de energía de la binaria, en las simulaciones mostradas en el capítulo 5 se supuso implícitamente que el detector se encuentra en reposo con relación a la binaria en alguna dirección \hat{n} , lo cual en un caso general no tiene porqué ser cierto. Por ello, para el futuro se plantea la posibilidad de incluir estos efectos realizando una transformación de SR, vale decir, aplicando un boost a la onda gravitacional entre el centro de energía y algún SR de interés físico, como por ejemplo, el del centro del cúmulo, el del centro de la Galaxia o incluso el SR comóvil a un observador en la Tierra. En las simulaciones realizadas, la rapidez característica del centro de energía de las binarias con relación al centro del cúmulo es del orden de $v \sim c \times 10^{-3}$, lo que implica que la diferencia relativa de amplitud y frecuencia de las ondas entre ambos SR's es de orden 10^{-3} . Esto nos lleva a concluir que el trabajo realizado para simular las ondas gravitacionales emitidas desde sistemas binarios de objetos compactos, en efecto es una buena primera aproximación.

Otro eventual trabajo a desarrollar, sería el aplicar los códigos escritos a simulaciones de cúmulos globulares en otras galaxias, donde la amplitud de la onda disminuiría, pero tendrían tiempo para propagarse y pasar por la Tierra siendo detectadas en la actualidad. En tales simulaciones podría ser de relevancia incluir efectos del movimiento relativo entre las binarias y el detector.

En síntesis, esta tesis ha sido un trabajo de extensa revisión de bibliográfica y elaboración de herramientas computacionales generadoras de códigos que dadas ciertas entradas, calculan y tienen como salidas, determinadas cantidades de interés físico. Destaca además, otro conjunto de códigos que procesan la información obtenida, ordenándola, almacenándola en formato hdf y representándola visualmente; ayudando por tanto al usuario, en el análisis final de los sistemas estudiados.

Para finalizar, se recomienda revisar los repositorios [pnpy](#) y [Fuente de Tesis \(2016\)](#), donde a partir del mes de enero de 2017 se alojarán respectivamente, todos los códigos que se elaboraron en el desarrollo de la tesis y los archivos fuente de este documento final, tanto los .tex como las figuras editables incorporadas. Por propósitos pedagógicos se adjuntará también, un conjunto de notebooks escritos en Python, con animaciones y otros que reproducen algunos de los gráficos incorporados en este documento.



Apéndice A

Notación y Convenciones

A continuación se presentan las notaciones y convenciones utilizadas en el desarrollo de la presente tesis. Para mayor detalle puede consultar [Rubilar \(2016\)](#).

A.1. Constantes y unidades

Tanto la constante de gravitación universal G como la rapidez de la luz c se escriben explícitamente. En la tabla [A.1](#) se presentan algunos valores de constantes físicas con sus respectivas unidades de medida en el Sistema Internacional de Medidas (SI).

Nombre	Símbolo	Valor	Unidad
Constante gravitacional	G	6.67259×10^{-11}	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Rapidez de la luz en el vacío	c	2.99792458×10^8	m s^{-1} (def)
Masa del Sol	M_{\odot}	1.989×10^{30}	kg
Radio del Sol	R_{\odot}	6.96×10^8	m
Masa de la Tierra	M_{\oplus}	5.976×10^{24}	kg
Radio de la Tierra	R_{\oplus}	6371	m
Año Luz	ly	9.4605×10^{15}	m
Parsec	pc	3.0857×10^{16}	m

Tabla A.1: Valores de constantes Físicas en el SI. Fuente: Adaptada a partir de versión original en [Rubilar \(2016\)](#).

A.2. Identidades

En la presente sección se adjuntan algunas identidades matemáticas requeridas durante la tesis.

- Segunda derivada espacial de $|\vec{x} - \vec{x}'|$:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{2} \partial_i \partial_i |\vec{x} - \vec{x}'|. \quad (\text{A.1})$$

- Integral cuadrimensional de delta de Dirac:

$$\int \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dx_a^\nu}{d\tau_a} \delta^{(4)}(x^\gamma - x_a^\gamma(\tau_a)) d\tau_a \equiv \frac{dx_a^\mu}{dx^0} \frac{dx_a^\nu}{dx^0} \left(\frac{d\tau_{a,0}}{dx^0} \right)^{-1} \delta^{(3)}(x^i - x_a^i(x^0)). \quad (\text{A.2})$$

A.3. Índices, signatura métrica y definiciones

Con relación al manejo indicial y algunas convenciones sobre geometría diferencial empleadas en la presente tesis, se debe mencionar que

- Las coordenadas son denotadas como $x^\mu = (x^0, \vec{x})$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$ donde $x^0 = ct$ es la coordenada temporal y x^i son las coordenadas espaciales.
- Índices espaciotemporales se denotan con letras griegas como $\alpha, \beta, \delta, \dots$, las cuales pueden tomar valores 0, 1, 2, 3, mientras que los índices espaciales son denotados con letras latinas pudiendo adoptar los siguientes valores 1, 2, 3.
- Índices repetidos (no más de dos veces) en cualquier posición representan sumatoria.
- Además, $\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu = (\partial_t/c, \partial_i)$.
- Si $f(t)$ es una función que depende de la variable t , entonces se denota su derivada como $\dot{f}(t) := df(t)/dt$.
- En ciertas ocasiones se emplea la notación de multi-índice en la que un tensor T con r índices contravariantes y un tensor Q con s índices covariantes ($T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}$ y $Q_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s}$) son representados por una letra mayúscula tal que $T^R := T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}$ y $Q_S := Q_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_s}$.
- La métrica del espacio plano en coordenadas cuasicartesianas está dada por

$$\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1). \quad (\text{A.3})$$

- Si la métrica del espaciotiempo es denotada por $g_{\mu\nu}$, entonces su inversa $g^{\mu\nu}$ es tal que

$$g_{\mu\beta}g^{\beta\nu} = \delta_\mu^\nu, \quad (\text{A.4})$$

donde δ_μ^ν es la delta de Kronecker.

- La traza del tensor energía-momentum está definida como

$$T := g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.5})$$

- Los símbolos de Christoffel están definidos como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho := \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.6})$$

- El tensor de curvatura está definido como

$$R^\rho_{\mu\lambda\nu} := \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + \Gamma_{\beta\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\beta. \quad (\text{A.7})$$

- El tensor de Ricci está definido como

$$R_{\mu\nu} := \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{0\rho}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^0 + \Gamma_{b\rho}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^b - \Gamma_{0\nu}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^0 - \Gamma_{b\nu}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^b. \quad (\text{A.8})$$

- El escalar de curvatura está definido como

$$R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.9})$$

- El tensor de Einstein está definido como

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{A.10})$$

- Ante una transformación de coordenadas general (invertible) en la forma $x^\mu \mapsto x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$, las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$, su inversa $g^{\mu\nu}$ y los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ transforman como

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.11})$$

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.12})$$

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right). \quad (\text{A.13})$$

- Se define la curva geodésica como aquella que entre dos puntos P_1 y P_2 tiene largo mínimo. Si dicha curva es representada paraméricamente por $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, entonces debe satisfacer la siguiente ecuación

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (\text{A.14})$$

con $f(\lambda) := (d^2 l / d\lambda^2) / (dl / d\lambda)$, donde l es el largo de la curva definido como

$$l(\lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{\mu\nu}(x(\lambda))} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda. \quad (\text{A.15})$$

- Se define la derivada covariante de un campo tensorial $F^\mu(x)$ a lo largo de una curva $x^\mu_\tau := x^\mu(\tau)$ como

$$\frac{DF^\mu(x_\tau)}{D\tau} := \frac{dF^\mu(x_\tau)}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x_\tau) F^\nu(x_\tau) \frac{dx^\rho_\tau}{d\tau}. \quad (\text{A.16})$$

- Sean dos curvas geodésicas tipo tiempo parametrizadas como $x = x^\mu(\tau)$ y $\bar{x} = \bar{x}^\mu(\bar{\tau})$, con τ y $\bar{\tau}$ sus respectivos tiempos propios. Si suponemos que éstas son próximas tal que podemos escribir la parametrización de la segunda en términos del tiempo propio de la primera como $\bar{x}^\mu = x^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau)$, con $|\xi^\mu|$ mucho menor que la escala típica de variación de la curvatura del espacio, entonces se puede encontrar que

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha \xi^\beta u^\gamma, \quad (\text{A.17})$$

llamada *ecuación de desvío geodésico*, con $u^\mu(\tau) := dx^\mu(\tau)/d\tau$. Dicha ecuación muestra como dos geodésicas cercanas tipo tiempo experimentan fuerzas de marea debido a la curvatura del espacio en que se encuentran.



Apéndice B

Leyes de Kepler

Johannes Kepler¹ planteó la descripción matemática del movimiento de los planetas orbitando en torno al Sol, mediante tres simples Leyes que lo volvieron famoso. En lenguaje contemporáneo podemos enunciar dichas leyes como

1. (1609) Todos los planetas se desplazan en torno al Sol describiendo órbitas elípticas con él en uno de sus focos.
2. (1609) El radio vector que une al Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. (1618) Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita elíptica.

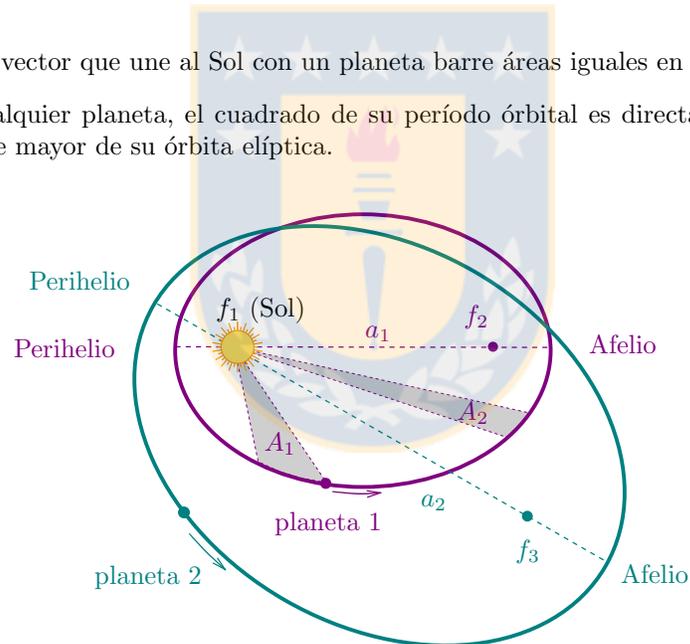


Figura B.1: Esquema de las dos primeras Leyes de Kepler con 2 planetas orbitando en torno al Sol: Note que el Sol está en uno de los focos de cada elipse correspondiente a cada planeta. Fuente: Adaptada a partir de figura original disponible en https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler_laws_diagram.svg.

En el apéndice C, al estudiar el problema de 2 cuerpos autogravitantes en gravedad newtoniana, la segunda Ley de Kepler queda expresada matemáticamente mediante la ec. (C.16) y la tercera ley mediante la ec. (C.45).

¹http://es.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler



Apéndice C

Dos masas autogravitantes en el contexto newtoniano

A continuación, se presentará el cálculo newtoniano para la evolución de dos cuerpos de masas m_1 (“el primer cuerpo”) y m_2 (“el segundo cuerpo”), supuestos puntuales y con posiciones \vec{x}_1 y \vec{x}_2 con respecto a algún *sistema de referencia inercial* (SRI) como se esquematiza en la figura C.1. Newtonianamente, las fuerza $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$ que ejerce el primer cuerpo sobre el segundo y la fuerza $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ que ejerce el segundo sobre el primer cuerpo, están dadas por:

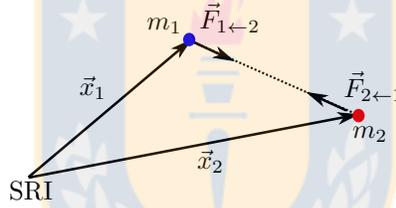


Figura C.1: Ley de Gravitación Universal de Newton. Fuente: Elaboración propia.

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = m_1 \vec{g}_2(\vec{x}_1), \quad \vec{F}_{2\leftarrow 1} = m_2 \vec{g}_1(\vec{x}_2), \quad (\text{C.1})$$

con $\vec{g}_1(\vec{x})$ y $\vec{g}_2(\vec{x})$ los campos gravitacionales generados por las masas 1 y 2 respectivamente, los cuales se encuentran dados por

$$\vec{g}_1(\vec{x}) = -Gm_1 \frac{(\vec{x} - \vec{x}_1)}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3}, \quad \vec{g}_2(\vec{x}) = -Gm_2 \frac{(\vec{x} - \vec{x}_2)}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3}, \quad (\text{C.2})$$

de donde se concluye que

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = -Gm_1 m_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}, \quad \vec{F}_{2\leftarrow 1} = -Gm_1 m_2 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}. \quad (\text{C.3})$$

Así, si sobre cada uno de los cuerpos no actúa otra fuerza que no sea la gravitacional generada por el otro cuerpo, entonces al escribir la segunda Ley de Newton para cada una de ellos e igualar con (C.3) dividiendo dichas ecuaciones por m_1 y m_2 respectivamente, entonces las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}, \quad \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = -Gm_1 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}. \quad (\text{C.4})$$

Convenientemente se define la coordenada del centro de masa (cm) \vec{x}_{cm} como $\vec{x}_{\text{cm}} := (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/M$, con $M := m_1 + m_2$ la masa total del sistema. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{x}_{\text{cm}}}{dt^2} &= \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} \right) \\ &= \frac{1}{M} \left(-Gm_1m_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} - Gm_1m_2 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} \right) \\ &= \frac{1}{M} \left(-Gm_1m_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} + Gm_1m_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \right) \\ &= \vec{0}.\end{aligned}\tag{C.5}$$

En consecuencia, $d\vec{x}_{\text{cm}}/dt = \vec{v}_{\text{cm}}$ es un vector constante y por lo tanto $\vec{x}_{\text{cm}} = \vec{v}_{\text{cm}}t + \vec{x}_0$, con \vec{x}_0 fijo tal que $\vec{x}_{\text{cm}}(t=0) = \vec{x}_0$. De esta manera, demostramos que la coordenada del centro de masa se mueve a velocidad constante, lo que nos permite simplificar el problema y sin pérdida de generalidad escoger el SRI en el centro de masa de dicho sistema, vale decir imponemos que $\vec{x}_{\text{cm}} \stackrel{!}{=} \vec{0}$, así desde la definición del centro de masa, se halla que

$$\vec{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{x}_1.\tag{C.6}$$

En términos de \vec{x}_1 y \vec{x}_2 , medidos desde el cm del sistema, se define su coordenada relativa \vec{r} por $\vec{r} := \vec{x}_1 - \vec{x}_2$. Así es posible escribir \vec{x}_1 y \vec{x}_2 como

$$\vec{x}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{r}, \quad \vec{x}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{r}.\tag{C.7}$$

Recordando las ecuaciones en (C.4), se halla que

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} \\ &= -Gm_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} + Gm_1 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} \\ &= -Gm_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} - Gm_1 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \\ &= -GM \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.\end{aligned}\tag{C.8}$$

Por tanto, al definir $r := |\vec{r}|$ y $\hat{n} = \vec{r}/r$ como la magnitud de la coordenada relativa y el vector unitario en la dirección de ésta, podemos escribir (C.8) como

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -GM \frac{\hat{n}}{r^2}.\tag{C.9}$$

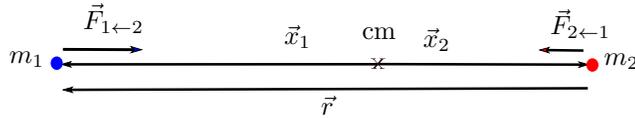


Figura C.2: Ley de Gravitación Universal de Newton en términos de la coordenada relativa. Fuente: Elaboración propia.

En el contexto newtoniano, la energía y el momentum angular total del sistema respecto al origen de sistema de coordenadas están definidos como

$$E = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \quad \vec{L} = m_1\vec{x}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{x}_2 \times \vec{v}_2,\tag{C.10}$$

con $\vec{v}_1 = d\vec{x}_1/dt$, $\vec{v}_2 = d\vec{x}_2/dt$ las velocidades de las masas y $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = -(Gm_1m_2)/|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = -(Gm_1m_2)/r$ el potencial gravitacional entre ellas. Así, al definir $\vec{v} := d\vec{r}/dt$ como la velocidad de la coordenada relativa, entonces $\vec{v}_1 = -(m_2/M)\vec{v}$ y $\vec{v}_2 = (m_1/M)\vec{v}$, por consiguiente

$$\vec{x}_1 \times \vec{v}_1 = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 \vec{r} \times \vec{v}, \quad \vec{x}_2 \times \vec{v}_2 = \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 \vec{r} \times \vec{v}. \quad (\text{C.11})$$

Por lo tanto, la energía y el momentum angular del sistema en términos de la coordenada relativa quedan como

$$E = \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{M} \vec{v}^2 - \frac{Gm_1m_2}{r}, \quad \vec{L} = \frac{m_1m_2}{M} \vec{r} \times \vec{v}. \quad (\text{C.12})$$

Así, al definir convenientemente la masa reducida del sistema μ como $\mu := m_1m_2/M$, entonces la energía y el momentum angular en términos de la coordenada relativa están dadas por

$$E = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 - \frac{G\mu M}{r}, \quad (\text{C.13})$$

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v}. \quad (\text{C.14})$$

Por consiguiente, al derivar las ecuaciones (C.13) y (C.14) se tiene que

$$\frac{dE}{dt} = \mu \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{G\mu M}{r^2} \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \mu \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right], \quad (\text{C.15})$$

pero como $dr/dt = \dot{r} = \vec{v} \cdot \hat{n}$, entonces

$$\frac{dE}{dt} \equiv -\frac{G\mu M}{r^3} \vec{v} \cdot \hat{n} + \frac{G\mu M}{r^3} \vec{v} \cdot \hat{n} = 0, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} \equiv \mu \vec{r} \times \left(-\frac{GM}{r^2} \hat{n} \right) = \vec{0}. \quad (\text{C.16})$$

De esta forma, hemos verificado que la energía E y el momentum angular \vec{L} totales del sistema binario de masas, en función de la coordenada relativa \vec{r} y su masa reducida μ son cantidades exactamente conservadas. Las ecuaciones (C.13) y (C.14) nos muestran que el movimiento relativo es equivalente al de un cuerpo de masa μ moviéndose en el potencial central fijo generado por una masa M en el origen tal que $\phi = -(GM)/r$. Como dicho potencial ϕ es central, el movimiento está confinado al plano perpendicular al momentum angular \vec{L} y por tanto sin pérdida de generalidad la ecuación de movimiento puede ser resuelta analíticamente postulando $\vec{r}(t) = r(t) \cos(\varphi(t))\hat{x} + r(t) \sin(\varphi(t))\hat{y}$, con $\vec{L} = L\hat{z}$. De esta forma, $\hat{r}(t) = \cos(\varphi(t))\hat{x} + \sin(\varphi(t))\hat{y}$ y si definimos el vector angular $\hat{\varphi}(t)$ perpendicular a $\hat{r}(t)$ como $\hat{\varphi}(t) = -\sin(\varphi(t))\hat{x} + \cos(\varphi(t))\hat{y}$, entonces la velocidad y aceleración relativas quedan dadas por

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi}, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \hat{\varphi}. \quad (\text{C.17})$$

Introduciendo (C.17) en (C.9), en (C.13) y en (C.14) se obtiene que

$$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \hat{\varphi} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}, \quad (\text{C.18})$$

$$\vec{L} = \mu r^2 \dot{\varphi} \hat{z}, \quad (\text{C.19})$$

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{GM\mu}{r}. \quad (\text{C.20})$$

Desde la ecuación vectorial (C.18), se deducen las siguientes dos ecuaciones

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2}, \quad (\text{C.21})$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \quad (\text{C.22})$$

Multiplicando (C.21) por r se encuentra que $r^2\dot{\varphi}$ es una cantidad conservada a lo largo de la trayectoria, pero como $\vec{L} = L\hat{z} = \mu r^2 \dot{\varphi} \hat{z}$, entonces $L = \mu r^2 \dot{\varphi}$ es una constante. Así, la solución propuesta es consistente

con la conservación del momentum angular. Reemplazando $\dot{\varphi} = L/\mu r^2$ en (C.20) se obtiene una expresión para la energía que depende sólo de constantes de movimiento y de la variable r :

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}. \quad (\text{C.23})$$

Es conveniente definir la siguiente cantidad

$$V_{\text{ef}}(r) := \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r}, \quad (\text{C.24})$$

típicamente llamada *Potencial Efectivo* ya que permite que (C.23) sea escrita como la ecuación de conservación de la energía de un movimiento unidimensional:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r). \quad (\text{C.25})$$

Notamos que el potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r)$ posee un cero en $r_c = L^2/2GM\mu^2$ y un valor mínimo en $r_{\text{min}} = L^2/GM\mu^2 = 2r_c$, ya que r_{min} es un extremo de $V_{\text{ef}}(r)$ y además

$$V_{\text{ef}}(r_{\text{min}}) = -\frac{G^2M^2\mu^3}{2L^2} < 0. \quad (\text{C.26})$$

De la figura C.3 podemos verificar que el comportamiento asintótico del potencial efectivo es

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{ef}}(r) \approx -\frac{GM\mu}{r} \rightarrow 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} V_{\text{ef}}(r) \approx \frac{L^2}{2\mu r^2} \rightarrow +\infty. \quad (\text{C.27})$$

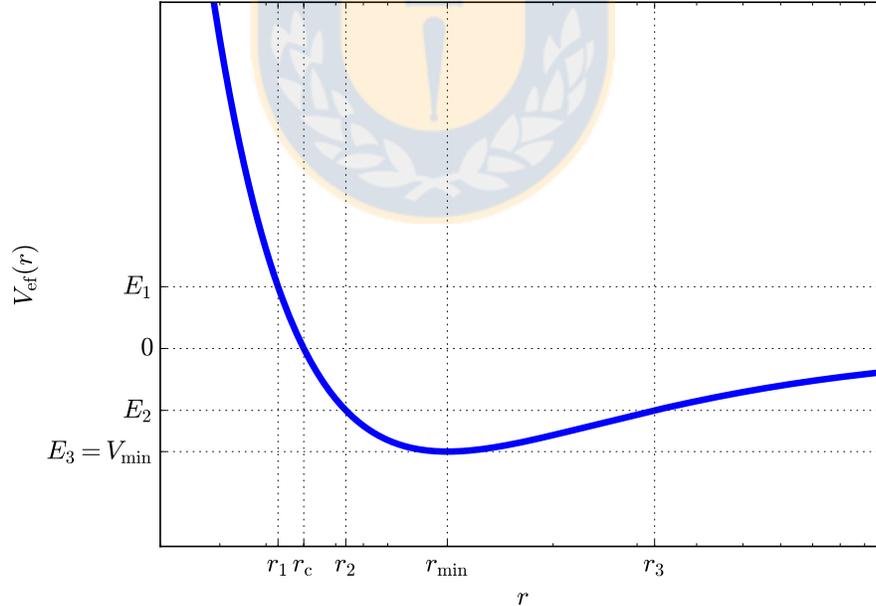


Figura C.3: Potencial newtoniano efectivo versus la coordenada radial: Note que la coordenada radial está en escala logarítmica. Para mayor detalle revisar [Fuente de Tesis \(2016\)](#). Fuente: Elaboración propia.

De esta manera, podemos ver que para un valor dado de $L \neq 0$ se tiene que

1. Si $E_1 > 0$, una partícula proveniente del infinito alcanza un radio mínimo r_1 , donde $\dot{r}^2 = 0$, y luego vuelve a infinito. Este movimiento corresponde a las órbitas hiperbólicas.

2. Si $V_{\text{ef, min}} < E_2 < 0$ la trayectoria es ligada, variando la distancia entre dos puntos de retorno r_2 y r_3 , de modo que $r_2 < r < r_3$.
3. Si $E_3 = V_{\text{ef, min}}$ la partícula describe un movimiento circular de radio dado por (C). Este caso corresponde al mínimo del potencial, por lo que es un movimiento estable.
4. Finalmente, no existen trayectorias con $E < V_{\text{ef}}(r_{\text{min}})$ ya que (C.25) requiere que $E \geq V_{\text{ef}}$ para todo r .

Para determinar la forma de la trayectoria, descrita por la dependencia de la coordenada radial r en términos de la coordenada angular φ suponemos que podemos escribir $r = r(\varphi)$, de donde por regla de la cadena se halla que

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (\text{C.28})$$

Introduciendo (C.28) en (C.23) y empleando el siguiente cambio de variable $u := 1/r$, con $u' := du/d\varphi$, se obtiene que

$$(u')^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2GM\mu^2}{L^2} u - u^2. \quad (\text{C.29})$$

Esta es una ecuación diferencial de movimiento de primer orden en u en función de φ (para órbitas no circulares $u' \neq 0$), la cual al ser derivada permite obtener una ecuación diferencial de segundo orden con solución conocida,

$$u'' + u = \frac{GM\mu^2}{L^2}, \quad (\text{C.30})$$

es decir, una ecuación de oscilador armónico con término forzante constante, cuya solución general sabemos que está dada por

$$u(\varphi) = \frac{GM\mu^2}{L^2} + A \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (\text{C.31})$$

con A y φ_0 constantes de integración las cuales deben ser fijados según las condiciones iniciales del problema. Así, al reemplazar (C.31) en (C.29) se halla que

$$A = \frac{GM\mu^2}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{G^2 M^2 \mu^3}}. \quad (\text{C.32})$$

De esta manera, definiendo la excentricidad de la órbita

$$e := \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{G^2 M^2 \mu^3}}, \quad (\text{C.33})$$

podemos entonces reescribir (C.31) como

$$u(\varphi) = \frac{GM\mu^2}{L^2} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)), \quad (\text{C.34})$$

donde φ_0 es una constante de integración correspondiente a la orientación inicial relativa al eje x . Si $-G^2 M^2 \mu^3 / 2L^2 < E < 0$ entonces $0 < e < 1$, y la cónica es una elipse, donde u adopta los siguientes valores límites:

$$u_{\text{min}} = \frac{GM\mu^2(1+e)}{L^2}, \quad u_{\text{max}} = \frac{GM\mu^2(1-e)}{L^2}. \quad (\text{C.35})$$

Definiendo el semieje mayor de la órbita como $a := (r_{\max} + r_{\min}) / 2$, ya que $r_{\min} = u_{\max}$ y $r_{\max} = u_{\min}$, se encuentra que

$$a = -\frac{GM\mu}{2E}. \quad (\text{C.36})$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (C.33) y (C.36), se puede escribir la solución (C.34) como

$$u(\varphi) = \frac{1}{a(1 - e^2)} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)] \quad (\text{C.37})$$

o, en términos de la coordenada radial relativa,

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (\text{C.38})$$

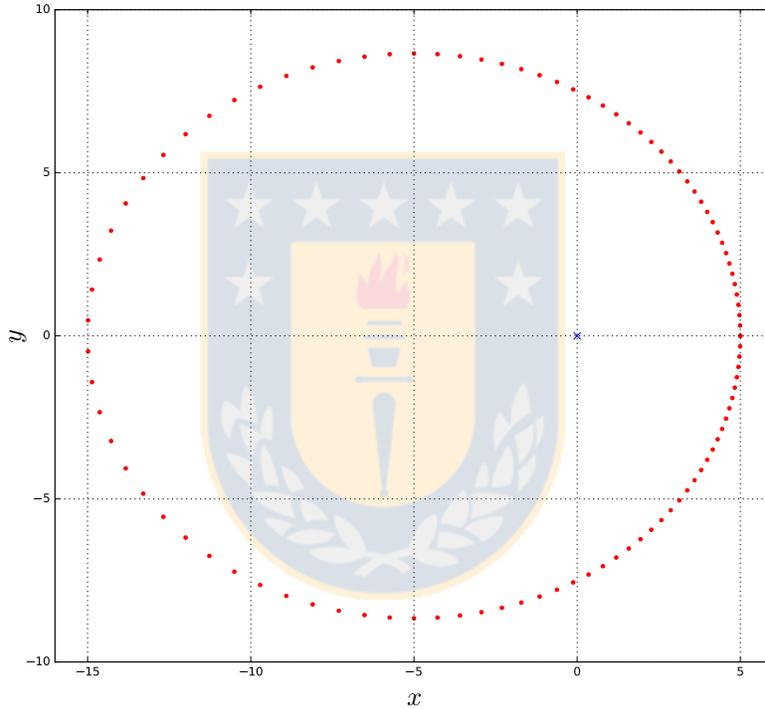


Figura C.4: Órbita elíptica evaluada a partir de la expresión analítica de la ecuación (C.38): Se eligió un semiejemayor $a = 10$ m y una excentricidad $e = 0.5$. Para el cálculo se empleó una grilla equiespaciada de la variable angular $\varphi - \varphi_0$ con 100 valores entre $[0, 2\pi]$. Para mayor detalle revisar [Fuente de Tesis \(2016\)](#). Fuente: Elaboración propia.

Para conocer la evolución temporal de la órbita definimos la variable auxiliar s por medio de $r =: a(1 - e \cos s)$. Con ella y empleando (C.38), se encuentra la siguiente relación entre φ y s sobre la órbita:

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\cos s - e}{1 - e \cos s}, \quad (\text{C.39a}) \quad \text{sen}(\varphi - \varphi_0) = \sqrt{1 - e^2} \frac{\text{sen } s}{1 - e \cos s}. \quad (\text{C.39b})$$

Así, si se deriva la ecuación (C.39a) respecto a s y se emplea (C.39b) se obtiene que

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos s}. \quad (\text{C.40})$$

De esta manera, al introducir (C.40) en la expresión para el momentum angular (C.19), se tiene que

$$L = \mu a^2 \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos s) \frac{ds}{dt}. \quad (\text{C.41})$$

Por lo tanto,

$$1 - e \cos s = \frac{L}{\mu a^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{dt}{ds}. \quad (\text{C.42})$$

Definiendo la constante ω_0 , con unidades de frecuencia angular como $\omega_0 := L/\mu a^2 \sqrt{1 - e^2}$, entonces el período de la órbita queda definido como $T = 2\pi/\omega_0$ y además

$$1 - e \cos s = \omega_0 \frac{dt}{ds}. \quad (\text{C.43})$$

Note, como la ecuación (C.43) puede ser integrada directamente respecto a s . Si se elige la condición inicial $s = 0$ para $t = t_0$ se obtiene la siguiente ecuación trascendental para s dado un tiempo t fijo

$$\omega_0(t - t_0) = s - e \operatorname{sen} s. \quad (\text{C.44})$$

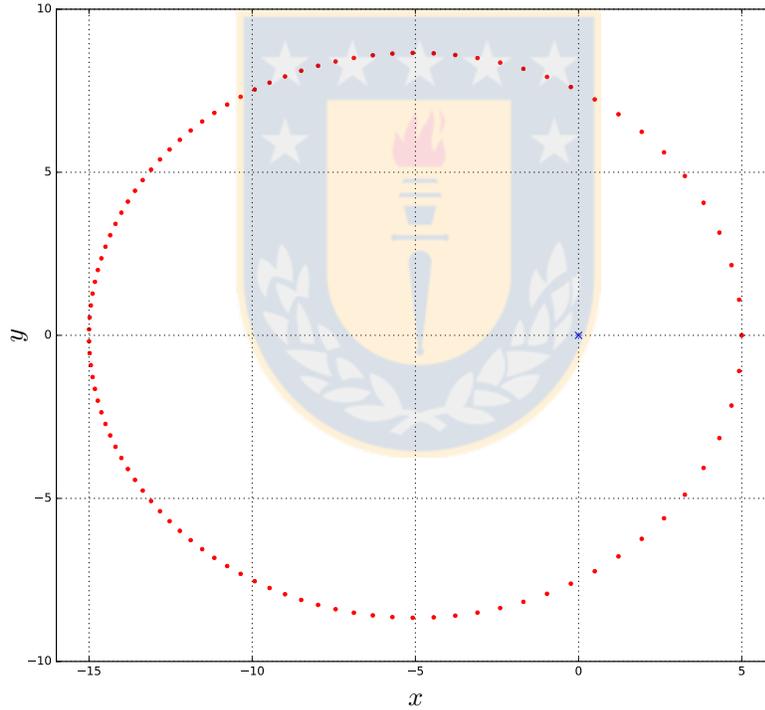


Figura C.5: Órbita elíptica calculada a partir de la solución numérica de la ecuación (C.44): Se eligió un semieje mayor $a = 10$ m y una excentricidad $e = 0.5$. Para el cálculo se empleó una grilla equiespaciada de la variable temporal $t - t_0$ con 100 valores entre $[0, T]$ ($T \approx 198.69$ s en este caso). Note que si bien la variable temporal es equiespaciada, las variables angulares s y $\varphi - \varphi_0$ no lo son. A ello se debe la diferencia en el espaciamiento de los puntos con los de la figura C.4. Para mayor detalle revisar [Fuente de Tesis \(2016\)](#). Fuente: Elaboración propia.

Por otra parte, empleando (C.33) se halla que

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{a^3} \quad \text{o} \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}, \quad (\text{C.45})$$

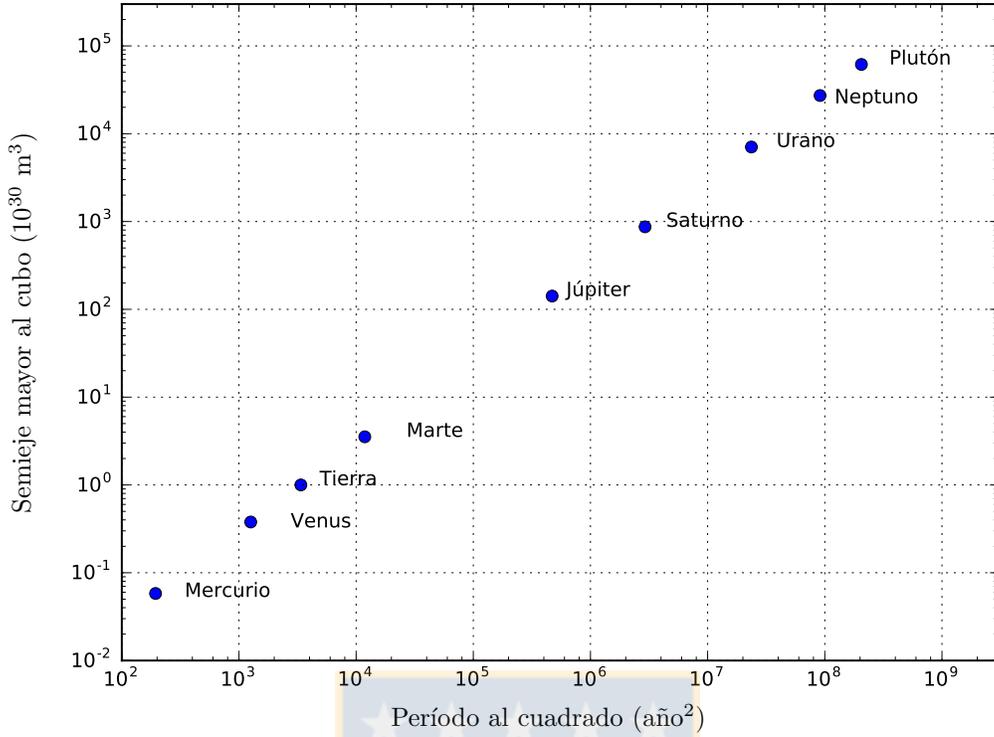


Figura C.6: Tercera ley de Kepler para planetas en el sistema solar en términos del período angular. Fuente: Elaboración propia con datos tomados de la tabla 14.2 en [Halliday et al. \(2010\)](#).

que expresa la tercera Ley de Kepler que relaciona por ejemplo, los semiejes mayor y el período de la órbita de los planetas del sistema solar orbitando en torno al Sol, como se aprecia en la figura C.6.

Además, si recordamos el teorema virial que relaciona los promedios temporales de la energía cinética E_k de un sistema de dos partículas y el promedio temporal de la energía potencial U en la forma $U = \alpha r^n$, tal que

$$\langle E_k \rangle = -\frac{n}{2} \langle U \rangle, \quad (\text{C.46})$$

entonces, si lo aplicamos al sistema binario con $E_k = (\mu/2)\bar{v}^2$ y $U = -(G\mu M)/r$, se encuentra que

$$\left\langle \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{G\mu M}{r} \right\rangle. \quad (\text{C.47})$$

Sea $v = \langle |\bar{v}| \rangle$ una rapidez relativa promedio característica del sistema y $R_0 = \langle r \rangle$ una distancia promedio característica. De la ecuación precedente, se desprende entonces que

$$v^2 \sim \frac{GM}{R_0}. \quad (\text{C.48})$$

Bibliografía

- Aarseth S. J., 1963, MNRAS, 126, 223.
- Aarseth S. J., 2012, MNRAS, 422, 841.
- Abbott B. P., *et al.*, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*. Phys. Rev. Lett., 116, 061102 (2016). <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
- Abbott B. P., *et al.*, *GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*. Phys. Rev. Lett., 116, 241103 (2016). <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.116.241103>.
- Antonini F., Merritt D., 2013, ApJL, 763, L10.
- Banerjee S., Baumgardt H., Kroupa P., 2010, MNRAS, 402, 371.
- Baumgarte T. W. y Shapiro S. L., *Numerical Relativity and Compact binaries*. Physics Reports, 376, pp. 41–131 (2003). <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0211028>.
- Beccari G., Ferraro F.R., Lanzoni B., Bellazzini M., 2006, ApJL, 652, L121.
- Benacquista M. J., Downing J. M. B., 2013, Living Rev. Relativity 16, 4. URL (cited on 12/09/2016): <http://www.livingreviews.org/lrr-2013-4>.
- Berczik P., Spurzem R., Wang L. 2013, Third International Conference “High Performance Computing”, HPCUA 2013, 52, 52.
- Berczik P., Spurzem R., Zhong S., Wang L., Nitadori K., Hamada T., Veles A. 2013, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7905; Springer Vlg., 13-25.
- Blanchet L., *Gravitational Radiation from Post-Newtonian Source and Inspiralling Compact Binaries*. (Living Review, 2014). <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2014-2/>.
- Blanchet L., Iyer B., *Third post-Newtonian dynamics of compact binaries: Equations of motion in the center-of-mass frame*, 2003, CQG, 20, 755. <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0209089v2>.
- Brem P., Amaro-Seoane P., Spurzem R., 2013, MNRAS, 434, 2999.
- Buonanno A., *Gravitational Waves* (2007). <http://arxiv.org/abs/0709.4682v1>.
- Buonanno A., Chen Y., Vallisneri M., *Detecting gravitational waves from precessing binaries of spinning compact objects: Adiabatic limit* Phys. Rev. D, 67, 104025 (2003), gr-qc/0211087. <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0211087v4>.
- Cooley J. W., Tukey J. W., *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*. Mathematics of Computation, 19, No 90, pp. 297-301 (1965).
- Costa L. F., Natário J., *Center of mass, spin supplementary conditions, and the momentum of spinning particles*. Fundamental Theories of Physics, 17, pp. 215-258 (2015). <https://arxiv.org/pdf/1410.6443v2.pdf>.

- Corinaldesi E., Papapetrou A., *Test-Particles in General Relativity II*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 209, 1097, pp. 259-268, (1951).
- de Andrade V. C., Blanchet L, Faye G., *Third post-Newtonian dynamics of compact binaries: Noetherian conserved quantities and equivalence between the harmonic-coordinate and ADM-Hamiltonian formalisms*. (Archiv-2000) <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0011063v2>.
- Dixon G. W., *Dynamics of extended bodies in general relativity I. Momentum and angular momentum*. Proc. Roy. Soc. Lond. A, 314, pp. 499-529 (1970).
- Dixon G. W., *Dynamics of extended bodies in general relativity II. Moments of the charge-current vector*. Proc. Roy. Soc. Lond. A, 319, pp. 509-547 (1970).
- Dixon G. W., *Dynamics of extended bodies in general relativity III. Equations of motion*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 277, No 1264, pp. 59-119 (1974).
- Downing J.M.B., Benacquista M.J., Giersz M., Spurzem R., 2011, MNRAS, 416, 133.
- Dutt A., Rokhlin V., *Fast Fourier Transforms for Nonequispaced data*, SIAM J. Sci. Comput. 14, 1368 (1993).
- Einstein A., *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. Annalen der Physik, Band, 49 (1916).
- Einstein A., *Über Gravitationswellen*. Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte (1918), Mitteilung, 31, pp. 154-167 (1918).
- Einstein A., Infeld L., Hoffmann B., *The gravitational equations and the problem of motion I*. Ann. Math., 39, p. 65 (1938).
- Einstein A., Infeld L., *The gravitational equations and the problem of motion II*. Ann. Math., 41, p. 455 (1940).
- Einstein A., Infeld L., *Canad. J. Math.*, 1, p. 209 (1949).
- Faye G., Blanchet L., Buonanno A., *Higher-order spin effects in the dynamics of compact binaries I. Equations of motion*. (2007). <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0605139v4>.
- Fock, V. A. *J. Phys U.S.S.R.*, 1, 81.
- Dan Foreman-Mackey, <https://github.com/dfm/python-nufft>.
- Freitag M., Amaro-Seoane P., Kalogera V., 2006, ApJ, 649, 91
- Gnedin O., Zhao H., Pringle J. E., Fall M., Livio M., Meylan G., 2002, ApJL, L23-L26.
- Gültekin K., Miller M.C., Hamilton D.P., 2004, ApJ, 616, 221.
- Greengard L., Lee J.-Y., *Accelerating the Nonuniform Fast Fourier Transform* SIAM Review, 46, No. 3 pp. 443-454 (2004). <http://www.cims.nyu.edu/cmcl/nufft/nufft.html>.
- Haisch K. E., Lada E. A., Lada C. J., *DISK FREQUENCIES AND LIFETIMES IN YOUNG CLUSTERS*, ApJ, 553:L153-L156, (2001).
- Halliday D., Resnick R., Walker J., *Fundamentals of Physics* 8th Ed. (2010).
- Harris W. E., *A catalog of parameters for globular clusters in the Milky Way*. Astron. J., 122, pp. 1487-1488 (1996, edición 2010). <http://www.physics.mcmaster.ca/Globular.html>.
- Heggie D., 1975, MNRAS, 173, 729.
- Heggie D.C., Rasio F.A., 1996, MNRAS, 282, 1064.

- Hills J.G., Fullerton L.W., 1980, AJ, 85, 1281.
- Hulse R. A., *The discovery of the binary pulsar*, Rev. Mod. Phys., 66, p. 699 (1994).
- Hut P., Verbunt F. 1983, Nature, 301, 587.
- Hut P., McMillan S., Goodman J., *et al.* 1992, PASP, 104, 981.
- Ibarra N. N., (2016). <https://github.com/nataly-nicole/Tesis>.
- Ibarra N. N. <https://github.com/nataly-nicole/pnpy>.
- Ivanova N., Heinke C., Rasio F., Belczynski K., Fregeau, J., 2008, MNRAS, 386, 553.
- Kerr R. P., *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*. Phys. Rev. Lett. 11, p. 237 (1963).
- Khalisi E., Amaro-Seoane P., Spurzem R., MNRAS, 374, 703.
- Kidder L. E., *Coalescing binary systems of compact objects to 2.5pn. V. Spin effects*. Physical Review D, (1995).
- King I.R., 1996, AJ, 71, 64.
- Kyrián K., Semerák O., *Spinning test particles in a Kerr field-II*. Mon. Not. R. Astron. Soc., 382, pp. 1922–1932 (2007).
- Kroupa P., 2001, ASP Conf. Series, 228, 187 (astro-ph/0011328).
- Kunkel J. *et al.*, Supercomputing, Lecture Notes in Computer Science (7905), Springer (Berlin, Heidelberg), ISC 2013, Leipzig, Germany, ISBN: 978-3-642-38749-4, ISSN: 0302-9743, 2013-06
- Lee J.-Y. and L. Greengard, *The Nonuniform FFT of Type 3 and its Applications*, J. Comput. Phys., 206, 1–5 (2005).
- Lee H.M., 1987, ApJ, 319, 801.
- LIGO Collaboration, Data release for event GW150914, 2016, <http://dx.doi.org/10.7935/K5MW2F23>.
- Mathisson V. M., *Neue Mechanik materieller Systeme*. Acta Phys. Polon., 6, p. 167 (1937).
- Maggiore M., 2008, *Gravitational Waves. Volumen 1. Theory and experiments*, Oxford.
- Miralda-Escudé J., Gould A., 2000, ApJ, 545, 847.
- Moore C. J., Cole R. H., Berry C. P. L., *Gravitational-wave sensitivity curves*. Class. Quant. Grav., 32, Number 1 (2015). <https://arxiv.org/abs/1408.0740>.
- Morscher M., Umbreit S., Farr W. M., Rasio F. A., 2012, ApJ, 763L, 15.
- Newmann Mark, *Computational Physics*, Universidad de Michigan (2012).
- Noyola E., Gebhardt K., 2006, ApJ, 447-466.
- Obukhov Y., Puetzfeld D., *Multipolar test body equations of motion in generalized gravity theories*. Fundamental Theories of Physics, 179, pp. 67-119 (2015). <https://arxiv.org/abs/1505.01680v1>.
- Ohashi A., *Multipolar particle in Relativity*, Phys. Rev. D, 68, 044009 (2003). <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0306062v1>.
- O’Leary R.M., Rasio F.A., Fregeau J.M., Ivanova N., O’Shaughnessy, R., 2006, ApJ, 637, 937.
- A. Papapetrou. *Test-Particles in General Relativity I*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 209, 1097, pp. 248-258, (1951).

- Peters P., Mathews J., *Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit*, Phys. Rev., 131, pp. 435-440 (1963).
- Peters P.C., 1964, Physical Review, 136, 1224.
- F. Pirani., Acta Phys. Pol., 15, 389 (1956).
- Poisson E., Chifford M. Will, *Gravity. Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press p. 179-180 (2014).
- Portegies Zwart S., McMillan S., 2000, ApJL , 528, L17.
- Rosen N., *General Relativity and Flat Space. I* Phys. Rev., 57, 147 (1940).
- Rubilar G. F. *Apuntes de clases: Tópicos en Relatividad General*. <https://github.com/gfrubi/GR>.
- Sadowski A., Belczynski K., Bulik T., Ivanova N., Rasio F.A., O'Shaughnessy, R., 2008, ApJ, 676, 1162.
- Schwarzschild K., *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 7, pp. 189-196 (1916). (Traducción al inglés en <https://arxiv.org/pdf/physics/9905030v1.pdf>.)
- Spitzer Jr L., *Dynamical Evolution of Globular Clusters*, (Princeton University Press, Princeton, 1987).
- Spurzem R., 1999, JCoAM, 109, 407.
- Taylor J. H., *Binary pulsars and relativistic gravity*, Rev. Mod. Phys., 66, p. 711 (1994).
- Tulczyjew W., Acta Phys. Pol., 18, p. 393 (1959).
- Wang L., Spurzem R., Aarseth S., Nitadori K., Berczik P., Kouwenhoven M.B.N., Naab T., 2015, MNRAS, 450, 4070.
- Weisberg J. M., Taylor J. H., *Relativistic binary pulsar B1913+16: Thirty years of observations and analysis*. ASP Conf. Ser. 328, 25 (2005). <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0407149v1>.