UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

EL LENGUAJE MATEMÁTICO Y LA UNIDAD DE ENSEÑANZA POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

Profesor guía: Dr. Rodrigo Pavez Cuadra.

Profesor co-guía: Mg. Eugenio Chandía Muñoz.

Seminaristas: Fabiola Arredondo Vásquez.

Luis Torres Mardones.

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

EL LENGUAJE MATEMÁTICO Y LA UNIDAD DE ENSEÑANZA POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

Profesor guía: Doctor Rodrigo Pavez Cuadra.

Profesor co-guía: Mg. Eugenio Chandía Muñoz.

Seminaristas: Fabiola Arredondo Vásquez.

Luis Torres Mardones.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Dios primeramente por darnos la posibilidad de realizar este trabajo; a nuestras familias, quiénes con su apoyo incondicional nos brindaron palabras de aliento y nos animaron en momentos difíciles; a nuestro profesor Rodrigo Pavez por su paciencia, críticas y aportes, las cuales fueron fundamentales para la realización de estaúltima etapa de nuestra carrera, y por último al profesor Eugenio Chandía, por su disponibilidad y retroalimentaciones realizadas.

Agradezco a Dios por brindarme la oportunidad de estudiar y de realizar el presente trabajo; a mi familia, en especial a mi esposo Rodolfo y a mis pequeños hijos Efraín y Salomé quienes me apoyaron y brindaron palabras de ánimo en todo momento. Gracias también a mi familia de Valparaíso y a mis padres quienes siempre me tuvieron presentes en sus oraciones; y gracias a mis profesores por ser una guía en este difícil camino.

Fabiola Elizabeth Arredondo Vásquez

Agradecer a mis padres que, a pesar de la distancia, me han apoyo incondicionalmente en todo este camino. Agradecer a mi hermano y mi novia, quienes siempre me entregaban ese abrazo y esas palabras de aliento en los momentos difíciles. Por último, dar las gracias a todos los profesores que han sido parte de mi formación profesional y a todos los amigos, conocidos y compañeros que de alguna u otra forma han estado presentes en estos años de estudio.

Luis Enrique Torres Mardones

Resumen

En base a un modelo fundamentado en Teorías del Aprendizaje, particularmente la del Aprendizaje Significativo propuesto por el académico de la Universidad Federal de Río Grande del Sur Marco Antonio Moreira, el cual denominó a esta, Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa (UEPS), se diseñó una secuencia didáctica para enseñar el contenido de Función Cuadrática para el nivel educativo de Segundo Año de Enseñanza Media. Esta propuesta coloca énfasis en la correcta implementación del lenguaje matemático utilizado; para tales efectos este debería promover a que el alumno reflexione ante las distintas expresiones planteadas.

En la propuesta se aborda el concepto de función cuadrática y sus diversas expresiones algebraicas, además de sus representaciones gráficas, a las que se suma un desarrollo manual y la utilización de TICS, empleando el Software Educativo Geogebra. Para finalizar la unidad, se entregan cinco pasos para la resolución de problemas contextualizados en relación a la optimización de variables.

Es así como en el primer capítulo de este trabajo se reflexiona sobre la importancia del lenguaje matemático en la propia enseñanza de las matemáticas, específicamente en el contenido de Función Cuadrática. En efecto, se promueve resolver ciertas inquietudes a través del cumplimiento del objetivo general y los específicos presentes en el capítulo dos.

En el tercer capítulo, se presenta la base teórica, en la cual se sustenta la propuesta didáctica a través de documentos del MINEDUC, textos escolares y libros de distintos autores que tratan sobre el lenguaje, el lenguaje matemático y currículum principalmente; para luego, en el cuarto capítulo, establecer la propuesta metodológica para el diseño de la propuesta didáctica, la cual se aprecia en el capítulo cinco del presente trabajo.

Abstract

On the basis of Learning Theories, particularly the Significant Learning Theory proposed by a professor at Universidad Federal de Río Grande del Sur, Marco Antonio Moreira, who called it a Potentially Significant Teaching Unit; a teaching sequence was designed to teach the content of quadratic functions to students of second grade in high school. The focus is on the precise implementation of the mathematical language in order to make students reflect on the class mathematical statements.

The main concepts are related to quadratic functions and algebraic expressions, as well as how data is shown in graphs. In addition, TICS are also important. For this reason, a mathematical learning software, Geogebra, was used. To end the unit, 5 steps on problem-solving will be figured out.

This is how, firstly, the importance of mathematical language will be pointed out, especially when solving quadratic functions. In fact, later it will be analysed if some issues were solved after following the main and specific expecting learnings throughout classes.

Then, the basic theoretical elements will be presented through official documents from MINEDUC and subject school books. In addition, authors that talk about language, mathematical language, and curriculum will be quoted. Finally, a theory based methodology will be explained to understand the do based teaching or didactics part that will be presented to conclude this piece of work.

Contenido

Introducción

Actualmente una de las tendencias más difundidas en la educación consiste en la transmisión de procesos de pensamientos, priorizando este aspecto en relación a la transferencia de contenidos. En este sentido, la matemática como actividad consiste en un saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Es por ello que a esta disciplina se le concede una gran importancia, siendo en buena parte colindante con la psicología cognitiva, la cual hace referencia a los procesos mentales del ser humano (Pérez y Tapia, 2002).

La enseñanza de la matemática se debe desarrollar en un ambiente contextualizado, que permita al alumno ser el constructor de sus propios conocimientos y así lograr un aprendizaje significativo que lo llevarán a enfrentar nuevos desafíos y a participar en la sociedad. Este ambiente debe lograr que el estudiantepueda adquirir la comunicación necesaria con el objetivo de expresar sus ideas e inquietudes y, de forma paralela, crear la motivación necesaria para querer aprender.

Es por lo antedicho que en este seminario se hablará sobre la importancia del lenguaje matemático en la enseñanza de esta disciplina, la relación que tiene este con el currículum y lo importante que es para el proceso de enseñanza-aprendizaje que se produce en el aula. Estos aspectos serán desglosados y analizados en los próximos capítulos, planteando el problema que genera nuestra inquietud (capítulo I) y los objetivos que se proponen para lograr y poder solucionar dicho dilema (capítulo II). Sumado a esto, se presentará un análisis profundo sobre el lenguaje matemático y su presencia en el Currículum Nacional (capítulo III), para así enfocar la atención en el Marco Metodológico (capítulo IV) con el cual se trabajó y del cual se lograron establecer las conjeturas necesarias que dan sustento a la secuencia didáctica presentada (capítulo V).

En la creación de un ambiente apto para el aprendizaje de las matemáticas, es necesario entender cómo las personas se pueden comunicar dentro de esta disciplina, entender su idioma, el lenguaje abstracto y formal que utilizan; donde se mezclan números, símbolos, figuras y conceptos que tienen un "significado matemático", los cuales no siempre coinciden con el significado en el lenguaje cotidiano o natural.

En el presente trabajo se promueve la importancia del lenguaje matemático en el aprendizaje de esta ciencia. Para ello, el análisis de distintos documentos del MINEDUC, textos escolares, libros y artículos de diferentes autores relacionados con el lenguaje matemático y la didáctica de la matemática, nos llevan a establecer como respuesta a nuestro problema la secuencia didáctica que se presentará en las próximas páginas, y que está centralizada en la enseñanza y aprendizaje del contenido de Función Cuadrática, correspondiente al nivel educativo de Segundo Año de Educación Media.

Por ende, el objetivo de esta propuesta consistirá en promover la reflexión en torno al lenguaje matemático que se utiliza para poder enseñar un determinado contenido; y así, concebirlo como una herramienta fundamental en el proceso de comunicación en el aula para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Todo este proceso e inquietud nace del análisis de los Planes y Programas, y de cómo estos no involucran al lenguaje matemático en la enseñanza de una unidad tan importante como es el contenido de Función Cuadrática.

CAPÍTULO I

1. Presentación y Planteamiento del Problema

1.1 Presentación del Problema

En las Bases Curriculares vigentes para el año 2018, se hace énfasis en ciertas habilidades que debieran lograr los estudiantes mediante el aprendizaje de las matemáticas, entre ellas encontramos: resolución de problemas, argumentación, habilidad para comunicar, modelar y representar. Es por lo expresado que el Ministerio de Educación sostiene lo siguiente:

> Aprender matemática influye en el concepto que niños, jóvenes y adultos construyen sobre sí mismos y sus capacidades, en parte porque el entorno social lo valora y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior, pero sobre todo porque faculta para confiar en el propio razonamiento y para usar de forma efectiva diversas estrategias para resolver problemas significativos relacionados con su vida (MINEDUC, 2018, pág. 1).

Al hilo de lo anterior, el profesor Douglas Quadling, de la Universidad de Cambridge, nos señala que las matemáticas se utilizan a diario de forma consciente o inconsciente, y para explicarlo considera tres categorías de matemáticas. En primer lugar, las matemáticas de la vida habitual, es decir, las matemáticas que necesitamos para ocuparnos de nuestros asuntos diarios y aprovechar convenientemente nuestros ratos de esparcimiento. En segundo lugar, las matemáticas prácticas; estas van desde ejercicios bastante sencillos, tales como la aritmética decimal, hasta las técnicas más avanzadas, como la utilización del cálculo diferencial para determinar los valores máximos y mínimos. Por último, las “matemáticas de los matemáticos”, estas consisten en definiciones, pruebas y estructuras abstractas (UNESCO, 1982).

Además, en las Bases Curriculares se corrobora que las matemáticas son una herramienta fundamental, ya que se utilizan a diario. Los aportes de la matemática están en la base de la innovación en tecnología, ciencia, transporte, comunicaciones y se aplican en otras áreas, como las artes, la geografía y la economía (MINEDUC, 2018, pág.1).

Otra importancia de aprender matemáticas, es que son de lenguaje universal; puesto que se utilizan en todo el mundo. Tradicionalmente, el aprendizaje de esta disciplina se ha asociado solo con asimilar fórmulas, procedimientos y símbolos; sin embargo, la matemática es dinámica, creativa, utiliza un lenguaje universal y se ha desarrollado como medio para aprender a pensar y para resolver problemas (MINEDUC, 2018, pág.1).

Son varias las actitudes que se pueden desarrollar en la persona que aprende matemática, motivada por conocer lo que es medible, lo que es comparable y lo que es calculable. Entre las actitudes a desarrollar, se encuentran: el comparar, el resumir, el buscar suposiciones, el clasificar, el aplicar experiencias, el desarrollar la capacidad crítica, el desarrollo de la capacidad de interpretación, etc. Todas estas son asociadas a los procesos cognitivos de los alumnos (Robres, 2003).

El aprendizaje de las matemáticas puede estimular el desarrollo de la personalidad psicológica, además de favorecer la capacidad de información, y el desarrollo de las destrezas y actitudes; tales como: la atención y concentración, la autoestima, la expresividad. Además, se desarrolla la calidad moral de las personas, mediante actitudes como: la responsabilidad, honestidad en las demostraciones, constancia, entre otros (MINEDUC, 2015).

¿Qué Sucede en el Aula al momento de Enseñar Matemáticas? En las Bases Curriculares se señalan las habilidades que deben desarrollar los alumnos para adquirir nuevas destrezas y conocimientos tales como resolver problemas, representar, modelar, argumentar y comunicar (MINEDUC, 2018).

Para que ciertas habilidades se cumplan y se logre un aprendizaje significativo, el profesor debe enseñar. Es decir, debe crear las condiciones para que se produzca esta apropiación del conocimiento. Los estándares que debe cumplir un profesor, según el MINEDUC, son los siguientes:

> Poseer conocimientos y habilidades de la disciplina; conocer a los alumnos y alumnas con los cuales va a trabajar; tener conocimiento del currículum nacional; saber gestionar las clases; saber planificar, diseñar e implementar estrategias de enseñanza; saber evaluar; presentar un compromiso de la profesión; tener una responsabilidad

> profesional; presentar una capacidad de reflexión pedagógica (MINEDUC, 2018, pág. 12).

A pesar de lo señalado en las Bases Curriculares, ¿Qué sucede en la sala de clases? ¿Se estarán logrando cumplir con los estándares establecidos por el MINEDUC? La prueba PISA es un estudio internacional dirigido por la OCDE, que permite, cada tres años, evaluar las competencias de los estudiantes de quince años en las áreas de Lectura, Matemática y Ciencias. El objetivo del estudio se concentra en observar cuán bien aplican los estudiantes su conocimiento y habilidades en tareas que son relevantes para su vida actual y futura. Nuestro país ha participado los años 2000, 2006, 2009 y 2012.

Según los resultados obtenidos en la prueba PISA, pese a que Chile alcanza el primer lugar de Latinoamérica, obteniendo 423 puntos en Matemática y consolidándose como el sistema educativo con mejor desempeño de la región; el 52% de los estudiantes chilenos no logra el nivel requerido para participar completamente en una sociedad moderna. Chile, junto a Colombia y Costa Rica, presenta la mayor brecha de género del continente; mientras más alto es el grupo socioeconómico del estudiante, mayor es el resultado obtenido en la evaluación (Agencia de Calidad de Educación ACE, 2018).

¿Qué podría influir en tales resultados? Cursos sobre poblados o integrados por alumnos de distintas edades, alumnos con ritmos de aprendizaje muy diversos, padres que no brindan suficiente apoyo a sus hijos en el proceso educativo, entornos violentos que amenazan la seguridad de docentes y alumnos por igual, etc. (ACE, 2018).

Para enfrentar esto, los docentes deberán lograr un clima apropiado de aprendizaje en el aula, teniendo en claro que la educación matemática, como toda la educación se basa en la comunicación. La comunicación implica, complicidad entre las partes; para lo cual deben cumplirse como mínimo cuatro principios: la información que se emite debe ser verdadera y fiable; no debe proporcionarse ni demasiada información ni demasiado poca; las respuestas deben ser ajustadas a las preguntas que se pretenden responder; deben utilizarse varios recursos didácticos para conseguir claridad, orden y brevedad (Goñi, 2011).

1.2 Planteamiento del Problema

Durante el proceso de aprendizaje, surgen ciertas dificultades que pueden ser provocadas por la propia naturaleza matemática, por el profesorado y su metodología, por dificultades presentes en el alumno, entre otros aspectos a considerar (Ordoñez, 2011).

La matemática tiene, como la mayoría de las ciencias y otras disciplinas del saber, un lenguaje particular, específico, el cual simplifica, en algunos casos, la comunicación; por otro lado, clarifica y designa de una manera exacta, sin posible confusión, sus contenidos. En este lenguaje, que podemos llamar lenguaje matemático, las afirmaciones son presentadas de una manera propia, siendo tajantes, con demostraciones de su veracidad y sin permitir ambigüedades (Ortega y Ortega, 2018). No obstante, muchas veces los alumnos tienen dificultades para entender este lenguaje, y con ello el contenido expresado mediante este.

Según el psicólogo Juan Armando Corbin, el lenguaje verbal puede ser del tipo: oral, escrito o icónico; y el lenguaje no verbal, puede ser del tipo kinésico o facial (Corbin, 2018).

En el aula a diario se utilizan estos tipos de lenguajes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero ¿es correcto el lenguaje verbal utilizado?, ¿las expresiones utilizadas por el docente son capaces de captar la atención de los alumnos?, ¿el material de apoyo visual es acorde al contenido? Según Brousseau, David y Werner (citados en Rico 1995), los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.

En los Objetivos de Aprendizajes de las Bases Curriculares, no se menciona explícitamente el énfasis del lenguaje matemático en la disciplina, pero si aparece de forma implícita, donde se señala que para poder desarrollar problemas y situaciones de la vida cotidiana que involucren el uso de las matemáticas, es necesario la comprensión de conceptos, desarrollo de razonamiento y aplicación de herramientas matemáticas (MINEDUC, 2018).

Las traducciones entre el lenguaje coloquial o natural y el simbólico, en ambos sentidos, constituyen conversiones, que en la mayoría de los casos resultan no congruentes, lo que da lugar a dificultades en el proceso de enseñanza y que no siempre son consideradas por los docentes, tal como afirma Duval (2006).

En las aulas hay una falta de diálogo interdisciplinario, lo cual hace que cada docente proclame independencia y se arrogue el derecho de ser lo más importante (Ordoñez, 2011, pág. 4).Un ejemplo de error es el que se comete al momento de aprender álgebra, la transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de representación y de resolver problemas, a uno formal, resulta ser difícil para muchos de los que comienzan a estudiar álgebra; estos estudiantes siguen usando los métodos que funcionaban en aritmética (Ordoñez, 2011, pág.6).

Otro error son las graves falencias en la lectura e interpretación de textos que exigen argumentos conceptuales, las fallas en la lectura de enunciados de tipo matemático, la excesiva mecanización de procedimientos, entre otros (Ordoñez, 2011, pág. 4).

Estos entre otros son los tipos de errores que surgen en una sala de clases, siendo el lenguaje utilizado esencial para la comprensión de contenidos y el aprendizaje en sí; aquello nos indica que en el aprendizaje de la matemática se puede expresar mediante el lenguaje, sentimientos en cada momento, así cuando se elabora una evaluación, al leer e interpretar un documento, al resolver un problema o ejecutar una demostración lo cual es motivante para el estudiante (Puga, Rodríguez, Toledo, 2016, pág.15).

CAPÍTULO II

2. Pregunta y objetivos de investigación

2.1 Pregunta de investigación

De todo lo mencionado con anterioridad, hay varios conceptos que se nombran en más de una ocasión, como es el caso de didáctica de la matemática, función cuadrática, currículum y lenguaje matemático. Todos estos términos se relacionan con la enseñanza de la matemática dentro del currículum nacional, abarcando los objetivos de aprendizajes que los estudiantes deben alcanzar.

¿De qué manera y forma la buena enseñanza del lenguaje matemático promueve y genera un aprendizaje significativo en la unidad de Función Cuadrática de Segundo Año Medio?

2.2 Objetivo General

Establecer una propuesta didáctica como herramienta para la utilización y comprensión de un lenguaje matemático adecuado en el aprendizaje del contenido Función Cuadrática correspondiente al nivel de Segundo Año Medio.

2.3 Objetivos Específicos

- Indagar en los documentos del MINEDUC, textos escolares y libros de autores, lo que se entiende por lenguaje, educación, lenguaje matemático y currículum.
- Definir y explicar cómo el lenguaje, la educación, el lenguaje matemático y el currículum se relacionan entre sí.
- Seleccionar una secuencia didáctica adecuada para tratar el contenido Función Cuadrática, centrándonos en la importancia de la utilización y comprensión de un lenguaje matemático adecuado.
- Analizar la secuencia didáctica que se va a emplear a modo de abarcar la Unidad de Aprendizaje de Función Cuadrática, considerando en esta los conocimientos previos del nivel escolar en el cual se va a aplicar.
- Elaborar una propuesta didáctica basada en la secuencia seleccionada, que permita a los alumnos de Segundo Año Medio comprender el contenido de función cuadrática centrándonos en el lenguaje matemático involucrado.

CAPÍTULO III

3. Marco Teórico

3.1 El lenguaje

3.1.1 La importancia del lenguaje, lo que es y lo que significa

Una de las funciones que nos diferencian de los animales es el lenguaje. En relación a lo mismo, Gusdorf señala lo siguiente: el lenguaje es característico, entre todas las especies animales, de la especie humana únicamente (Gusdorf, 1957, p.7). Esto se debe, según relata el mismo autor, a que el vocablo en el animal aparece como una sucesión de situaciones siempre presentes y siempre evanescentes, definidas sólo por su referencia a las exigencias biológicas del ser viviente, mientras que en el ser humano más allá de esto, se compone una realidad en idea, más estable y más verdadera que la apariencia. Para analizar lo anteriormente señalado, debemos entender en primer lugar qué es el lenguaje y cuál es la importancia que reviste en el proceso de enseñanza. Por lo mismo, ¿tendrá el lenguaje una concepción taxativa ante la sociedad y por ende hacia los modos de la enseñanza, o podrá admitir otras y variadas interpretaciones? Si consideramos la definición que nos entrega la RAE, en su vigesimotercera edición, subraya que el lenguaje se expresa como la: capacidad propia del ser humano para expresar pensamientos y sentimientos por medio de la palabra. Además, agrega que este se concibe como: un sistema de signos que utiliza la comunidad para comunicarse oralmente y por escrito. En otro sentido nos dice que: es un sistema de símbolos y señales que permite a las personas componer y comprender mensajes. Al hilo de lo anterior, podemos concluir que el lenguaje es un conjunto de símbolos que utilizan las personas para poder crear, enviar y entender un mensaje, en el cual se expresan ideas, sentimientos, pensamientos, entre otros.

De acuerdo a lo expresado en el párrafo anterior, el lenguaje conlleva a todo tipo de expresión, lo que permite comunicarnos y es esencial para la comprensión de un mensaje; pero como se mencionaba en un comienzo ¿habrá otras concepciones del lenguaje o será esta taxativa?

Puga, Rodríguez y Toledo establecen que: el lenguaje es una palabra ambigua, puesto que se utiliza tanto para denotar la función comunicativa entre individuos, como para denotar un particular sistema de signos o símbolos o para describir el uso que se le da a este sistema en un contexto determinado (2016, p.9). De igual forma, contempla que el lenguaje está compuesto por el habla definido como el uso de la lengua por una persona en una situación específica, siendo un acto individual; y por la lengua, que constituye la totalidad de los sistemas lingüísticos que poseen los miembros de una comunidad. Por otra parte, Gusdorf establece lo siguiente: el lenguaje y la lengua son datos abstractos, condiciones de posibilidad de la palabra, que las encarna asumiéndolas para hacerlas pasar al acto (Gusdorf, 1957, p.7). De esta idea se puede colegir una concepción mucho más amplia que la antes mencionada, y se entiende así que el lenguaje no es taxativo y que, si para algunos comprende solo a la forma en que nos comunicamos, para otros comprenderá todo un sistema comunicativo. Podemos concluir entonces que el lenguaje es un acto social debido a que, al estar compuesto por el habla, necesariamente se requiere de la interacción de individuos que necesitan comunicarse y utilizan el lenguaje para lograr ese propósito. Dicho deseo es observable en el proceso de enseñanza-aprendizaje, donde el docente debe enseñar el conocimiento para que sus estudiantes puedan apropiarse de este. Es aquí donde el lenguaje toma un papel importante y prioritario, debido a que es a través de él que se entregan los saberes necesarios.

Otra acepción de lenguaje a considerar, es la expuesta por Cajiao (1997), donde este precisa que el lenguaje no está restringido a la lengua, sino que abarca toda forma de expresión que le permita a la persona representar la realidad con su propia manera de aprenderla o, dicho en otras palabras, cualquier sistema simbólico que permita exteriorizar lo que tengo en la mente. Por lo tanto, a mayor cantidad de formas de comprender todos los lenguajes, tendrá mayor posibilidad de adquirir y enriquecerse con los conocimientos que se entregan. De igual manera, quien pueda expresar sus conocimientos de las formas más diversas, podrá entregar ese conocimiento a un mayor número de individuos.

Sumado a todo lo que ya se ha mencionado, el lenguaje se puede subdividir en tipologías, las cuales son el lenguaje natural o también llamado lenguaje ordinario, que se ha construido a través de la historia de la comunidad con el objetivo de poder expresarse, sin importar la ambigüedad de los conceptos, y el lenguaje artificial que, en oposición al natural, tiene como finalidad evitar la ambigüedad de los lenguajes naturales, por lo que presenta un grado de artificialidad y convencionalidad mayor a lo que se refiere en la construcción de símbolos y al significado que se le asigna (Puga, Rodríguez y Toledo, 2016).

En razón a esto, las diferentes ramas de las ciencias poseen un lenguaje artificial con el fin de que cada símbolo posea un significado preciso y distinto. En este ámbito, las matemáticas poseen un aspecto característico, ya que su vinculación con un lenguaje específico de carácter formal posee propiedades que lo diferencian fuertemente de los lenguajes naturales. En efecto, frente a la ambigüedad del lenguaje natural el lenguaje matemático implica la abstracción de lo esencial de las relaciones matemáticas implicadas en cualquier situación, lo que permite un aumento del rigor que viene dado por la estricta significación de los términos (Gómez-Granell, 1989).

Por consiguiente el lenguaje debe ser prioridad y agente principal en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles de escolaridad, debido a que es una ciencia que se fundamenta en principios, que trabaja con los conjuntos y se ejecuta a través de las operaciones mismas que tienen propiedades universalmente aceptadas, por lo que el lenguaje matemático permite interrelacionar el lenguaje formal y abstracto (lenguaje artificial) con el lenguaje natural, a través de principios y reglas previamente acordadas (Puga, Rodríguez y Toledo, 2016).

3.1.2 Teorías de la Adquisición del Lenguaje

Para poder analizar el lenguaje matemático, se debe estudiar la adquisición del lenguaje, ya que sin la adquisición del lenguaje natural, sería imposible la adquisición del lenguaje artificial y por ende trabajar con el lenguaje matemático.

En relación a esto, existen diversas teorías referidas a la adquisición del lenguaje. No obstante, nos centraremos solo en tres posturas: Los conductistas, quienes tienen como punto de partida la idea de que el niño nace con base en el condicionamiento estímulo-respuesta que adquiere el lenguaje como un sistema de respuesta sofisticado.

Por otra parte, los innatistas explican la adquisición del lenguaje basándose en la capacidad innata de los seres humanos para producirlo y en otras habilidades que el niño debe poner en práctica para adquirirlo. Esto explicaría el descubrimiento que el niño hace del sistema de reglas subyacentes de su lengua y el desarrollo de la habilidad para comprender y producir oraciones, aun cuando éstas sean completamente nuevas para él (Chomsky, 1965).

De lo anterior, se deduce que los innatistas y los conductistas discrepan en sus posiciones sobre la adquisición del lenguaje. Por un lado, los innatistas enfatizan en los mecanismos internos de la persona y no le dan importancia a la influencia que proviene de la experiencia y, por otro lado, los conductistas sostienen ciertos principios de aprendizaje y admiten el efecto del ambiente, pero sin tomar en cuenta al sujeto que aprende ni las producciones que realiza de su lenguaje (Palencia y Talavera, 2004).

Por otra parte y como tercera postura, los cognitivistas afirman en que la adquisición del lenguaje es un componente innato combinado con la memoria, lo que capacita al niño para manejar los datos de manera lingüística.

De esta manera, y definiendo la forma en que el niño adquiere el lenguaje, podemos entender que la enseñanza debe tomar en cuenta otros matices para que, de esta manera, la comprensión del niño sea óptima y correcta. Para esto, es importante entender las falencias que tienen los alumnos durante sus años en la enseñanza media para la comprensión correcta de las matemáticas. Estos errores se observan al ver que los alumnos no logran comprender los signos y símbolos, limitando las letras a solo ecuaciones y no a una forma simbólica de expresar y generalizar contenidos matemáticos. Sumado a esto, las matemáticas son abstractas, por tanto, necesitan un sistema semiótico de representación (Distéfano, Urquijo y González, 2010).

Por consecuencia, la construcción del pensamiento matemático va directamente relacionado con la adquisición y comprensión del lenguaje matemático, por lo que éste no puede ser considerado solo como una sintaxis desprovista de cualquier significado referencial, ni como una simple expresión notacional del significado de los conceptos matemáticos construidos mediante un proceso de reflexión y abstracción interna del sujeto (Gómez-Granell, 1989). Es por esto que el lenguaje matemático forma parte fundamental del proceso de enseñanza-aprendizaje para esta asignatura.

Tal lenguaje es definido como formal y abstracto. Para Martínez (2009) el idioma de las matemáticas recurre a palabras claves, objetos y herramientas necesarias para mejorar el entendimiento de esta. De igual forma, define que la matemática es una ciencia lógica y deductiva que sintetiza con las siguientes palabras:

> La deducción lógica exige cumplir unas reglas muy precisas que hay que aprenderlas, memorizarlas y usarlas. Mezcla palabras, números, símbolos, figuras y conceptos que tiene un significado matemático, que no siempre coincide con el lenguaje normal. Parte de unos principios (axiomas) términos no definidos, de unas definiciones y conceptos; de unos objetos (números, símbolos operadores…); de unas "reglas de juego" (propiedades). Las herramientas que se utilizan son los conceptos, las operaciones, las propiedades utilizando esas herramientas se genera un método, una teoría, un teorema. Los resultados deben ser demostrados; no basta con una simple comprobación. Una vez demostrados pueden ser aplicados como un modelo (Martínez, 2009, p. 1).

Por otro lado, Delgado (2015) señala que: las matemáticas son creación, ya que se encuentran al interior del ser humano, y también es descubrimiento, debido a que se encuentra fuera del ser humano, en el ambiente y experiencias vividas. Esto toma un valor importante en el ámbito del aprendizaje de las matemáticas, porque tal aprendizaje depende del lenguaje, símbolos propios y específicos de esta ciencia, lo cual, recordando todo lo anteriormente mencionado, lo transforman como una disciplina inaccesible, donde los estudiantes observan de manera negativa, provocando recelo al aprendizaje de las matemáticas y así una explicación del por qué la mayoría de los evaluados en la prueba Pisa se encuentran en nivel uno, lo que significa que poseen conocimientos insuficientes para acceder a estudios superiores.

3.1.3 Lenguaje y Educación

Si hablamos de educación, directa o indirectamente, nos colocamos a pensar en la comunicación que debemos efectuar entre docentes y alumnos, colegas de trabajo, apoderados y los demás agentes que intervienen en el proceso educativo. Freire nos señala que: sin comunicación, no hay verdadera educación (Freire, 1970). A veces, la tarea comunicativa es extraordinariamente simple: basta con indicar a los otros lo que observamos y lo que eso nos parece, en el caso más extremo podemos incluso dirigir físicamente la mirada del otro, tal y como hace una madre con un niño de apenas unos meses, y asegurarnos de que se dirige hacia aquello que nos parece interesante; sin embargo, la mayor parte de los conocimientos de los hombres no pueden ser contemplados directamente, es necesario concebirlos. Y en este último caso, el lenguaje es completamente necesario, sólo gracias a su intervención podemos dirigir la mirada de los otros y llevarla desde su mundo al nuestro (Sánchez, Orrantia y Rosales, 1992, pág.3-4).

Desde los primeros días de vida, el desarrollo de habilidades de comunicación y lenguaje son uno de los mayores logros que la persona debe realizar (MINEDUC, 2018, parraf. 3) y se continúan trabajando a lo largo de nuestra existencia, considerando dentro de esta, nuestra etapa educativa.

El lenguaje no se reduce a la oralidad. En la escuela hay que aprender a leer y a escribir; por lo cual, el niño para aprender esto, debe comprender que el objeto tiene un nombre y que puede ser presentado no solo por un dibujo, sino también por un signo, que nada tiene que ver con el objeto. El cerebro de una persona que sabe leer es distinto al de un analfabeto, porque este cerebro ve un signo, tomando forma y sentido, aunque no haya la intención explícita de leer palabras (Urgiles, 2016).

Cuando el alumno ingresa a la escuela todas las actividades que este realiza allí, están vinculadas con el lenguaje; en estas, el alumno trabaja sus habilidades comunicativas. Ejemplo son: seguir instrucciones verbales simples, escuchar y responder a cuentos, canciones o rimas que han leído o que les han leído, participar en discusiones grupales con sus compañeros, comprender que la comunicación es tanto verbal como no verbal, respetar turnos para hablar, seguir instrucciones verbales complejas, responder preguntas para resolver problemas, dialogar y formular preguntas en torno a lo que han leído en forma grupal o independiente, participar de discusiones grupales demostrando comprensión de lo que sus pares exponen o los puntos de vista distintos que puedan tener, usar el lenguaje no verbal para reforzar el contenido de un mensaje, poner atención a quien habla y esperar su turno para hablar, entre otras (MINEDUC, 2018).

Otro aspecto donde se vivencia el protagonismo del lenguaje en el ámbito educativo son los organizadores gráficos (cuadro sinóptico, mapa conceptual, mapa mental, mapa semántico, mapa de árbol, diagrama de flujo, la línea del tiempo y el diagrama de red), los cuales son motivo de análisis de Campos (2006) quien hace una reseña de la aparición de muchos de ellos, de sus proponentes, de sus características, de sus beneficios para el estudiante y de las implicaciones para el profesor al trabajar o no con estos (Agudelo, 2007, pág. 9). Es aquí donde se hace una estrecha relación entre el momento cognitivo y el momento sígnico señalados para el lenguaje, pues en algunos hay conectores y en otros no. En todos debe haber claridad de inclusiones, en otros puede ir la imagen como representación icónica de lo que se quiere decir, otros pretenden funcionar como el cerebro, entre otras características que se citan.

En la misma línea, Ontoria afirma que: los mapas surgieron como estrategia para trabajar el aprendizaje significativo y neurológico, y que sus aplicaciones son tres: el desarrollo de la capacidad mental, donde se adquiere vocabulario, se clarifica conceptualmente el significado de las palabras y se crean nuevas estructuras de conocimiento; las habilidades sociales, donde se potencia la actitud de respeto ante la pluralidad de enfoques en la construcción de ideas; y la opción metodológica de aula, la cual conlleva a reflexiones en cuanto a contenido cultural, modelos de aprendizaje, estilo cooperativo y participación en el aula (Ontoria, 2006, pág. 26).

A través de todas estas expresiones de lenguaje en el aula, vamos creando nuevas realidades; por lo cual el lenguaje va cambiando conforme a estas realidades. Pero este cambio en el lenguaje significa cambios para quien lo construye y utiliza, necesitando ser enseñado y aprendido (Urgiles, 2016).

De lo anterior, el lenguaje es el instrumento básico de la interacción humana, y todos los aprendizajes se basan en esta interacción. Es un universo de significados que permite interpretar el mundo y transformarlo, construir nuevas realidades, establecer acuerdos para poder convivir con los congéneres y expresar ideas y sentimientos (MINEDUC, 2018).

3.1.4 Lenguaje Matemático

En cualquier faceta de nuestra vida cotidiana están presentes las matemáticas, por ejemplo, en las nuevas tecnologías, predicción del tiempo, en la música, etc.; es por esto, que se han convertido en una asignatura obligatoria a cursar en los establecimientos educativos.

Las matemáticas son una ciencia lógica que exige cumplir reglas muy precisas que hay que aprenderlas, memorizarlas y usarlas; mezclando palabras, números, símbolos, figuras y conceptos (Puga, Rodríguez y Toledo, 2016). En el estudio de estas, los alumnos requieren desarrollar ciertas competencias que les permitan diseñar planteamientos en el lenguaje matemático, ya que las operaciones que las constituyen, solo son herramientas que se utilizan para solucionar cualquier situación problemática; por tal motivo, es indispensable conocer y entender este lenguaje, para establecer un proceso de comunicación, donde podamos comprender lo que nos plantea el problema y así solucionarlo (Delgado, 2015).

El lenguaje matemático es un lenguaje artificial creado para otorgarle un sentido único a cada una de las expresiones utilizadas; siendo el encargado de interrelacionar el lenguaje formal y abstracto con el natural. El conocer este lenguaje, es la llave de la comprensión del contenido e incluso de la disciplina; si el estudiante no conoce el lenguaje matemático, no puede estar familiarizado con él, por tanto, no podrá existir el proceso de comunicación y, en consecuencia, no habrá aprendizajes significativos (Delgado, 2015).

Para conocer y adquirir el lenguaje matemático, nos debemos basar en el lenguaje propiamente tal. La adquisición del lenguaje, se realiza por la relación con el mundo físico y la interacción de las personas; este proceso en el lenguaje matemático, cobra relevancia, pues este, busca representar al mundo físico desde un lenguaje abstracto y formal para ser utilizado por las personas de forma que no haya ambigüedades en los conceptos (Puga, Rodríguez, Toledo, 2016).

En la adquisición del lenguaje matemático, se realiza una trasposición del lenguaje natural al artificial (matemático). Luis Ferrero en su obra *Las Matemáticas en la educación obligatoria* de la Enciclopedia de Pedagogía, nos expone la forma correcta de hacerlo, la cual se resume en los siguientes pasos:

> 1- Realizar una experimentación con objetos tangibles de la operación, situación o contenido.
> 2- Expresar verbalmente la operación, utilizando el lenguaje oral.
> 3- Expresar gráficamente la operación, mediante un lenguaje figurativo.
> 4- Realizar una operación simbólica, relacionando la expresión gráfica con los símbolos.
> 5- Realizar una operación abstracta, donde se expresa y opera únicamente con símbolos y signos matemáticos, utilizando el lenguaje matemático formal (Ferrero, 2002, pág. 576).

La utilización de este lenguaje (o cualquier lenguaje), requiere de conocimientos mínimos para poder desarrollarse, pero sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese lenguaje, a esforzarse en lograrlo, y desde luego, de técnicas para hacerlo (Caserio y Vozzi, 2015).

Es fundamental que el docente conozca y aplique el lenguaje matemático, para que sea capaz de transponerlo de manera adecuada a sus estudiantes, quienes deben pasar de lo concreto a lo abstracto; esto, para que los alumnos no denoten animadversión a las matemáticas y su aprendizaje (Puga, Rodríguez, Toledo, 2016). Al enseñar esta ciencia el objetivo principal será: ayudar a los estudiantes a desarrollar la capacidad matemática; es decir, se debe alentar a los estudiantes a formular y resolver problemas relacionados con su entorno, para que puedan ver estructuras matemáticas en cada aspecto de su vida. En este proceso, los estudiantes aprenden a comunicarse de diferentes maneras relacionando activamente materiales físicos, imágenes y diagramas con ideas y símbolos matemáticos; y discutiendo ideas matemáticas con sus compañeros (Mardones, Del Valle, 2009, pág. 51-52).

En base a lo anterior, el lenguaje matemático es principalmente simbólico, pero en la enseñanza, no nos podemos olvidar también de su carácter sentimental. Momentos como cuando se elabora una evaluación, al leer e interpretar un documento, al resolver un problema o al ejecutar una demostración, se manifiestan sentimientos de alegría, tristeza enojo, etc., desencadenando momentos motivantes o desmotivantes para el alumno, docentes y personas involucradas (Puga, Rodríguez, Toledo, 2016).

Como consecuencia de lo dicho, cubre de real importancia la comprensión del lenguaje de cada disciplina, en particular el de las matemáticas, que se expresan y difunden a través de su lenguaje y por lo cual no podrían ser comprendidas sin este. Es importante, entonces desarrollar la comprensión de dicho lenguaje, que involucra operaciones cognitivas y un complejo de conocimientos (Caserio y Vozzi, 2015, pág. 4).

3.1.5 Registros de Representación Semiótica

En efecto a lo analizado anteriormente, las matemáticas, se han desarrollado en función de un lenguaje simbólico; por lo cual, se han construido modelos que propician la elaboración de representaciones mentales en los estudiantes. Se entiende que no podrá existir una apropiación del conocimiento matemático si el alumno no le encuentra un sentido, un significado, si no entiende o comprende lo que el planteamiento le establece; la esencia del entendimiento de un concepto consiste en tener una representación mental o modelo que refleje su estructura (Delgado, 2015).

Desde la perspectiva de las ciencias cognitivas, las representaciones son consideradas como cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o de nuestro mundo interior. Podemos representar en nuestra mente algo que percibimos con nuestros sentidos, algo que vemos, olemos o sentimos, como también algo que nos imaginamos (Tamayo, 2006, pág. 39).

En educación, utilizamos distintos tipos de representaciones, pudiendo ser estas externas o internas. Las representaciones externas, son las producidas por acciones intencionadas o no intencionadas de las personas, que usamos permanentemente en nuestras vidas, como por ejemplo diagramas, dibujos, palabras y otras notaciones de uso común. Las representaciones internas, son las que ocupan un lugar en la mente del sujeto, como, por ejemplo, conceptos, nociones, creencias, fantasías, entre otros (Tamayo, 2006).

Durante el proceso de enseñanza aprendizaje, necesitamos emplear representaciones externas adecuadas para establecer un vínculo con el funcionamiento cognitivo de los estudiantes; estas representaciones son llamadas semióticas. Las representaciones semióticas hacen referencia a todas aquellas construcciones de sistemas de expresión y representación que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc.; estas cumplen funciones de comunicación, expresión, objetivación y tratamiento (Tamayo, 2006, pág. 41).

De acuerdo a lo enunciado por Oviedo, Kanashiro y colaboradores, un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis:

> 1- La presencia de una representación identificable.
> 2- El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada.
> 3- La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Es decir, con dos tipos de registros disímiles, con diferentes representaciones.
>
> (Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui 2012, pág. 32).

En la misma línea, Distéfano, Urquijo y González (2010) señalan que: no todo sistema semiótico constituye un registro semiótico, sino solo aquellos que permiten una transformación de las representaciones.

En el aula se debe estar consciente de la importancia de la transformación de una representación semiótica, entendiendo que esto exige poner en relación el dominio del conocimiento de las ciencias cognitivas y de las relaciones entre la ciencia y su enseñanza, y muy particularmente, el concepto (Tamayo, 2006). Las traducciones entre el lenguaje coloquial o natural y el simbólico, constituyen conversiones, que en la mayoría de los casos resultan no ser claras, lo que provoca dificultades en el proceso de enseñanza y que no siempre son consideradas por los docentes (Distéfano, Urquijo, González, 2010).

Las representaciones semióticas deben ser transmitidas expresamente a los alumnos, es necesario convertirlos en intérpretes. Los alumnos deben ser conscientes que, en la comunicación matemática, tal como afirma Guzmán (1997): lo que interesa son las situaciones claras, que para todas las circunstancias signifiquen lo mismo.

3.1.6 Dificultades Presentes en el lenguaje empleado para el Aprendizaje de Función Cuadrática

Como se ha mencionado en los puntos previamente descritos, el lenguaje matemático no está presente como prioridad, ni es mencionado en el contenido de función cuadrática con respecto a las bases curriculares. No obstante, si se mencionan diferentes conceptos matemáticos como coeficientes, parábolas, intersección, eje x, etc.

Para poder realizar un aprendizaje significativo en el estudiante y además crear un conocimiento matemático en el alumno, éste debe poder manejar y entender de manera correcta los diferentes conceptos matemáticos que se presentan en el contenido de función cuadrática. De este modo, podemos decir que en el estudio de la función cuadrática es importante que el estudiante se familiarice y apropie de significados necesarios para el análisis y la resolución de problemas que tengan que ver con su aplicación (Rivera, 2009).

Las personas construimos conocimientos a partir de nuestras experiencias, creencias e ideas previas; pero el proceso se complica, cuando el planteamiento está diseñado basado en el lenguaje matemático; si el estudiante no lo conoce, no está familiarizado con él, no podrá existir un proceso de comunicación y, en consecuencia, no habrá aprendizaje significativo (Delgado, 2015).

La comunicación entre docente y alumno en la enseñanza de función cuadrática, se produce por medio del lenguaje matemático, haciendo una transposición del contenido del lenguaje natural (común) al artificial (matemático). Sin embargo, la transición del lenguaje común al lenguaje matemático no siempre se logra de manera óptima. Expresiones como “abierta hacia arriba o hacia abajo” son mejor recibidas y reproducidas por los estudiantes que el concepto de concavidad, al cual hace referencia a la forma que la representación gráfica de una función cuadrática (la cual se denomina parábola en el plano cartesiano) posee. De igual manera, las diferentes formas en que puede presentarse una función cuadrática (canónica, factorizada o general) no son mencionadas por los estudiantes, creando así vacíos de conocimientos que a la larga perjudican la apropiación de los conceptos matemáticos propiamente tal. En relación a esto, los puntos representativos de la parábola no son vinculados a la expresión algebraica y viceversa. Acá, se aprecia que el docente emplea diferentes registros semióticos sin explicar en forma detallada como se realiza el paso del uno al otro, sin especificar cuándo se requiere de procesos de tratamiento o de conversión, es decir, sin precisar si la nueva representación requiere un cambio de registro semiótico o si, por el contrario, implica la transformación del registro original (Tamayo, 2006).

Como se mencionó anteriormente, esto corresponde a una respuesta lógica de parte de los docentes, quienes buscan abarcar a cabalidad lo solicitado por el Ministerio de Educación en sus Planes y Programas. No obstante, la búsqueda de resultados en las pruebas estandarizadas provoca y deterioran aún más el aprendizaje que debiese tener el alumnado, priorizando la resolución y mecanización de procesos por sobre un aprendizaje significativo y correcto de la disciplina en cuestión.

Como consecuencia se produce una dificultad en la enseñanza del contenido de la función cuadrática en base al lenguaje matemático, dificultad sobrevalorada y que, aplicando una secuencia didáctica correcta podría ser resuelta con bastantes beneficios para el estudiante.

3.2 El Currículum

3.2.1 ¿Qué es y cómo se entiende el Currículum?

Con el objetivo de ordenar y maximizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, cobra relevancia el currículum, el cual, a pesar de poseer muchas acepciones, el

Ministerio de Educación utiliza este instrumento para lograr una educación de calidad y equitativa para los distintos establecimientos del país.

En palabras de lo que se expone en el Ministerio de Educación de Chile, currículum es una selección de saberes propios de la cultura, en la que intervienen diversos actores con distintos espacios de poder e incidencia. Posee un orden y organización que le da estructura. Del mismo modo, su concreción o despliegue es posible de ser gestionado, como mínimo, en tres niveles: macro (Estado), meso (Escuela), micro (Aula) (MINEDUC, 2016, pág. 11).

La definición planteada por el Ministerio de Educación, es la que se proyecta en nuestro país en los procesos de enseñanza-aprendizaje; y como señala Tyler (1973), el concepto de currículum además de subyacer a estos procesos, involucra también a las actividades de planificación. Esto hace referencia a que el currículum guía a la acción e involucra a la acción misma.

Según Angulo (1994), las distintas concepciones de currículum pueden ser agrupadas en tres apartados: como contenido, como planificación y como realidad interactiva.

Al referirnos al currículum como contenido, Angulo (1994) nos proporciona la idea de que el currículum se refiere al contenido de la educación, al conocimiento disciplinar, a las materias de aprendizaje. Además, a esta idea el mismo autor añade que: el currículum, es una secuencia de unidades de contenido, organizadas de tal manera que el aprendizaje de cada unidad pueda ser logrado por un acto simple, apoyado por las capacidades específicas de las unidades anteriores, que ya han sido dominadas por el alumno.

En esto nos referimos a que se seleccionan los saberes propios de la humanidad y se ordenan de tal forma que pueda haber un aprendizaje significativo, tal como lo plantea Coll (1987) al decir que, si se tiene una cultura humana organizada, se tendrá aprendizajes específicos.

Referente a esto, el MINIDUC propone lo siguiente: “en la selección cultural, el diseño y el desarrollo curricular se encuentran interrelacionados, donde una buena implementación del currículum, será aquella que replique lo más parecido posible a lo expresado en los documentos curriculares oficiales" (MINEDUC, 2016, pág. 12).

El Currículum, como se planteaba, también puede ser considerado como una planificación interactiva, en donde Angulo señala que: este es un conjunto organizado de interacciones educativas y de entrenamiento, en donde se presentan tanto lo que ha de ser aprendido y enseñado, como los materiales, los métodos de enseñanza, etc. (Ángulo, 1994, pág. 6).

Siguiendo esta línea, para Beauchamp (1981) el currículum debe contener: enunciados sobre las intenciones para el uso del documento como guía en la planificación de estrategias de instrucción, los objetivos de la escuela, un cuerpo de contenido curricular, los enunciados sobre el esquema de evaluación. Por lo tanto, debe contener el marco ideal en el que se desarrollará la labor educativa.

En esto el Ministerio de Educación propone, que la etapa de diseño curricular, es la de gestión curricular de construcción u origen del currículo. En este proceso, resulta fundamental considerar principios curriculares como pertinencia, relevancia y progresión, entre otros. Asimismo, el diseño curricular puede ser realizado a nivel macro (por ejemplo, Marco Curricular o Bases), meso (por ejemplo, Proyecto Educativo Institucional y Proyecto Curricular) y micro (por ejemplo, Planificaciones Docentes) (MINEDUC, 2016, pág. 13).

Al tratarse el currículum como realidad interactiva, el estudiante pasa a ser partícipe del proceso enseñanza-aprendizaje y, por ende, un ente activo de este proceso. Para Oliver, (citado por Angulo, 2014), el currículum es lo que les sucede a los alumnos en la escuela como resultado de lo que los maestros hacen; incluyendo todas las experiencias educativas de las que la escuela es responsable.

Esta según el Ministerio de Educación, correspondería a la etapa de gestión curricular, en donde se despliega e implementa lo diseñado. En ella también deben ser considerados los principios curriculares, las características del contexto, los destinatarios y la institución; a fin de procurar una adecuada coherencia entre el diseño y los propósitos educativos que se espera lograr (MINEDUC, 2016, pág. 14).

El Currículum entonces, se concreta en las interacciones que establecen el docente y sus alumnos; es en el aula donde el contenido seleccionado y la planificación sugerida tienen énfasis. Angulo (1994) señala además que: el currículum encuentra su significado en las acciones y relaciones entre profesores y estudiantes, ocupados en las actividades mutuas que llamamos educación.

Es por este motivo que el Currículum Nacional es una base que prescribe los objetivos que los estudiantes deben lograr en cada curso y nivel, pero el establecimiento a partir de un proceso de gestión curricular, puede complementar y profundizar estos objetivos atendiendo a sus necesidades y a las características del contexto y de su Proyecto Educativo (MINEDUC, 2016, pág. 12). Luego, será el establecimiento el que acordará lo que debe enseñar, como lo debe enseñar y bajo qué circunstancias se implementará.

3.2.2 ¿Cómo el Currículum ordena los Contenidos?

En la actualidad, tenemos una sobreproducción de información proveniente de diversos medios; en donde el problema es cómo seleccionarla, asimilarla y controlarla, al servicio de objetivos valiosos y de utilidad para la población. Sabemos que no se puede saber todo, ni es muy relevante si queremos desempeñar un cierto rol en la sociedad; por ello, determinar cuáles son los aprendizajes que merece la pena adquirir a lo largo de nuestra vida, es uno de los roles de la educación, el cual recae en el currículum establecido, quién selecciona los contenidos necesarios para enseñar a la sociedad. Postman afirma que: la contribución más importante que pueden hacer las escuelas a la educación es la de encontrar un núcleo moral, social e intelectual que dote de un sentido de coherencia, de un sentido de finalidad a sus estudios (Postman, 1994, pág. 240).

Cuando hablamos de contenido, nos referimos a conocimientos, a redes de conceptos e información sobre hechos, procesos, procedimientos y operaciones. La definición considera el conocimiento como información (sobre objetos, eventos, fenómenos, símbolos) y como comprensión. Es decir, la información integrada en marcos explicativos e interpretativos mayores dan base para discernimiento y juicios (MINEDUC, 2016, pág. 23).

Coll señala que: los contenidos escolares son una selección de elementos culturales en un sentido antropológico tan amplio que incluye conceptos, lenguajes, valores, sentimientos, actitudes, creencias, habilidades, procedimientos, pautas de comportamiento, entre otros. (Coll, 1992, pág.14). Estos contenidos responden al interrogante de que hay que enseñar/aprender, por lo que abarcan (hechos, conceptos y principios), procedimientos, normas y valores.

Entonces, el currículum, ordena a los contenidos en los mencionados anteriormente (conceptuales, procedimentales y actitudinales). Los conceptuales, se refieren a los hechos, conceptos y principios, necesarios para comprender e interpretar la asignatura tratada; estos contenidos son dirigidos por acciones que deben ser aprendidas (contenidos procedimentales) y que favorecen a la consecución de metas y objetivos establecidos; además, en este proceso están presentes aquellos contenidos que tratan las normas y valores que el alumno necesita para llevar a cabo el aprendizaje (actitudinales). La distinción en el currículum de estos tres tipos de contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales) pretende tener un valor didáctico: indicar campos de actuación y planificación sobre los que sea preciso incidir en la enseñanza (Bolívar, 2002).

En el proceso de selección de contenidos intervienen varias fuentes, que se pueden resumir en tres grupos: la herencia cultural, demandas de la escuela, las necesidades e intereses del alumnado. Estas fuentes también podrían nombrase como epistemológica, sociopolítica y psicológica (Vera, García, Peña, Gargallo, 2000); las cuales son consideradas por el currículum a la hora de escoger lo que se va a enseñar y aprender.

En la actualidad, la Ley General de Educación ha reemplazado los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios por los Objetivos de Aprendizaje (OA); esto para vincular más estrechamente la formulación del aprendizaje con su seguimiento y evaluación. Esta nueva disposición establece un nuevo instrumento curricular denominado Bases Curriculares, obligatorio para todos los establecimientos del país. Las Bases Curriculares presentan Objetivos de Aprendizaje (OA) que deben ser desarrollados para alcanzar una formación de calidad; siendo organizados por asignatura, curso y especialidad. Además, definen los conocimientos, habilidades y actitudes que se espera que logren los y las estudiantes con el fin de promover su desarrollo armónico e integral (MINEDUC, 2016).

Por consiguiente, para cada disciplina o asignatura existe un currículum que se debe seguir, con el objetivo de lograr el aprendizaje mínimo que los estudiantes deben tener. No obstante, para cada asignatura y grado existen los planes y programas de estudios, los cuales presentan una propuesta pedagógica y didáctica que apoya el proceso de gestión curricular en los establecimientos educacionales (MINEDUC, 2016).

3.2.3 Los Planes y Programas

La planificación de las experiencias de aprendizaje es un elemento fundamental en el esfuerzo por promover y garantizar los aprendizajes de los alumnos; en palabras de Toledo, la planificación es una herramienta teórica y práctica que permite a la organización educacional la anticipación de acontecimientos económicos, sociales, culturales o políticos, que se desarrollan en el entorno donde está inmersa (Toledo, 2007).La planificación permite maximizar el tiempo, definir recursos y procesos para que los estudiantes logren los aprendizajes y así evidenciar estas metas (MINEDUC, 2016).

Los Programas de Estudio entregados por el Ministerio de Educación, son un insumo para que los docentes planifiquen; se diseñaron como una propuesta flexible y adaptable a las distintas realidades de los centros educativos de nuestro país. Dichos Programas, incorporan Objetivos de Aprendizaje definidos en las Bases Curriculares respectivas, ordenados en unidades e incluyendo un tiempo para ser trabajados (MINEDUC, 2016).

En palabras del MINEDUC, las Bases Curriculares son un referente para los establecimientos que deseen elaborar programas propios, de modo de posibilitarles una decisión autónoma respecto de la manera en que se abordan los Objetivos de

Aprendizaje planteados. Las múltiples realidades de las comunidades educativas de nuestro país dan origen a una diversidad de aproximaciones curriculares, didácticas, metodológicas y organizacionales que se expresan en distintos procesos de gestión curricular, los cuales deben resguardar el logro de los Objetivos de Aprendizaje definidos en las Bases (MINEDUC, 2016).

En base a lo anterior, cada docente de asignatura puede ordenar de manera conveniente los diferentes contenidos que se deben enseñar, sin perder el cumplir con los Objetivos de Aprendizajes dictaminados por el Ministerio de Educación. Por consiguiente, cada plan y programa está hecho de tal manera que exista una educación integral para cada estudiante, tomando en cuenta las habilidades, conocimientos y actitudes de cada uno.

No obstante, cada Objetivo de Aprendizaje tiene como principal agente lo esencial de cada disciplina escolar, para que de esta forma el estudiante se pueda desenvolver de manera correcta en la resolución de problemas de la propia disciplina y en su vida cotidiana. Es por esta razón que, sumado a los objetivos de Aprendizaje de cada asignatura, existen los Objetivos de Aprendizajes Transversales, los cuales aluden tanto al desarrollo personal y social de los y las estudiantes como al desarrollo relacionado con el ámbito del conocimiento y la cultura. El logro de los OAT depende de la totalidad de elementos que conforman la experiencia escolar, la que se ve influida por los énfasis formativos declarados en el Proyecto Educativo Institucional; los procesos de gestión curricular y pedagógica que llevan a cabo las y los docentes y los equipos directivos; las dinámicas de participación y convivencia; las normas, ceremonias y símbolos de la escuela; los aprendizajes abordados en cada asignatura; el despliegue de iniciativas de los y las estudiantes; las interacciones y dinámicas que se establecen en los espacios de recreos, así como las relaciones humanas y vínculos que se generan en la cotidianeidad escolar entre todos los integrantes de la comunidad educativa (MINEDUC, 2016, pág.8).

Todo lo anterior se ve forzado y reglamentado por la Ley General de Educación, que define la educación como: el proceso de aprendizaje permanente que abarca las distintas etapas de la vida de las personas y que tiene como finalidad alcanzar su desarrollo espiritual, ético, moral, afectivo, intelectual, artístico y físico, mediante la transmisión y el cultivo de valores, conocimientos y destrezas (LGE, 2009).

La suma de estas características nos permite destacar que las escuelas y los liceos son parte primordial en la formación de los estudiantes, formación que no solo abarca un ámbito académico, sino que social y personal. El Ministerio de Educación, a través de sus planes y programas, entienden la importancia de cada disciplina impartida en el currículum, y como estas ayudan de manera sustancial en la vida del ciudadano.

Tomando en cuenta lo previamente descrito, una de las disciplinas que más énfasis tiene en las escuelas y liceos es la asignatura de matemáticas (esto se puede demostrar viendo la cantidad de horas que tienen los diferentes establecimientos educacionales destinados al estudio de las matemáticas, con un mínimo de 6 horas a la semana, cantidad que no es igual para las otras disciplinas), la cual, descrito por el propio ministerio, tiene el propósito de enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes (MINEDUC, 2015, párrafo 2).

3.2.4 El Currículum y las Matemática

Las matemáticas son una ciencia dinámica y cambiante, por ello no son de abordaje sencillo; esto sugiere que los teóricos de la educación matemática (como por ejemplo Luis Rico Romero, Raymond Duval, María Del Valle, entre otros nombrados en las páginas anteriores) y los agentes de ella, deban permanecer constantemente atentos a los cambios que la dinámica global venga exigiendo.

Del plan de formación en matemáticas, según las necesidades que demande la sociedad, se encarga el currículum de matemáticas. El Currículum Nacional como se nombraba anteriormente concibe a las matemáticas como una asignatura, cuyo propósito es enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo de todos los estudiantes (MINEDUC, 2016, pág.1).

Lo anteriormente planteado, se refiere al desarrollo del pensamiento matemático; este se define como una capacidad que nos permite comprender las relaciones del entorno, cuantificarlas, razonar sobre ellas, representarlas y comunicarlas (MINEDUC, 2016). A esto se orienta principalmente el currículum de matemáticas, promoviendo desarrollar en los alumnos las habilidades que generen el pensamiento matemático, sus conceptos y procedimientos básicos.

Al ser el currículum de matemáticas centrado en el estudio de una asignatura obligatoria, debe dar respuestas a las siguientes interrogantes: ¿qué es, en qué consiste el conocimiento?, ¿qué es el aprendizaje?, ¿qué es la enseñanza?, ¿qué es, en qué consiste el conocimiento útil? Estas preguntas a fin de organizar la reflexión curricular, dan paso a cuatro dimensiones: dimensión cultural/conceptual, dimensión cognitiva o de desarrollo, dimensión ética y dimensión social. Es así, como el conocimiento matemático que transmite el sistema educativo se ha de considerar parte integrante de la cultura, socialmente construido y determinado; luego en él han de tenerse en cuenta las connotaciones políticas y morales generales y específicas, conectadas con la formación matemática de los alumnos (Rico, 1998).

Los sistemas educativos, planifican y gestionan la educación matemática, mediante el diseño y puesta en práctica de planes de formación que han de tener en cuenta la complejidad de la enseñanza de la disciplina y las demandas de la sociedad. Luego este plan de formación se concreta, cuando se determinan los objetivos, los contenidos, la metodología y los criterios e instrumentos de evaluación (Rico, 1998); todo esto se consuma cuando el docente lleva a cabo la planificación en el aula, enfrentándose a las demandas que se le imponen por parte de los estudiantes.

La enseñanza de las matemáticas, debe ser conectada con la práctica, desarrollándose en un ambiente contextualizado, que permita al alumno ser constructor de conocimientos significativos, que lo llevarán a enfrentar desafíos y participar en la sociedad.

Las matemáticas son valiosas, pues deben lograr mentes bien formadas, con una adecuada capacidad de razonamiento y organización; estas, además, aparecen en la práctica de las formas de expresión humana, permitiendo codificar información y obtener una representación del medio social y natural, suficientemente potente como para realizar una actuación posterior sobre este medio (Rico, 1998).

3.2.5 Registros de representación Semiótica en la Enseñanza de la matemática

Un estudiante, cuando realiza una tarea que involucra un objeto matemático, al no ser material necesita más de una forma de representación para su aprendizaje, no es posible acceder a ellos en forma perceptiva o instrumental, pero sí por medio de signos, concretamente por medio de los sistemas semióticos de representación. Sin embargo, cada representación no es completa respecto al concepto que representa, porque hace referencia solo a algunas de las propiedades del objeto matemático, y su contenido depende más del registro de representación que del objeto representado, por ello se hace necesaria la interacción entre las diferentes representaciones del objeto matemático que se pretende adquirir (Macías, 2016).

En los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se hace fundamental la apropiación y uso de representaciones de los objetos en una variedad de sistemas de representación semiótica. En especial, se hace necesario apropiarse de posibilidades para transformar una representación semiótica (RS) de un objeto matemático en otra RS del mismo objeto, ya sea en el interior del propio sistema –tratamiento– o entre diferentes sistemas –conversión– (Duval, 1999).

Para entender el significado que se le da a un objeto, nos basamos en lo mencionado por Radfort (2006), quien señala lo siguiente: el significado de un objeto es atribuido por la cultura y tiene una existencia que trasciende al sujeto. El significado de un objeto es más estable, más descontextualizado y general, está más asociado a la semántica cultural; mientras que el sentido atribuido a un objeto matemático depende tanto del sujeto como del contexto en el que lo aborde, se trata entonces de algo flexible, dinámico, en movimiento, y es relativo a varias modalidades sensoriales y semióticas, asociado más a la pragmática. En términos operativos, planteamos que el sentido de un objeto matemático primario dado es el contenido de la función semiótica que asume dicho objeto primario como expresión.

Puede haber diferentes sentidos de un objeto primario; cuando se establece una función semiótica entre dos sentidos diferentes de un mismo objeto matemático primario, diremos que se produce una articulación de sentidos, esto es, cuando uno de los sentidos (contenido) del objeto primario se convierte en expresión de una nueva función semiótica que tiene como contenido otro sentido de dicho objeto (Rojas, 2014, pág. 155).

Entonces si dos representaciones simbólicas (objetos primarios), consideradas sintácticamente equivalentes en tanto una de ellas se obtiene de la otra a partir de un proceso de tratamiento, tienen el mismo sentido (el mismo contenido), se dirá que conservan equivalencia semántica. Si un sentido asignado a una RS no se articula con un sentido asignado posteriormente a otra RS obtenida de esta mediante tratamiento, es decir, si se «abandona» el sentido inicialmente dado y se asume un nuevo sentido, se dirá que hay un cambio de sentido (Rojas, 2014, pág.155).

3.2.6 Noción de función cuadrática en las Bases Curriculares

Los contenidos y objetivos que los estudiantes deben cumplir, no son los mismos de hace años atrás; esto debido a los cambios que han tenido las Bases Curriculares en el último tiempo, que se ven reflejados en los programas de cada asignatura y, por ende, en los Objetivos de Aprendizaje del contenido de Función Cuadrática en la disciplina de matemáticas, específicamente en el curso de segundo medio.

A principios de la década de los 90 se generó una Reforma Curricular mandatado por la Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza (LOCE), la cual, si bien no era prioridad para el gobierno de transición de la democracia en ese entonces, forjó la destinación de recursos económicos y la creación de la Unidad de Currículum y Evaluación dentro del Ministerio de Educación. En dicha reforma, se contemplan los programas de mejoramiento e innovación pedagógica, el plan de Jornada Escolar

Completa (JEC), programas de perfeccionamiento docente y la creación de las Bases Curriculares de Educación Parvularia. El objetivo de esta reforma era una mejor articulación entre niveles y mayor especificidad de las orientaciones y prescripciones curriculares (Espinoza, 2016).

En el año 2009 se realiza el primer ajuste Curricular, el cual fue presentado en junio de 2008 al Consejo Superior de Educación y aprobado en mayo del 2009. Dicho proceso se llevó a cabo en paralelo a la denominada "revolución pingüina", la cual tuvo como consecuencia derogar la LOCE y la elaboración de un nuevo marco legal e institucional para la Educación Chilena: Ley General de Educación (LGE), y la cual contempla nuevos organismos como la Agencia de Calidad, la Superintendencia de Educación, el Consejo Nacional de Educación y posteriormente la Ley de Aseguramiento de la Calidad y el Sistema Nacional de Aseguramiento de la Calidad de la Educación Parvularia, Básica y Media y su fiscalización (2011) (Espinoza, 2016).

La LGE, si bien mantiene el principio de descentralización curricular, modifica su denominación y constitución, dándole a la nueva institución responsable -el Consejo Nacional de Educación- una composición más representativa del ámbito educacional. Por otra parte, esta Norma determinó cambios significativos para la configuración del currículum escolar, siendo el más importante la modificación de la matriz curricular establecida en la LOCE: se pasa desde una estructura de Marco Curricular que define Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios, al establecimiento de Bases Curriculares en las que se definen Objetivos de Aprendizaje (OA) (Espinoza, 2016, pág. 4).

Sumado a lo anterior, durante el período 2010-2011, el gobierno de turno reformuló los Planes y Programas de estudio y presentó una propuesta para los cursos de 5º a 8º Básico y de 1º y 2º Medio de Enseñanza Media. Tal propuesta fue implementada en el 2011, modificando las Bases Curriculares que ya habían sido actualizadas el año 2009 (Espinoza, 2016).

Sin embargo, ¿en qué afecta todo lo mencionado previamente con el contenido de función cuadrática en los Planes y Programas de matemática? Si bien no ha evolucionado y cambiado de forma trascendente, sí permite tener un contexto sobre las diferentes maneras en que se ha presentado el contenido de función cuadrática a lo largo de estos cambios educacionales.

A continuación, se adjuntará un cuadro resumen del contenido de función cuadrática en los planes y programas de educación:

Bases Curriculares 2009	Bases Curriculares 2013	Bases Curriculares 2016
Curso: 3º Medio	Curso: 2º Medio	Curso: 2º Medio
Objetivos Fundamentales: • Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas	Objetivos de Aprendizaje: • Mostrar que comprenden la función Cuadrática f(x)=ax2+bx+c	Objetivos de Aprendizaje: • Mostrar que comprenden la función cuadrática • f(x)=ax2+bx+c:
Contenidos mínimos obligatorios: • Representación y análisis gráfico de la función f(x)=ax2+bx+c, para distintos valores de a, b y c. • Discusión de las condiciones que debe cumplir la función cuadrática para que su gráfica intercepte el eje X (ceros de la función). • Uso de software para el análisis de las variaciones de la gráfica de la función cuadrática a partir de la	Contenidos: • reconociendo la función cuadrática f(x)=ax2en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas. • representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo. • determinando puntos especiales de su gráfica. • seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y	Contenidos: • reconociendo la función cuadrática • f(x)=ax2 en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas. • representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo. • determinando puntos especiales de su gráfica. • seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en

modificación de los parámetros.	demanda.	particular de la oferta y demanda.

En relación al cuadro expuesto, se puede concluir que el contenido no ha variado de manera sustancial entre el 2013 y el 2016, no así con el 2009 en donde existe un cambio de curso y de denominación a los Aprendizajes Esperados, los cuales son nombrados como Objetivos Fundamentales y no Objetivos de Aprendizaje como se nombran desde el 2013 hasta la fecha. Sin embargo, no se menciona nada sobre el lenguaje matemático ni el uso de conceptos específicos correspondientes a la unidad en cuestión.

3.2.7 Noción de función cuadrática en el Currículum y en los textos escolares

La educación a nivel nacional se basa en los Planes y Programas de estudios, los cuales tienen por objetivo ordenar de manera progresiva los Contenidos Mínimos que los estudiantes deben obtener en cada disciplina a lo largo de su Educación Parvularia, Básica y Media. Tales programas de estudios están aprobados por el Ministerio de Educación, el cual vela por el cumplimiento de los Objetivos de Aprendizajes que permitan el logro de los objetivos generales para cada uno de los niveles establecidos por la Ley (LGE 2009, art. 31).

De esta manera, cada establecimiento del país debe cumplir los mismos objetivos y requisitos solicitados por el MINEDUC, entidad que elabora los Planes y Programas de la Educación Básica y Media y que cumplen con lo expuesto en las Bases Curriculares aprobadas por el Consejo Nacional de Educación. Sin embargo, cada establecimiento tiene la libertad de desarrollar los Planes y Programas propio de estudio que consideren adecuados para el cumplimiento de los objetivos generales definidos en las Bases Curriculares y de los complementarios que cada uno fije (LGE 2009, art. 31).

Es aquí donde cada establecimiento educacional puede optar por la forma que entrega los contenidos y la literatura a utilizar. A nivel nacional existen diferentes editoriales dedicadas a la producción de textos escolares (Editorial Santillana o Editorial SM como las más populares) las cuales, si bien están basadas en los Planes y Programas entregados por el MINEDUC, también basan su visión y el enfoque que le quieren entregar a cada contenido.

Basándonos en los Planes y Programas entregados por el MINEDUC, uno de los contenidos que se deben entregar a los estudiantes de segundo año medio es el de función cuadrática, el cual pertenece al eje de álgebra y funciones en la asignatura de matemática. Para dicho contenido, el Currículum Nacional nos indica que el Objetivo de Aprendizaje a lograr (definido como OA 3) es:

> Mostrar que comprender la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$
>
> - Reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas.
> - Representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo.
> - Determinando puntos especiales de su gráfica.
> - Seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda
>
> (Planes y programas Matemáticas 2º Medio, 2016, pág. 96).

Sin embargo, en los textos escolares se presenta de manera más compleja este contenido. Un ejemplo claro es el texto del estudiante realizado y distribuido por la Editorial SM, la cual entrega un lenguaje bastante correcto al exponer los contenidos. Sumado a lo anterior, el texto desarrolla diferentes actividades y temáticas con las que, en teoría, se debería lograr el OA 3 mencionado en las Bases Curriculares, pero que además otorgan algo importantísimo que no se menciona en el Objetivo de Aprendizaje: un lenguaje correcto en la entrega del contenido, un lenguaje matemático que permite especificar los conceptos y facilitar la transición del lenguaje común y coloquial al lenguaje matemático propiamente tal.

Este lenguaje “especial” utilizado en las matemáticas no es mencionado en el OA3, pero si es utilizado en las pruebas estandarizadas de la disciplina (PSU y SIMCE) y en los estudios universitarios con carreras relacionadas al ámbito científico.

Esto contradice lo expresado por los diferentes autores vistos anteriormente en este capítulo, ya que, en los distintos artículos investigados escritos por Puga, Toledo y Duval entre otros, ponen real hincapié en el lenguaje matemático. En relación a esto, el Currículum Nacional queda al debe de lo que es lenguaje matemático, sin mencionarlo en el desarrollo de la unidad de función cuadrática y menos considerando este punto en los Aprendizajes Esperados por los estudiantes en este nivel. Esto produce cierta discordancia en cómo enseñar las matemáticas afectando de manera directa el proceso óptimo de enseñanza-aprendizaje en los estudiantes.

En suma de lo antedicho hace cuestionar los objetivos de aprendizajes entregados por el Ministerio de Educación, los cuales no concuerdan con lo exigido en el SIMCE, Prueba de Selección Universitaria y estudios posteriores de la Educación Universitaria.

CAPÍTULO IV

4. Marco Metodológico

4.1 Enfoque Investigativo

Para comenzar a analizar las nociones de la documentación teórica expuesta en el capítulo anterior, se sostiene que la educación matemática considera al conocimiento matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje, en donde una de sus finalidades, se centra en enriquecer y estructurar de manera adecuada los diversos significados de los conceptos matemáticos; organizando y planificando para que los conocimientos sean transmitidos, aprendidos y utilizados por los estudiantes (Rico, 1999).

Actualmente, una de las tendencias más difundidas consiste en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática, y no en la mera transferencia de contenidos. La enseñanza de la matemática se debe desarrollar en un ambiente contextualizado, que permita al alumno ser el constructor de conocimientos significativos, que lo llevarán a enfrentar los desafíos y a participar en la sociedad (Pérez y Tapia, 2002).

En la construcción de un ambiente adecuado para el aprendizaje de las matemáticas, es clave la comunicación que se manifiesta al interior del aula; y es el lenguaje empleado el que va a determinar una comprensión óptima del contenido. Aplicando un lenguaje matemático pertinente, los docentes y estudiantes mejorarán el diálogo, la comunicación, reflexión, comprensión, creatividad; además del aprendizaje de las diferentes temáticas de la matemática, vinculándolas en los distintos contextos (Puga, Rodríguez y Toledo, 2016).

Para las características descritas de la educación matemática y de la relevancia en el lenguaje empleado para la enseñanza de los contenidos, resulta conveniente para el objetivo de este trabajo, adscribirse al método cualitativo.

Al método cualitativo lo caracterizan, los diversos enfoques teóricos que guían los debates y práctica de la investigación. En este caso, las subjetividades del investigador y de aquellos a los que se estudia, son parte del proceso de investigación (Flick, 2007).En este sentido, los participantes forman parte del estudio, donde las entrevistas y observaciones son técnicas para analizar e interpretar el comportamiento e interacción de estos con su entorno. En la investigación cualitativa, el investigador busca acercarse al mundo real, a entenderlo, a describirlo y a explicar fenómenos sociales (Rapley, 2014).

Una de las técnicas que utiliza esta investigación para lograr lo antes descrito, es la lectura de textos, donde las notas de campo, las transcripciones, las descripciones e interpretaciones y presentación de hallazgos, se basa en el texto y en la escritura (Rapley, 2014). Es en este trabajo con textos donde se analizan casos concretos, a partir de expresiones y actividades de las personas en sus contextos locales; caminos para que la psicología y las ciencias sociales, las transformen en programas de investigación y mantengan la flexibilidad hacia esos objetos y tareas (Flick, 2007).

Al hilo de lo anterior, se ha producido interés la falta de motivación de los alumnos hacia la asignatura de matemáticas, quienes, según lo evidenciado en nuestras prácticas profesionales, decían considerarlas difíciles por la simbología empleada, la cual no siempre era explicada en detalle por el docente. Por ende, se plantea la importancia del lenguaje matemático en el proceso de enseñanza aprendizaje.

De esta forma, vemos que el modelo cualitativo surge como alternativa para alcanzar nuestro objetivo de construir una propuesta didáctica para estudiantes de 2do medio que permita una correcta aprehensión de la noción de función cuadrática; a través de la utilización de un lenguaje matemático adecuado, realizando un análisis de información de textos

4.2 Procedimiento para generar análisis de la información

Basándonos en el enfoque que se utiliza en esta investigación, se utilizaron diversas técnicas para recolectar y generar información que dan sustento a nuestro trabajo y a la propuesta en sí; a través de un Marco Teórico que presenta una organización de contenidos para el posterior análisis de resultados. Estas técnicas son: la indagación, selección, análisis, comprensión y lectura de libros de diferentes autores, seminarios, documentos del MINEDUC, Planes y Programas de Segundo Año Medio, entre otros.

Para la técnica de lectura de textos no s basamos en lo planteado por Sánchez, Orrantia y Rosales, los cuales señalan lo siguiente: la estrategia consiste básicamente en reconocer cómo se relacionan entre sí las ideas del texto y asumir esa misma organización para dar orden a los significados que de él derivamos (Sánchez, Orrantia y Rosales, 1992, pág.6).

En esto nos referimos a que el lector deberá seguir mentalmente la secuencia temática del texto, relacionando la información nueva con la ya dada.

4.3 Técnica de Análisis de Contenido

Debido al objetivo de este trabajo y al diseño cualitativo empleado, se ha seleccionado la técnica de análisis de contenido; mediante la cual se ha dado lectura de forma objetiva y sistematizada a libros, seminarios, documentos del MINEDUC, etc.; referidos a contenidos de educación, educación matemática, lenguaje, lenguaje matemático y currículum.

Esta técnica se ha empleado, ya que nos permite seleccionar, interpretar y analizar la información para desarrollar nuestro trabajo. Refiriéndose a este procedimiento, Andreú plantea lo siguiente:

> El análisis de contenido es una técnica de interpretación de textos, ya sean escritos, grabados, pintados, filmados..., u otra forma diferente donde puedan existir toda clase de registros de datos, trascripción de entrevistas, discursos, protocolos de observación, documentos, videos,... el denominador común de todos estos materiales es su capacidad para albergar un contenido que leído e interpretado adecuadamente nos abre las puertas al conocimientos de diversos aspectos y fenómenos de la vida social
>
> (Andréu, 2011, pág. 2)

En la misma línea, se expresa que pertenecen al análisis de contenido, todo el conjunto de técnicas tendentes a explicar y sistematizar el contenido de los mensajes comunicativos de textos, sonidos e imágenes y la expresión de ese contenido con ayuda de indicios cuantificables o no (Andréu, 2011, pág.3). Esta técnica nos permitirá efectuar deducciones lógicas concernientes a la fuente, para luego emitir juicios subjetivos referentes a estas interpretaciones.

Para el desarrollo del presente trabajo, se presenta una visión de lo que es el lenguaje y la importancia que tiene en el proceso de aprendizaje; particularmente en la enseñanza del contenido de función cuadrática para segundo año medio, acentuándose el protagonismo que tiene el lenguaje matemático en el aprendizaje de la disciplina y las representaciones semióticas que conlleva. Entre los autores que tratan esta temática y que son mencionados en el marco teórico, se encuentran: Chomsky (1965), Delgado (2015), Tamayo (2006), MINEDUC (2018), entre otros.

En relación al concepto de currículum se consideran las tres formas de concepción planteadas por Angulo, en donde el autor señala que estas deben ser: considerar a currículum como contenido, planificación y realidad educativa. Mediante las distintas definiciones expuestas y la entregada por el MINEDUC, se hace una reflexión en torno a cómo el currículum se involucra en la enseñanza de las matemáticas y como ordena los contenidos que se presentan en dicha disciplina según los diferentes niveles escolares que los alumnos deben cursar.

Además, se indagó en los Planes y Programas, las Bases Curriculares y los textos escolares, con la finalidad de informarnos de los Objetivos de Aprendizajes y de las actividades que se les proponen a los alumnos, para luego poder crear una propuesta didáctica que se pueda implementar a tales requerimientos, pero que además desarrolle la comprensión y utilización del lenguaje matemático en el proceso de enseñanza-aprendizaje del contenido.

La planificación de la propuesta didáctica se basó en lo expuesto por Ausubel referente a la Teoría de Aprendizaje Significativo, y en la Unidad de Enseñanza Potencialmente Significativa (UEPS), diseñada por Moreira.

4.4 Triangulación

A modo de fortalecer la recolección de datos en el enfoque cualitativo utilizado para el presente trabajo, hemos empleado la triangulación como método para lograr una mayor validez de la información. Tal validación es importante a fin de eliminar errores y generar un conjunto más rico de explicaciones de los datos (Flick, 2015).

La triangulación, es una técnica en donde se usan tres o más perspectivas de diferentes observadores, o varias fuentes de datos; la cual es una garantía de fiabilidad o robustez; y asimismo sirve para reducir las replicaciones y también suprimir la incertidumbre de un solo método (Ávila, 2010). En este sentido, se obtiene una visión más amplia de una materia (Gibbs, 2012).

Al aplicar la triangulación, el investigador adoptará diferentes perspectivas sobre un problema sometido a estudio, produciendo conocimiento en diferentes niveles, profundizando en el conocimiento posibilitado por un enfoque y contribuyendo a promover la calidad de la investigación (Flick, 2007).

En la ejecución de la triangulación en el trabajo investigativo, el investigador debe detectar una tendencia lógica en la mezcla de los resultados, ya que la validez de la triangulación descansa en la capacidad de organizar los materiales en un marco coherente; es por ello, que los datos obtenidos deben ser valorados con el mismo criterio (Ávila, 2010). Al utilizarse el método de triangulación se necesitará creatividad e ingenio en la recopilación de datos e interpretaciones profundas.

En nuestro trabajo hemos empleado el tipo de triangulación de datos, el cual según Aguilar y Barroso, se refiere: a la utilización de diferentes estrategias y fuentes de información; donde una recogida de datos, permite contrastar la información recabada (Aguilar y Barroso, 2015, pág. 2). Con esto, se ofrecen nuevas vías de comparación en el estudio y se introducen nuevas capacidades para la planificación de esta comparación (Flick, 2015).

Para la triangulación de datos, se han utilizado tres fuentes principales que brindarán la confiabilidad para generar la exposición de los resultados; estas son: Documentos oficiales del MINEDUC, Textos de Estudio de Matemáticas y Libros de diferentes autores que tratan sobre el lenguaje, lenguaje matemático, educación y currículum. Las variadas fuentes representan a pensamientos de autores en distintos años; estas posturas son analizadas, a fin de verificar y comparar la información.

CAPÍTULO V

5.1 Análisis de resultados

Una vez realizada la indagación de las fuentes de información, las cuales fueron el Currículum Nacional, los textos escolares y libros de diferentes autores, se realizó la triangulación de datos, contrastando así lo descrito en cada fuente de información y lo vivido en nuestra instancia de práctica profesional e inserciones, las cuales se realizan en los últimos 3 años de la carrera.

En base a lo manifestado por el Currículum Nacional, éste no presente cambios en los últimos seis años, y tampoco da muestras de la importancia que tiene el lenguaje matemático en la enseñanza de las matemáticas. Esto se puede observar al ver los Objetivos de Aprendizajes, los cuales, para la Unidad de Función Cuadrática, no resalta la utilización de un lenguaje correcto ni el aprendizaje de este por parte de los alumnos. Sumado a lo antes dicho, al no existir un cambio curricular en los últimos seis años, genera falencias en la enseñanza de las matemáticas, ya que como han expresado los diferentes autores estudiados y analizados en este seminario, la didáctica de la matemática está en un constante cambio, entregando nuevas teorías para un mejor proceso de aprendizaje.

Por otra parte, están los textos escolares entregados por el MINEDUC, los cuales dependen de distintas editoriales (SM y Santillana como las más utilizadas). Cada editorial debe contener en sus textos escolares los contenidos mínimos que se solicitan en las Bases Curriculares. Sin embargo, tienen la libertad de entregar el contenido enfocado a lo que ellos estimen conveniente. Comparando el libro de Segundo Año Medio con las Bases Curriculares de ese mismo nivel educativo, podemos encontrar que, si bien pretenden lograr lo mismo que son el cumplimiento del OA3, tienen métodos diferentes, en donde el texto escolar si pone énfasis en la enseñanza de un lenguaje correcto (utilizando términos correspondientes a la unidad) pero a la vez, mecaniza los procedimientos, sin tomar en cuenta los conocimientos previos del estudiante, que es primordial para crear un Aprendizaje Significativo.

Como tercera arista tomamos como base los artículos de diferentes autores (Puga, Toledo, Pérez, entre otros nombrados en el capítulo III), quienes priorizan en el lenguaje matemático para la enseñanza de esta disciplina, logrando así un Aprendizaje

Significativo en los estudiantes. Por consiguiente, el análisis de los datos nos permitió una interpretación a las diferentes variables que surgen a partir de las unidades de análisis, y que concluyen en entregar una respuesta al problema propuesto al inicio de este trabajo el cual se enfoca en la utilización del lenguaje matemático para la enseñanza de la unidad de Función Cuadrática, permitiendo de esta forma cumplir con el objetivo general y sus correspondientes objetivos específicos planteados en el presente seminario.

Esta propuesta fue diseñada en base a la Unidad de Aprendizaje Potencialmente Significativa con el objetivo de que pueda ser utiliza por los docentes. Con esta finalidad, se presentan los fundamentos y justificaciones de forma contundente, entregando así una secuencia didáctica que, pretendemos, sea acorde a la realidad de la educación en nuestro país y que logre satisfacer la problemática planteada, haciendo hincapié en el lenguaje matemático y los objetivos planteados por las Bases Curriculares con respecto a la unidad de función cuadrática perteneciente a nivel de Segundo Año Medio

5.2 Teoría Aprendizaje Significativo

Para generar un aprendizaje esperado, éste debe estar sustentado por una secuencia didáctica que apunte a un aprendizaje significativo, entendiendo como aprendizaje significativo la relación que logra el sujeto entre lo recién aprendido con la información ya asimilada (Ausubel P., 1963). En base a lo anterior, debemos comenzar mencionando que en relación al tema de función cuadrática (catalogado como la nueva información) se tome en cuenta los conocimientos del alumnado con respecto a ecuación cuadrática y la definición de función (esto consensuado como información que ya está asimilada). De esta manera, podremos llevar a cabo la realización de una secuencia didáctica para generar el aprendizaje significativo acorde a la definición de Ausubel.

Cabe destacar que en un aprendizaje significativo la relación de la nueva información es lógica y no arbitraria con la información que posee el estudiante (Zarzar, 2000). Por lo anterior, el docente es un intermediario del conocimiento que, a través de métodos de enseñanza adaptables y flexibles logra que el estudiante adquiera el conocimiento nuevo a su información previa para que, de esta manera, se logre un aprendizaje y no una mecanización o memorización de la nueva información que se transmite. De lo anterior, debemos señalar que existen cuatro condiciones fundamentales para crear este aprendizaje significativo las cuales son la motivación del estudiante, la comprensión, la participación activa y la relación con la vida real (Zarzar, 2000).

Sumado a lo anterior, la adquisición del lenguaje matemático a través del álgebra requiere un trabajo minucioso y de un gran estudio, debido a que éste posee objetos de carácter más abstractos, lo que trae dificultades a los estudiantes en el momento de estudiar este eje temático. Por consiguiente, el álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones (Fillo y Kieran, 1989).

El presente trabajo tomará la unidad de segundo medio “función cuadrática” como tema fundamental para la propuesta didáctica, basándose y haciendo hincapié en el lenguaje matemático, el cual se basa en signos que representan conceptos matemáticos, los cuales son abstractos, ideales y asequibles a la mente humana (González y Hurtado, 2010). Es aquí donde la relación de “función cuadrática” y “parábola” toman realce y pueden ser trabajados de tal manera que la relación entre ambos (concepto y representación concreta) pueda ayudar a un mejor entendimiento y comprensión utilizando un lenguaje apropiado, el cual es adquirido a través de un aprendizaje significativo.

5.3 Las UPES

Para la secuencia didáctica que se presentará a continuación, la unidad de “función cuadrática” será calificada como una “Unidad de enseñanza potencialmente significativa (UEPS)” (Moreira, 1993). En consecuencia, la unidad de estudio se guiará por los siguientes ocho pasos:

- Se define lo que se enseñará (conocimiento declarativo y conocimiento Procedimental).
- Actividades indagatorias de conocimientos previos

- Situaciones problemas que preparen al estudiante a recibir nuevo conocimiento (solución con conocimientos previos)
- Exposición oral (breve) con diferenciación progresiva (de lo general a lo específico)
- Presentación más formal del contenido (agregar un lenguaje formal del contenido). Semejanzas y diferencias de ejemplos nuevos con ejemplos ya trabajados (reconciliación integrada)
- Continuidad de proceso de diferenciación progresiva
- Evaluación de desempeño del estudiante, tanto formativa como sumativa
- Evaluación de la UEPS (evidencia de Aprendizaje Significativo).

Estos ocho pasos guiarán la realización de la secuencia didáctica. No obstante, el docente puede modificar dichos pasos para facilitar la entrega del contenido y lograr así una mayor aceptación de la unidad por parte del alumnado. Se debe mencionar que estos ocho pasos repetirán a lo largo de la secuencia didáctica, ya que la unidad fue dividida en tres pasos, con el fin de entregar la información de manera ordenada.

Las UEPS, además de poseer 8 pasos en su realización, poseen principios descritos por Marco Antonio Moreira en 1993, quien se basó en primicias propias y de otros autores, los cuales se mencionarán a continuación:

- Los conocimientos previos son los que más influyen en el aprendizaje significativo (Ausubel).
- Pensamientos, sentimientos y acciones están integrados en el ser que aprende; esta integración es positiva y constructiva cuando el aprendizaje es significativo (Novak).
- El estudiante decide si quiere aprender significativamente determinado conocimiento (Ausubel, Gowin).
- Organizadores previos muestran relación entre nuevos conocimientos y conocimientos previos (Moreira).
- Las situaciones-problema dan sentido al nuevo conocimiento. Deben despertar la intencionalidad del estudiante para el aprendizaje significativo (Vergnaud).

- Situaciones-problema funcionan como organizadores previos (Moreira).
- Las situaciones-problema deben ser crecientes en complejidad (Vergnaud).
- Frente a una nueva situación, el primer paso para resolverla es construir, en la memoria de trabajo, un modelo mental funcional, que es un análogo estructural de esa situación (Johnson-Laird).
- En la organización de la enseñanza, hay que tener en cuenta la diferenciación progresiva, la reconciliación integradora y la consolidación (Ausubel).
- La evaluación del aprendizaje significativo debe ser realizada en términos de búsqueda de evidencias (Moreira).
- El papel del profesor es el de proveedor de situaciones-problema, cuidadosamente seleccionadas, de organizador de la enseñanza y mediador de la captación de significados de parte del alumno (Vergnaud; Gowin).
- La interacción social y el lenguaje son fundamentales para la captación de significados (Vygotsky).
- Un episodio de enseñanza supone una relación tríadica entre alumno, docente y materiales educativos, cuyo objetivo es llevar el alumno a captar y compartir significados que son aceptados en el contexto de la materia de enseñanza (Gowin).
- El aprendizaje debe ser significativo y crítico, no mecánico (Moreira).
- El aprendizaje significativo crítico es estimulado por la búsqueda de respuestas (cuestionamiento) en lugar de la memorización de respuestas conocidas, por el uso de la diversidad de materiales y estrategias educacionales, por el abandono de la narrativa en favor de una enseñanza centrada en el alumno (Moreira, 1993, pág. 3).

5.4 Conceptos Previos

Para la realización de esta propuesta didáctica y en base a los principios y pasos mencionados anteriormente sobre las Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas se debe dejar en claro los conocimientos previos más influyentes que los estudiantes deben poseer o estar familiarizados con estos, para que de esta manera se puede emplear de mejor manera la propuesta didáctica presentada a continuación. De lo anterior, es primordial ver la malla curricular y, si fuera necesario, reordenar los contenidos para poder realizar dicha propuesta.

Los conocimientos previos necesarios son:

- Lenguaje Algebraico: Debido a que la propuesta didáctica se basa en el lenguaje matemático, es primordial que los estudiantes tengan nociones básicas del lenguaje matemático, como por ejemplo reconocer exponentes y las denominaciones de cada expresión (cuadrado, cubo, etc.) o la expresión de una función.
- Plano Cartesiano: En la segunda etapa de la unidad, los estudiantes deberán representar gráficamente una función cuadrática, por lo que el conocimiento del plano cartesiano facilitaría el aprendizaje de este proceso.
- Productos notables y factorización: Nuevamente nos referimos a un concepto algebraico, el cual le daría facilidades a los estudiantes al momento de desarrollar y desglosar los diferentes elementos que posee la función cuadrática.

5.5 Secuencia didáctica para la enseñanza de la unidad de segundo medio Función Cuadrática, sus representaciones y el lenguaje matemático acorde al concepto

Antes de exponer la secuencia didáctica para la enseñanza de la unidad de segundo medio Función Cuadrática con realce en el lenguaje matemático, se deben mencionar y justificar ciertas decisiones pedagógicas que toman importancia en esta secuencia didáctica. Al hilo de esto, y tal como es el objetivo de este trabajo, el centro de la unidad está focalizado en el lenguaje matemático y en el proceso del aprendizaje significativo mencionado con anterioridad. Se debe recordar que un aprendizaje significativo se logra cuando el estudiante logra relacionar el contenido nuevo con los conceptos anteriormente asimilados. Teniendo como sustento lo descrito por Ausubel y el foco en el lenguaje matemático, la unidad se divide en 3 partes:

- Definiciones de las diferentes maneras en que se puede presentar la función cuadrática: La unidad se presentará enlazando los conocimientos previos de los estudiantes (ecuación cuadrática y concepto de función) con las diferentes expresiones algebraicas presentes en la función cuadrática. De esta manera, se formaliza el lenguaje a seguir durante toda la unidad, explicando las diferentes formas en que se puede expresar una función cuadrática (factorizada, canónica y general) y dando el realce que se pretende al lenguaje matemático. Al mismo tiempo, se presentará de manera formal los aspectos principales presentes en la función cuadrática, exponiendo así el vértice y raíces, con el fin de solventar y reforzar la base algebraica de la unidad. Sumado a esto, se pretende establecer los conceptos de manera clara para así crear conocimientos ya asimilados y de esta forma poder entregar un nuevo concepto referente a la representación gráfica de la función cuadrática.
- Representación gráfica de la función cuadrática: Para esta parte de la unidad se tomará en cuenta los puntos característicos de la gráfica de la función cuadrática y cómo representarla en el plano cartesiano. Se debe hacer hincapié en que, para esta ocasión, el contenido ya asimilado estará descrito como el conocimiento algebraico de la función cuadrática (situaciones y conceptos trabajados en la primera parte de la unidad) para que, de esta manera, el nuevo concepto sea la construcción de la representación gráfica de la función cuadrática. En base a esto, la unidad de función cuadrática estará expresada de forma gradual, basándose en los principios de Ausubel con respecto al aprendizaje significativo y además habiendo tenido como foco principal el lenguaje matemático para la enseñanza de esta unidad.
- Ejercicios de optimización: Una vez entregado los contenidos algebraicos y gráficos en relación a la unidad de Función Cuadrática, debemos demostrar la utilización en la vida cotidiana. Para este punto, los

conceptos anteriormente mencionados ya pertenecen al alumnado, por lo que solo queda mostrar la utilidad de esta en ejercicios de optimización. Este último paso, está justificado por Zarzar, el cual señala que: existen cuatro condiciones para crear el aprendizaje significativo, y una de estas es la relación con la vida real (Zarzar, 2000).

Una vez entregada las razones y el funcionamiento de la secuencia didáctica, se procede en la exposición de la secuencia en sí.

5.5.1 Clase 1

Aspectos a enseñar (etapa 1)

a) Declarativos: Qué es una función cuadrática y su representación en el plano cartesiano.

b) Procedimentales: Reconocer una función cuadrática, su comportamiento en relación a los parámetros y el cambio en su gráfica. Utilizar la función cuadrática para encontrar valores de máximo o mínimos.

Conocimientos Previos (etapa 2)

Para la realización de esta etapa, el docente debe comenzar con la pregunta ¿Qué es una función matemática? ¿Para qué sirve?

(Se espera que los estudiantes tengan cierto conocimiento o recuerden en simples palabras lo que es una función. En caso de no haber una respuesta positiva, el profesor deberá entregar una definición simple de lo que es una función, explicando:

Una función es una relación entre elementos de dos conjuntos, donde cada elemento del primer conjunto se le asigna un valor del segundo conjunto. Los elementos de ambos conjuntos se denominan variables, las cuales pueden ser independientes (el primer conjunto) y dependientes (segundo conjunto). Estas se denominan "x" y "f(x) o y" respectivamente y al expresarse como función se escribe de la forma:

$$f(x) = ax + b$$

De igual manera, el docente se puede apoyar en un diagrama sagital).

Luego de una lluvia de ideas, el profesor continúa con una definición formal de "función matemática". Posterior a lo anterior, se escriben los siguientes ejemplos en la pizarra:

a) $f(x) = 3x + 9$	b) $f(x) = 9x^2 - x + 2$
c) $x^2 + 5x - 3 = 0$	d) $g(x) = 3$
e) $x + 5 = 3x - 6$	f) $x^3 - 3 = 8$
g) $h(a) = 3a$	h) $f(x) = (x - 4)(x + 4)$

De lo anterior, se solicitará a los estudiantes identificar cuál de las expresiones son funciones y cómo nombrarían las expresiones que no son funciones. Además, se les pedirá que mencionen qué tipo de función consideran ellos que es y por qué. Para esto los alumnos tendrán 5 a 10 minutos para trabajar. Una vez transcurrido el tiempo, se socializa en conjunto (entre profesor y estudiantes) respondiendo y analizando cada una de las expresiones. Se espera que para a), b), d), g) y h) los estudiantes sean capaces de reconocer que son funciones, mientras que las expresiones c), e) y f) son ecuaciones. Sin embargo, en caso de no existir una respuesta positiva, se tomará la expresión a) para ejemplificar una función. Si el problema persiste, continuar con la expresión b) y así sucesivamente, hasta recibir una respuesta positiva por parte del alumnado. Una vez concluida esta etapa, los estudiantes deberán pasar a la pizarra para clasificar cada función y cada ecuación como corresponda. De esta manera, se obtendrá que:

- A) es una función afín
- B) es una función (en este caso los estudiantes no sabrán qué tipo de función es).
- C) es una ecuación cuadrática (Ya que el mayor grado de la incógnita es 2).
- D) es una función constante
- E) es una ecuación lineal
- F) es una ecuación cúbica (ya que el mayor grado de la incógnita es 3).
- G) es una función lineal.
- H) es una función lineal (este es un error, pero será necesario para el desarrollo de la clase).

*Existe la posibilidad de que los estudiantes no conozcan o no recuerden una ecuación cuadrática. Para esta situación, se deberá hacer énfasis en el grado de la ecuación, para así concluir en conjunto con los estudiantes que es una expresión elevada al cuadrado, y por ende se denomina ecuación cuadrática.

Posterior a la clasificación, el docente seleccionará los ejercicios b) y c) para realizar la siguiente pregunta:

"Si $x^2 + 5x - 3 = 0$ es una ecuación cuadrática debido a que el mayor grado es 2, ¿cuál es el mayor grado de la expresión $9x^2 - x + 2 = 0$?"

(Se espera la respuesta del alumnado. En este caso, que la respuesta sea 2. En caso de no dar la respuesta, se señalará los exponentes y se volverá a realizar la misma interrogante).

"Por lo anterior, ¿cómo se llamará la función $f(x) = 9x^2 - x + 2$?"

(Se espera que algunos estudiantes sean capaces de responder función cuadrática, haciendo relación con la ecuación cuadrática, la notación de función y el máximo grado que ambas expresiones tienen. De no tener una respuesta positiva, se debe insistir y retomar la notación de función (considerando la clasificación realizada en el ejercicio anterior) y la característica de una ecuación cuadrática).De esta manera, se espera que los alumnos entiendan la relación que existe entre el nombre de la función y el grado máximo que esta tiene).

Una vez recogida la opinión de los estudiantes, se espera que, con ayuda del profesor, denominen a la función presentada como "función cuadrática". Seguido de lo anterior, se toma el ejemplo de la expresión

$$f(x) = (x - 4)(x + 4)$$

Y se consulta a los estudiantes "¿Qué sucede al desarrollar esta suma por su diferencia? Se desarrolla en la pizarra llegando a la expresión:

$$f(x) = x^2 - 16$$

De aquí los estudiantes deberán responder en voz alta que dicha expresión también corresponde a una función cuadrática, ya que el grado mayor es 2 y está expresado como una función. De no ser así, se retomará el primer ejemplo nombrado función cuadrática.

Por consiguiente, se dan ejemplos de diferentes funciones para así clasificarlas

a) $f(x) = (x-4)(x+4)$	b) $f(x) = 3x^2$	c) $f(x) = \frac{2x}{3} + 5$
d) $f(x) = x - 4$	e) $f(x) = x(x-5) - 2$	f) $f(x) = (x+3)(x+1) - x^2$
g) $f(x) = (x+3)(x-2)$	h) $f(x) = \frac{6}{7}x^2 - 2 + 3x$	i) $f(x) = 6x$

Una vez clasificadas las funciones dadas, se da paso a la etapa 3, la cual es la situación de problema inicial hacia los estudiantes.

Problema inicial (Etapa 3)

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ una función cuadrática, se formulan las siguientes preguntas:

- ¿Qué sucede con el grado del polinomio si a=0?
- ¿Qué sucede con el grado del polinomio si b=0?
- ¿Qué sucede con el grado del polinomio si c=0?

(En este punto, se espera que los estudiantes reemplacen cada coeficiente por 0, y comprendan qué coeficiente debe ser distinto a 0 para que la función siga siendo una función cuadrática. En caso de que no suceda dicha acción, se solicitará a diferentes estudiantes a que pasen a la pizarra, para así reemplazar la letra solicitada en cada pregunta por un 0, que realicen la multiplicación y escriban la expresión que resulta. Posterior a la resolución en la pizarra, los estudiantes con ayuda del profesor deberán concluir que coeficiente debe ser distinto de 0. De igual manera, se espera reforzar el concepto de la multiplicación por 0).

Luego de resolver estas interrogantes entre el docente y el alumnado, se procede a la entrega de una definición formal de lo que es una función cuadrática.

(Etapa 4: Primera presentación del tema)

Una función cuadrática es aquella que puede escribirse como una forma polinómica de segundo grado, es decir como $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes reales, pero a debe ser distinto de 0; b y c no tienen restricciones. El término ax^2 se denomina término cuadrático, el término bx como término lineal y la constante c como término independiente

Posterior a la presentación de la definición de función cuadrática, se solicita a los estudiantes identificar las constantes $a, b\ y\ c$ de las siguientes funciones cuadráticas:

- $f(x) = 3x^2$
- $f(x) = \frac{6}{7}x^2 - 2 + 3x$
- $f(x) = x^2 - 16$
- $f(x) = x^2 + 5x$
- $f(x) = -x^2 + 2 - 3x$
- $f(x) = -9 + 2x^2 + x$
- $f(x) = 3x + 5 - 2x^2$

Al finalizar la actividad se cierra la clase solicitando a los estudiantes una definición más coloquial de lo que ellos entendieron por el concepto de función cuadrática.

5.5.2 Clase 2

La clase comenzará con la siguiente situación problema (etapa 5):

¿Será posible establecer los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = (x+3)(x+1)$?

(Una respuesta esperada es el desarrollo de aquel producto notable, para luego identificar los coeficientes. En caso contrario, se resolverá en la pizarra como una multiplicación de dos binomios para luego unir los términos semejantes y lograr así la expresión de una función cuadrática polinómica).

Una vez realizado esto en conjunto entre el alumnado y el docente, la clase prosigue con la siguiente actividad:

Establecer, si es posible, los números reales a y b tales que:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Den como resultado el trinomio del lado izquierdo. Justificar en cado de que no se pudiera.

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ $\quad f(x) = (x+a)(x+b)$
b) $f(x) = x^2 - 1$ $\quad f(x) = (x+a)(x+b)$
c) $f(x) = x^2 + 1$ $\quad f(x) = (x+a)(x+b)$
d) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ $\quad f(x) = (x+a)(x+b)$

Tiempo estimado: 40 minutos.

(Todo tiempo estimado considera el trabajo individual del alumno y la resolución o revisión de las respuestas en conjunto, sociabilizando las soluciones dada por los alumnos en cada actividad).

Luego de realizada la actividad y sociabilizada entre el docente y los estudiantes, el profesor dará la siguiente proposición:

“A la expresión $f(x) = (x+1)(x+1)$ se le llama “forma factorizada” de la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$, y al valor (-1) se le llama raíz o cero de dicha función; pues cuando la función se evalúa en dicho valor, la función se hace 0.

La forma general factorizada de una función cuadrática es $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$. Si r_1 y r_2 son constantes reales, reciben el nombre de raíces de la función o ceros de la función. a es el coeficiente del término cuadrático”.

Para finalizar la explicación, el docente entrega como ejemplo la expresión $\mathrm{h(x)} = \mathrm{x}^2 + 1$ con el fin de observar que existen funciones que no tienen raíces debido a que es un polinomio irreducible, es decir, no se puede expresar como un producto de dos expresiones polinómicas de coeficientes reales de grado uno.

Se agregan una lista de ejercicios para encontrar la forma factorizada o forma general de las siguientes funciones cuadráticas. En caso de no poder factorizar, explicar por qué:

a) $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$
b) $f(x) = x^2 + 3$
c) $f(x) = x^2 + 7x + 12$
d) $f(x) = 3x^2 + 15x + 18$
e) $f(x) = 5x^2 + 15x - 50$
f) $f(x) = x^2 + 2x$

Tiempo aproximado: 25 minutos

Para concluir la clase, el profesor pregunta lo siguiente:

- ¿Siempre será posible pasar una función cuadrática de forma polinómica a forma factorizada con raíces reales? ¿Por qué?
- ¿En qué casos será posible pasar de una función cuadrática de forma polinómica a forma factorizada?
- ¿Qué procedimiento matemático permitirá pasar de forma polinómica a forma factorizada?

5.5.3 Clase 3

La clase comienza retomando las preguntas realizadas la clase anterior:

- ¿Siempre será posible pasar una función cuadrática de forma polinómica a forma factorizada con raíces reales? ¿Por qué?
- ¿En qué casos será posible pasar de una función cuadrática de forma polinómica a forma factorizada?
- ¿Qué procedimiento matemático permitirá pasar de forma polinómica a forma factorizada?

(Con estas preguntas se pretende retomar el contenido visto en la clase 2 para así entregar nuevos conocimientos. Para la primera pregunta se espera que los estudiantes puedan entender que no siempre una función cuadrática tiene raíces, por lo que no siempre existirá una forma factorizada de la función cuadrática. En caso de que la respuesta sea negativa y no sean capaces de contestar esta pregunta, se dará un ejemplo concreto de una función cuadrática de forma polinómica que no pueda escribirse de manera factorizada. Una razón del por qué sería que no existe factorización posible. De esta manera, se relaciona directamente con la pregunta número dos, que pretende reafirmar lo preguntado en la primera interrogante, y con la tercera pregunta, la cual tiene directa relación con la factorización y los productos notables).

De esta forma, se recuerda lo aprendido y la información ya asimilada (conocimientos previos).

Luego se continúa con la siguiente actividad descrita en la pizarra:

"¿En qué se parecen y en qué se diferencian los siguientes pares de funciones?"

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ $\quad f(x) = (x+1)^2$
b) $g(x) = x^2 + 3$ $\quad g(x) = (x-0)^2 + 3$
c) $h(x) = 2x^2 + 3x + 4$ $\quad h(x) = 2(x + \frac{3}{4})^2 + \frac{23}{8}$

Tiempo estimado: 20 minutos

(En este caso, se espera que los alumnos factoricen las funciones cuadráticas polinómicas y comparen con las funciones expresadas de manera factorizada. Sumado a lo anterior, sean capaces de comprender cuando existen raíces reales y cuando no (un ejemplo es el distractor b, el cual pareciera estar factorizado, pero no es así)).

Para continuar, el profesor entrega la siguiente definición:

"*La función cuadrática* $f(x) = 2(x-0)^2 + 1$ *es la forma canónica de la función* $f(x) = 2x^2 + 1$, *y al punto (0,1) se le llama vértice de la función".*

Además, se agregará que:

"La forma canónica de una función es $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$ *donde* (x_v, y_v) *son las coordenadas del vértice de la función cuadrática (que siempre existe), y a es el coeficiente del término cuadrático".*

Para finalizar, se entregan los siguientes tríos de funciones y se responden las preguntas solicitadas:

a) $f(x) = x^2 + 10x + 25$ $\quad f(x) = (x+5)^2$ $\quad f(x) = (x+5)^2$
b) $h(x) = x^2 + 5x + 6$ $\quad h(x) = (x+3)(x+2)^2$ $\quad h(x) = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$

- Establecer para cada una de las funciones:
    - Las raíces de la función
    - El vértice de la función

Tiempo estimado: 10 minutos

Realizada la actividad, se realizan las siguientes preguntas:

- ¿Siempre será posible pasar de una función cuadrática polinómica a su forma canónica? ¿Por qué?
- ¿Qué procedimiento algebraico será necesario para lograr la forma canónica de una función que se encuentre en su forma polinómica?

Tiempo estimado: 10 minutos

(El sentido de estas preguntas es dirigir al estudiante a que comprenda que siempre se podrá escribir una función cuadrática en forma canónica, debido a que siempre existe un vértice en la función cuadrática, a diferencia de la existencia de las raíces. En caso de que la respuesta sea negativa y no respondan de manera correcta, se debe dejar en claro que siempre las funciones cuadráticas tienen un vértice, por lo que siempre se podrán escribir de forma canónica. Para reforzar esto, se pedirá a distintos estudiantes pasar a la pizarra, para que con ayuda del profesor puedan transformar cada función polinómica en su forma canónica. De igual manera, a través de la realización de los ejercicios se explicará que el procedimiento es la factorización, respondiendo así la pregunta número dos).

Para continuar, se realiza la siguiente actividad:

Pasar de la forma polinómica a la forma canónica las siguientes funciones (establecer la coordenada del vértice)

a) $f(x) = x^2 + 2x - 15$
b) $g(x) = x^2 + 2x + 3$

Tiempo estimado: 15 minutos

Luego, se solicita a los alumnos escribir, si es posible, la forma factorizada de ambas funciones y encontrar las raíces o ceros de cada función cuadrática.

Tiempo estimado: 15 minutos

(En ambas actividades, el docente puede agregar más funciones o bien cambiar las funciones dadas).

Para finalizar la clase, se analizan las siguientes afirmaciones de manera grupal:

- Sólo cuando la función cuadrática tenga raíces reales, se puede pasar de la forma polinómica a la forma factorizada. Pero siempre se puede pasar de la forma factorizada a la forma canónica.
- Siempre será posible transformar la función cuadrática de la forma polinómica a la forma canónica y viceversa.
- Siempre será posible pasar una función de la forma factorizada a la forma canónica, pero no siempre de la forma canónica a la forma factorizada.
- Siempre será posible pasar de la forma polinómica a la forma canónica, pero en algunos casos, es necesario aplicar el método de completación de cuadrados.

Se les avisa a los alumnos que la próxima clase habrá un test con respecto a lo aprendido en las clases anteriores.

5.5.4 Clase 4

Se entrega a los alumnos el siguiente test:

Test "Función Cuadrática"

Objetivos:

- Comprender el concepto de función cuadrática.
- Identificar las formas en que se puede expresar una función cuadrática.
- Determinar las raíces y vértice de una función cuadrática mediante la forma en que esté expresada.

Tiempo: 45 minutos

1) ¿Qué es o qué entienden ustedes por función cuadrática? Justifique y dé un ejemplo

2) Mencionar las tres formas distintas en que una función cuadrática se puede presentar

3) Dada la siguiente función cuadrática:

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

a) Expresarla en forma canónica
b) Expresarla en forma factorizada
c) Encontrar y escribir las raíces y el vértice (si es que las tiene)

(El docente puede agregar más ejercicios si considera que es muy poco para una evaluación, siempre y cuando no olvide el enfoque al lenguaje matemático en esta primera parte de la unidad. La forma de evaluar debe ser considerada por el profesor).

Una vez terminado el test, se da inicio a la segunda parte de la unidad, la cual tiene por objetivo que los alumnos puedan graficar cualquier tipo de función cuadrática a partir de sus puntos característicos.

Aspectos a enseñar:

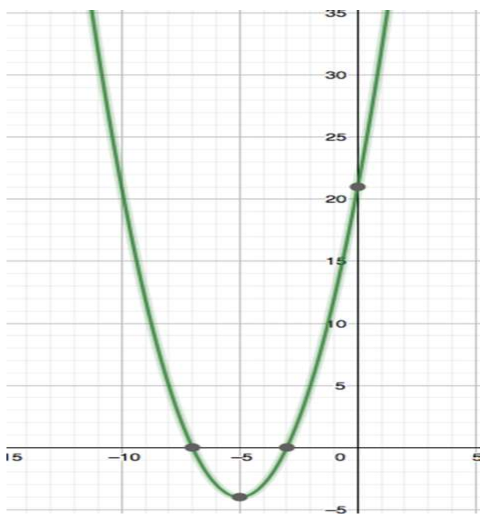
a) Declarativos: Puntos característicos de la gráfica de una función cuadrática y su definición.
b) Procedimentales: Trazar en el plano cartesiano la gráfica de una función cuadrática estableciendo los puntos principales de la parábola.

Se retoma la clase realizando la siguiente pregunta:

"Dada la $f(x) = x^2 + 10x + 21$, encontrar sus raíces (si es que existen) y su vértice".

Después de unos 10 minutos de trabajo individual, se presenta un gráfico y se solicita a los estudiantes indicar los puntos marcados en el plano cartesiano (etapa dos, conocimientos previos)

Gráfico 1:



(Tiempo estimado: 5 minutos)

Luego de esto, y a través del mismo gráfico, se realizan las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas veces la gráfica mostrada en el plano cartesiano intercepta al eje de las abscisas? ¿Cuál (es) sería (n) este (os) punto (s)?
- ¿Cuántas veces la gráfica intercepta al eje de las ordenadas? ¿Cuál (es) sería (n) eso (s) punto (s)?
- ¿El gráfico se podrá dividir en dos segmentos iguales? Si es así, ¿qué recta debería cortar a la gráfica para que sea dividida en dos partes iguales?
- La gráfica mostrada, ¿posee un máximo o un mínimo? ¿se puede definir tal punto? ¿cuál sería?

(Estas preguntas están basadas en la relación función/gráfico, con el propósito de que se establezca y se entienda que cada función cuadrática, independiente de la forma algebraica que esté escrita, tiene una representación gráfica, la cual puede ser dibujada en un plano cartesiano).

Luego de dado un tiempo prudente (aproximadamente 10 minutos) se comparten las respuestas y se finaliza la clase con conclusiones a través del conjunto de respuestas dadas (aproximadamente 15 minutos).

(Se espera que las respuestas vayan acorde al ejercicio entregado. En caso de que fuera negativo el resultado, se responderán en la pizarra relacionando las respuestas de los estudiantes con lo que se ve en el gráfico. De esta forma, se indicará cada punto y cada recta de la cual se pregunta. Además, se señalará el por qué posee mínimo y no máximo).

5.5.5 Clase 5

Se retoma la unidad entregando dos nuevos gráficos y solicitando a los estudiantes encontrar y anotar los siguientes puntos solicitados para cada caso:

Gráfico2:

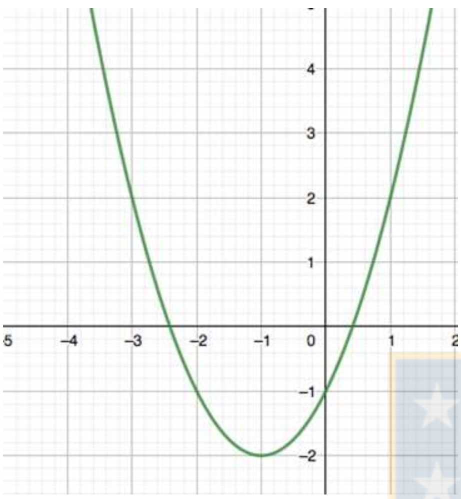
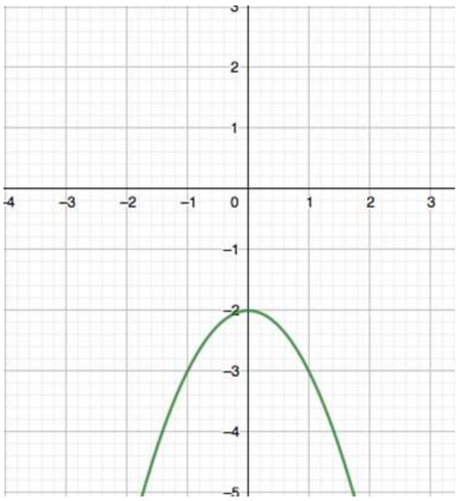


Gráfico 3:



- Puntos de intersección con el eje de las abscisas (eje x) si es que los hay
- Puntos de intersección con el eje de las ordenadas (eje y) si es que los hay
- ¿La gráfica tiene máximo o mínimo? ¿Cuál sería ese punto (si es que lo tiene)?
- ¿Qué nombre les pondrían a ambos gráficos? Justifique.

Tiempo estimado: 20 minutos

(Para esta pregunta, se espera que los estudiantes respondan de acuerdo a la figura de la gráfica, como por ejemplo campana, montaña, cerro, parábola, etc., con el fin de familiarizarlos con el término "parábola").

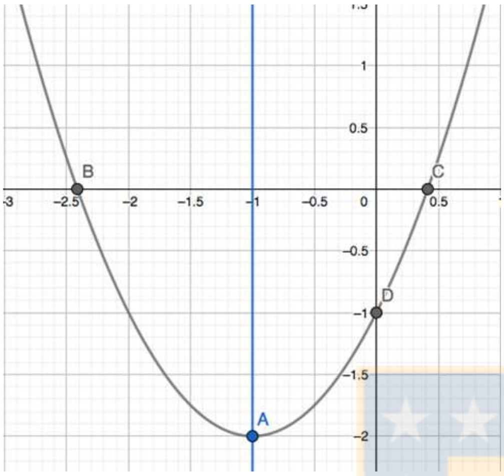
Una vez realizada la actividad y sociabilizada entre estudiantes y docente, el profesor entregará la siguiente definición:

"Recordemos que la presentación polinómica de una función cuadrática está dada por la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes reales, pero a debe ser distinto de cero".

Se prosigue de la siguiente manera:

"La representación gráfica de una función cuadrática recibe el nombre de parábola vertical. A continuación, se presentará y explicará el esquema de una parábola en el plano cartesiano, para identificar sus principales puntos".

Gráfico 4: Puntos de una parábola vertical



Una vez presentado el gráfico, se anotan los elementos característicos de la parábola

Eje de simetría: es la recta vertical simétrica con respecto a la parábola vertical.

El vértice: Es el único punto donde se interceptan el eje de simetría con el eje de las abscisas.

Intercepto con el eje de las abscisas: Son aquellos puntos donde la parábola corta dicho eje; cabe destacar que estos cortes pueden ser dos, uno o ninguno. A estos puntos también se les llama raíces o ceros de la parábola (al igual que en la función cuadrática).

vertical:

Una vez entregada esta información y analizado el gráfico, se prosigue con lo siguiente:

¿Cómo puedo trazar el gráfico de una función cuadrática polinómica?

(Para esta interrogante, se espera que los estudiantes comprendan de manera óptima la importancia de los puntos principales de una parábola, con el objetivo de que puedan graficar de manera correcta cualquier función cuadrática a través de estos puntos. De no ser así, se presentará un contraejemplo con la finalidad de entender la importancia de los puntos característicos de una función cuadrática).

Se esperan diferentes respuestas. Una vez pasado un tiempo prudente (2 a 5 minutos) se comenta lo siguiente:

"Para trazar la gráfica de una función se debe elaborar una tabla de tres columnas; una columna para la variable independiente (x), otra para la variable dependiente (y), y por último una columna para el punto de par ordenado que se forma".

Ejemplo: Trazar la gráfica de la función cuadrática polinómica $f(x) = -x^2 - 2$

Desarrollo: Se comienza el desarrollo dando valores a la variable x (se recomendará dar siete valores entre positivos y negativos).

$f(3) = -(3)^2 - 2 = -9 - 2 = -11$

$f(2) = -(2)^2 - 2 = -6$

$f(1) = -(1)^2 - 2 = 3$

$f(0) = -(0)^2 - 2 = -2$

$f(-1) = -(-1)^2 - 2 = -3$

$f(-2) = -(-2)^2 - 2 = -6$

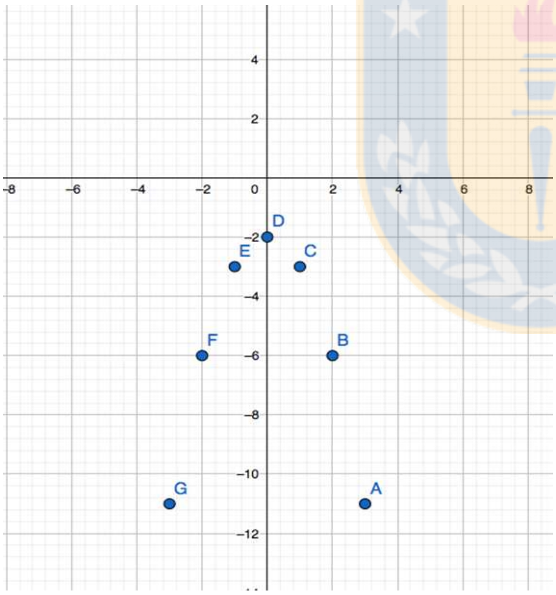
$f(-3) = -(-3)^2 - 2 = -11$

Una vez calculado los valores, se procede a crear la tabla de datos

x	y	(x,y)
3	-11	(3,-11)
2	-6	(2,-6)
1	-3	(1,-3)
0	-2	(0,-2)
-1	-3	(-1,-3)
-2	-6	(-2,-6)
-3	-11	(-3,-11)

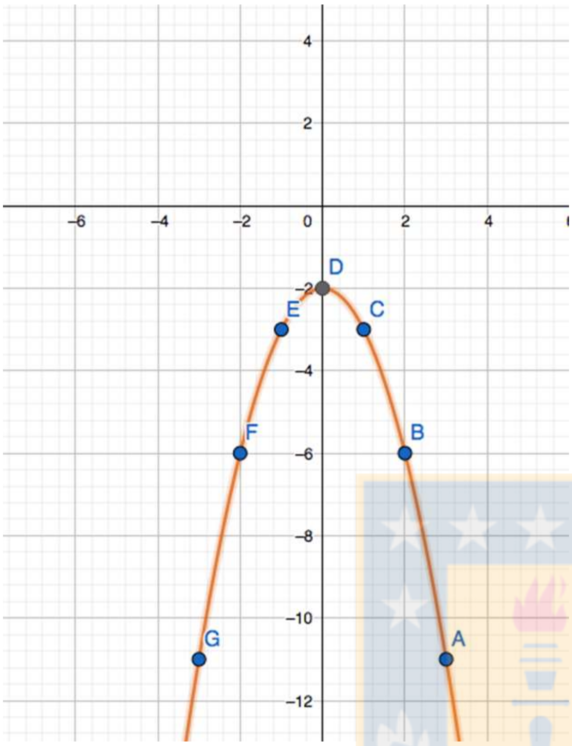
Ya tabulado los datos, se ubican en el plano cartesiano las coordenadas encontradas

Gráfico 5:



Para finalizar, se unen todos los puntos a través de una línea curva sin levantar el lápiz.

Gráfico 6:



Tiempo estimado: 20 minutos

A partir del gráfico se realizan las siguientes preguntas:

- ¿Hacia qué dirección abre la parábola?
- ¿Cuál es el eje de simetría?
- ¿Posee corte (s) en el eje de las abscisas? Si es así, ¿cuál (es) es (son)?
- ¿Cuál es el corte en el eje de las ordenadas?

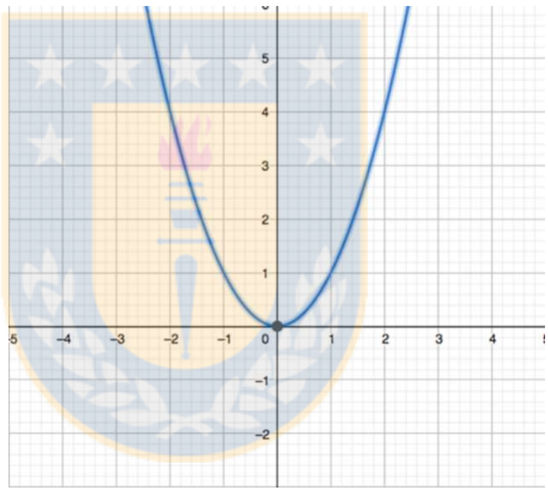
(Se pretende que con estas preguntas los estudiantes sean capaces de comprender de manera correcta los conceptos entregados anteriormente, ya que cada pregunta relaciona el gráfico con los aspectos entregados durante la clase. No obstante, al tener respuestas negativas con respecto al contenido, se deberá ejemplificar con mayor realce las diferentes características de las cuales se está preguntando. De igual manera, reforzar los contenidos y términos primordiales dentro de la unidad).

Luego de responder las preguntas de manera individual y después en conjunto (aproximadamente unos 10 minutos), se da la siguiente actividad:

"Graficar la función cuadrática polinómica $f(x) = x^2$ *a través de tabulación de datos y responder:*

a) ¿Hacia dónde abre la parábola?
b) ¿Cuál es el eje de simetría?
c) ¿Cuál es el vértice?
d) Encontrar las raíces o ceros de la parábola (intersección con el eje de las abscisas).
e) Intersección con el eje de las ordenadas (eje y).

Gráfico 7:



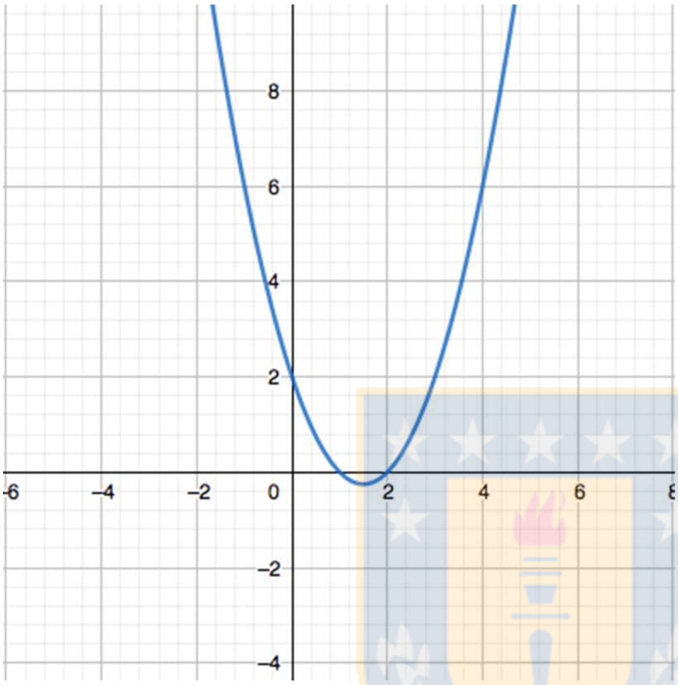
Tiempo estimado: 25 minutos

Se finaliza la clase comparando los gráficos 6 y 7 y sus respectivas funciones cuadráticas. Se pregunta a los estudiantes: "*¿A qué conclusión podemos llegar si comparamos ambos gráficos y ambas funciones cuadradas polinómicas?"*

(Se espera que las respuestas estén relacionadas con el coeficiente "a", o, de manera más coloquial, en el signo del "x" al cuadrado. En caso de que no se logre esta relación, se deben generar más ejemplos sencillos, haciendo hincapié en el comportamiento de la parábola y el coeficiente "a").

5.5.6 Clase 6

La clase comienza con la presentación de un gráfico en el programa Geogebra. Para esta actividad, se responderán en conjunto las siguientes preguntas basadas en el gráfico presentado.



a) ¿Hacia dónde abre la parábola?

b) ¿Cuál es el eje de simetría?

c) ¿Cuál es el vértice?

d) Encontrar las raíces o ceros de la parábola (intersección con el eje de las abscisas).

e) Intersección con el eje de las ordenadas (eje y).

(Direccionado hacia las características de una parábola, la pregunta se centra en la comprensión de la representación gráfica de la función cuadrática, relacionando el contenido algebraico entregado en la primera parte de la unidad con el contenido gráfico visto en esta segunda parte de la unidad. Al igual que en otras oportunidades, en caso de que los estudiantes no puedan resolver de manera positiva las preguntas, se optará por resolverlas en la pizarra).

Luego, se les pregunta a los estudiantes: "*¿Qué sucederá con la gráfica si cambiamos los coeficientes reales a, b y c en la función cuadrática polinómica?*

Después de unos momentos y tomando en cuenta las respuestas de los estudiantes, se comienzan a solicitar diferentes valores para el coeficiente *a,* y así observar el cambio de la parábola. Se concluye pues que:

"El coeficiente a indica la obertura de la parábola (si abre hacia arriba o hacia abajo). A esto se le llama concavidad de la parábola, y esta puede ser positiva (hacia arriba) cuando $a>0$, o negativa (la parábola se abre hacia arriba) cuando $a<0$."

Se continúa reemplazando los valores de los coeficientes *b y c,* llegando a la conclusión de que:

Para cerrar la actividad, el docente expresará lo siguiente:

Se presenta el siguiente cuadro con la información entregada:

"El coeficiente b afecta a la posición del vértice y a la cantidad de raíces o ceros de

Las características principales de una parábola como por ejemplo hacia donde abre, su eje de simetría, las coordenadas del vértice, las coordenadas de intersección con el eje de las ordenadas y las coordenadas de intersección con el eje de las abscisas (si es que las hubiera) las brindan la expresión polinómica de cada función"

"Sea la función cuadrática polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c$, *se cumple lo siguiente:*

Información	Operación a realizar
• **¿Hacia dónde abre la parábola?** • **¿Posee concavidad positiva (abrir hacia arriba) o concavidad negativa (abrir hacia abajo)?** • **¿La función tiene máximo o mínimo?**	Observar el valor del coeficiente real *a.* Si *a<0,* la parábola abre hacia abajo (concavidad negativa), por lo tanto, la función tiene un valor máximo. Si *a>0,* la parábola abre hacia arriba (concavidad positiva), por lo tanto, la función tiene un mínimo.
Eje de simetría	Se debe calcular $\frac{-b}{2a}$. El eje de simetría será la recta $x = \frac{-b}{2a}$.
Coordenadas del vértice	Al ser una coordenada, debe estar compuesta por el punto (x,y). Para encontrar el valor de x, se debe calcular $\frac{-b}{2a}$. Para encontrar el valor de y, se evalúa la función en el valor de x encontrado, completando la pareja $(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right))$.
Coordenada de la intersección con el eje de las ordenadas (eje y)	Para encontrar las coordenadas de la intersección, se debe evaluar la función en 0. Así, el par ordenado será $\left(0, f(0)\right) = (0, c)$
• **¿Existen las intersecciones con el eje de las abscisas?** • **¿Cuántos hay?**	Se debe determinar el valor de la discriminante**.** El discriminante se simboliza por el signo Δ, y es igual a $b^2 - 4ac$. • Si Δ>0, entonces existen dos intersecciones en el eje x. • Si Δ=0, entonces existe una intersección en el eje x el cual es el vértice. • Si Δ<0, entonces la parábola no intersecta al eje de las abscisas.
Coordenadas de intersección con el eje de las abscisas	Para encontrar estos puntos, se debe resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ Para esto, desarrollar la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Una vez entregado este cuadro resumen, se realizará la siguiente actividad:

"Con su compañero de asiento, trazar las gráficas de funciones cuadráticas con las siguientes características:

Gráfico 1:

- **Que abra hacia arriba**
- **Ecuación del eje de simetría x=1**
- **Vértice de coordenadas (1,-9)**
- **Pase por el punto (3,-5)**

Gráfico 2:

- Que abra hacia abajo
- Ecuación del eje de simetría x=-1
- Vértice de coordenadas (-1,-2)
- Pase por el punto (-3,-6)

Gráfico 3:

- **Tenga como intersecciones con el eje x los puntos (-1,0) y (1,0)**
- **Pase por los puntos (3,8) y (-3,8)**
- **Tenga como vértice el punto (0,-1)**

Gráfico 4:

- Intercepte al eje y en la coordenada (0,6)
- Intercepte al eje de las abscisas en los puntos (-2,0) y (-3,0)
- La parábola abra hacia arriba
- Sea representada por la función polinómica $f(x) = x^2 + 5x + 6$

Luego de trazado los gráficos, responder:

a) ¿Cuál es la función polinómica que posee cada función cuadrática representada en los gráficos?

b) Encontrar las raíces (cortes en el eje x) para el gráfico 1 y 2.

c) Definir el eje de simetría para el gráfico 3.

d) Determinar el vértice y el eje de simetría para el gráfico 4.

e) ¿Hacia dónde abren las parábolas trazadas en los gráficos 3 y 4?

Después de un tiempo prudente, se comparten las respuestas y se resuelven dudas.

Tiempo estimado: 35 minutos

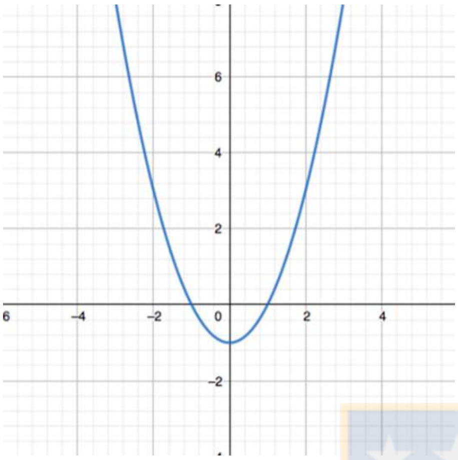
(El objetivo de esta actividad es reforzar lo aprendido y repasar para el segundo test).

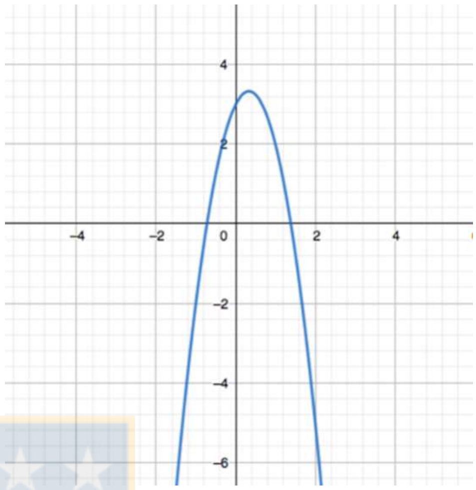
Para finalizar la clase, se realizan las siguientes preguntas:

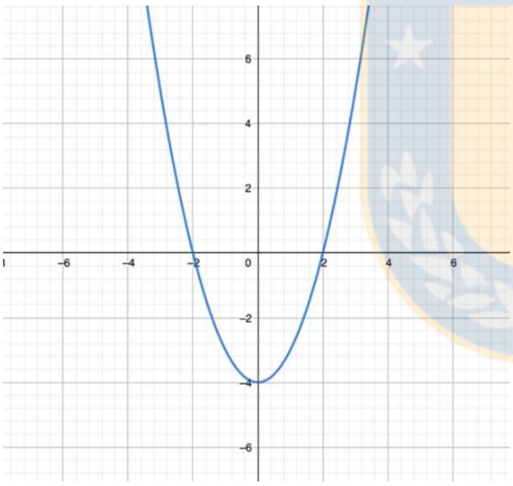
- ¿En qué influye el coeficiente a para el trazado del gráfico?
- ¿Es necesario crear una tabla de datos para trazar el gráfico de una función cuadrática? ¿Qué es lo mínimo que se necesita para poder trazar el gráfico?
- ¿Se puede escribir la función cuadrática polinómica a partir de su gráfico?

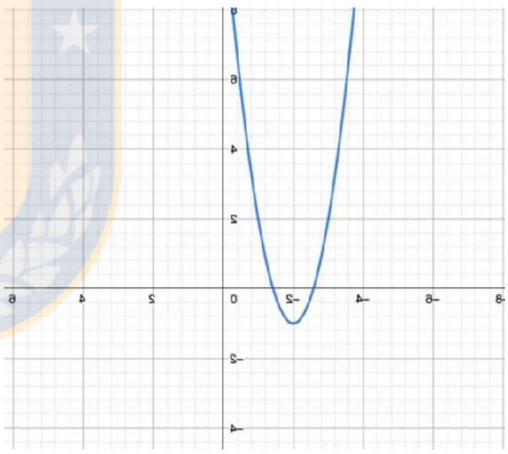
5.5.7 Clase 7

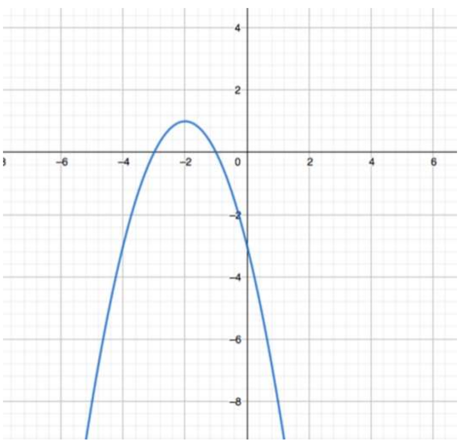
Se comienza la clase presentando 6 gráficos distintos en la pizarra.

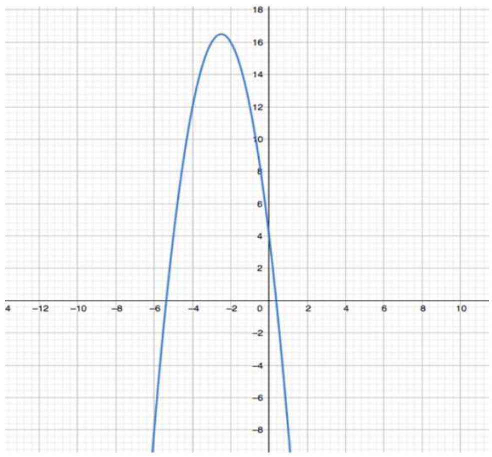












Se solicita analizar los gráficos y responder completar lo siguiente:

- *Para cada gráfico, definir si el coeficiente a y el discriminante (Δ) son mayores, iguales o menores a 0.*

Tiempo estimado: 10 minutos

Después de la actividad, el docente expone lo siguiente:

"Dependiendo del coeficiente del término cuadrático a y del discriminante de la función (Δ=$b^2 - 4ac$) en la expresión polinómica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, una parábola puede presentarse de diferentes maneras (como se muestran en la actividad anterior)."

Luego se pregunta lo siguiente (retomando lo concluido la en la clase anterior):

¿Qué sucede cuando se solicita trazar el gráfico de una función cuadrática?

(El objetivo de esta pregunta es insertar el concepto de continuidad de una manera coloquial, entendiéndose por dibujar la parábola sin levantar el lápiz).

Al pasar unos minutos escuchando las respuestas de los estudiantes y recordando los ejemplos de la clase anterior, el docente prosigue con lo siguiente:

"Además del procedimiento de tabulación de datos (tabla de valores) para graficar una función cuadrática, existe otro método más rápido en el que se determinan solo los puntos principales por donde pasará la parábola, como son el vértice, intersecciones con el eje de las abscisas (si es que existen) y ordenadas, eje de simetría y concavidad de la parábola (si es positiva o negativa)".

Para ejemplificar esto, se presenta la siguiente función cuadrática al curso, solicitando encontrar los puntos principales elementos de la parábola para luego trazar su gráfico en el plano cartesiano.

Función cuadrática: $f(x) = x^2 + 2x + 1$

Resolución paso a paso:

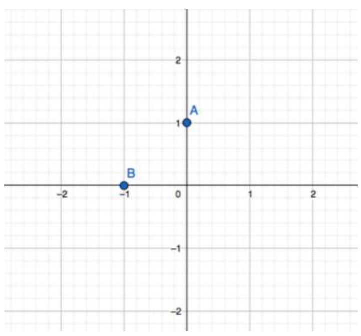
<u>Paso 1:</u> Reconocer y determinar los puntos principales:

1. Concavidad positiva, ya que a>0.
2. Corte en el eje de las ordenadas: Para esto hay que evaluar la función en 0 o bien, reconocer el coeficiente c (en este caso de valor 1) y concluir que el punto de intersección es (0,1).
3. Eje de simetría: Se calcula mediante la fórmula $\frac{-b}{2a}$. En este caso, $\frac{-2}{2*1} = -1$. Así, se concluye que el eje de simetría es la recta x=-1.
4. Vértice: Se calcula evaluando el valor de la recta que representa el eje de simetría en la función cuadrática. En este caso, el eje de simetría es x=-1, por lo que se debe evaluar la función cuadrática en -1. Esto da como resultado 0. Así, el vértice es el punto (-1,0).
5. Cortes en el eje de las abscisas (si es que existen): Para esto, primero debemos calcular el determinante $(b^2 - 4ac)$, que en este caso es 0. Por lo tanto, existe un solo punto de intersección entre el eje x y la parábola. Para calcularlo, podemos escribir la función cuadrática en su forma factorizada (para esta ocasión sería f(x)=(x-1)(x-1)) o bien, resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 1 = 0$ a través de la fórmula

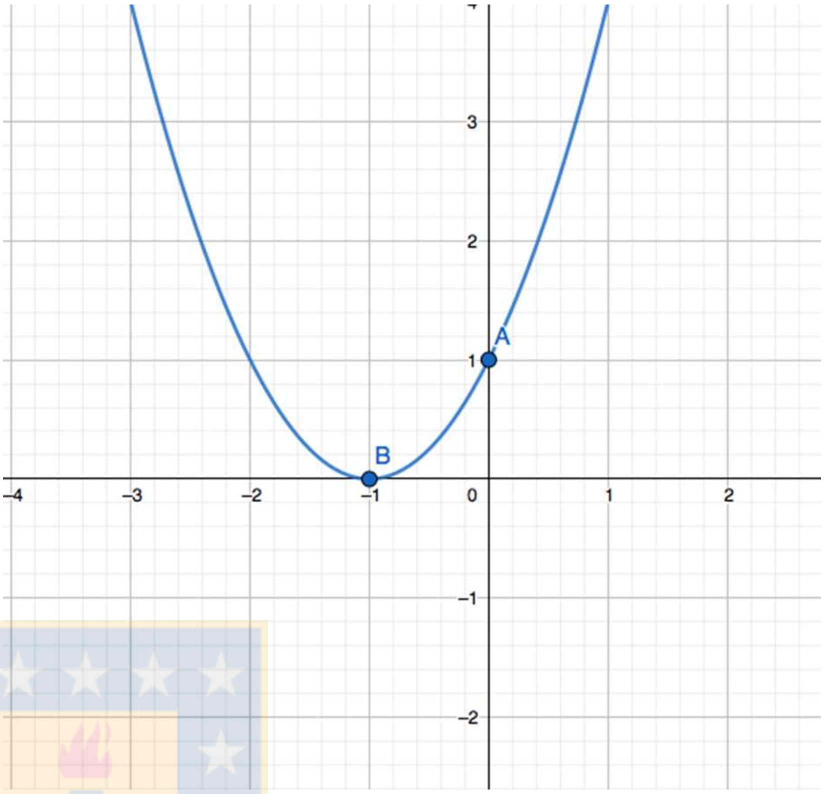
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así, se concluye que el punto de intersección con el eje x es el punto (-1,0).

<u>Paso 2:</u> Una vez encontrado los puntos principales, se debe continuar ubicando los puntos en el plano cartesiano, como se muestra en la figura:



Paso 3: Para finalizar, se deben unir los puntos sin levantar el lápiz y formando una parábola en el plano cartesiano como se muestra en la figura:



Tiempo estimado: 25 minutos

Se entrega la siguiente actividad para que los estudiantes las realicen individualmente o en conjunto con su compañero de asiento:

Trazar la gráfica de las siguientes funciones cuadráticas y definir los puntos principales de la parábola trazada:

a) $f(x) = -x^2 - 2$
b) $f(x) = x^2 + 1$
c) $f(x) = x^2 + 3x - 10$
d) $f(x) = 2x^2 - 2x + 6$
e) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$
f) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

Tiempo estimado: 40 minutos

Para finalizar la clase, se realizan las siguientes preguntas:

- ¿Qué método es más efectivo para trazar el gráfico de una función cuadrática? ¿Por qué?
- ¿Resultará el mismo gráfico al utilizar los dos métodos? De un ejemplo.

Se les recuerda a los estudiantes que habrá test en la próxima clase sobre el gráfico de una función cuadrática.

5.5.8 Clase 8

Se entrega a los alumnos el siguiente test:

Test "Gráfica de una Función Cuadrática"

Objetivos:

- Comprender los procedimientos para graficar una función cuadrática
- Identificar los puntos principales de la gráfica de una función cuadrática
- Graficar funciones cuadráticas mediante los métodos propuestos

Tiempo: 60 minutos

1. Nombre las dos maneras de graficar una función cuadrática vistas en clase. Escriba una función cuadrática y grafiquela aplicando los dos métodos. Compare ambos gráficos resultantes.
2. Dada las funciones cuadráticas
   a) $f(x) = 2x^2 - 6x$
   b) $f(x) = -2x^2 - 6x + 8$

   Realizar las siguientes acciones:

   - Definir tipo de concavidad
   - Definir eje de simetría
   - Encontrar punto de intersección con el eje de las ordenadas
   - Calcular el discriminante y, si es posible, encontrar los puntos de intersección con el eje de las abscisas
   - Trazar el gráfico de cada función

Tiempo estimado: 60 minutos.

Una vez entregado todos los test, se retoma la clase con la siguiente pregunta:

"En las funciones cuadráticas, ¿es posible determinar un máximo o mínimo? ¿Cómo será posible?"

Luego de unos minutos, y recogiendo las respuestas de los estudiantes, se presenta la siguiente función: $f(x) = x^2 + 5x + 6$

De ella se pide definir la concavidad y el vértice.

Posterior a esto, se entregan los puntos (0,6), (-3,0) y (-2,0), los cuales son el punto de intersección con el eje de las ordenadas y las intersecciones con el eje de las abscisas respectivamente. Una vez realizado esto, se grafica en la pizarra y se pregunta a los alumnos

"La parábola trazada, ¿posee un máximo o un mínimo? ¿Qué elementos tienen relación con el máximo o mínimo de una parábola?"

Se da unos minutos para recoger las opiniones de los estudiantes y se concluye lo siguiente:

> *"Una parábola tiene un máximo o mínimo dependiendo de su concavidad. Si la concavidad es positiva, entonces la coordenada del valor de y en el punto del vértice será el mínimo valor que tendrá la función cuadrática. Por otra parte, si la concavidad es negativa, entonces el valor de la coordenada y en el punto del vértice será el valor máximo que posee la función cuadrática".*

"Esto tiene relación con problemas de optimización, en donde se busca el máximo o mínimo valor de algo. Puede ser el costo mínimo de una compra, la cantidad máxima de cajas en una habitación, etc."

Algunos ejemplos pueden ser los siguientes:

1. La diferencia de dos números es 20. Hallar tales números de modo que su producto sea lo más pequeño posible.
2. Hallar dos números positivos cuya suma sea 110 y cuyo producto sea máximo.

Para resolver esto, primero se reforzarán los contenidos ya vistos durante la unidad realizando la actividad.

Encontrar los valores máximos y mínimos de las siguientes funciones cuadráticas:

a) $f(x) = x^2 + 5x + 6$
b) $f(x) = -x^2 + 2x + 9$
c) $f(x) = -2x^2 + 3x - 6$

Una vez resuelta la actividad, se finaliza la clase escribiendo las siguientes preguntas para luego responderlas:

- ¿Todas las funciones cuadráticas tienen máximo o mínimo?
- ¿Puede una función cuadrática tener máximo y mínimo?
- ¿De qué depende que la función tenga un máximo o mínimo?
- ¿Cómo resolvemos los problemas planteados antes de la actividad?

5.5.9 Clase 9

La clase comienza retomando uno de los problemas vistos la clase anterior:

"La diferencia de dos números es 20. Hallar tales números de modo que su producto sea el más pequeño posible."

El profesor expondrá lo siguiente:

"Los problemas de optimización se pueden resolver en cinco pasos, los cuales serán descritos a continuación:

1. *Identificación algebraica de las variables; hay que tener en claro que existirán dos variables independientes y una variable dependiente (la cual se refiere a la que se quiere optimizar).*
2. *Establecer algebraicamente la ecuación de restricción, la cual es la que posee carácter de condición y relaciona las dos variables independientes.*
3. *Establecer dos ecuaciones equivalentes de la ecuación de restricción, esto permitirá que una de las variables quede expresada en términos de la otra.*
4. *Establecer la función a optimizar, expresando la variable dependiente en términos de una sola de las variables independientes.*
5. *Hallar el valor máximo o mínimo de la función.*

(Estas 5 etapas están diseñadas para que el estudiante pueda resolver de manera clara y ordenada los diferentes ejercicios de optimización que se le presenten. Al hilo de esto, cada fase está justificada en base a la secuencia presentada en esta unidad hasta el momento. Sumado a esto, toma referencias directas de lo descrito por Aranzazu (2013) y el método de resolver problemas planteado por George Polya en el año 1945, el cual describe cuatro pasos los cuales son: 1) Entender el problema –en este caso identificar las variables- 2) Configurar un plan, presente en el paso 1. 3) Ejecutar el plan, contenido en los pasos 2, 3, 4 y 5. 4) Examinar la solución obtenida. Este punto es tomado en cuenta con los pasos 4 y 5, ya que, si bien están presentes en la ejecución del plan, el estudiante debe comprender que es lo que está buscando y por qué lo está buscando. Una vez obtenida la respuesta, deberá examinar si corresponde o no a lo que se le está preguntando).

De esta manera, se retoma el ejemplo entregado y se resuelve paso a paso:

"La diferencia de dos números es 20. Hallar tales números de modo que su producto sea el más pequeño posible."

Paso 1: Identificación de las variables

Variables independientes:

$x = Número\ mayor$

$y = Número\ menor$

Variable dependiente:

$$P(x, y) = Producto\ entre\ los\ números\ x\ e\ y$$

Paso 2: Ecuación de restricción

"La diferencia entre dos números es 20". Algebraicamente se expresa como

$$x - y = 20$$

Paso 3: Establecer ecuaciones equivalentes de la ecuación de restricción:

Ecuación de restricción original: $x - y = 20$

Ecuaciones equivalentes: $y = x - 20$; $x = 20 + y$

Paso 4: Establecer función a optimizar

Función a optimizar con dos variables: $P(x, y) = x * y$
Función a optimizar con una variable: $P(x) = x * (x - 20) = x^2 - 20x$

Así, la función a optimizar es $P(x) = x^2 - 20x$

Paso 5: Hallar el valor mínimo, ya que se solicita que el producto de los números sea el más pequeño.

Como la función $P(x) = x^2 - 20x$ tiene al coeficiente $a > 0$, entonces podemos asegurar que esta función tiene un mínimo (debido a que la concavidad de la parábola es positiva). Luego, buscamos el valor del vértice. En este caso,

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-20)}{2 * 1} = 10$$

Evaluando el 10 en la función o en la ecuación de restricción, tenemos que

$$y = x - 20 = 10 - 20 = -10$$

Por lo tanto, significa que los dos números buscados son el 10 y -10, los cuales tienen como diferencia 20 y tienen un producto de -100.

De esta manera, podemos resolver los problemas de optimización dados en la clase anterior.

Se dan 10 minutos para que los estudiantes resuelvan el siguiente problema:

"Hallar dos números positivos cuya suma sea 110 y cuyo producto sea máximo"

Una vez pasado el tiempo, se resuelve en la pizarra y en conjunto con los estudiantes, siguiendo los pasos descritos en el ejercicio anterior.

Paso 1: $x = Número\ mayor$

$y = Número\ menor$

$P(x, y) = producto\ entre\ los\ números\ x\ e\ y$

Paso 2: Ecuación de restricción: $x + y = 110$

Paso 3: Ecuaciones de equivalencia:

$y = 110 - x$

$x = 110 - y$

<u>Paso 4</u>: Establecer función a optimizar

$$P(x,y) = x * y$$

Por lo tanto

$$f(x) = x(110 - x) \Leftrightarrow f(x) = 110x - x^2$$

<u>Paso 5:</u> Encontrar el valor máximo, ya que nos piden el mayor producto

Verificamos que posea un máximo:

$f(x) = 110x - x^2$ posee máximo debido a que $a = -1 < 0$, por lo que la concavidad de la parábola generada por la función f es negativa. Por tanto, posee un máximo.

Así, buscamos el valor del vértice, esto es $\frac{-b}{2a} = \frac{-110}{2\cdot(-1)} = 55 = x$

Evaluamos 55 en la función de restricción, o sea

$$x + y = 110 \Leftrightarrow 55 + y = 110 \Rightarrow y = 55$$

Así, los dos números buscados son 55 y 55.

Una vez realizado el ejercicio en la pizarra y resuelto las dudas, se entregan tres problemas más para que los estudiantes lo trabajen en parejas o en grupos de 4 estudiantes como máximo.

1. **Una compañía ofrece instalar bombillas a un costo de $300 cada una si el pedido es de 40 unidades o menos. Para conseguir mejores contratos, la compañía propone que, si se compran más de 40 bombillas, el precio por unidad se reducirá en 5 veces el número de bombillas adicionales a 40. ¿Cuántas bombillas por encima de las 40 deben negociarse para que los ingresos por venta sean los mayores posibles?**
2. **Si el número de turistas que hace un recorrido en autobús a una ciudad es exactamente 30, una empresa cobra $20 por persona. Para aprovechar la capacidad del autobús, la empresa propone que, si viajan más de 30 turistas, el precio por pasajero se reducirá en 0,5 veces el número de pasajeros**

adicionales a 30. ¿Cuál es el número de turistas que debe llevar un autobús para maximizar los ingresos de la empresa?

3. **Un granjero desea proteger un campo rectangular con una cerca y dividirlo en dos campos rectangulares más pequeños mediante otra cerca paralela a uno de los costados del campo. Tiene disponible 3000 yardas de cerca. Determinar las dimensiones si se desea obtener la mayor área protegida.**

Tiempo estimado: 40 minutos

Luego de haber pasado el tiempo, se resuelven las dudas y se les pide a diferentes estudiantes que pasen a exponer la manera del cómo resolvieron cada ejercicio. De esta manera, se crea una retroalimentación entre los estudiantes con ayuda del docente.

La clase finaliza con la siguiente pregunta:

- *¿Cuál es la mayor dificultad de que se presenta al resolver problemas de optimización?*
- *¿Cuántos pasos debemos seguir para resolver dichos problemas?*

5.5.10 Clase 10

Para esta clase se presenta la siguiente actividad:

Clase "Lanzamiento de una Pelota"

Inicio: Se les recuerda a los alumnos la fórmula de ecuación de grado $ax^2 + bx + c$, destacando el coeficiente cuadrático, el lineal y el término independiente.

Se les explica a los alumnos que saldrán al patio para trabajar con una pelota, la cual deberán lanzar y encontrar la ecuación que describe su trayectoria. Se les informa que tal actividad, deberán desarrollarla de forma grupal (cuatro integrantes); entregándoseles una guía que deberán realizar.

Desarrollo:

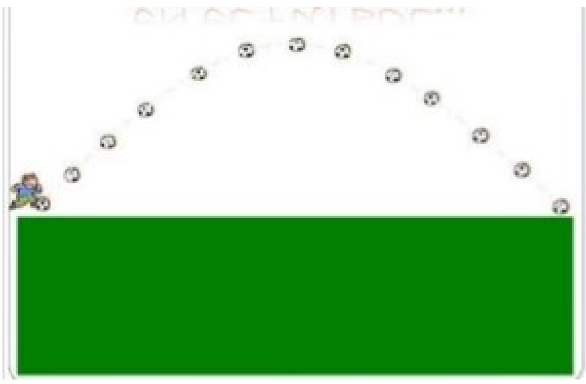
Los alumnos trabajan en el patio en grupos conformados por cuatro integrantes; donde deberán lanzar un balón y contestar las preguntas presentes en la siguiente guía:

Integrantes:

Curso:

Trabajando con el lanzamiento de una Pelota"

1) Un compañero lanza la pelota patéandola de la siguiente forma:



Anote la distancia recorrida por la pelota al momento de que esta caiga al suelo

…………………………………………………………………..

Cuando la pelota cae al suelo, ¿Cuál es su altura?

………………………………………………………………….

¿Podrías concluir algo de los dos puntos donde la altura es cero?

………………………………………………………………….

2) Analizando la ecuación de la trayectoria de la pelota

Si llamamos “x” a la distancia que recorre la pelota con respecto a su punto de partida, e “y” a la altura alcanzada por el balón.

¿En qué valores para x, y es igual a cero?

…………………………………………………………………..

Si hay dos puntos donde “y” es igual a cero, ¿cuál es el tipo de ecuación que describe la trayectoria que recorre la pelota (lineal, cuadrática, etc.)?

………………………………………………………………….

¿Cuál es la máxima altura que alcanza la pelota?

………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………….

3) Determinando la ecuación de la trayectoria de la pelota.

¿Los datos obtenidos son suficientes para determinar la ecuación? ¿Qué falta analizar?

………………………………………………………………………………..

Escribe la ecuación que te resultó

…………………………………………………………………………………………………

Explica como determinaste la ecuación de la trayectoria de la pelota.

……………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………..

Los alumnos completan la guía, siendo monitoreados por el profesor.

Una vez concluido el trabajo, se les pide volver a la sala para comentar lo realizado.

Cierre:

Se eligen alumnos al azar para que comenten como les pareció la actividad y describan como determinaron la ecuación.

Se les pide a los alumnos que entreguen la guía realizada; la cual se evalúa por la siguiente rúbrica.

Categorías	**Excelente (4)**	**Bueno (3)**	**Suficiente (2)**	**Insuficiente (1)**	**Total**
Conceptos matemáticos	La explicación demuestra completo entendimiento del concepto matemático para desarrollar la situación	La explicación demuestra un conocimiento sustancial para desarrollar la situación	La explicación demuestra algunos conocimientos para desarrollar la situación	La explicación demuestra un entendimiento limitado de los conocimientos matemáticos para desarrollar la situación	
Diagramas y dibujos	Los diagramas y dibujos son claros y ayudan al entendimiento de los procedimientos.	Los diagramas y dibujos son claros de entender	Los diagramas y dibujos no son claros ni legibles.	Los diagramas o dibujos no se entienden o no son usados.	
Estrategias/ Procedimientos	Por lo general usa una estrategia eficiente y efectiva para resolver la situación	Por lo general usa una estrategia efectiva para resolver la situación	Algunas veces usa una estrategia efectiva para resolver la situación	Rara vez usa una estrategia efectiva para resolver la situación	
Orden y Organización	El trabajo es presentado de una manera ordenada, clara y organizada.	El trabajo es presentado de una manera ordenada y organizada sin la claridad suficiente.	El trabajo es presentado en una manera organizada, pero sin claridad ni ordenada.	El trabajo se ve descuidado y desorganizado; sin claridad en el desarrollo de las actividades.	

Una vez terminada la actividad, se les aplicará el siguiente test:

Test de Aplicación de Función Cuadrática

Objetivos:

- Comprender el concepto de Función Cuadrática y Ecuación Cuadrática
- Emplear algoritmos para resolver Ecuaciones Cuadráticas.
- Resolver problemas aplicando técnicas de resolución de ecuaciones cuadráticas y concepto de función cuadrática

Tiempo: 25 minutos

Un ganadero quiere cercar un campo rectangular con 3600 metros de malla, para usarlo como potrero. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del campo que permiten la mayor área cercada con la malla disponible?

Para resolver el test los estudiantes tendrán 25 minutos.

CAPÍTULO VI

Conclusiones

De acuerdo al trabajo realizado, se señalan a continuación las siguientes consideraciones finales:

1. A pesar de que los alumnos se consideran como forjadores de su propio aprendizaje, no quiere decir que el rol que cumple el docente no sea fundamental en la sala de clases, ya que es este el que determina las actividades que van a efectuarse, y mediante ellas se desafiará a los alumnos a participar en la construcción de nuevos conocimientos.
2. El lenguaje matemático está involucrado en todo tipo de expresión que contemple a la ciencia de las matemáticas; es por ello que como docentes, tenemos la necesidad de propiciar condiciones y tiempo para que los alumnos se arriesguen a establecer conjeturas, a intentar pensar y actuar por su propia cuenta, argumentar frente a sus pares y al docente.
3. Un diálogo interdisciplinar en el aula es indispensable si se desea que no haya ambigüedad en los contenidos, si se desea que no persista dispersión respecto a los objetivos, formas de evaluación y, especialmente, de seguimiento del proceso educativo de los estudiantes.
4. Es necesario que el alumno manipule los objetos matemáticos, active su propia capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione sobre su proceso de pensamiento, adquiera confianza en sí mismo y se atreva a emplear el contenido adquirido en las situaciones que se presentan en la vida cotidiana. El docente debe propiciar instancias para que el alumno pueda desarrollar esto, ya sea empleando software educativo, situaciones problemas, salidas a terreno, trabajos grupales, entre otras maneras didácticas y pedagógicas existentes al entregar el contenido.
5. A pesar de no haber empleado la secuencia didáctica en el aula de manera concreta, se puede apreciar en nuestros términos que es una propuesta la cual logra dar a la problemática planteada al comienzo de este seminario, presentado un trabajo que priorice el lenguaje matemático al comienzo de la unidad, para así

lograr una base sustentable para el desarrollo del contenido creando un sistema de comunicación acorde al requerido en las ciencias de las matemáticas.

6. En los Planes y Programas existe poca regularización del lenguaje matemático, donde no se expone la importancia de este en la entrega del contenido de Función Cuadrática.
7. En relación a lo antes dicho, la variabilidad que actualmente existe en relación a la teoría de la didáctica de la matemática exige a los docentes estar en constante capacitación. En este sentido, los Planes y Programas deberían estar en un cambio continuo, direccionando los Objetivos de Aprendizajes a las nuevas tendencias de la didáctica de la matemática. Sin embargo, y como se apreció en el capítulo tres, los Objetivos de Aprendizajes no han variado en los últimos seis años (desde el 2013 hasta la fecha) lo que deja en evidencia el mal enfoque que se le está entregando a la enseñanza de las matemáticas.

CAPÍTULO VII

Bibliografía

- Agencia de Calidad de la Educación (2018).*Buenas Prácticas para Pedagogía Efectiva.*Recuperadode: http://archivos.agenciaeducacion.cl/Guia_de_apoyo_para_profesores_UNICEF.pdf
- Agencia de Calidad de la Educación (2018). *Presentación de Resultados PISA 2012 Chile.* Recuperado de: https://s3.amazonaws.com/archivos.agenciaeducacion.cl/documentos-web/Informes/Resultados+PISA+2012+Chile.pdf
- Agudelo, María (2007). I*mportancia del lenguaje en el ámbito educativo*. Revista Ciencias Humanas, nº36.
- Aguilar, S. & Barroso, J. (2015). *LA TRIANGULACIÓN DE DATOS COMO ESTRATEGIA EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA*. Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa? id=36841180005
- Andreú, Jaime (2011). *Las técnicas de Análisis de Contenido: Una revisión actualizada*. Universidad de Granada.
- Angulo, José (1994). *¿A qué Llamamos Currículum? Teoría y Desarrollo del Currículum*. Málaga: Aljibe, pp. 17-29.
- Aranzazu, Carlos (2013). *Secuencia didáctica para la enseñanza de la función cuadrática.* Tesis para optar al grado de Magister, Universidad Nacional de Colombia sede Medellín.
- Avila, Bibiana (2010). *La triangulación, una técnica de investigación.* Rescatado de http://triangulacion-tecnicadeinvest.blogspot.com/2010/10/la-triangulacion-una-tecnica-de.html
- Beauchamp, George (1981). *Curriculum theory*. F.E. Peacock Publishers, 4º Edición.
- Bolívar, Antonio (2002). *LA EVALUACIÓN DE ACTITUDES Y VALORES: PROBLEMAS Y PROPUESTAS.* Compromisos de la evaluación educativa. Madrid.
- Cajiao, Francisco (1997). *El desarrollo del lenguaje y la construcción del conocimiento*. Revista Colombiana de Psicología, número 5-6.
- Campos, Agustín (2006). *Organizadores gráficos: técnicas visuales para aprender y enseñar.* Revista Magisterio No. 18, Editorial Magisterio, Bogotá, Colombia.
- Caserio, M. & Vozzi, A. (2015). *El Impacto del Lenguaje Matemático en el Aprendizaje.* Comunicación XIV CIAEM-IIACME, Chiapas, México.
- Coll, César (1987). *Psicología y currículum*. Barcelona, Laia.
- Coll, C., Pozo, J., Sarabia, B. & Valls, E. (1992). L*os contenidos en la reforma. Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes.* Santillana. Madrid.
- Chomsky, Noam (1965). *Aspects of the theory of syntax*. Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts
- Constitución Política de la República de Chile. *Ley de Educación 20370*, art. 31
- Corbin, Juan (2018). *Los 12 Tipos de Lenguaje (y sus Características).*Psicología y mente Sitio web: https://psicologiaymente.com/social/tipos-de-lenguaje
- Delgado, Santiago (2015). *El papel del lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Revista Panorama, Vol. 9 número 16

- Distéfano, M., Urquijo, S. & Gonzalez, S. (2010). *Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico.* Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, número 23, pág. 59-71.
- Duval, Raymond (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle.
- Duval, Raymond (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación.* 13/03/2019, de La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española Sitio web: http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546
- Espinoza, O. (2016). *Cambios al currículum escolar 1990-2014: institucionalidad y desafíos*. CEPPE Policy Brief N° 7, CEPP UC.
- Ferrero, Luis (2002). *Las Matemáticas en la Educación Obligatoria*. Artículo de la Enciclopedia de Pedagogía. España: Espasa Calpe S.A.
- Flick, Uwe (2007). *Introducción a la Investigación Cualitativa*. Ediciones Morata S. L., Madrid, 2004.
- Flick, Uwe (2015). *El diseño de Investigación Cualitativa*. Colección Investigación Cualitativa, Edición Morata.
- Freire, Paulo (1970). *Pedagogía del Oprimido*. Siglo Veintiuno Editores, 2º Edición 2005.
- Gibbs, Graham (2012). *El análisis de datos cualitativos en Investigación Cualitativa.* Colección: Investigación Cualitativa, Edición Morata.
- Gómez-Granell, Carmen (1989). *La Adquisición del Lenguaje Matemático: Un Difícil Equilibrio entre el Rigor y el Significado*. Comunicación, Lenguaje y Educación, 1: 3-4, 5-16, DOI: 10.1080 / 02147033.1989.10820896
- Goñi, Jesús (2011). *Didáctica de las matemáticas*. Barcelona: Editorial Graó
- Gusdorf, George (1957). *La Palabra*. Buenos Aires: Editorial Galatea Nueva Visión, 1º Edición.
- Guzmán, M. de (1997). *Del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático*. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES", nº38.
- Kieran, C. & Filloy, E. (1989). *El aprendizaje del Álgebra escolar desde una perspectiva Psicológica*. Revista Enseñanza de las matemáticas, vol. 7 nº 3.
- Mardones E. & Del Valle M. (2009). *Los mapas conceptuales en el aula matemática*. Revista ISI, Concepción, Chile.
- Martínez, José (2009). *Curso intensivo de matemáticas de la universidad de Alcalá de Henares.* Disponible en: http://www3.uah.es/jmmartinezmediano/mate0/CIM%20Tema%201%2001%20Lenguaje%20y%20objetos%20matemaicos.pdf
- MINEDUC (2015). *Currículum Nacional*
- MINEDUC (2016). *Orientaciones para la Gestión e Implementación del Currículum de la Educación Media Técnico-Profesional*. Recuperado de: http://media.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/28/2016/07/Orientaciones-para-la-gesti%C3%B3n-e-implementaci%C3%B3n-del-curr%C3%ADculum-de-la-Educaci%C3%B3n-Media-T%C3%A9cnico-Profesional.pdf
- MINEDUC (2016)*Planes y programas Matemáticas 2º Medio*
- MINEDUC (2016). *Programa de Estudio Segundo Año Medio.*

- MINEDUC (2018). *Bases Curriculares 7mo básico a 2do medio*. Recuperado de http://www.curriculumnacional.cl/inicio/.
- MINEDUC (2018). *El Lenguaje da Vida*. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-122046.html
- MINEDUC (2018). *Estándares de Formación Inicial Docent*e. Recuperado de http://portales.mineduc.cl/usuarios/cpeip/doc/201407081651580.PRESENTACION DIFUSIONNUEVOSESTANDARES.pdf
- MINEDUC (2018). *Lenguaje Oral y Ambiente Letrado, condiciones básicas para la enseñanza de la lectura y escritura*. Recuperado de: http://ftp.e-mineduc.cl/cursoscpeip/EJE_1/Lectura/C1_U2/Leccion2.pdf
- Moreira, Marco (1993). *Unidades de Enseñanza Potencialmente-UEPS*. Porto Alegre: Instituto de Física UFRGS.
- Ontoria, Antonio (2006). *Los mapas, otra forma de aprender*. Revista Magisterio,No. 18, Editorial Magisterio, Bogotá
- Ordoñez, Luis (2011). *Matemática y Lenguaje. Lo que la historia a unido, que no lo separe el hombre*. Popayán: Revista Modos y Nudos, Volumen 3 Nº30, enero-junio.
- Ortega, J. & Ortega, J. (2018). *Matemáticas: ¿Un problema de Lenguaje?*Sitio web: https://www.researchgate.net/publication/26428243_Matematicas_Un_problema_de_lenguaje.
- Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M. & Gorrochategui, M. (2012). *Los registros semióticos de representación en matemática.* Revista Aula Universitaria Vol. 13
- Palencia, A. & Talavera, R. (2004). *Estrategias innovadoras para la comprensión del lenguaje matemático*. Revista Ciencias de la Educación, número 4
- Pérez, L. & Tapia, X. (2002). *Explorando la Matemática Nivel 1*. Dirección de Programas especiales y asistencia técnica, UPLA. 1º Edición.
- Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University.
- Postman, Neil (1994): *Tecnópolis. La rendición de la cultura a la tecnología*. Galaxia Gutemberg/Círculo de Lectores. Barcelona.
- Puga, L., Rodríguez, J. & Toledo, A. (2016). *Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo.* Sophia, colección de Filosofía de la Educación, 20(1).
- RAE (Vigesimotercera edición). *Definición matemática*. Recuperado de http://dle.rae.es/?id=ObS8ajk
- Radford, L. y D'Amore (2006). *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*. Relime, 9(4), pp. 103-129. Disponible en línea: http://www.luisradford.ca/pub/58_Objectification3Spsh.pdf
- Rapley, Tim (2014). *Los análisis de la conversación, del discurso y de documentos en Investigación Cualitativa.* Colección Investigación Cualitativa, Edición Morata.
- Rico, Luis (1998). *Concepto de Currículum desde la Educación Matemática*. Granada: Revista de Estudios del Curriculum Vol. Nº1.
- Rico, Luis (1999). *Didáctica de la Matemática e Investigación.* Modesto Sierra, Universidad de Salamanca.
- Rivera, José (2009). *Interpretación de significados de la función cuadrática en un ambiente computacional, desarrollada por estudiantes de II de Bachillerato de la*

Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio. Tesis para optar al grado de máster en matemática educativa, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

- Robres, R., & Silva, C., (2003). *Estrategias para el aprendizaje de la matemática.* Valparaíso: Universidad de Playa Ancha, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas.
- Rojas, J. (2015). *Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos*. Enseñanza de las Ciencias, 33.1
- Sánchez, E., Orrantia, J. & Rosales, J. (1992). *Como Mejorar la Comprensión de Textos en el Aula*. Comunicación, Lenguaje y Educación.
- Tamayo, Óscar (2006). *Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas*. Revista Educación y Pedagogía, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, vol. XVIII, núm. 45.
- Toledo, Mónica (2000). *Planificación y evaluación en contextos educativos variados.* Dirección de programas especiales y asistencia tecnica UPLA
- Tyler, Ralph (1973). *Principios básicos del currículo*. Buenos Aires, Editorial Troquel, 5º Edición
- UNESCO (1982). *Perspectivas revista trimestral de educación*/vol. Xll, n°4. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0005/000524/052474so.pdf
- Urgilés, Guillermo (2016). *Aula, lenguaje y educación*. Sophia, colección de Filosofía de la Educación, 20(1).
- Vera, J., García, A., Peña, J. & Gargallo, B. (2000). *Criterios de selección de los contenidos del currículum.* Ediciones Universidad de Salamanca, Teoría de Educación.
- Zarzar, Carlos (2000). *La didáctica grupal*. Mexico: Editorial Progreso