



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICAS

CUERDAS NEGRAS Y POTENCIAS SUPERIORES EN LA CURVATURA

POR

MARCELA DE LA PAZ LAGOS FLORES

Tesis presentada a la
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción
para optar al grado académico de Doctor en Ciencias Físicas.

Director de Tesis : Dr. Julio Eduardo Oliva Zapata

Comisión : Dr. Andrés Fernando Anabalón Dupuy
Dr. Fabrizio Ernesto Canfora Tartaglia
Dr. Alex Giacomini

Agosto, 2018
Concepción, Chile



Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.



A Jorge, Pilar, Inés y los demás.

AGRADECIMIENTOS

Son muchas las personas a quienes en esta oportunidad me gustaría agradecer.

De mi vida entera, agradezco enormemente a mi familia por su compañía y cariño. A mis padres, Jorge y Pilar, por todo su esfuerzo, su gran apoyo y su cariño incondicional a lo largo de estos años y siempre. También a Inés, por hacerme sentir en casa cuando no lo estaba. A mis hermanas, por estar ahí. Y a mis abuelos, por su cariñosa preocupación.

De mis años en la Universidad de Concepción quisiera agradecer el compañerismo y cariño de mis amigos y colegas. En especial quiero agradecer a Carolina Finle, quien probablemente jamás leerá esto, por todo. Agradezco al profesor Luis Braga, por su confianza. Especialmente agradezco a los profesores Patricio Salgado y Juan Crisóstomo, por sus motivadoras clases que me llevaron a elegir la física teórica como camino. También a los profesores Fernando Izaurieta y Guillermo Rubilar, por sus generosa disposición. Agradezco a Patricia Luarte, Heraldo Manríquez y Juan Carlos Burgos por toda su amabilidad. Especialmente agradezco a Martita Astudillo su cariño y todas las largas conversaciones que mantuvimos. Dejo al final a Soledad Daroch. Agradezco la paciencia, diligencia y simpatía que siempre mantuvo conmigo, bajo todas las circunstancias durante estos años.

Durante el doctorado he tenido el agrado de trabajar junto al profesor Fabrizio Canfora. Agradezco todas sus discusiones, explicaciones y el tiempo dedicado en el transcurso de estos productivos años de colaboración. Han sido muy valiosos para mi. También extendiendo este agradecimiento a los coautores de las publicaciones que sirvieron en el desarrollo de la presente tesis y a los profesores Alex Giacomini, Andrés Anabalón y nuevamente a Fabrizio Canfora, por la lectura, revisión y comentarios sobre el manuscrito. Agradezco también a mi gran colega Aldo Vera, por todo su apoyo y colaboración.

Finalmente, agradezco enormemente a mi director de tesis, profesor Julio Oliva, por tener siempre la mejor disposición y motivación para el trabajo, además de su siempre presente amabilidad y simpatía. Gracias por las invaluable horas en la pizarra y el computador y por todo el conocimiento transmitido.

El desarrollo de esta tesis ha sido financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica mediante el proyecto CONICYT-PCHA/Doctorado Nacional/2014-21141229.

Tabla de Contenidos

Índice de Figuras	viii
Resumen	x
Abstract	xii
Introducción	1
1 Objetos extendidos en relatividad general	5
1.1 Relatividad General, $D = 4$	5
1.1.1 Agujeros negros en cuatro dimensiones	8
Soluciones clásicas	8
Schwarzschild	8
Reissner-Nordström	9
Constante cosmológica no nula	11
Termodinámica de agujeros negros	12
Propiedades generales en $D = 4$, $\Lambda = 0$	13
1.1.2 Objetos extendidos y el modelo sigma no lineal	15
Acción y ecuaciones de campo	16
Campo de materia y ansatz métrico	17
Cuerda negra tipo BTZ cargado	20

Termodinámica y estabilidad	23
1.2 Relatividad General en $D > 4$	29
2 Objetos extendidos en teorías de Lovelock	32
2.1 Teorías de Lovelock de orden n	34
2.1.1 Inestabilidad de branas negras en la teoría de Gauss-Bonnet	35
2.1.2 Teorías de Lovelock puras	41
2.2 Agujeros negros diónicos y potencias superiores en la curvatura .	44
2.2.1 Soluciones de agujero negro	47
$S^2 \times S^2 \times S^2 \times S^2$	47
$S^4 \times S^4$	50
2.2.2 Termodinámica	53
2.3 Cuerdas y branas negras cargadas en teorías de Lovelock	55
2.3.1 Nuevas cuerdas negras cargadas en Gauss-Bonnet-Maxwell	55
2.3.2 Teorías de Lovelock de orden n y p -formas	58
2.3.3 Nuevas p -branas negras cargadas	61
Lovelock cúbico y un campo Kalb-Ramond	61
Lovelock cuártico y 3-forma: soluciones magnéticamente	
cargadas	66
Lovelock cuártico y 3-forma: soluciones diónicas	68
Conclusiones	72
Referencias	75

Índice de Figuras

1.1	Horizontes de Killing de las cuerdas negras como función del parámetro de masa μ , con $b_1 = 1$ y $b_1 = 3$	22
1.2	Entropía del agujero negro y de la cuerda negra a igual masa en términos del horizonte de la cuerda R_+	26
1.3	Energía libre $F(T)$ como función de la temperatura T para la configuración de agujero negro para diferentes valores de los parámetros b_i	27
1.4	Energía libre $F(T)$ como función de la temperatura T para la configuración de cuerda negra para diferentes valores de los parámetros b_i	28
2.1	Modos inestables para cuerdas negras y p -branas negras en la teoría de Gauss-Bonnet 10-dimensional.	40
2.2	Funciones <i>lapse</i> para $(S^2)^4$ cargada bajo un campo de Maxwell y sin carga bajo $F_{(4)}$	52
2.3	Funciones <i>lapse</i> para agujeros negros con $(S^2)^4$ diónicos- $F_{(4)}$ y sin carga bajo Maxwell.	53
2.4	$f(r)$ de agujeros negros cargados para la teoría de Lovelock cúbica soportados por una 3-forma intensidad de campo.	65
2.5	$f(r)$ de agujeros negros cargados magnéticamente para teoría cuártica soportados por una 4-forma intensidad de campo.	69

2.6 Soluciones diónicas en teoría de Lovelock cuártica en dimensión
 $d = 14$ 71



Resumen

En esta tesis doctoral se presentan tres nuevas familias de soluciones analíticas que describen objetos extendidos en teorías de gravedad.

La primera familia corresponde a soluciones de cuerda negra en la teoría general de la relatividad en cuatro dimensiones con constante cosmológica negativa acoplado a un modelo sigma no lineal. La geometría en la sección transversal de estas cuerdas es la de un agujero negro tipo BTZ cargado, el radio de compactificación de la cuerda está determinado por los parámetros de la teoría.

En el contexto de las teorías de Lovelock puras, la segunda familia corresponde a soluciones de p -branas negras homogéneas soportadas por campos escalares libres sin masa. Los campos escalares, acoplados minimalmente, son proporcionales a las coordenadas a lo largo de las direcciones extendidas de las p -branas, y cuyo factor de proporcionalidad está relacionado con un valor negativo de la constante cosmológica.

Por otro lado, mostramos también que es posible construir objetos extendidos en teorías de Lovelock de orden n acopladas a campos de $(q-1)$ -formas cuando n es igual a q . Esta tercera familia de cuerdas y p -branas negras están caracterizadas por la masa, la carga y el volumen de las direcciones planas. Mostramos además cómo el ansatz utilizado en estas soluciones permite encontrar configuraciones de agujeros negros diónicos en modelos inspirados en teoría de cuerdas y, en

particular, estudiar el efecto que tienen las correcciones de orden superior en la curvatura en este tipo de soluciones.

Finalmente estudiaremos la estabilidad y la termodinámica de las soluciones mostradas. En particular mostramos que p -branas negras homogéneas, como soluciones de la teoría de Gauss-Bonnet, sufren de inestabilidades de Gregory-Laflamme al ser perturbadas por ondas esféricas, tal como ocurre en relatividad general.



Abstract

In the present thesis, three new families of analytical solutions that describe extended objects in gravity theories are presented.

The first family corresponds to black string solutions of the general theory of relativity in four dimensions with negative cosmological constant coupled to a non linear sigma model. The geometry on the transverse section of these strings is the one of a charged BTZ black hole, the compactification radii of the string is determined by the parameters of the theory.

In the context of the pure Lovelock theories, the second family corresponds to homogeneous black branes solutions supported by free massless scalar fields. The scalar fields, minimally coupled, are proportional to the coordinates along the extended directions of the branes, with a proportional factor related to a negative cosmological constant.

On the other hand, we also show that it is possible to construct extended objects in Lovelock theories of order n coupled to field of $(q - 1)$ -forms when n is equal to q . This third family of black strings and brack branes is characterized by the mass, the charge and the volume of the flat directions. We show also how the ansatz used on these solutions allow us to find configurations of dyonic black holes in models inspired by string theory and, in particular, to study the effect that higher order corrections have on the curvature in this type of solutions.

Finally, we will study the stability and thermodynamics. In particular, we show that homogeneous black branes, as solutions of the Gauss-Bonnet theory, suffer from Gregory-Laflamme instabilities under spherical waves perturbations, as occurs in general relativity.



Introducción

La existencia de agujeros negros, aceptada ampliamente por la comunidad científica, es una de las predicciones más destacables de la teoría general de la relatividad. Estos objetos son considerados una característica esencial del espacio-tiempo y, por lo tanto, cualquier teoría de gravedad que se considere razonable debe incluir necesariamente a estos objetos como soluciones.

Por otro lado, la idea de lograr unificar la interacción gravitacional con las demás fuerzas fundamentales de la naturaleza ha llevado a considerar que el Universo pueda poseer más dimensiones de las que podemos detectar y que podrían estar compactificadas. Esta idea, desarrollada en el contexto de teoría de cuerdas, dualidad *gauge*/gravedad, cosmología de *brane-world*, entre otras, ha motivado naturalmente el estudio de las propiedades de los agujeros negros en dimensiones mayores a cuatro, siendo estas significativamente diferentes al caso en cuatro dimensiones [1]. Por ejemplo, es bien sabido que los agujeros negros estacionarios asintóticamente planos en cuatro dimensiones y en vacío son caracterizados únicamente por su masa y momento angular, además de poseer necesariamente simetría esférica [2]. Sin embargo, en dimensiones mayores, diferentes geometrías del horizonte de eventos son permitidas. Simplemente agregando direcciones planas extendidas a una solución de agujero negro en relatividad general en altas dimensiones, soluciones con horizonte cilíndrico tales como cuerdas negras y p -branas negras son obtenidas (donde p es el número de direcciones extendidas tal

que $p = 1$ es una cuerda negra). Esto, lejos de ser un problema, permite describir objetos en teorías de gravedad en altas dimensiones cuyas secciones transversales pueden corresponder a los agujeros negros observables de relatividad general en cuatro dimensiones, y donde las dimensiones extras estarían compactificadas.

Las cuerdas y p -branas negras en relatividad general sufren de la llamada inestabilidad de Gregory-Laflamme [3]; esta es una inestabilidad perturbativa para longitudes de onda grande donde las branas son deformadas en una cadena de agujeros negros. Estas soluciones además describen el límite de alta rotación tanto del *black ring* en cinco dimensiones [4] como del agujero negro de Myers-Perry en dimensiones mayores o iguales a seis [5], soluciones que por lo tanto heredan la inestabilidad de Gregory-Laflamme de las p -branas negras, proporcionando evidencia de violación de censura cósmica en diversas configuraciones para datos iniciales genéricos.

Para la teoría general de la relatividad (en dimensión arbitraria) acoplada a campos de materia, existe vasta literatura sobre soluciones de agujeros negros con pelo (ver Ref. [1]), sin embargo, soluciones que describan objetos extendidos no se conocían hasta hace muy poco. En esta tesis mostraremos que al acoplar minimalmente ciertos campos de materia a relatividad general, cuerdas negras y p -branas negras pueden ser construidas. En particular, construimos una nueva familia de cuerdas negras en cuatro dimensiones donde el campo de materia proviene de un modelo sigma no lineal evaluado en el grupo $SU(2)$.

Ahora bien, en el contexto de gravedad en altas dimensiones, la teoría métrica más general que conduce a ecuaciones de segundo orden y que es compatible con la conservación del tensor de energía-momento es la teoría de Lovelock [6]. Esta es la generalización natural de la teoría de Einstein, que se reduce a relatividad general solo en dimensión tres y cuatro, pero en dimensiones mayores incluye términos con potencias superiores en la curvatura. Términos de orden

superior también aparecen en el contexto de teoría de cuerdas como correcciones a la gravedad de Einstein en la acción efectiva de bajas energías. En principio, la presencia de dichas contribuciones podría complicar la evolución causal, introduciendo fantasmas y violando la unitariedad, sin embargo, Zwiebach [7] y Zumino [8] observaron que los fantasmas desaparecen si la correcciones consisten en la continuación dimensional de las densidades de Euler, de manera que las ecuaciones de campo resultantes sean de segundo orden. Tal es el caso de la teoría de Lovelock alrededor de ciertos vacíos.

Algunas de las soluciones de agujero negro en estas teorías son muy diferentes respecto de las soluciones en relatividad general, ya que las contribuciones adicionales en la acción cambian notablemente la geometría y dinámica de las configuraciones, así como su estabilidad y propiedades termodinámicas.

En general, en cualquier teoría que prediga correcciones a relatividad general, como las comentadas anteriormente, de existir soluciones de objetos extendidos, se espera que al ser estos perturbados, y a medida que evolucionen en el espacio-tiempo, se haga manifiesto el sector en el que las correcciones con potencias altas en la curvatura juegan un rol importante. Consecuentemente, es natural buscar soluciones de objetos extendidos en este escenario. Sin embargo, para valores genéricos de las constantes de acoplamiento, no es posible *oxidar* trivialmente las soluciones de agujero negro en una determinada dimensión para obtener una cuerda negra, como sí ocurre en relatividad general, y se debe confiar en métodos numéricos para construir objetos extendidos. Por supuesto, el acoplamiento de estas teorías con campos de materia vuelve el problema aún más complicado de abordar.

El objetivo principal de esta tesis es estudiar la existencia de soluciones de objetos extendidos en ciertas teorías de Lovelock; en particular, en aquella familia donde solo el n -ésimo término está presente, y también en las llamadas teorías

de Lovelock puras, donde el n -ésimo término es acompañado de uno cosmológico. Veremos también que al incluir campos de materia a estas teorías, para determinados valores de los parámetros, soluciones analíticas de objetos extendidos pueden ser obtenidas y su estabilidad y termodinámica pueden ser estudiadas.

Esta tesis está dividida en tres capítulos.

En el capítulo I estudiaremos soluciones de objetos extendidos, tanto en vacío como en presencia de materia, en relatividad general en dimensión arbitraria. Comenzaremos con una revisión de las soluciones existentes en la literatura, lo que nos mostrará el panorama actual en esta área y nos permitirá introducir las convenciones usadas a lo largo de este trabajo. Mostraremos también una nueva familia de soluciones en relatividad general en cuatro dimensiones acoplada a un modelo sigma no lineal para el grupo $SU(2)$.

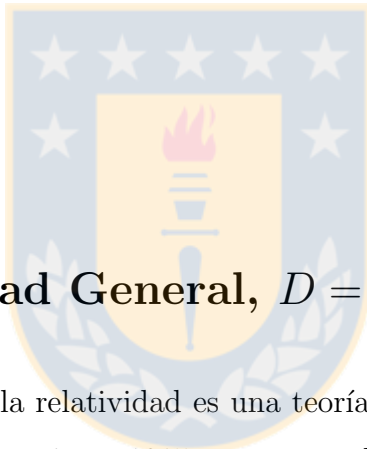
El capítulo II está dedicado al estudio de objetos extendidos en el contexto de las teorías de Lovelock. Primero estudiaremos la estabilidad de una familia de p -branas negras en la teoría de Gauss Bonnet en vacío. Posteriormente veremos cómo se pueden construir p -branas negras acoplando ciertas teorías de Lovelock a campos escalares libres y campos construidos con $(q - 1)$ -formas. Finalmente, analizaremos la relevancia de los términos de orden superior en la curvatura en modelos inspirados en teoría de cuerdas a través de soluciones de agujeros negros diónicos.

El último capítulo está dedicado a conclusiones y comentarios.

A lo largo de la presente tesis, a menos que se diga lo contrario, usaremos las unidades de Plack, donde la rapidez de la luz c , la constante reducida de Planck \hbar , la constante de gravitación universal G y la constante de Boltzmann k_B son iguales a la unidad, ($c = \hbar = k_B = 1$).

Capítulo 1

Objetos extendidos en relatividad general



1.1 Relatividad General, $D = 4$

La teoría general de la relatividad es una teoría geométrica para la gravedad publicada por Albert Einstein en 1915 y corresponde a la descripción actual de la interacción gravitatoria. Esta teoría generaliza la relatividad especial y la ley de gravitación universal de Newton, dando una descripción unificada de la gravedad como una propiedad geométrica del espaciotiempo; un continuo cuatridimensional compuesto de tres direcciones espaciales y una temporal. En particular, relatividad general relaciona directamente la curvatura del espaciotiempo con la energía y el momento de cualquier materia o radiación presente.

Formalmente, relatividad general describe la dinámica del espaciotiempo considerando a este como una variedad pseudo-Riemanniana M y tomando como campo dinámico al tensor métrico de esta, de componentes $g_{\mu\nu}$. La acción de

esta teoría es conocida como la acción de Einstein-Hilbert y es dada por

$$I = \frac{1}{16\pi} \int_M d^4x \sqrt{-g} R + I_{materia} , \quad (1.1)$$

donde g es el determinante de la métrica, R el escalar de Ricci e $I_{materia}$ denota la acción para algún campo de materia.

El escalar de Ricci es dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} , \quad (1.2)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci obtenido a partir del tensor de curvatura de Riemann $R^\mu{}_{\nu\sigma\rho}$ según $R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$.

El tensor de curvatura es dado en términos de la conexión $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ por

$$R^\mu{}_{\nu\sigma\rho} = \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} . \quad (1.3)$$

En el formalismo de segundo orden, la conexión se expresa en términos de la métrica según

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\beta g_{\gamma\sigma} + \partial_\gamma g_{\beta\sigma} - \partial_\sigma g_{\beta\gamma}) , \quad (1.4)$$

esto es, la conexión de Christoffel.

A partir de esta conexión definiremos la derivada covariante sobre un campo vectorial contravariante λ^ν como

$$\nabla_\mu \lambda^\nu = \partial_\mu \lambda^\nu - \Gamma^\nu{}_{\rho\mu} \lambda^\rho .$$

Aún cuando la acción (1.1) depende de segundas derivadas del campo métrico, las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas, provenientes del principio de acción estacionaria, son de segundo orden y corresponden a las ecuaciones de campo de

Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\kappa T_{\mu\nu} , \quad (1.5)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ es el tensor de Einstein, y $T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\delta I_{\text{materia}}}{\delta g^{\mu\nu}}$. Este último describe la distribución de energía-momento del campo de materia presente en la acción. La derivada covariante de las ecuaciones de Einstein implica la conservación del tensor de energía-momento dado que $\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$ idénticamente, luego

$$\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0 . \quad (1.6)$$

De forma consistente con esta ley de conservación para los campos de materia, es posible introducir al lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein (1.5) un término proporcional a la métrica, tal que las ecuaciones de campo quedan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

donde la constante Λ es conocida como la constante cosmológica.

El principio de acción asociado a estas ecuaciones corresponde a la acción de Hilbert más el término

$$I_{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} , \quad (1.8)$$

de tal forma que en cuatro dimensiones, la acción más general para el campo métrico que lleva a ecuaciones de campo de segundo orden y es consistente con la conservación del tensor energía-momento de los campos de materia (1.6) queda

$$I_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x (R - 2\Lambda) . \quad (1.9)$$

Desde que esta teoría fue propuesta y hasta la actualidad, muchas notables predicciones han sido extensamente estudiadas. Dentro de los testeos de la rel-

atividad general podemos destacar entre los clásicos el avance del perihelio de Mercurio, la deflexión de la luz, el corrimiento al rojo gravitacional. Pruebas más modernas incluyen la medición del efecto Shapiro, la dilatación temporal gravitacional, testeos del principio de equivalencia, entre otros. Mediciones de campo fuerte incluyen los lentes gravitacionales, la medición de ondas gravitacionales y *timing pulsars*.

El desarrollo de este trabajo se enfoca en una de estas predicciones; las soluciones de agujeros negros. Durante la década de 1970 las propiedades clásicas de los agujeros negros asintóticamente planos fueron comprendidas, mostrando que estas soluciones representan objetos bastante simples; agujeros negros estacionarios y en vacío están únicamente caracterizados por su masa y momento angular. La evidencia astrofísica para estas soluciones ha crecido dramáticamente en las últimas décadas y ya es ampliamente aceptado que los agujeros negros están presentes en nuestro universo.

1.1.1 Agujeros negros en cuatro dimensiones

Soluciones clásicas

Schwarzschild

En 1916, pocos meses después de que Einstein presentara la formulación final de la relatividad general, Schwarzschild publicó la primera solución exacta de la teoría. La métrica de esta solución es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.10)$$

donde el parámetro M representa la masa total y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ es el elemento de línea de la 2-esfera. Esta métrica resuelve las ecuaciones

de Einstein con $T_{\mu\nu} = 0$, luego es llamada una solución de vacío. Dado que la métrica es estática y esféricamente simétrica, originalmente fue interpretada como la solución que describe la geometría fuera de una estrella esférica estática. Del análisis de los invariantes de curvatura, en específico del cuadrado del tensor de Riemann, el invariante de Kretschmann, podemos ver que la métrica de Schwarzschild tiene una singularidad de curvatura en $r = 0$. La superficie $r = 2M$ es llamada el *horizonte de eventos* y la región completa al interior, $r \leq 2M$, es un *agujero negro*.

Reissner-Nordström

Luego de unos años, la generalización al caso cargado fue encontrada por Reissner [9] y Nordström [10]. La métrica de esta solución toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.11)$$

siendo M nuevamente la masa y Q la carga. Para un agujero negro cargado eléctricamente, la única componente del campo de Maxwell no nula es $F_{rt} = Q/r^2$. Para un agujero negro cargado magnéticamente, la única componente no nula es $F_{\theta\phi}$. Esta configuración es solución de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell provenientes de la acción

$$I_{EM} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) . \quad (1.12)$$

Dependiendo del tamaño relativo de los valores de M y Q , pueden darse tres casos. Para analizar estos casos denotamos $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ y consideramos $Q > 0$.

Para $M > Q$ y a diferencia de la solución de Schwarzschild, la singularidad

aquí es tipo tiempo y puede ser evitada. La superficie $r = r_+$ es el horizonte de eventos y la superficie $r = r_-$ es el horizonte interno de Cauchy. Este último marca el límite donde un dato inicial sobre una superficie tipo espacio, desde una región asintótica a otra, tiene una evolución única. Pasado este horizonte, la evolución puede ser modificada por condiciones de borde desconocidas en la singularidad.

Se ha demostrado que el horizonte interno es inestable [11]; la perturbación más pequeña causa que la curvatura diverja. Dado que no hay materia cargada, la carga encerrada dentro de una esfera de radio r es independiente de r . Luego, esta carga puede ser vista como localizada en la singularidad.

El caso $M = Q$ es llamado el límite extremal. Corresponde a la carga máxima que puede tener un agujero negro de masa M . En este caso $r_+ = r_-$, entonces el espaciotiempo tiene un único horizonte de eventos que es degenerado. La métrica toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{Q}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{Q}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (1.13)$$

La distancia propia al horizonte desde cualquier punto $r > Q$ a lo largo de una superficie a t constante es infinita. Esto puede llevar a pensar que el agujero negro ha retrocedido a una distancia infinita pero no, observadores en caída libre llegan al horizonte en un tiempo propio finito.

Finalmente, el caso donde $Q > M$ no describe agujeros negros. Acá g_{tt} es negativa en todas partes, luego $r = 0$ es una singularidad tipo tiempo desnuda. Formar una singularidad de este tipo desde condiciones iniciales suaves no es posible, colapsar a $r = 0$ una bola de polvo cargado con $Q > M$ requeriría una cantidad de energía infinita, debido a que la repulsión Coulombiana excede a la atracción gravitacional. En las secciones siguientes se menciona la posibilidad de

formación de singularidades desnudas en otros contextos.

Constante cosmológica no nula

En ausencia de materia, las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica no nula (1.7) quedan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 . \quad (1.14)$$

Tomando su traza,

$$-R + 2\Lambda = 0 , \quad (1.15)$$

y reemplazando, las ecuaciones de campo se reescriben como

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} . \quad (1.16)$$

Si $\Lambda > 0$, la solución maximalmente simétrica es llamada espaciotiempo de de Sitter. Un agujero negro en este espaciotiempo es dado por [12]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 , \quad (1.17)$$

solo si $3M \leq 1/\sqrt{\Lambda}$. Si esto no sucede, la singularidad en $r = 0$ queda descubierta.

Si $\Lambda < 0$, la solución maximalmente simétrica es el espaciotiempo anti-de Sitter. Un agujero negro en el espacio anti-de Sitter es dado por

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{|\Lambda|}{3}r^2 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 + \frac{|\Lambda|}{3}r^2 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (1.18)$$

Acá, para cualquier valor de la masa existe un único valor para el radio del horizonte. Como todos los agujeros negros que han sido discutidos hasta ahora, este último también tiene un horizonte de topología esférica, sin embargo el espacio

anti-de Sitter también admite agujeros negros con horizonte planar [13].

Termodinámica de agujeros negros

Aunque aún seguiremos enfocados en espaciotiempos cuatridimensionales, las propiedades termodinámicas de agujeros negros discutidas en lo que sigue son válidas en dimensión arbitraria.

Para un agujero negro de masa M , momento angular J , velocidad angular Ω_H , área de horizonte A y con κ_S la gravedad superficial, las tres leyes de la mecánica de los agujeros negros, derivadas primero por Bardeen, Carter y Hawking en Ref. [14], pueden ser resumidas como sigue:

- κ_S es constante sobre el horizonte de un agujero negro estacionario,
- $\delta M = \kappa_S \delta A / (8 \pi) + \Omega_H \delta J$,
- $\delta A \geq 0$.

Existe una clara analogía entre estas tres leyes y las leyes de la termodinámica, donde κ_S jugaría el rol de temperatura y A el rol de entropía. El hecho de que esto sea algo más que una analogía fue clarificado por Hawking al acoplar campos de materia cuánticos a un agujero negro clásico, mostrando que estos emiten esencialmente radiación térmica a una determinada temperatura, dada por [15]

$$T = \frac{\kappa_S}{2\pi}. \quad (1.19)$$

Comparar la segunda ley con la relación estándar de la termodinámica $\delta E = T\delta S - P\delta V$, lleva a que los agujeros negros tienen la entropía

$$S = \frac{A}{4}. \quad (1.20)$$

La temperatura del agujero negro de Schwarzschild es $T = 1/(8\pi M)$. Dado que esta aumenta a medida que el agujero negro irradia energía, este sistema tiene calor específico negativo. Un agujero negro de masa solar tiene una temperatura extremadamente baja y una enorme entropía, mucho más grande que la entropía de la materia que colapsó para formarlo. Esto sugiere que los agujeros negros tienen un gran número de microestados. La descripción cuántica de estos microestados fue lograda a mediados de los 90's [16].

Propiedades generales en $D = 4$, $\Lambda = 0$

- **Unicidad:** Birkhoff mostró que la única solución esféricamente simétrica del sistema Einstein-Maxwell es la métrica de Reissner-Nordström. Posteriormente, Israel mostró que la única solución del sistema Einstein-Maxwell estática y asintóticamente plana con horizonte de eventos suave es la solución de Reissner-Nordström. Finalmente Robinson, siguiendo trabajos previos de Carter y Hawking, mostró que la única solución de vacío estacionaria y asintóticamente plana de horizonte suave es la solución de Kerr, la que describe un agujero negro rotante [17].

El resultado neto de los teoremas anteriores indica que los agujeros negros estacionarios en la teoría Einstein-Maxwell quedan únicamente determinados por cargas conservadas en infinito; su masa, su carga y su momento angular.

- **Estabilidad:** Se ha mostrado que las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström son estables bajo perturbaciones linealizadas [18]. Una pregunta abierta mucho más compleja es cuándo los agujeros negros son estables bajo perturbaciones finitas. El espacio de Minkowski se ha probado estable bajo este criterio, pero la demostración, aún en este caso requiere de un sofisticado análisis global [19]. Se espera que los agujeros negros en cuatro

dimensiones sean estables incluso bajo perturbaciones no lineales. Fuerte evidencia para eso viene de estudios numéricos de colisiones y fusión de agujeros negros.

- **Topología del horizonte:** Un agujero negro estacionario asintóticamente plano debe tener topología esférica. Esto fue probado por Hawking (ver Ref. [2]). Una prueba alternativa que usa la censura topológica establece que en un espaciotiempo asintóticamente plano satisfaciendo la condición de energía nula, cada curva causal desde el infinito nulo pasado hasta el infinito nulo futuro puede ser continuamente deformada, con sus puntos finales fijos, a una vecindad simplemente conectada del infinito nulo [20]

- **Censura cósmica:** Todas las soluciones de agujeros negros discutidas anteriormente tienen singularidades de curvatura. Durante un tiempo se creyó que esto era un resultado de la simetría impuesta para encontrar soluciones exactas. Penrose, en Ref. [21], mostró que esto no es cierto; independientemente de la simetría, en un proceso de colapso gravitacional existe un punto de no retorno, que una vez alcanzado, inevitablemente lleva a la formación de una singularidad. Este teorema no asegura la existencia de un horizonte de eventos. La suposición de que estas singularidades desnudas no se forman genéricamente es la conjetura de censura cósmica [22]. Aún no se ha demostrado si esta conjetura es cierta, pero hasta ahora parece serlo en cuatro dimensiones.

De lo anterior tenemos que las soluciones de agujeros negros en dimensión $D = 4$, con $\Lambda = 0$, son especiales; estas deben tener topología esférica, ser especificadas por unos pocos parámetros y siempre estables. Estas propiedades son un resultado restringido a espaciotiempos de cuatro dimensiones, y no pueden

ser generalizados a dimensión arbitraria [23].

1.1.2 Objetos extendidos y el modelo sigma no lineal

En la sección anterior dimos cuenta de resultados y propiedades de estas soluciones de relatividad general en el vacío electromagnético.

Luego de la aparición de los teoremas de unicidad, investigadores comenzaron a considerar relatividad general acoplada a otros campos de materia, tales como campos escalares. En muchos casos se logró probar la no existencia de agujeros negros estacionarios con campos de materia no triviales fuera del horizonte. Estos resultados empezaron a ser conocidos como teoremas de no pelo. Más tarde, sin embargo, surgieron varios resultados que permitían la presencia de estos campos fuera del agujero negro. Por ejemplo, si la materia admite una solución solitónica en ausencia de gravedad, usualmente es posible incluir un agujero negro pequeño sin destruir el solitón [24]. Recientemente se dio cuenta que campos escalares estáticos y cargados pueden existir fuera de un agujero negro cargado en espaciotiempo anti-de Sitter [25].

En lo queda de este capítulo mostraremos qué ocurre cuando acoplamos el modelo sigma no lineal a la teoría de Einstein. Mostraremos que en esta teoría, además de existir una solución de agujero negro con pelo, es posible construir un tipo de solución llamada cuerda negra. Esto es, un objeto extendido a lo largo de una dirección y cuyas secciones transversales son agujeros negros en una dimensión menor. Las cuerdas negras son casos particulares de casos más generales, llamados branas negras; espaciotiempos producto de agujeros negros y direcciones extendidas, y en las que profundizaremos en el siguiente capítulo.

Acción y ecuaciones de campo

El modelo sigma no lineal es una teoría de campos efectiva con múltiples aplicaciones en física, en áreas que van desde la mecánica estadística hasta la teoría de cuerdas, pasando por muchas otras. En particular, el modelo sigma no lineal para el grupo de simetría interno $SU(2)$ permite describir la dinámica de los piones en sectores de bajas energías (ver [26, 27] y sus referencias). Al acoplar el modelo sigma no lineal con relatividad general es posible describir objetos tales como agujeros negros y estrellas soportados por este tipo de materia bosónica, así como solitones autogravitantes. Soluciones analíticas en este modelo son difíciles de encontrar, sin embargo, incluyendo un potencial de interacción adecuado, algunas soluciones analíticas interesantes pueden ser construidas [28].

En esta subsección veremos cómo se pueden construir de forma analítica soluciones de cuerda negra con constante cosmológica negativa, cuya geometría en la sección transversal de la cuerda es la de un agujero negro BTZ cargado. También estudiaremos la estabilidad de esta solución al comparar sus potenciales termodinámicos con los de un agujero negro construido en este mismo escenario. Este es el primer resultado original de esta tesis y los detalles se pueden encontrar en Ref. [29].

La teoría de Einstein acoplada al modelo sigma no lineal es descrita por la acción

$$I = I_{\text{EH}} + I_{\text{NLSM}} , \quad (1.21)$$

donde I_{EH} es la acción de Einstein-Hilbert definida en (1.7) e I_{NLSM} es la con-

tribución del modelo sigma no lineal dada por

$$I_{\text{NLSM}} = \frac{K}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \text{Tr} (R^\mu R_\mu) , \quad (1.22)$$

donde $R_\mu = U^{-1} \nabla_\mu U$, siendo ∇_μ la derivada covariante y U un elemento del grupo $SU(2)$ tal que $R_\mu = R_\mu^i \tau_i$. Aquí $\tau_k = i\sigma_k$ son los generadores del grupo, σ_k son las matrices de Pauli, con $k = 1, 2, 3$ y K un parámetro positivo fijado por comparación con datos experimentales. Las ecuaciones de campo, obtenidas al variar la acción (1.21) respecto de la métrica y el campo fundamental U , son dadas por

$$\nabla^\mu R_\mu = 0 , \quad (1.23)$$

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (1.24)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, el tensor de energía-momento es dado por

$$T_{\mu\nu} = - \frac{K}{2} \text{Tr} \left[R_\mu R_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^\alpha R_\alpha \right] , \quad (1.25)$$

y desde luego $\kappa = 8\pi G$.

Campo de materia y ansatz métrico

Un ansatz métrico natural en cuatro dimensiones que puede describir agujeros negros con horizonte plano así como cuerdas negras es

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)d\theta^2 + D(r)d\phi^2 , \quad (1.26)$$

donde el rango de las coordenadas angulares va como

$$0 \leq \theta \leq \pi , \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi . \quad (1.27)$$

Para el contenido de materia consideraremos el campo escalar U en la representación de Euler de un elemento del grupo $SU(2)$, a saber

$$U = e^{\tau_3 u_1(x^\mu)} e^{\tau_2 u_2(x^\mu)} e^{\tau_3 u_3(x^\mu)} , \quad (1.28)$$

con u_i funciones reales arbitrarias, siendo los ángulos de Euler. El ansatz anterior es la generalización más natural del ansatz usado en [30, 31, 32, 33, 34] a configuraciones con variedad base plana tanto en el modelo sigma no lineal como en su generalización, el modelo de Skyrme.

Una elección particularmente simple y útil para el campo de materia, en concordancia con la métrica (1.26) escogida, es considerar $u_1(x^\mu) = 0$ y los demás ángulos de Euler lineales en las coordenadas angulares, luego (1.28) queda

$$U = \begin{pmatrix} e^{\frac{ib_2\phi}{2}} \cos(\frac{b_1\theta}{2}) & e^{-\frac{ib_2\phi}{2}} \sin(\frac{b_1\theta}{2}) \\ -e^{\frac{ib_2\phi}{2}} \sin(\frac{b_1\theta}{2}) & e^{-\frac{ib_2\phi}{2}} \cos(\frac{b_1\theta}{2}) \end{pmatrix} , \quad (1.29)$$

donde $u_2(\theta) = b_1\theta/2$ y $u_3(\phi) = b_2\phi/2$, con los b_i constantes arbitrarias.

Con lo anterior, es directo comprobar que las ecuaciones de campo (1.23) con el ansatz en Ecs. (1.28) y (1.29) son satisfechas idénticamente en cualquier métrica de la forma (1.26). Esta es una de las ventajas principales de las técnicas desarrolladas en [35, 36, 37], donde se muestra que aún cuando el ansatz no posea simetría esférica, las ecuaciones de campo se simplifican notablemente si el tensor de energía-momento sí presenta esta simetría, como en el caso en consideración, es decir,

$$\mathcal{L}_{V_j} U \neq 0 , \quad \mathcal{L}_{V_j} T_{\mu\nu} = 0 , \quad (1.30)$$

con \mathcal{L}_{V_j} la derivada de Lie a lo largo de las rotaciones espaciales generadas por

el campo vectorial V_j . Esta idea ha sido particularmente útil para construir soluciones en el modelo de Skyrme, tanto en espaciotiempos planos como en espaciotiempos curvos. En particular, en Ref. [38], usando el llamado ansatz del erizo generalizado, que satisface las ecuaciones en (1.30), la primera solución que describe skyrmiones autogravitantes fue construida. El modelo de Skyrme, anteriormente mencionado, corresponde al modelo sigma no lineal con un término adicional que permite describir grados de libertad fermiónicos y que en espaciotiempos planos admite soluciones solitónicas estáticas con carga topológica.

Como estamos interesados en soluciones con horizontes compactos necesitamos imponer condiciones de borde (anti)periódicas para el campo U (ver [26, 27]). En este caso, cualquier campo de la forma (1.29) que sea solución de las ecuaciones de campo para la métrica (1.26) debe satisfacer

$$U(\theta, \phi) = \pm U(\theta + n\pi, \phi + 2m\pi) ,$$

con n, m números enteros. De lo anterior se sigue que las constantes de integración b_i deben ser cuantizadas,

$$\{b_1, b_2\} \in \mathbb{N} .$$

En principio es posible escoger un rango de coordenadas diferente para reescalar estos parámetros con las funciones métricas. Sin embargo, siendo constantes de integración del campo de materia, los parámetros b_i no pueden ser completamente reabsorbidos de la solución. En efecto, estos parámetros tienen un sentido físico que detallaremos más adelante.

Hasta ahora hemos reducido de manera consistente el sistema completo a únicamente las ecuaciones de Einstein con tensor de energía-momento del modelo sigma no lineal. En principio, tenemos cuatro ecuaciones diferenciales no lineales acopladas

$$\begin{aligned}
& 8A'(CD)' + A \left[B(b_2^2 \kappa K(b_1^2 \lambda + 4C) + 4D(b_1^2 \kappa K + 8\Lambda C)) + 8C'D' \right] = 0, \\
& \quad 8BCD^2 A'^2 + 8ACD [A'(DB' - BD') - 2BDA''] \\
& + A^2 \left[B^2 D(b_1^2 \kappa K(b_2^2 \lambda + 4D) - 4C(b_2^2 \kappa K + 8\Lambda D)) + 8CDB'D' + 8BC(D'^2 - 2DD'') \right] = 0, \\
& \quad 8BC^2 DA'^2 + 8ACD [A'(CB' - BC') - 2BCA''] \\
& + A^2 \left[B^2 C(b_2^2 \kappa K(b_1^2 \lambda + 4C) - 4D(b_1^2 \kappa K + 8\Lambda C)) + 8CDB'C' + 8BD(C'^2 - 2CC'') \right] = 0, \\
& \quad B^2 CD [b_1^2 \kappa K(b_2^2 \lambda + 4D) + 4C(b_2^2 \kappa K + 8\Lambda D)] - 8CDB'(CD)' \\
& \quad - 8B [C^2 D'^2 + D^2(C'^2 - 2CC'') - CD(C'D' + 2CD'')] = 0.
\end{aligned}$$

Sin embargo es posible mostrar que una de estas ecuaciones es combinación de las restantes debido a la identidad de Bianchi y la forma del ansatz métrico respecto del campo de materia.

Cuerda negra tipo BTZ cargado

Cuando escogemos $B(r) = 1/A(r)$, $C(r) = r^2$ y $D(r) = L^2$, con L una constante arbitraria, las ecuaciones de Einstein se satisfacen y llevan a que

$$A(r) = -\mu - \frac{b_1^2 \kappa K}{4} \log(r) - \frac{\Lambda}{2} r^2, \quad L^2 = -\frac{b_2^2 \kappa K}{4\Lambda}.$$

En el caso en el que la constante cosmológica es negativa y la constante de integración $\mu > 0$, la métrica resultante queda

$$\begin{aligned}
ds^2 = & - \left(-\mu - \frac{b_1^2 \kappa K}{4} \log(r) + \frac{|\Lambda|}{2} r^2 \right) dt^2 \\
& + \frac{1}{-\mu - \frac{b_1^2 \kappa K}{4} \log(r) + \frac{|\Lambda|}{2} r^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + \frac{b_2^2 \kappa K}{4|\Lambda|} d\phi^2.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Esta solución corresponde a una cuerda negra con una dirección ϕ compactificada, cuyo radio de compactificación $L = \frac{b_2\sqrt{\kappa K}}{2\sqrt{|\Lambda|}}$ ha sido fijado por las ecuaciones de campo. La métrica 3-dimensional, correspondiente a la hipersuperficie a ϕ constante se asemeja al agujero negro BTZ cargado [39] con masa μ y carga al cuadrado $b_1^2\kappa K/4$.

El modelo sigma no lineal induce una carga eléctrica efectiva en la métrica 3-dimensional que define a la cuerda negra. Es importante notar que, a diferencia de lo que pasa, por ejemplo, en la cuerda negra BTZ construida en [40], la presente cuerda negra BTZ cargada no tiene un factor de deformación, dado que la métrica es en efecto el producto directo de un BTZ cargado con S^1 . Es también importante notar que no es posible apagar el modelo sigma no lineal con tal de obtener una solución gravitacional pura, dado que el factor S^1 sería singular. En particular, el parámetro b_1 juega el rol de una carga eléctrica efectiva mientras que el parámetro b_2 determina el tamaño de la dirección compactificada de la cuerda negra.

Como la gran mayoría de los agujeros negros cargados, esta cuerda posee tanto un horizonte interno como uno externo R_{\pm} . Desafortunadamente, debido a la presencia de la función trascendental en $A(r)$, la posición del horizonte no puede ser escrita usando funciones elementales, sino solo a través de la función Lambert- \mathcal{W} , también conocida como la función log producto, en la forma

$$R_+ = \frac{b_1\sqrt{\kappa K}}{2} \sqrt{\frac{1}{\Lambda} \mathcal{W}_{-1} \left[\frac{4\Lambda}{b_1^2\kappa K} \exp\left(\frac{-8\mu}{b_1^2\kappa K}\right) \right]}, \quad (1.32)$$

$$R_- = \frac{b_1\sqrt{\kappa K}}{2} \sqrt{\frac{1}{\Lambda} \mathcal{W}_0 \left[\frac{4\Lambda}{b_1^2\kappa K} \exp\left(\frac{-8\mu}{b_1^2\kappa K}\right) \right]}. \quad (1.33)$$

Como puede ser visto de la Figura 1.1, el horizonte de eventos R_+ no se puede anular.

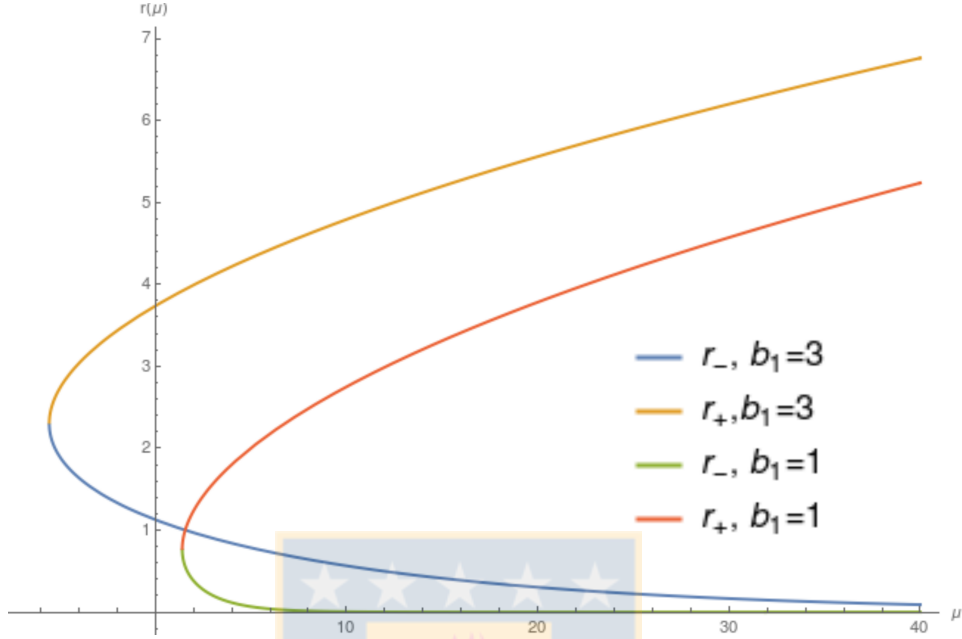


Figura 1.1: Horizontes de Killing de las cuerdas negras como función del parámetro de masa μ , con $b_1 = 1$ y $b_1 = 3$.

En ambos casos el horizonte R_+ tiene una cota por abajo. Para ciertos valores de b_1 el caso extremo no es físicamente accesible para valores positivos del parámetro de masa μ . Fuente: Elaboración propia.

En la teoría de Einstein acoplada al modelo sigma no lineal, y dentro de nuestro ansatz definido en las ecuaciones (1.26), (1.28) y (1.29), existe además una solución de agujero negro con constante cosmológica negativa construida en [41] y generalizada al modelo de Skyrme en [29]

$$ds^2 = - \left(-\frac{b_1^2 \kappa K}{4} - \frac{m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 + \frac{dr^2}{-\frac{b_1^2 \kappa K}{4} - \frac{m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2} + r^2 d\theta^2 + \frac{b_2^2}{b_1^2} r^2 d\phi^2 . \quad (1.34)$$

Esta métrica representa un agujero negro con pelo y corresponde a la generalización natural con horizonte plano de la métrica esférica encontrada en [37]. Agujeros negros con horizontes planos son especialmente relevantes en vista de sus aplicaciones holográficas (ver por ejemplo [40]). El horizonte de eventos r_+

está localizado en

$$r_+ = \frac{b_1^2 \kappa K \Lambda - \left(12m\Lambda^2 + \sqrt{\Lambda^3(b_1^6(\kappa K)^3 + 144m^2\Lambda)}\right)^{2/3}}{2\Lambda \left(12m\Lambda^2 + \sqrt{\Lambda^3(b_1^6(\kappa K)^3 + 144m^2\Lambda)}\right)^{1/3}} . \quad (1.35)$$

Termodinámica y estabilidad

En esta sección estudiaremos la termodinámica de la solución de cuerda negra aquí construida. También realizaremos un análisis de la estabilidad de esta solución a través de la comparación de los potenciales termodinámicos del agujero negro y la cuerda negra.

Para la solución de cuerda negra podemos calcular la temperatura, entropía y masa. Respectivamente, y en términos del horizonte de eventos R_+ , tenemos

$$T_{\text{BS}} = -\frac{4\Lambda R_+^2 + b_1^2 \kappa K}{16\pi R_+} , \quad (1.36)$$

$$S_{\text{BS}} = \frac{\pi^2 b_2 \sqrt{\kappa K} R_+}{4\sqrt{-\Lambda}} , \quad (1.37)$$

$$M_{\text{BS}} = \frac{b_2 \pi \mu \sqrt{\kappa K}}{16\sqrt{-\Lambda}} = -\frac{b_2 \sqrt{\kappa K} \pi}{64\sqrt{-\Lambda}} (2R_+^2 \Lambda + b_1^2 \kappa K \log R_+) , \quad (1.38)$$

mientras, para el agujero negro de radio de horizonte r_+ , tenemos

$$T_{\text{BH}} = -\frac{\Lambda r_+}{4\pi} - \frac{b_1^2 \kappa K}{16\pi r_+} , \quad (1.39)$$

$$S_{\text{BH}} = \frac{b_2 \pi^2 r_+^2}{2b_1} , \quad (1.40)$$

$$M_{\text{BH}} = \frac{b_2 \pi m}{4b_1} = -\frac{b_2 \pi r_+}{48b_1} (4\Lambda r_+^2 + 3b_1^2 \kappa K) . \quad (1.41)$$

Del análisis de la capacidad calorífica, la que se define como

$$C = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) , \quad (1.42)$$

es posible inferir la estabilidad termodinámica local de una solución. Escrita en términos de los radios de los horizontes de eventos R_+ y r_+ , para la cuerda negra y el agujero negro, respectivamente, las capacidades caloríficas son dadas por

$$C_{\text{BS}} = \frac{b_2 \sqrt{\kappa K} \pi^2 R_+}{4\sqrt{-\Lambda}} \left(\frac{4R_+^2 \Lambda + b_1^2 \kappa K}{4R_+^2 \Lambda - b_1^2 \kappa K} \right) , \quad (1.43)$$

y

$$C_{\text{BH}} = \frac{b_2 \pi^2 r_+^2}{b_1} \left(\frac{b_1^2 K \kappa + 4r_+^2 \Lambda}{4r_+^2 \Lambda - b_1^2 K \kappa} \right) . \quad (1.44)$$

La estabilidad bajo fluctuaciones térmicas ocurre cuando el signo de la capacidad calorífica es positiva, lo que significa para las soluciones de agujero negro y de cuerda negra que ambos radios del horizonte deben ser mayores a $\frac{b_1 \sqrt{\kappa K}}{2\sqrt{-\Lambda}}$. Sin embargo, esta condición es automáticamente satisfecha para el horizonte de eventos de ambas configuraciones.

Ahora bien, nos podemos preguntar si la cuerda negra podría ser afectada por una inestabilidad de Gregory-Laflamme, donde la cuerda colapsaría en una línea de agujeros negros [3, 42].

Desafortunadamente, debido a la complejidad de las ecuaciones de campo, para perturbaciones lineales el sistema no puede ser desacoplado y obtener una ecuación maestra para alguna de las componentes de la perturbación; por consiguiente, no es posible integrar numéricamente el sistema en la forma de Gregory-Laflamme y estudiar los modos inestables de la solución. No obstante, podemos analizar la estabilidad y las transiciones de fase desde el punto de vista de la termodinámica.

Una condición necesaria para que este fenómeno ocurra, como ha sido propuesto en [43], es la negatividad de la cantidad

$$\frac{\partial M}{\partial S} = -\frac{b_1^2 \kappa K + 4R_+^2 \Lambda}{16\pi R_+} ,$$

pero en las regiones de estabilidad termodinámica local de la cuerda esto no es posible. Efectivamente, de la inspección de la entropía de ambas soluciones, para un mismo valor de la masa, se reafirma la ausencia de una inestabilidad de Gregory-Laflamme en este escenario. Para ver esto podemos considerar la igualdad de las masas en las ecuaciones (1.41) y (1.38), para expresar r_+ como función de R_+ y luego graficar la entropía del agujero negro y de la cuerda negra como funciones de R_+ . El comportamiento de las entropías en la Figura 1.2 sugiere la no existencia de inestabilidad debido a que la entropía del agujero negro, a igual masa y parámetros b_i , es siempre mayor que la entropía de la solución de cuerda negra.

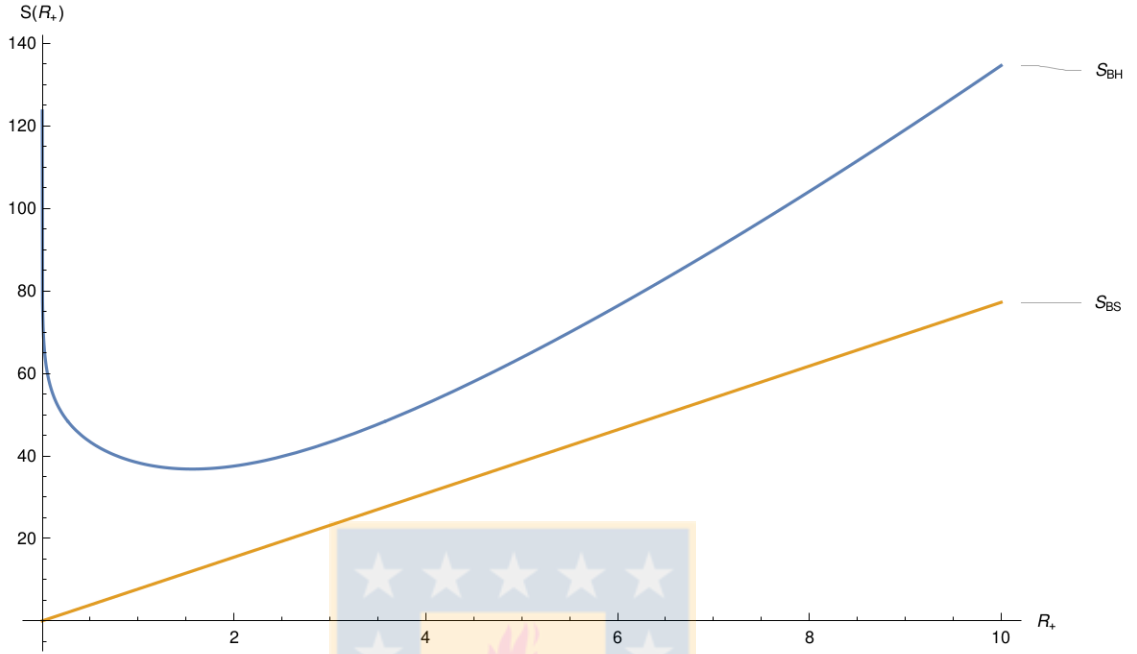


Figura 1.2: Entropía del agujero negro (azul) y de la cuerda negra (amarillo) a igual masa en términos del horizonte de la cuerda R_+ .

La entropía del agujero negro está siempre por arriba de la entropía de la cuerda, por lo tanto no se espera que la cuerda decaiga en una configuración de agujero negro para el conjunto de parámetros escogidos. Aquí hemos considerado $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $\Lambda = -7$, $\kappa = 1$ y $K = 1$. Fuente: Elaboración propia.

Otro acercamiento a la estabilidad termodinámica puede venir del estudio de la energía libre de las dos soluciones. Consideremos la energía libre $F = M - TS$ de la cuerda negra y del agujero negro como funciones de sus horizontes de eventos

$$F_{\text{BS}} = \frac{b_2 \sqrt{\kappa K} \pi}{64 \sqrt{-\Lambda}} [b_1^2 \kappa K + 2R_+^2 \Lambda - b_1^2 \kappa K \log(R_+)] \quad , \quad (1.45)$$

$$F_{\text{BH}} = \frac{b_2 \pi r_+}{96 b_1} (4\Lambda r_+^2 - 3b_1^2 \kappa K) \quad . \quad (1.46)$$

Para obtener la energía libre en términos de la temperatura es suficiente invertir las ecuaciones (1.36) y (1.39), tomar la única raíz positiva para obtener $r_+(T)$ y $R_+(T)$ y sustituir respectivamente en (1.45) y (1.46). Las expresiones analíticas

resultantes para la energía libre como una función de la temperatura $F(T)$ resultan engorrosas. Por lo tanto, resulta más significativo mostrar algunos gráficos de la energía libre para ciertos valores fijos de los parámetros, en particular, la dependencia con respecto al parámetro b_1 como se puede ver en la Figura 1.3 y Figura 1.4.

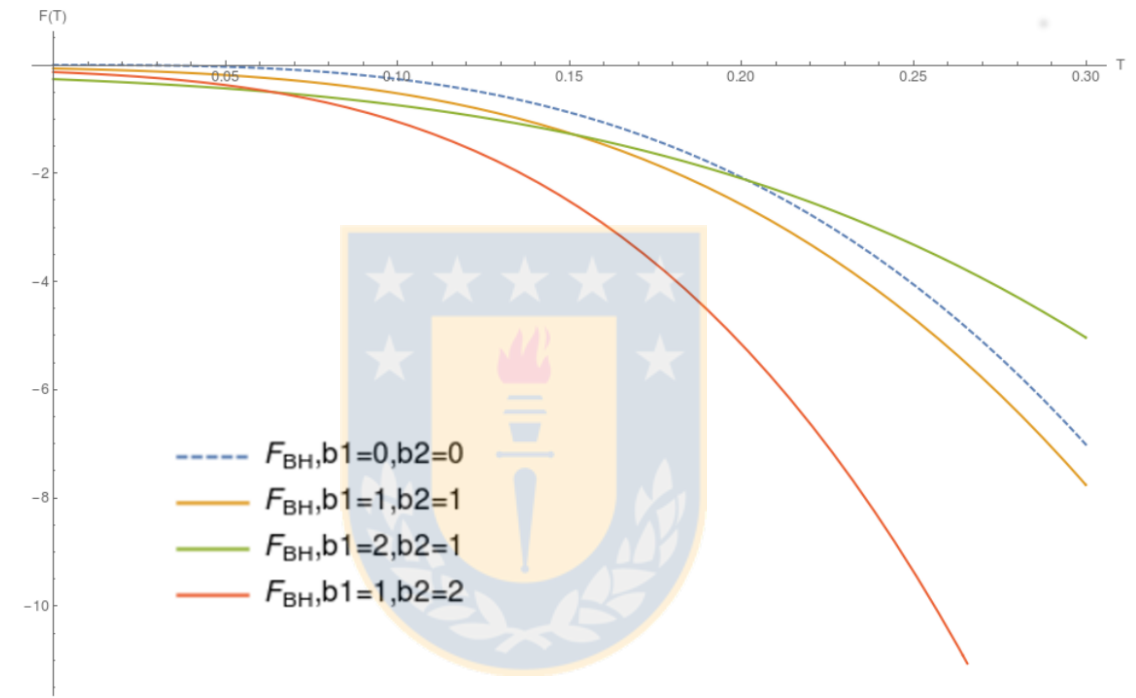


Figura 1.3: Energía libre $F(T)$ como función de la temperatura T para la configuración de agujero negro para diferentes valores de los parámetros b_i . La línea segmentada corresponde a la solución de vacío. Fuente: Elaboración propia.

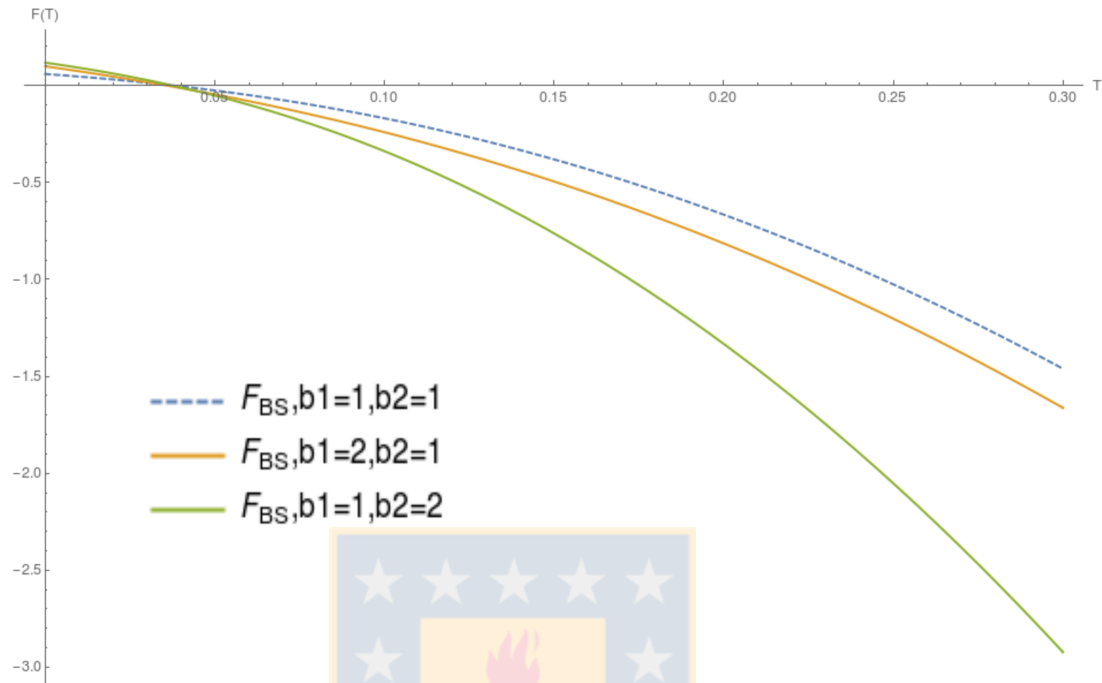


Figura 1.4: Energía libre $F(T)$ como función de la temperatura T para la configuración de cuerda negra para diferentes valores de los parámetros b_i . La línea segmentada corresponde a la solución de vacío. Fuente: Elaboración propia.

Configuraciones con valores de b_i mayores son favorecidas termodinámicamente con respecto a la solución puramente gravitacional debido a que la energía libre es menor, como se muestra, por ejemplo, en Figura 1.3, donde $b_1 = 1$ y $b_2 = 2$. La situación puede cambiar para valores distintos de los b_i en el caso del agujero negro. En particular, como se puede ver del gráfico anterior, existen valores críticos de la temperatura, dependiendo de los parámetros, donde las energías libres de dos configuraciones diferentes se intersectan. Así, se esperarían transiciones de fase si variaciones discretas de b_i son permitidas. El mismo comportamiento cualitativo se puede leer del gráfico de la cuerda negra.

1.2 Relatividad General en $D > 4$

En las últimas décadas ha habido un aumento del interés por agujeros negros en altas dimensiones. Algunas de las razones que explican esto son las siguientes.

Como se ha mencionado anteriormente, agujeros negros en $D = 4$ son especiales; estos deben ser esféricos, determinados por unos pocos parámetros, siempre estables, entre otras. Luego, es natural preguntarse si estas características son propias de agujeros negros en general o solo un resultado en espaciotiempos cuatridimensionales.

Por otro lado, las recientes ideas de *brane-world* sugieren que las tres dimensiones espaciales observables podrían ser solo una superficie en un espacio de dimensión mayor. En estas teorías, fuerzas no gravitacionales están confinadas a la brana pero la gravedad es una interacción dimensionalmente mayor. Luego, los agujeros negros se extienden en las dimensiones extras.

En otro contexto, la teoría de cuerdas predice que el espaciotiempo tiene más de cuatro dimensiones. Esto incorpora ideas más viejas de unificación basadas en la noción de que las dimensiones extras están compactificadas. Luego, en teoría de cuerdas debemos considerar agujeros negros dimensionalmente mayores.

Además, la dualidad *gauge*/gravedad que surge de la teoría de cuerdas relaciona ciertas teorías no gravitacionales fuertemente acopladas con teorías de gravedad dimensionalmente mayores. Bajo esta dualidad, el equilibrio térmico en algunos sistemas no gravitacionales $(3 + 1)$ -dimensionales está descrito por un agujero negro de mayor dimensión.

Lo anterior es suficiente para motivar la variada literatura existente sobre soluciones en relatividad general en dimensión arbitraria. Ver [1] y los trabajos

ahí referenciados para detalles sobre derivación y análisis de soluciones tanto exactas como numéricas.

De las investigaciones motivadas por lo anterior hemos aprendido que agujeros negros en dimensiones mayores a cuatro están mucho menos restringidos que sus pares en $D = 4$. Estos no están obligados a ser esféricos y no están únicamente determinados por su masa y momento angular. Además, su dinámica es más interesante debido a que algunos agujeros negros estacionarios son inestables. Esta inestabilidad causa que el horizonte de eventos de la solución se fisure en un intervalo de tiempo finito, develando una singularidad que es visible desde el infinito. Luego, mientras que existe fuerte evidencia que indica que singularidades desnudas no pueden formarse genéricamente en relatividad general en cuatro dimensiones, éstas sí pueden formarse genéricamente en mayores dimensiones.

Recientemente en [44] se reportó un nuevo conjunto de soluciones en relatividad general con constante cosmológica negativa que describen cuerdas negras y p -branas negras en dimensión arbitraria. Estas soluciones se soportan por la presencia de campos escalares y son las primeras soluciones exactas de branas negras homogéneas de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica no nula. Para un espaciotiempo de dimensión $D = d + p$, y campos escalares lineales en las coordenadas x^i , esta solución está dada por

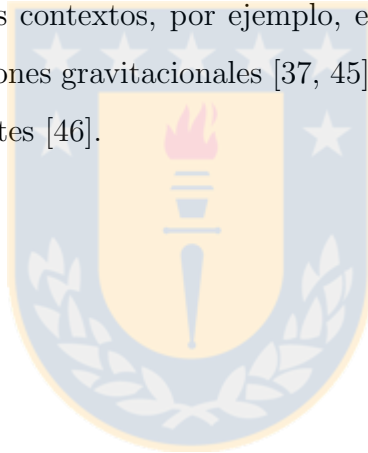
$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2,\gamma}^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (1.47)$$

donde

$$f(r) = \gamma - \frac{2\mu}{r^{d-3}} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d+p-2)}, \quad \lambda^2 = -\frac{4\Lambda}{(d+p-2)}. \quad (1.48)$$

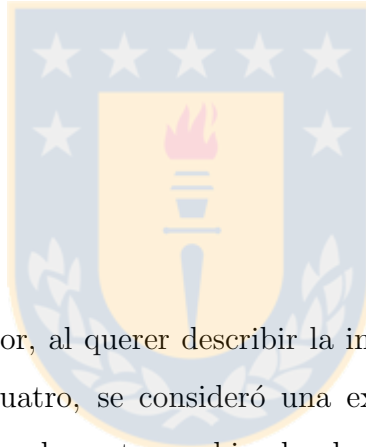
Estas soluciones de branas negras existen debido a la presencia de los campos

escalares lineales en las coordenadas extendidas. Si bien estos campos divergen en el límite en el que las coordenadas extendidas van a infinito, tienen densidad de energía finita. Esto es, la divergencia se debe netamente a la no compacticidad de las direcciones extendidas. En efecto, la componente tt del tensor energía-momento para el conjunto de campos escalares resulta ser independiente de los x^i . Por consiguiente, podemos definir de forma apropiada la densidad de energía, como en la cuerda negra homogénea en espacios de tensor de Ricci nulos. La solución (1.47) existe debido al hecho de que, a pesar de que la métrica sea homogénea, los campos escalares rompen la simetría traslacional. Esta idea ha sido usada en diferentes contextos, por ejemplo, en la construcción de estrellas de bosones y otros solitones gravitacionales [37, 45], como también para agujeros negros con pelo y rotantes [46].



Capítulo 2

Objetos extendidos en teorías de Lovelock



En el capítulo anterior, al querer describir la interacción gravitacional en dimensiones mayores a cuatro, se consideró una extensión de la acción (1.9) a dimensiones mayores simplemente cambiando el elemento de integración d^4x a d^Dx . Las ecuaciones correspondientes resultan ser las ecuaciones de Einstein más el término cosmológico, tal cual como son definidas en (1.5) cuando una distribución de materia es considerada. La teoría definida así mantiene la forma de las ecuaciones de campo, extendiendo el rango en el que corren las componentes tensoriales de acuerdo al aumento de las dimensiones del espaciotiempo, pero no generaliza a partir de los principios bajo los que se obtiene la acción de Einstein. En 1971, David Lovelock logró mostrar que la generalización de la relatividad general a mayores dimensiones a partir de sus mismos principios contiene más que solo el término de Einstein-Hilbert y el término cosmológico.

Para dimensión arbitraria en [6] se construye la acción más general para el

campo métrico que da lugar a ecuaciones de campo de segundo orden consistentes con la ley de conservación del tensor de energía-momento (1.6) de un campo de materia acoplado a gravedad. Esta es la acción de Lovelock, que para un espaciotiempo D -dimensional, corresponde a una suma de $[D/2]$ términos en la forma

$$I = \int d^D x \sum_{k=0}^{[D/2]} \alpha_k \mathcal{L}^{(k)} , \quad (2.1)$$

donde α_k son constantes arbitrarias dimensionadas que representan los acoplamientos de los términos $\mathcal{L}^{(k)}$ en la densidad Lagrangiana, que son dados por

$$\mathcal{L}^{(k)} = \frac{1}{2^k} \sqrt{-g} \delta_{b_1 \dots b_{2k}}^{a_1 \dots a_{2k}} R_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} \dots R_{a_{2k-1} a_{2k}}^{b_{2k-1} b_{2k}} .$$

Aquí $k \leq [D/2]$, y en lo que sigue, los índices latinos a correrán sobre toda la variedad espaciotemporal.

En otras palabras, el Lagrangiano de la teoría de Lovelock se construye como la combinación lineal de las continuaciones dimensionales de todas las densidades de Euler de dimensión par más bajas que D , siendo cada término un polinomio homogéneo de orden k en el tensor de Riemann.

La contribución $k = 0$ corresponde a un término cosmológico, el caso con $k = 1$ al Lagrangiano de Einstein-Hilbert y el término con $k = 2$ es el término de

Gauss-Bonnet. A modo ilustrativo, de forma explícita:

$$\mathcal{L}^{(0)} = 1 , \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{1}{2} \delta_{ab}^{cd} R_{cd}^{ab} = R , \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{4} \delta_{a_1 b_1 a_2 b_2}^{c_1 d_1 c_2 d_2} R_{c_1 d_1}^{a_1 b_1} R_{c_2 d_2}^{a_2 b_2} = R^2 - 4R_{ab} R^{ab} + R_{abcd} R^{abcd} , \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}^{(3)} = \frac{1}{8} \delta_{a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3}^{c_1 d_1 c_2 d_2 c_3 d_3} R_{c_1 d_1}^{a_1 b_1} R_{c_2 d_2}^{a_2 b_2} R_{c_3 d_3}^{a_3 b_3} \quad (2.5)$$

$$= R^3 - 12R R_{ab} R^{ab} + 16R_{ab} R^a{}_c R^{bc} + 24R_{ab} R_{cd} R^{abcd} + 3R R_{abcd} R^{abcd} \\ - 24R_{ab} R^a{}_{cde} R^{bcde} + 4R_{abcd} R^{abef} R^{cd}_{ef} - 8R_{abc}{}^d R^{aef} R^b{}_{edf} . \quad (2.6)$$

El conjunto de ecuaciones de campo obtenidas de la variación con respecto de la métrica son dadas por

$$\varepsilon^a{}_b = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \alpha_k (D - 2k) \varepsilon^{(k)a}{}_b , \quad (2.7)$$

donde

$$\varepsilon^{(k)a}{}_b = -\frac{1}{2^{k+1}} \delta_{bb_1 \dots b_{2k}}^{aa_1 \dots a_{2k}} R^{b_1 b_2}_{a_1 a_2} \dots R^{b_{2k-1} b_{2k}}_{a_{2k-1} a_{2k}} .$$

2.1 Teorías de Lovelock de orden n

En esta sección nos enfocaremos en una familia particular de las teorías de Lovelock, que llamaremos teorías de Lovelock de orden n , en las que las constantes de acoplamiento α_k en (2.1) son de la forma $\alpha_k = \delta_k^n \alpha_n$, con $0 < n \leq [(D-2)/2]$. Luego, solo un término en la serie de Lovelock sobrevive, quedando la acción (2.1) y las ecuaciones de campo (2.7) de la forma

$$I = \int d^D x \alpha_n \mathcal{L}^{(n)} , \quad \varepsilon^a{}_b = \alpha_n \varepsilon^{(n)a}{}_b .$$

En estas teorías es posible construir agujeros negros y cuerdas negras homogéneas en forma analítica. En efecto, una forma similar a como se construyen cuerdas y branas negras en relatividad general, simplemente añadiendo direcciones planas a una solución de agujero negro de vacío, puede ser llevada a cabo en esta familia de teorías de Lovelock [47] y también en presencia de constante cosmológica [48]. Estas construcciones fallan para teorías de Lovelock general, pero son obtenidas de forma directa dentro de estas teorías de Lovelock con una única solución de curvatura constante.

Ahora, dentro del contexto de las soluciones anteriormente mencionadas, en Refs. [49, 50] se muestra que estas cuerdas negras homogéneas son inestables bajo perturbaciones tipo *s-wave* en la dimensión más baja que permite la existencia de estas soluciones en las teorías con $n = 2$ y $n = 3$, respectivamente. Tal como en relatividad general, se muestra que la inestabilidad se produce por perturbaciones de longitud de onda grande. En [50] se realiza también un análisis comparativo de las inestabilidades de las cuerdas negras a radio fijo para $n = 1, 2, 3$. El resultado muestra que la longitud de onda mínima que detona la inestabilidad crece con la potencia de la curvatura en el Lagrangiano de la teoría. Además, el crecimiento exponencial máximo en la perturbación es el mayor en relatividad general y decrece con el número de curvaturas involucradas en el Lagrangiano.

2.1.1 Inestabilidad de branas negras en la teoría de Gauss-Bonnet

En esta subsección detallaremos nuestro resultado sobre el comportamiento de la inestabilidad de branas negras en Gauss-Bonnet, reportado en [51].

Como hemos mencionado anteriormente cuerdas y branas negras en relatividad general son inestables bajo perturbaciones de longitud de onda grande viajando

a través de las direcciones extendidas [3, 42]. Para una cierta masa del agujero negro en la brana tal comportamiento, conocido como la inestabilidad de Gregory-Laflamme, puede ser evitado si compactificamos las direcciones extendidas en una escala menor que la longitud de onda característica mínima que detona la inestabilidad. Interesados en el hecho de que, debido a la censura topológica, una singularidad desnuda podría ser formada si la cuerda negra evoluciona a un agujero negro, Horowitz y Maeda mostraron que tal proceso puede ocurrir solo en un valor infinito del parámetro afín en el horizonte [52].

Cuerdas negras no homogéneas fueron construídas perturbativamente en [53] y numéricamente en [54] para obtener configuraciones estacionarias que pudieran proveer de un estado final de la inestabilidad de cuerda negra. Sin embargo, se ha mostrado para $D < 13$ que tales configuraciones siempre tienen menor entropía que las cuerdas negras homogéneas y por lo tanto, las cuerdas negras inestables no pueden llegar a la etapa final de estas configuraciones [55]. Es interesante notar que tal dimensión crítica cambia para cuerdas negras *boosteadas* [56].

En Refs. [57, 58], la evolución no lineal de una cuerda negra inestable perturbada fue realizada en dimensión cinco [59]. El resultado muestra que, visto desde un observador asintótico, en efecto, una singularidad desnuda nula es formada en un intervalo de tiempo finito. Antes de que la singularidad aparezca, la cuerda negra evoluciona a un conjunto de agujeros negros conectados por cuerdas negras. La singularidad desnuda aparece cuando el radio transversal de la cuerda negra se aproxima a cero. Esto provee de un contraejemplo sin *fine-tuning* a la censura cósmica en un espacio asintóticamente $M_4 \times S^1$. También en $D = 5$, recientemente se ha reportado un fenómeno similar para el *black ring* asintóticamente plano en Ref. [60], proveyendo de un contraejemplo de la censura cósmica para una configuración asintóticamente M_5 .

A medida que el radio del horizonte se aproxima a cero, uno esperaría que

los términos con potencias altas en la curvatura jugaran algún rol (ver por ejemplo [61] para una reciente discusión de la inestabilidad de Gregory-Laflamme de cuerdas negras en teoría M con correcciones en R^4). Ahora, en el contexto de teorías de potencias mayores en la curvatura, considerando la teoría de Lovelock, en [47] y [48], se muestra que si solo uno de los términos de la serie es el que domina la dinámica, es posible construir cuerdas negras homogéneas y branas negras como en relatividad general; agregando direcciones planas al agujero negro esféricamente simétrico de la teoría bajo consideración (ver [62] para la construcción de agujeros negros en la teoría \mathcal{L}_n). En [47] se ha mostrado que tales objetos extendidos son termodinámicamente inestables. Comparando la entropía, a masa fija, es posible ver que existe una masa crítica bajo la cual el agujero negro domina en el ensemble microcanónico, mientras que la cuerda negra será la fase dominante al estar por sobre tal masa crítica. Debido a la complejidad intrínseca de los análisis perturbativos en teorías de potencias altas en la curvatura, solo hasta hace poco se ha mostrado que estas cuerdas negras son perturbativamente inestables. Un objetivo específico de este trabajo es mostrar que esta inestabilidad naturalmente se extiende a p -branas negras en Gauss-Bonnet. Para ser concretos, consideramos $D = 10$, y analizaremos la estabilidad de la p -brana negra con $p = 1, 2, 3$ y 4 . Mostramos que debido a la simetría de la perturbación tipo *s-wave* es posible obtener, en todos estos casos, una ecuación maestra que depende paramétricamente de la frecuencia Ω y el momento total de la perturbación a lo largo de las direcciones extendidas $\hat{k} = \left| \vec{k} \right|$. Luego, al requerir que la perturbación esté bien definida en el horizonte y en infinito, podemos encontrar el espectro de la inestabilidad. En todos estos casos, existe un valor crítico para \hat{k} bajo el cual los modos inestables son detonados y por sobre el cual la inestabilidad desaparece.

La teoría de Gauss-Bonnet en vacío es definida por las siguientes ecuación de

campo

$$E_{\mu\nu} = 2RR_{\mu\nu} - 4R_{\mu\rho\nu\sigma}R^{\rho\sigma} + 2R_{\mu\rho\sigma\tau}R_{\nu}^{\rho\sigma\tau} - 4R_{\mu\rho}R_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left(R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Se ha mostrado en [47] y [48] que estas teorías tienen las siguientes soluciones en $D = d + p$

$$ds_D^2 = d\tilde{s}_{d(\text{BH})}^2 + d\vec{x}^2, \quad (2.9)$$

donde

$$d\tilde{s}_{d(\text{BH})}^2 = -f_p(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f_p(r)} + r^2 d\Omega_{d-2}^2,$$

con

$$f_p(r) = 1 - \left(\frac{r_+}{r} \right)^{\frac{d-5}{2}} = 1 - \left(\frac{r_+}{r} \right)^{\frac{D-p-5}{2}}.$$

y $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_p\}$. Aquí r_+ es una constante de integración que determina la masa ADM de la configuración y la métrica (2.9) es interpretada como una p -brana negra. Notemos que para tener un horizonte de eventos $d > 5$, por lo tanto, la dimensión mínima en la que es posible construir objetos negros extendidos en Gauss-Bonnet de esta forma es $D = 7$. Para concretar, de aquí en adelante trabajaremos con $D = 10$, y analizaremos los casos de cuerda negra y p -brana negra con $p = 2, 3$ y 4 .

Consideraremos la siguiente perturbación tipo *s-wave*

$$H_{\mu\nu}(x^\alpha) = e^{\Omega t + ik_i x^i} h_{\mu\nu}(r) = e^{\Omega t + ik_i x^i} \begin{pmatrix} h_{tt}(r) & h_{tr}(r) & 0 & 0 \\ h_{tr}(r) & h_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h(r)\sigma(S^{d-2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta perturbación es esféricamente simétrica ($L_\xi h_{\mu\nu} = 0$, donde ξ son los vec-

tores de Killing de la esfera S^{d-2} de elemento de línea $\sigma(S^{d-2})$ y viaja a través de las direcciones extendidas x^i con momento k_i . Linealizando las ecuaciones (2.8) obtenemos un sistema que puede ser desacoplado en favor de una ecuación maestra para la variable $h_{tr}(r)$, que toma la forma

$$A_p(r) \frac{d^2 h_{tr}(r)}{dr^2} + B_p(r) \frac{dh_{tr}(r)}{dr} + C_p(r) h_{tr}(r) = 0, \quad (2.10)$$

con las funciones $A_p(r)$, $B_p(r)$, $C_p(r)$ dependientes de \hat{k} y Ω . La componente h_{tr} puede ser tratada como una variable maestra dado que las restantes componentes de la perturbación pueden ser escritas en términos únicamente de esta.

Soluciones de estas ecuaciones, en general, no pueden ser encontradas de forma cerrada, pero para nuestro propósito, es suficiente analizar su comportamiento asintótico, el que cerca del horizonte es dado por

$$h_{tr}(r) \sim (r - r_+)^{-1 \pm \frac{2\Omega r_+}{(5-p)}} (1 + \mathcal{O}(r - r_+)) , \quad (2.11)$$

mientras el modo normalizable en infinito para la solución de (2.10) decae exponencialmente con r . Como en relatividad general, Gauss-Bonnet y Lovelock cúbico, dado que las coordenadas tipo Schwarzschild se comportan mal en el horizonte es necesario pasar a coordenadas de Kruskal. Analizando el comportamiento de la perturbación en el horizonte futuro podemos ver que solo el signo positivo en (2.11) nos entrega un modo normalizable. Finalmente, exigiendo comportamientos normalizables en el horizonte y en infinito obtenemos el espectro mostrado en la Figura (2.1)

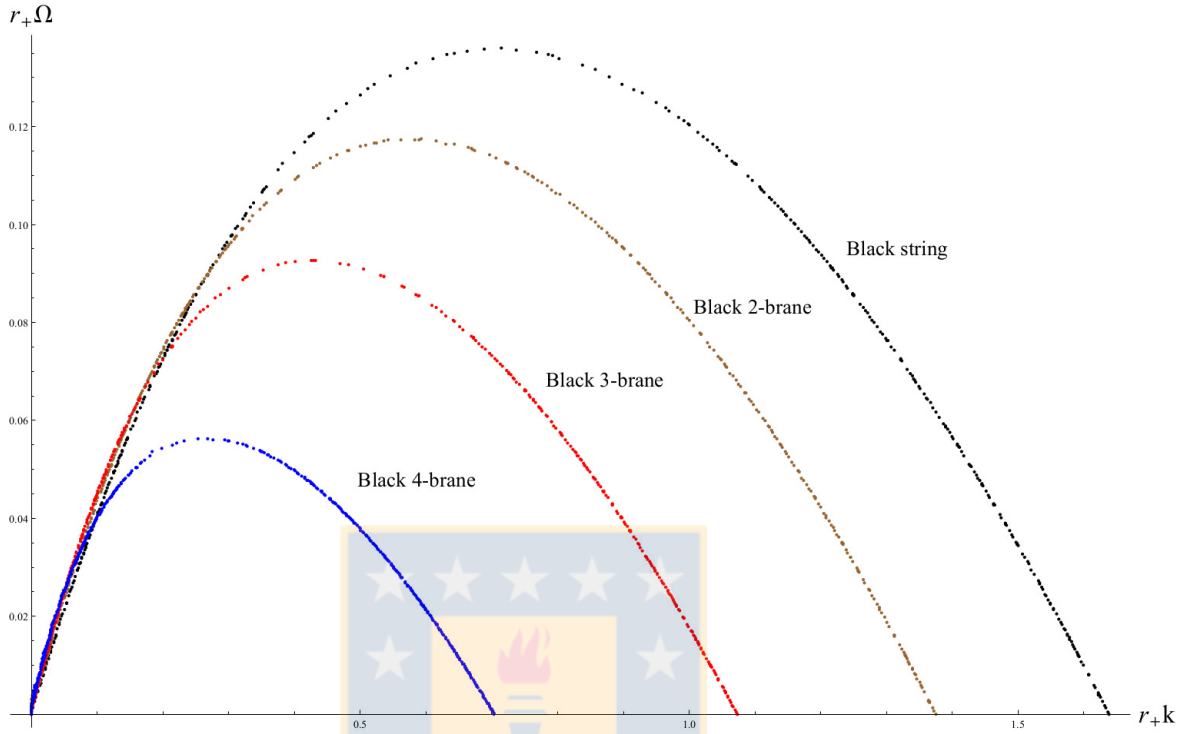


Figura 2.1: Modos inestables para cuerdas negras y p -branas negras en la teoría de Gauss-Bonnet 10-dimensional.
Fuente: Elaboración propia.

De la Figura 2.1, podemos ver un comportamiento similar al de relatividad general (ver Fig. 1 en [3]). El hecho de que los valores de Ω son positivos implica que las cuerdas negras y las p -branas negras consideradas en este trabajo son inestables bajo perturbaciones tipo s -wave. La longitud de onda crítica aumenta con el número de direcciones extendidas de la brana. Podemos también concluir que, en general, para un radio de horizonte fijo, el *tiempo de vida* $(\Omega_{\max}^p)^{-1}$ de la p -brana negra aumenta con p . Por lo tanto, en el peor escenario, la cuerda negra decae más rápido que la 4- brana negra.

Es importante notar que, por simplicidad y con el fin de poder realizar el cálculo perturbativo, no hemos fijado un *gauge*. Para probar que los modos encontrados son efectivamente modos físicos que no pueden ser eliminados mediante

un difeomorfismo, consideramos el siguiente invariante escalar

$$\mathcal{I} = R_1^3 + \xi R_2^3 .$$

Fijando apropiadamente $\xi = \xi(p)$, es posible construir un invariante \mathcal{I} que se anule para las p -branas negras no perturbadas, pero que sea no nulo on-shell para la p -brana perturbada (ver también [49, 50] y [63]). Las frecuencias han sido obtenidas resolviendo la ecuación maestra mediante series de potencias.

2.1.2 Teorías de Lovelock puras

En esta sección estudiaremos una pequeña modificación de la teoría de Lovelock de orden n presentada anteriormente. Consideraremos las llamadas teorías de Lovelock puras, donde las constantes de acoplamiento tienen la forma $\alpha_k = \alpha_0 \delta_k^0 + \alpha_n \delta_k^n$, con $0 < n \leq [D - 2]$. La densidad Lagrangiana (2.1) tiene solo dos términos y ε^a_b en (2.7) se reduce a

$$\varepsilon^a_b = \alpha_0 \varepsilon^{(0)a}_b + \alpha_n \varepsilon^{(n)a}_b. \quad (2.12)$$

Con el objeto de construir soluciones de cuerdas y branas negras cargadas, siguiendo el resultado en Ref.[44], acoplaremos minimalmente nuestro sistema a un conjunto de p campos escalares libres ψ^i .

Las ecuaciones de campo del sistema son

$$-\frac{1}{2} \alpha_0 \delta^a_b - \frac{1}{2^{k+1}} \alpha_n \delta^{a a_1 \dots a_{2n}}_{b b_1 \dots b_{2n}} \left(R^{b_1 b_2}_{a_1 a_2} \dots R^{b_{2n-1} b_{2n}}_{a_{2n-1} a_{2n}} \right) = T^a_b , \quad (2.13.1)$$

$$\square \psi^i = 0 , \quad (2.13.2)$$

con $i = 1, \dots, p$ y

$$T_{ab} = \sum_{i=1}^p T_{ab}^{(i)} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{2} \partial_a \psi^i \partial_b \psi^i - \frac{1}{4} g_{ab} \partial_c \psi^i \partial^c \psi^i,$$

el tensor energía-momento de los campos escalares que permite que el sistema tenga una simetría global $SO(p)$ sobre estos.

Como ansatz consideraremos una métrica D -dimensional general ds^2 como el producto de una variedad d -dimensional $d\tilde{s}_d^2$ y un espaciotiempo plano p -dimensional, en coordenadas cartesianas, esto es

$$ds^2 = d\tilde{s}_d^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.14)$$

y los p campos escalares lineales en las direcciones extendidas x^i , según $\psi^i = \lambda x^i$, satisfaciendo trivialmente la ecuación (2.16.2) y reduciendo al tensor de energía-momento (2.14) a

$$T_{ab} = \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\sum_i^p (\delta_a^i \delta_b^i) - \frac{p}{2} g_{ab} \right). \quad (2.15)$$

De ahora en adelante, los índices latinos serán exclusivos para las direcciones extendidas y los índices griegos serán usados para denotar los objetos sobre la subvariedad $d\tilde{s}_d^2$.

Las ecuaciones para la métrica (2.13.1) en $d\tilde{s}^2$ y a lo largo de las direcciones extendidas x^i se reducen a

$$\alpha_0 \delta_\nu^\mu + \frac{1}{2^n} \alpha_n \delta_{\nu\nu_1 \dots \nu_{2k}}^{\mu\mu_1 \dots \mu_{2k}} \tilde{R}_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2} \dots \tilde{R}_{\mu_{2k-1} \mu_{2k}}^{\nu_{2k-1} \nu_{2k}} - \frac{1}{2} \kappa \lambda^2 p \delta_\nu^\mu = 0, \quad (2.16.1)$$

$$\delta_j^i \left(\alpha_0 + \frac{1}{2^n} \alpha_n \delta_{\nu\nu_1 \dots \nu_{2k}}^{\mu\mu_1 \dots \mu_{2k}} \tilde{R}_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2} \dots \tilde{R}_{\mu_{2k-1} \mu_{2k}}^{\nu_{2k-1} \nu_{2k}} + \kappa \lambda^2 (1 - 1/2p) \right) = 0, \quad (2.16.2)$$

respectivamente, donde $\tilde{R}^{\rho\sigma}_{\lambda\tau}$ es el tensor de Riemann en la variedad d -dimensional.

La compatibilidad de la traza de las ecuaciones de campo (2.16.1) y (2.16.2) lleva a un restricción en la constante λ , de la forma

$$\lambda^2 = \frac{2n\alpha_0}{(d + np - 2n)}. \quad (2.17)$$

Esto implica que la configuración de los campos escalares induce un corrimiento en la constante del término cosmológico α_0 . Esto significa que podemos considerar cualquier $d\tilde{s}_d^2$ solución de (2.16.1), como la sección transversal de la p -brana, siempre y cuando (2.17) sea satisfecha.

Un caso particular de la construcción anterior es cuando la variedad $d\tilde{s}^2$ en (2.14) es estática y esféricamente simétrica

$$d\tilde{s}_d^2 = -f(r)^2 dt^2 + f(r)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2,\gamma}^2, \quad (2.18)$$

con $\Omega_{d-2,\gamma}$ la variedad base de curvatura constante $\gamma = 0, \pm 1$ y dimensión $(d-2)$.

Integrando la componente tt de la ecuación 2.16.1 obtenemos las solución

$$f(r)^2 = \gamma - \left(\mu_0 r^{2n-d+1} - \frac{n\alpha_0 r^{2n}}{(d-n)(d-np-2n)} \right)^{1/n} \quad (2.19)$$

con μ_0 una constante de integración relacionada con la masa de la solución.

Las Ecs. (2.17) y (2.19) reproducen el resultado con $n = 1$ reportado en [44], para $\alpha_0 = -2\Lambda$.

2.2 Agujeros negros diónicos y potencias superiores en la curvatura

En esta sección derivaremos nuevas soluciones de agujeros negros diónicos en teorías de orden superior en la curvatura inspiradas en teoría de cuerdas, reportadas en [64].

Recordemos que las teorías de cuerda inducen modificaciones a la gravedad de Einstein las que son representadas por la presencia de términos de potencias altas en la curvatura en la acción efectiva de bajas energías. Teorías de cuerda tipo II, por ejemplo, contienen términos cuárticos (R^4) que aparecen en correcciones de orden cúbico en la expansión en α' . La teoría también contiene campos adicionales; en el caso de cuerdas tipo IIA, además de los campos que ya están presentes en la teoría bosónica, la teoría contiene campos de 1- y 3-formas, junto con sus duales magnéticos.

La modificación cuártica a la acción de Einstein-Hilbert en teorías tipo II en el *tree-level* tiene la forma

$$\int (c_1 t_8 t_8 + c_2 \epsilon_{10} \cdot \epsilon_{10}) R^4 , \quad (2.20)$$

donde $c_1 = 8c_2$ es una constante de acoplamiento positiva, ϵ_{10} es el pseudo-tensor de Levi-Civita en dimensión 10, que aquí aparece con dos de sus índices contraídos con los índices de una segunda copia de si mismo, y t_8 es un tensor de rango 8 introducido en [65] (ver también [66]). R^4 representa en (2.20) al tensor producto de cuatro tensores de Riemann. Esto es

$$12 \int \sqrt{-g} ((c_1 - 8c_2) (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma})^2 + \dots) , \quad (2.21)$$

donde los términos omitidos representan las otras contracciones de cuatros tensores de Riemann. Existen además un factor de envoluta del campo dilatónico y acoplamientos entre la curvatura y el campo de Kalb-Ramond, los que estamos omitiendo acá. Notemos que para $c_1 = 8 c_2$ los escalares cuadrados de Kretschmann desaparecen de la acción, lo que facilita que los espacios de Einstein sean aún solución. La condición $c_1 \geq 0$ es crucial para evitar que la teoría (2.20) presente comportamiento superlumínico [67]. Por simplicidad, nos enfocaremos en el caso $c_1 = 0 \neq c_2$. Notablemente, para esta elección particular de los términos R^4 será posible derivar de forma analítica soluciones de agujeros negros cargados bajo diferentes flujos de p -formas. La simplificación con respecto al caso $c_1 \neq 0$ viene del hecho de que los términos $\epsilon_{10} \cdot \epsilon_{10} R^4$ corresponden a la extensión dimensional del Pfaffiano cuya integral, en dimensión 8, corresponde a la característica de Euler. El origen topológico de este término es lo que hace que las ecuaciones de campo sean de segundo orden y por lo tanto tratables de forma analítica. Además, siendo de segundo orden, la teoría está libre de inestabilidades de Ostrogradsky; la teoría perturbativa resulta libre de fantasmas alrededor del espacio plano [7]. Por otra parte, la teoría con términos R^4 , sin términos cuadráticos ni cúbicos presentes, no exhibe los problemas de causalidad del tipo discutido en [68]. Todo lo anterior hace del caso con $c_1 = 0$ un excelente terreno donde investigar las características cualitativas que la presencia de términos R^4 pueda introducir.

En $D = 10$ consideraremos la acción

$$I = \frac{1}{16\pi\ell_p^8} \int \left(R - F_{(2)} \wedge *F_{(2)} - F_{(4)} \wedge *F_{(4)} + \frac{\alpha^3}{24} \epsilon_8 \epsilon_8 R^4 \right), \quad (2.22)$$

donde ℓ_P es la longitud de Planck. $F_{(2)}$ y $F_{(4)}$ son las intensidades de campo asociadas a la 1-forma $A_{(1)}$ y la 3-forma $A_{(3)}$, respectivamente, siguiendo $F_{(q)} = dA_{(q-1)}$. Las convenciones son tales que

$$\int F_{(q)} \wedge *F_{(q)} = (1/q) \int d^{10}x \sqrt{-g} F_{\mu_1 \dots \mu_q} F^{\mu_1 \dots \mu_q} .$$

También es posible agregar un término cosmológico $-1/(8\pi\ell_p^8) \int d^{10}x \sqrt{-g} \Lambda$. La constante de acoplamiento α tiene dimensión de masa -2 . La estructura tensorial en los términos cuárticos es dada por $\epsilon_8 \epsilon_8 = (1/2) \epsilon_{10} \cdot \epsilon_{10}$, los que pueden ser escritos convenientemente como

$$\epsilon_8 \epsilon_8 R^4 = \delta_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_8}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_8} R^{\nu_1 \nu_2}_{\mu_1 \mu_2} R^{\nu_3 \nu_4}_{\mu_3 \mu_4} R^{\nu_5 \nu_6}_{\mu_5 \mu_6} R^{\nu_7 \nu_8}_{\mu_7 \mu_8} , \quad (2.23)$$

donde δ es la delta de Kronecker generalizada, totalmente antisimétrica [6]. El signo $\alpha^3 > 0$ es el que reproduce un modelo consistente; ver [67].

Para la teoría descrita anteriormente, encontraremos soluciones analíticas de agujeros negros diónicos cargados tanto bajo los campos de 1- y 3-forma, y con diferentes topologías del horizonte. Más precisamente, para estas soluciones la geometría local de las variedades base, esto es, las secciones a tiempo constante de los horizontes, serán el producto directo de 2^m copias de variedades (2^{3-m}) -dimensionales de curvatura constante, con $m = 0, 1, 2, 3$. Por ejemplo, en el caso en el que las variedades de curvatura constante sean 2^{3-m} -esferas, el caso con $m = 0$ correspondería al agujero negro de Reissner-Nordström 10-dimensional, cuya variedad base es una 8-esfera. Otro ejemplo en la lista, el caso con $m = 3$, correspondería a un agujero negro topológico con horizonte plano; a saber, una brana negra. Agujeros negros topológicos de mayor genus y de horizontes compactos requieren considerar como variedades base al producto de cocientes de Fuchsian de espacios hiperbólicos. Los dos ejemplos más interesantes y menos simples son soluciones de agujeros negros cuyos horizontes o son productos de cuatro 2-esferas o bien de dos 4-esferas. Estas soluciones se soportan mediante flujos magnéticos en las esferas y admiten cargas eléctricas netas. Estos últimos

serán los casos a estudiar en esta sección.

2.2.1 Soluciones de agujero negro

$$S^2 \times S^2 \times S^2 \times S^2$$

Comencemos con el caso $m = 2$, esto es, soluciones cuyas variedades base son productos directos de cuatro variedades bidimensionales de curvatura constante. Inicialmente consideraremos 2-esferas. La configuración de la 3-forma para tal solución es dada por

$$F_{(4)} = \frac{Q_2}{r^4} dt \wedge dr \wedge \sum_{i=1}^4 \text{vol}(S_i^2) + P_2 \sum_{i<j}^4 \text{vol}(S_i^2) \wedge \text{vol}(S_j^2) , \quad (2.24)$$

donde $\text{vol}(S_i^2)$ representa la forma volumen de la i -ésima 2-esfera S_i^2 , $i = 1, 2, 3, 4$. Q_2 y P_2 son dos constantes de integración asociadas a las cargas eléctrica y magnética bajo el campo 3-forma $A_{(3)}$. Similarmente, la configuración de la 1-forma es dada por

$$F_{(2)} = \frac{Q_0}{r^8} dt \wedge dr , \quad (2.25)$$

que corresponde al potencial Coulombiano $A_{(1)} = Q_0/(7r^7)dt$.

La métrica toma la forma

$$ds^2 = -H(r) dt^2 + \frac{dr^2}{H(r)} + r^2 \sum_{i=1}^4 \frac{dz_i d\bar{z}_i}{(1 + \frac{\sigma}{4} z_i \bar{z}_i)^2} , \quad (2.26)$$

donde (z_i, \bar{z}_i) son variables complejas proyectadas sobre la i -ésima 2-(pseudo)esfera. $\sigma = 1$ corresponde a la métrica de variedad base un producto de cuatro 2-esferas unitarias. Los casos $\sigma = 0, -1$ corresponden a los casos de espacios localmente planos y localmente hiperbólicos, respectivamente. H es una función de la coor-

denada radial r , y es determinada por la ecuación polinomial de cuarto orden:

$$\alpha^3 r^8 (g_0 H^4 - g_1 \sigma H^3 + g_2 |\sigma| H^2 - g_3 \sigma H + g_4 |\sigma|) - g_5 r^{14} H = T , \quad (2.27)$$

con el contenido de materia dado por

$$T = -t_1 Q_0^2 - t_2 Q_2^2 r^4 + t_3 \ell_P^8 M r^7 + t_4 P_2^2 r^8 - t_5 \sigma r^{14} ,$$

donde los coeficientes g_i y t_i en su forma de factorización prima son

$$\begin{aligned} g_0 &= 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 , & g_1 &= 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 , & g_2 &= 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7 , \\ g_3 &= 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 , & g_4 &= 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 , & g_5 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 . \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} t_1 &= 3^2 \cdot 5 , & t_2 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 , & t_3 &= 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \pi , \\ t_4 &= 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 , & t_5 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 . \end{aligned}$$

Si en la acción se incluye el término

$$\hat{\lambda} \alpha / 16 \pi \ell_P^8 \int d^{10} x \sqrt{-g} / 2^2 \delta_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} R^{\nu_1 \nu_2}_{\mu_1 \mu_2} R^{\nu_3 \nu_4}_{\mu_3 \mu_4} ,$$

el lado izquierdo de la ecuación (2.27) recibe el término adicional $\hat{\lambda} \alpha r^{12} (g_6 H^2 - g_7 \sigma H + g_8 |\sigma|)$ con $g_6 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$, $g_7 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, $g_8 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$.

En el caso de constante cosmológica no nula ($\Lambda \neq 0$), el contenido de materia T recibe el término adicional $70 \Lambda r^{16}$. El límite de relatividad general, o de forma equivalente, el límite de r^2/α grande de la solución es

$$H \simeq -\frac{r^2 \Lambda}{36} + \frac{\sigma}{7} - \frac{4 \pi \ell_P^8 M}{r^7} + \frac{Q_0^2}{56 r^{14}} + \frac{Q_2^2}{r^{10}} - \frac{9 P_2^2}{2 r^6} + \dots , \quad (2.28)$$

donde las elipsis incluyen los términos de orden despreciable en α/r^2 . Esto es consistente con los resultados para soluciones de p -branas negras cargadas con horizontes no esféricos en teoría de Einstein. Ver [69, 70] para soluciones de agujero negro correspondientes al límite $\alpha^3 \rightarrow 0$ de nuestras soluciones. Soluciones con variedad base de curvatura no constante han sido estudiadas, por ejemplo, en Refs. [71, 72]; ver también las referencias incluídas ahí. Notemos que en (2.28) el término con la carga P_2 presenta un amortiguamiento más lento que el potencial de Newton en 10 dimensiones, lo que típicamente lleva a una energía gravitacional divergente. Esto es una reminiscencia de lo que pasa con los monopolos autogravitantes de la teoría Einstein-Yang-Mills [73]. Adicionalmente, el signo de tal contribución energética al potencial gravitacional parece introducir inestabilidades. La solución eléctricamente cargada para α finito también presenta propiedades interesantes. En particular, existe una singularidad de rama que ocurre a una distancia finita que en principio puede ser más pequeña que la localización del horizonte r_+ . Tal singularidad de rama ocurre cuando los radicandos en la solución a una ecuación polinomial, como en (2.27), toma valores negativos. Esto pasa debido al signo relativo entre el término Newtoniano y los términos con las cargas Q_0 y Q_2 , lo que hace a los radicandos anularse en valores finitos de r , lo que resulta en componentes métricas no reales y divergencias en los invariantes de curvatura, características típicas de soluciones cargadas en teorías de Lovelock.

Incluyendo a la acción un término $(\lambda\alpha/64\pi\ell_P^8) \int d^{10}x \sqrt{-g} (F_{\mu_1\nu_2\mu_3\mu_4} F^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4})^2$ y considerando el caso $P_2 = Q_0 = 0$, la ecuación (2.27) recibe la siguiente contribución en el lado derecho

$$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7r^7 \int_{r_0}^r X^2(r) (2^5 3^2 \alpha \lambda + r^4 \lambda) , \quad (2.29)$$

donde $X(r)$ es solución de la ecuación

$$X(r)r^4 + 2^6 3\alpha\lambda X(r)^3 = Q_2 . \quad (2.30)$$

El *cut-off* ultravioleta r_0 contribuye a la masa.

$S^4 \times S^4$

Soluciones de un tipo similar existen para variedades base el producto directo de dos variedades cuatridimensionales de curvatura constante. Esto corresponde a $m = 1$. En este caso, la configuración magnética de la 3-forma es dada por

$$F_{(4)} = \hat{P}_2 \sum_{i=1}^2 \text{vol}(S_i^4) , \quad \text{vol}(S_i^4) = \frac{dz_i \wedge d\bar{z}_i \wedge dw_i \wedge d\bar{w}_i}{(1 + \frac{1}{4}z_i\bar{z}_i + \frac{1}{4}w_i\bar{w}_i)^4} , \quad (2.31)$$

donde $\text{vol}(S_i^4)$ representa la forma de volumen de la 4-esfera S_i^4 , $i = 1, 2$. Nuevamente, la constante de integración \hat{P}_2 está asociada a la carga magnética. La métrica para esta solución (con $\sigma = 1$) toma la forma

$$ds^2 = -\hat{H}(r) dt^2 + \frac{dr^2}{\hat{H}(r)} + r^2 \sum_{i=1}^2 \frac{dz_i d\bar{z}_i + dw_i d\bar{w}_i}{(1 + \frac{1}{4}z_i\bar{z}_i + \frac{1}{4}w_i\bar{w}_i)^2} . \quad (2.32)$$

Ahora, tenemos que la geometría local de la variedad base es dada por un producto de dos 4-esferas unitarias, o en el caso más general, de un par idéntico de 4-variedades de curvatura constante $\sigma = \{0, \pm 1\}$. Para este caso, \hat{H} es dado por la siguiente ecuación polinomial de cuarto orden

$$\alpha^3 r (\hat{g}_0 \hat{H}^4 - \hat{g}_1 \sigma \hat{H}^3 + \hat{g}_2 |\sigma| \hat{H}^2 - \hat{g}_3 \sigma \hat{H} + \hat{g}_4 |\sigma|) + (-\hat{g}_5 \hat{H} + \hat{g}_6 \sigma) r^7 = T , \quad (2.33)$$

con contribución de materia

$$T = \hat{t}_1 \ell_P^8 M + \hat{t}_2 \hat{P}_2^2 r + \hat{t}_3 \Lambda r^9, \quad (2.34)$$

donde los coeficientes \hat{g}_i son dados por

$$\begin{aligned} \hat{g}_0 &= 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2, & \hat{g}_1 &= 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7, & \hat{g}_2 &= 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2, & \hat{g}_3 &= 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7, \\ \hat{g}_4 &= 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7, & \hat{g}_5 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, & \hat{g}_6 &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5, \end{aligned}$$

y los coeficientes \hat{t}_i son dados por

$$\hat{t}_1 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \pi, \quad \hat{t}_2 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7, \quad \hat{t}_3 = 5 \cdot 7.$$

El límite de relatividad para esta solución queda

$$\hat{H} \simeq -\frac{\Lambda r^2}{36} + \frac{3\sigma}{7} - \frac{3\hat{P}_2^2}{2r^6} - \frac{4\pi\ell_P^8 M}{r^7} + \dots, \quad (2.35)$$

donde las elipsis representan términos de orden despreciables en α/r^2 . Nuevamente observamos el amortiguamiento más débil del término con carga \hat{P}_2 . El hecho de que la solución de relatividad general (2.35) sea recuperada para $\alpha = 0$ muestra que hemos considerado una solución perturbativa de la teoría de potencia superior en la curvatura. Estas teorías típicamente presentan hasta cuatro ramas distintas de soluciones estáticas, algunas de ellas no existentes en el límite $\alpha \rightarrow 0$.

Si el término $(\hat{\lambda}\alpha/64\pi\ell_P^8) \int d^{10}x \sqrt{-g} \delta_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} R^{\nu_1\nu_2}_{\mu_1\mu_2} R^{\nu_3\nu_4}_{\mu_3\mu_4}$ es incluido en la acción, el lado izquierdo de (2.33) recibe la contribución $\hat{\lambda}\alpha r^5(\hat{g}_7|\sigma| - \hat{g}_8\sigma\hat{H} + \hat{g}_9\hat{H}^2)$ con $\hat{g}_7 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2$, $\hat{g}_8 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, $\hat{g}_9 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$, lo que también nos lleva a una ecuación soluble.

En las Figuras 2.2 y 2.3 podemos ver el comportamiento de las funciones *lapse* para distintos valores de los parámetros de las configuraciones aquí encontradas.

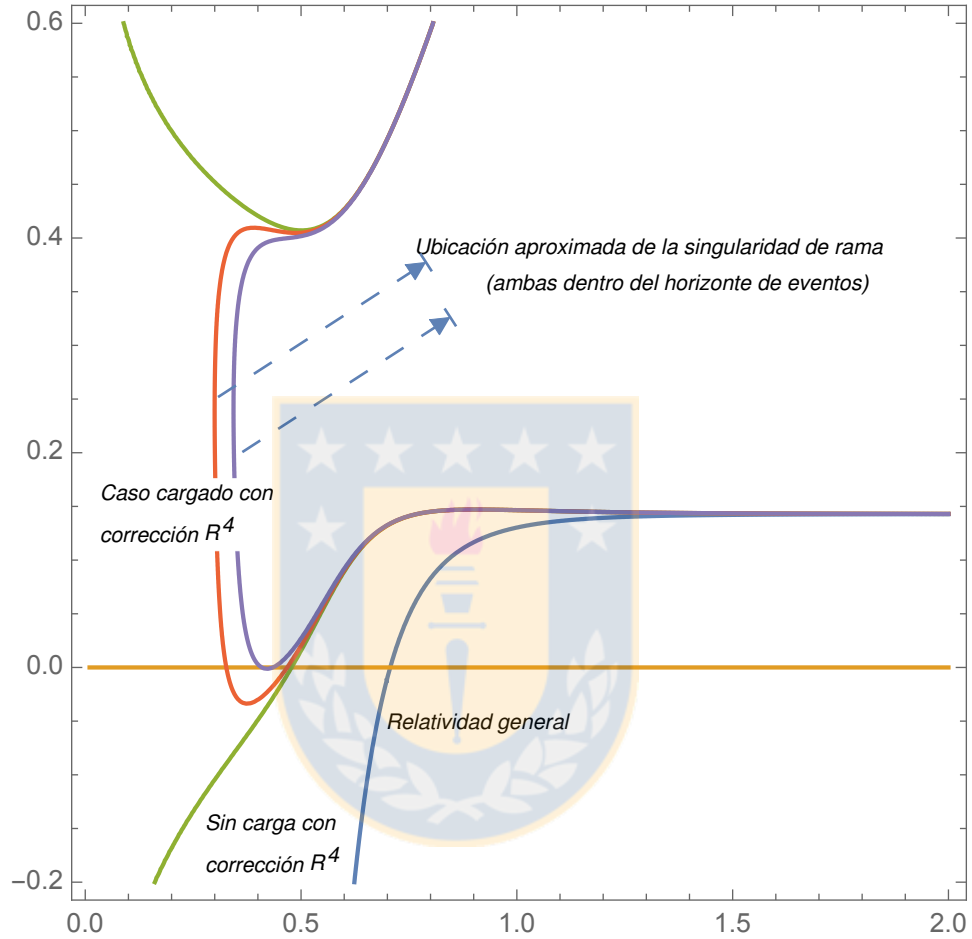


Figura 2.2: Funciones *lapse* para $(S^2)^4$ cargada bajo un campo de Maxwell y sin carga bajo $F_{(4)}$. Usamos $M = 10^{-3}$ y el par (Q_0, α) igual a $(0, 0)$ -azul, $(0, 8 \times 10^{-2})$ -verde, $(10^{-2}, 8 \times 10^{-2})$ -rojo y $(1.55 \times 10^{-2}, 8 \times 10^{-2})$ -púrpura. Fuente: Elaboración propia.

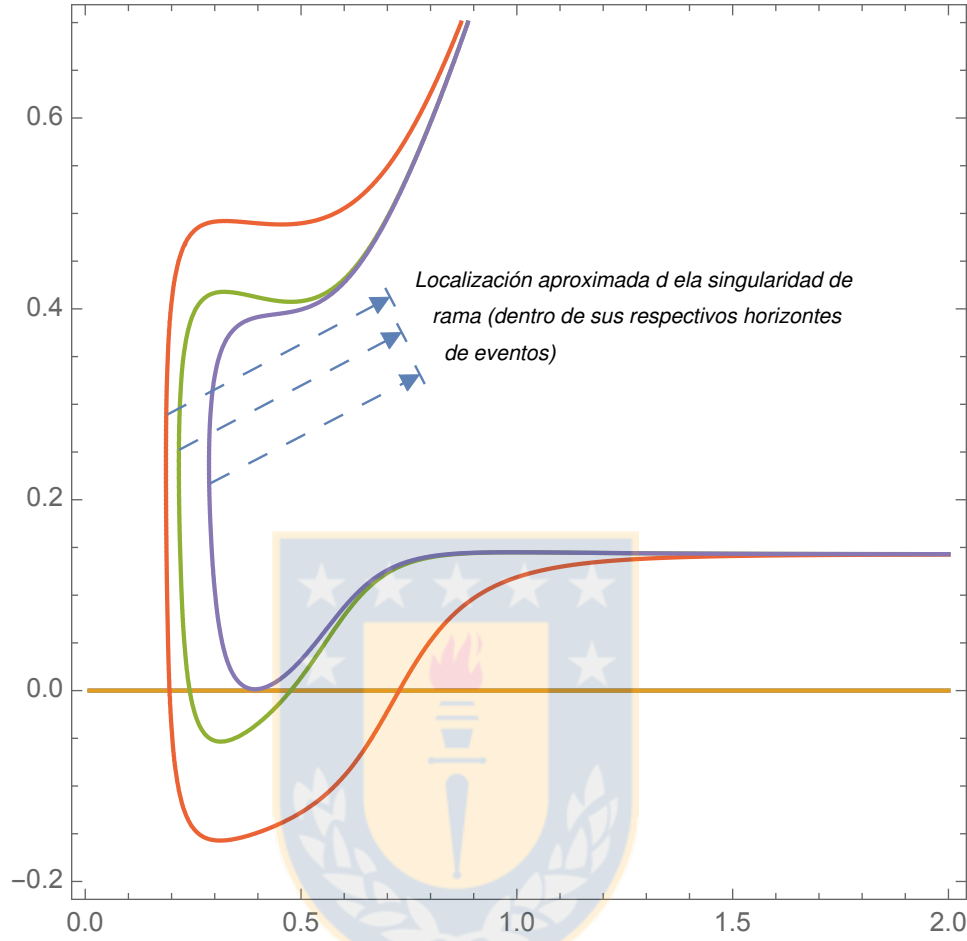


Figura 2.3: Funciones *lapse* para agujeros negros con $(S^2)^4$ diónicos- $F_{(4)}$ y sin carga bajo Maxwell.

Hemos usado $\alpha = 0.08$, $Q_0 = 0$ y $M = 10^{-3}$ además del par (Q_2, P_2) con $(1.45 \times 10^{-2}, 2 \times 10^{-2})$ -púrpura, $(10^{-2}, 2 \times 10^{-2})$ -verde y $(10^{-2}, 8 \times 10^{-2})$ -rojo. Fuente: Elaboración propia.

2.2.2 Termodinámica

Las nuevas propiedades cualitativas introducidas por los términos de potencias altas en la curvatura pueden ser analizadas estudiando la termodinámica de la solución.

Por ejemplo, consideremos un agujero negro con $m = 1$ y $P_2 = 0 = \Lambda$, cuya

temperatura de Hawking, incluyendo los términos R^2 y R^4 es dada por

$$T_{\text{BH}} = \frac{8\sigma r_+^{14} + 48\alpha\hat{\lambda}|\sigma|r_+^{12} + 384\alpha^3|\sigma|r_+^8 - 24Q_2^2r_+^4 - Q_0^2}{32\pi r_+^9(192\alpha^3\sigma + 12\alpha\hat{\lambda}\sigma r_+^4 + r_+^6)}. \quad (2.36)$$

Vemos de esto las modificaciones a cortas distancias al comportamiento en relatividad general. Valores grandes de r_+^2/α , (2.36) claramente reproducen el comportamiento termodinámico de agujeros negros asintóticamente planos de las ecuaciones de Einstein. En contraste, mientras $\alpha \neq 0$, el comportamiento para r_+ pequeños se desvía de aquel de relatividad general.

Contribuciones de corta distancia también son vistas en la fórmula de entropía del agujero negro, a saber

$$S_{\text{BH}} = \frac{(4\pi)^4 r_+^8}{4\ell_P^8} + \frac{4\sigma\hat{\lambda}\alpha r_+^6}{\ell_P^8} + \frac{192(4\pi)^4 \alpha^3 \sigma r_+^2}{\ell_P^8}, \quad (2.37)$$

de la que observamos que el término de ley de área de Bekenstein-Hawking obtiene una contribución de los términos de mayor potencia en la curvatura que se anula en el límite $\alpha \rightarrow 0$. Tales términos escalan potencias del volumen menores, como se espera del análisis dimensional. A diferencia del término proporcional al área del horizonte, el signo de los otros dos términos es sensible a la curvatura de la variedad base (σ) como también al signo de la constante de acoplamiento de los términos de mayor potencia en la curvatura (α). Elecciones diferentes de estos signos llevan a diferentes comportamientos cualitativos, incluyendo algunos patológicos. Tal dependencia de los signos de los acoplamientos es también observada en la expresión para la temperatura, aunque, como es de esperarse, se vuelve relevante solo a distancias cortas.

2.3 Cuerdas y branas negras cargadas en teorías de Lovelock

De los resultados de la sección anterior podemos preguntarnos si podemos oxidar estos agujeros negros para obtener soluciones de cuerdas y branas negras. Al igual que en el caso del agujero negro de Boulware-Deser [47], esta oxidación no es posible debido a la incompatibilidad de las ecuaciones extendidas con las ecuaciones en subvariedad del agujero negro, pero el impedimento se puede sortear al considerar un único término en la acción, logrando mantener la configuración de nuestros campos.

En la última sección de esta tesis presentaremos nuestros últimos resultados, reportados en [74], donde extenderemos el caso expuesto anteriormente para construir objetos extendidos en teorías de Lovelock de orden n acopladas a campos de $(q - 1)$ -formas cuando n es igual a q .

2.3.1 Nuevas cuerdas negras cargadas en Gauss-Bonnet-Maxwell

Primero revisemos la obstrucción en la construcción de branas negras en la teoría Einstein-Maxwell mediante la oxidación de la solución de Reissner-Nordström.

Las ecuaciones de campo de la teoría de Einstein-Maxwell son

$$\mathcal{E}^{(1,2)} := R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R - \left(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd} \right) = 0 . \quad (2.38)$$

Asumiendo un ansatz eléctrico de la forma

$$ds^2 = d\tilde{s}_{D-q}^2 + d\tilde{x}_q^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + r^2 d\Omega_{D-2-q}^2 + d\tilde{x}_q^2, \quad (2.39)$$

$$A = A_t(r) dt, \quad (2.40)$$

uno obtiene dos conjuntos de ecuaciones

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R} = \tilde{F}_{\mu\alpha}\tilde{F}_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}, \quad (2.41)$$

y

$$-\frac{1}{2}g_{x_i x_i}\tilde{R} = -\frac{1}{4}g_{x_i x_i}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \text{ (sin suma sobre } x_i), \quad (2.42)$$

donde aquí los índices griegos corren a lo largo de la variedad $d = (D - q)$ -dimensional de elemento de línea $d\tilde{s}^2$ y objetos tildados están intrínsecamente definidos en esta variedad. Los x_i , con $i = 1, \dots, q$, representan a las coordenadas cartesianas sobre las direcciones extendidas planas.

Las ecuaciones (2.41) llevan a la solución de Reissner-Nordström en $D - q$ dimensiones con potencial de *gauge* dado por $A_t = -Q_e/r^{d-3} + A_\infty$. Introduciendo la traza de (2.41) en la ecuación (2.42) se encuentra que

$$(D - q - 2)\tilde{F}^2 = (D - q - 4)\tilde{F}^2, \quad (2.43)$$

lo que es compatible solo si la carga eléctrica se anula, y por lo tanto, A_t es constante. Como debe esperarse, esto muestra que la solución de Reissner-Nordström no puede ser extendida cilíndricamente a dimensiones mayores solo agregando direcciones planas. Notar que el factor en el lado izquierdo de (2.43) es determinado por el hecho de que

$$\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{2 - (D - q)}{2}\tilde{R}. \quad (2.44)$$

Para la teoría de Gauss-Bonnet, cuyo Lagrangiano es dado por $\mathcal{L}^{(2)}$ en la ecuación (2.4), el tensor de Einstein generalizado queda

$$\mathcal{G}_{ab}^{(2)} = 2RR_{ab} - 4R_{ac}R^c_b - 4R_{cd}R^{cd}_{ab} + 2R_{acde}R_b{}^{cde} - \frac{1}{2}g_{ab}\mathcal{L}^{(2)} , \quad (2.45)$$

y podemos ver que en dimensión D

$$g^{ab}\mathcal{G}_{ab}^{(2)} = \frac{4-D}{2}\mathcal{L}^{(2)} . \quad (2.46)$$

Podemos acoplar $\mathcal{L}^{(2)}$ a la teoría de Maxwell y las ecuaciones de campo quedan

$$\mathcal{E}^{(2,2)} := \mathcal{G}_{ab}^{(2)} - \left(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd} \right) = 0 . \quad (2.47)$$

Separando las ecuaciones usando el ansatz de la brana negra eléctricamente cargada (2.39)-(2.40) tenemos

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\mu\nu}^{(2)} = \tilde{F}_{\mu\alpha}\tilde{F}_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} , \quad (2.48)$$

y

$$-\frac{1}{2}g_{x_i x_i}\tilde{\mathcal{L}}^{(2)} = -\frac{1}{4}g_{x_i x_i}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \text{ (sin suma sobre } x_i \text{)} . \quad (2.49)$$

Ahora, introduciendo la traza de las ecuaciones definidas en la variedad $(D-q)$ -dimensional (2.48) en (2.49) obtenemos la relación

$$(D-q-4)\tilde{F}^2 = (D-q-4)\tilde{F}^2 , \quad (2.50)$$

que es trivialmente satisfecha y no impone restricciones extras sobre el campo eléctrico. Luego, quedamos con el sistema de ecuaciones proyectadas sobre la brana (2.48), las que admiten soluciones de agujeros negros con carga y masa [62]. Esto muestra que es suficiente resolver el sistema (2.48) que proveerá de

una solución de la teoría de Gauss-Bonnet-Maxwell en $(D - q)$ dimensiones y admite un aumento cilíndrico a dimensión D con direcciones extras planas.

Explícitamente, el siguiente espaciotiempo de brana es una solución de la teoría de Gauss-Bonnet-Maxwell (2.47):

$$ds^2 = - \left(1 - \left(\frac{\mu}{r^{D-q-5}} - \frac{Q^2}{r^{2(D-q-4)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{\mu}{r^{D-q-5}} - \frac{Q^2}{r^{2(D-q-4)}} \right)^{\frac{1}{2}}} + r^2 d\Omega_{D-q-2}^2 + d\vec{x}_q^2, \quad (2.51)$$

$$A = -\sqrt{(D-q-4)(D-q-2)} \frac{Q}{r^{D-q-3}} dt, \quad (2.52)$$

donde μ y Q son constantes de integración y $d\Omega_{D-q-2}$ es el elemento de línea de una $(D - q - 2)$ -esfera. Este espaciotiempo describe una brana negra para $D - q > 5$. Podemos verificar la consistencia con el argumento general dado anteriormente y mostrar explícitamente que las ecuaciones de campo sobre las direcciones extendidas \vec{x} son trivialmente satisfechas.

Es interesante notar que la dinámica de esta teoría es invariante bajo transformaciones de escala globales para la métrica, dado que bajo $g_{ab} \rightarrow \xi^{-1} g_{ab}$, las ecuaciones de campo (2.47) escalan como

$$\mathcal{E}_{ab}^{(2,2)} = 0 \rightarrow \xi \mathcal{E}_{ab}^{(2,2)} = 0. \quad (2.53)$$

Esta no es una simetría de la acción, sino una simetría de las ecuaciones de campo.

2.3.2 Teorías de Lovelock de orden n y p -formas

Los resultados anteriores inmediatamente motivan la exploración de teorías de Lovelock con un único término de orden n , acoplado a una p -forma intensidad

de campo, cuyas ecuaciones de campo son dadas por

$$\mathcal{E}^{(n,p)} := \mathcal{G}_{ab}^{(n)} - \left(F_{ac_1 \dots c_{p-1}} F_b{}^{c_1 \dots c_{p-1}} - \frac{1}{2p} g_{ab} F_{c_1 \dots c_p} F^{c_1 \dots c_p} \right) = 0, \quad (2.54)$$

y para la $(p-1)$ -forma

$$\nabla_a F^{ac_1 \dots c_{p-1}} = 0. \quad (2.55)$$

El término en el paréntesis de (2.54) corresponde al tensor de energía-momento de un campo $(p-1)$ -forma con intensidad de campo $F_{(p)}$, y $\mathcal{G}_{ab}^{(n)}$ es el tensor de Lovelock de orden n , es decir,

$$\mathcal{G}_b{}^{c(n)} := -\frac{1}{2^{n+1}} \delta_{bd_1 \dots d_{2n}}^{ac_1 \dots c_{2n}} R_{c_1 c_2 \dots}^{d_1 d_2} \dots R_{c_{2n-1} c_{2n}}^{d_{2n-1} d_{2n}}, \quad (2.56)$$

que se reduce al tensor de Einstein cuando $n = 1$. Es importante notar la siguiente identidad

$$g^{ab} \mathcal{G}_{ab}^{(n)} = \left(\frac{2n - D}{2} \right) \mathcal{L}^{(n)}. \quad (2.57)$$

Estamos interesados en cuerdas negras homogéneas y branas con métricas de la forma (2.39), y por lo tanto, como en el caso electromagnético, asumiremos que el campo fundamental $(p-1)$ -forma depende solo de las coordenadas sobre la brana. Este requerimiento es lo suficientemente general para admitir también soluciones con cargas magnéticas. Ahora podemos proyectar las ecuaciones de la teoría de Lovelock soportadas por una $(p-1)$ -forma (2.54) sobre la brana y a lo largo de las q direcciones extendidas, las que respectivamente llevan a

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\mu\nu}^{(n)} = \left(\tilde{F}_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} \tilde{F}_\nu{}^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} - \frac{1}{2p} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \tilde{F}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \right), \quad (2.58)$$

$$-\frac{1}{2} g_{x_i x_i} \tilde{\mathcal{L}}^{(n)} = -\frac{1}{2p} g_{x_i x_i} \tilde{F}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \tilde{F}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad (\text{sin suma sobre } x_i). \quad (2.59)$$

Introduciendo (2.59) en la traza de las ecuaciones $(D-q)$ -dimensionales (2.58),

obtenemos

$$(D - q - 2n) \tilde{F}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \tilde{F}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = (D - q - 2p) \tilde{F}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \tilde{F}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} , \quad (2.60)$$

lo que para $\tilde{F}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \tilde{F}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \neq 0$, es consistente solo si $n = p$. Esto muestra que podemos extender cilíndricamente a las soluciones de la teoría de Lovelock con un único término de Lovelock de orden n , solo cuando estas están soportadas por un campo $(n - 1)$ -forma. Es por lo tanto suficiente resolver las ecuaciones sobre la brana (2.58) para encontrar nuevos objetos negros extendidos. Las ecuaciones de campo de tal teoría también adquieren la simetría global de escala dado que bajo $g_{ab} \rightarrow \xi^{-1} g_{ab}$, uno tiene

$$\mathcal{E}_{ab}^{(n,n)} = 0 \rightarrow \xi^{n-1} \mathcal{E}_{ab}^{(n,n)} = 0 . \quad (2.61)$$

Notemos con tal de tener una contribución no nula de la teoría de Lovelock de orden n a las ecuaciones de campo necesitamos que $d > 2n$.

De lo anterior, es interesante notar que la teoría de Einstein con un único campo escalar masivo pertenece a la clase especial de teorías señaladas. En efecto, en tal caso las ecuaciones sobre la brana quedan

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi , \quad (2.62)$$

mientras las ecuaciones a lo largo de las direcciones extendidas se reducen a

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi , \quad (2.63)$$

lo que está trivialmente implícito en la traza de (2.62). Debido a teoremas de no pelo, en este sistema no es posible obtener objetos negros extendidos cilíndricamente, sin embargo, para simetría esférica en la brana, esto muestra

que es posible extender cilíndricamente la solución singular de Janis-Newman-Winicour [75] a partir de cuatro dimensiones a $D = (4+q)$ dimensiones como una solución del sistema de Einstein-Klein-Gordon en D dimensiones. Esto puede ser extendido a dimensión arbitraria d considerando la solución singular de Zannias-Xanthopoulos [76].

En la sección previa vimos que para la teoría de Gauss-Bonnet acoplada a un campo de Maxwell podemos en efecto construir branas negras. En la siguiente sección construiremos nuevas soluciones para teorías de Lovelock cúbicas y cuárticas sustentadas por una 3- y una 4-forma, describiendo respectivamente cuerdas y branas negras.

2.3.3 Nuevas p -branas negras cargadas

En la sección anterior hemos mostrado que la teoría de Lovelock de orden n acoplada a una $(p-1)$ -forma con $p = n$ admite soluciones de brana negra, siempre que se pueda resolver un objeto negro sobre la brana. En esta sección construimos nuevas soluciones en esta clase para teoría de Lovelock cúbica y cuártica acopladas a una 2-forma y a una 3-forma, respectivamente.

Lovelock cúbico y un campo Kalb-Ramond

Propongamos el siguiente ansatz para la métrica

$$ds^2 = d\tilde{s}_d^2 + d\vec{x}_q^2 \tag{2.64}$$

$$= -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 \left(d\Omega_{(1)}^2 + \dots + d\Omega_{(m)}^2 \right) + d\vec{x}_q^2, \tag{2.65}$$

donde $d\Omega_{(i)}$ denota el elemento de línea de la i -ésima variedad 3-dimensional de curvatura constante γ , normalizada a ± 1 (es posible verificar que el caso $\gamma = 0$

no lleva a soluciones de agujeros negros). Con tal de ser concretos, usamos la siguiente carta coordenada (x_i, y_i, z_i) para la i -ésima variedad 3-dimensional con elemento de línea $d\Omega_{(i)}$ tal que

$$d\Omega_{(i)}^2 = \frac{dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2}{\left(1 + \frac{\gamma}{4} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\right)^2} \text{ (sin suma sobre } i \text{)} , \quad (2.66)$$

y el siguiente ansatz magnético natural para la 3-forma intensidad de campo

$$F_{(3)} = P \sum_{i=1}^m \text{Vol}(\Omega_{(i)}) , \quad (2.67)$$

donde P es constante. En componentes queda

$$F_{\mu\nu\lambda}^{(3)} = \frac{P}{\left(1 + \frac{\gamma}{4} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\right)^3} \delta_{[\mu}^{x_1} \delta_{\nu}^{y_1} \delta_{\lambda]}^{z_1} + \dots + \frac{P}{\left(1 + \frac{\gamma}{4} (x_m^2 + y_m^2 + z_m^2)\right)^3} \delta_{[\mu}^{x_m} \delta_{\nu}^{y_m} \delta_{\lambda]}^{z_m} . \quad (2.68)$$

sin suma sobre m .

Por lo tanto, la dimensión del espaciotiempo es $D = d + q = (2 + 3m) + q$.

De esta manera, como es usual, las ecuaciones para la 2-forma

$$\nabla_{\mu} F_{(3)}^{\mu\nu\lambda} = 0 , \quad (2.69)$$

son satisfechas sin ninguna restricción extra sobre la carga magnética P . Luego, tenemos que lidiar con las ecuaciones de Einstein generalizadas

$$\mathcal{E}_{ab}^{(3,3)} := c_3 \mathcal{G}_{ab}^{(3)} - \left(F_{acd} F_b{}^{cd} - \frac{1}{6} g_{ab} F_{cde} F^{cde} \right) = 0 , \quad (2.70)$$

y luego, resolver la función *lapse* $f(r)$ del sistema

$$-\frac{c_3}{2^4} \delta_{bd_1 \dots d_6}^{ac_1 \dots c_6} R_{c_1 c_2}^{d_1 d_2} R_{c_3 c_4}^{d_3 d_4} R_{c_5 c_6}^{d_5 d_6} - \left(F_{cd}^a F_b{}^{cd} - \frac{1}{6} \delta_b^a F_{cde} F^{cde} \right) = 0. \quad (2.71)$$

Notemos que se ha incluido explícitamente el acoplamiento c_3 . Para ejemplos explícitos de soluciones incluyendo agujeros negros cargados con horizonte plano, agujeros negros de Taub-Nut y sus acoplamientos con electrodinámica no lineal en teorías de Lovelock conteniendo el término cúbico ver los trabajos en Ref. [77].

Con este ansatz, podemos usar los resultados de las secciones previas para mostrar que las ecuaciones $\mathcal{E}_{x_i x_i}^{(3,3)} = 0$ (sin suma sobre x_i) están implícitas en la traza de las ecuaciones sobre la brana. De estas ecuaciones podemos mostrar que

$$\mathcal{E}_t^{(3,3)t} = \mathcal{E}_r^{(3,3)r}. \quad (2.72)$$

Las ecuaciones proyectadas sobre los ángulos $\Omega_{(i)}$ son todas iguales y se reducen a una combinación lineal de la ecuación $\mathcal{E}_t^{(3,3)t}$ y su derivada con respecto a la coordenada radial, como es de esperar de la invariancia bajo difeomorfismos. Consecuentemente, quedamos con una única ecuación maestra que admite una primera integral y lleva al siguiente polinomio tipo Wheeler para $f = f(r)$:

$$f^3 - \frac{6\gamma}{(d-3)} f^2 + \frac{12}{(d-4)(d-3)} f + \frac{1}{54} \frac{(d-8)! P^2}{(d-3)! c_3} + \frac{\mu}{r^{d-7} c_3} - \frac{8\gamma(d-8)}{(d-6)(d-7)(d-3)(d-4)} = 0. \quad (2.73)$$

Aquí μ es una constante de integración.

Asumiendo la existencia de un horizonte localizado en $r = r_+ > 0$, podemos calcular la temperatura y la densidad de entropía de la cuerda negra [78], que

respectivamente son

$$T = \frac{f'(r_+)}{4\pi} = \frac{1}{48} \frac{(d-7)(d-4)(d-3)\mu}{c_3\pi r_+^{d-6}}, \quad (2.74)$$

$$s = 64\pi^2 c_3 (d-5)(d-2)r_+^{d-6}, \quad (2.75)$$

y $\mu = \mu(r_+)$ es dada por

$$\mu(r_+) = \frac{(d-2)!(d-5)}{(d-7)!} \left(8\gamma c_3 (d-8) - \frac{1}{54} \frac{P^2}{(d-5)} \right) r_+^{d-7}. \quad (2.76)$$

Como es de esperarse, la positividad de la temperatura y la entropía implica $c_3 > 0$ y $\mu > 0$, lo que, debido a (2.76) y para $d > 8$ implica $\gamma = 1$ (el caso $d = 8$ no lleva a agujeros negros). Por lo tanto, el horizonte de la brana negra es dada por el producto de m 3-esferas y \mathbb{R}^q .

La Figura 2.4 representa la función *lapse* para algunos valores de las constantes de integración en dimensiones $d = 11$ y $d = 14$.

La solución con constantes de integración nulas, $\mu = P = 0$, tiene la forma

$$ds_0^2 = -\alpha_d(P=0, \mu=0) dt^2 + \frac{dr^2}{\alpha_d(P=0, \mu=0)} + r^2 \left(d\Omega_{(1)}^2 + \dots + d\Omega_{(m)}^2 \right) + d\vec{x}_q^2, \quad (2.77)$$

con α_d una solución real del polinomio cúbico (2.73). Este espaciotiempo tiene una singularidad de curvatura en el origen, que, como muestra la Figura 2.4, puede ser cubierta por un horizonte de eventos para valores no nulos de las constantes de integración. La situación es similar a lo que ocurre en espaciotiempos de Lifshitz, donde el espacio de fondo es singular en el origen (contiene geodésicas tipo-tiempo incompletas), pero esta singularidad está escondida por un horizonte de eventos en el caso de agujeros negros de Lifshitz (ver por ejemplo [79]). Este comportamiento también recuerda al de los monopolos gravitantes [80].

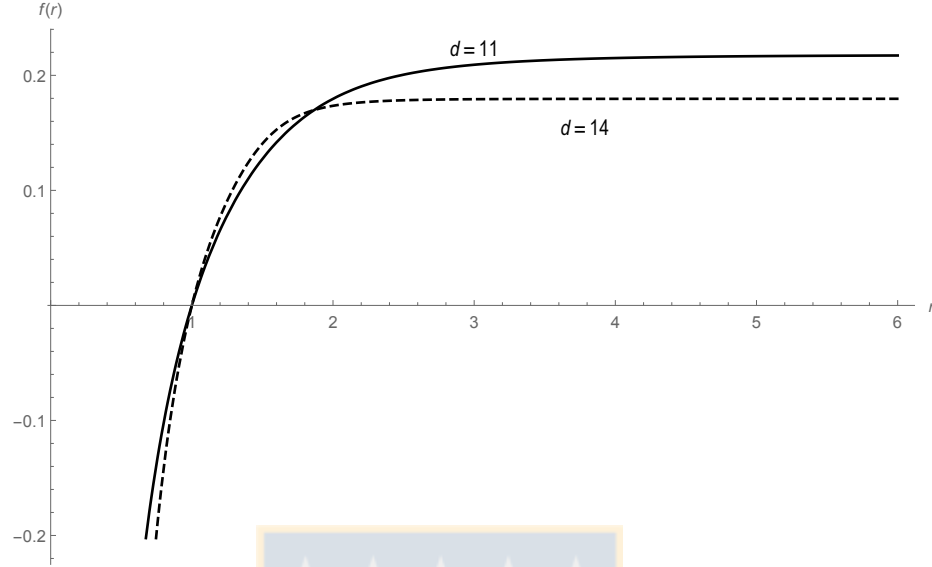


Figura 2.4: $f(r)$ de agujeros negros cargados para la teoría de Lovelock cúbica soportados por una 3-forma intensidad de campo.

Tomamos $c_3 = 1$, $r_+ = 1$ y carga magnética $P = 1$, para $d = 11$ y $d = 14$. El horizonte de eventos es un producto de 3-esferas y esta solución puede ser trivialmente oxidada a dimensiones mayores agregando un factor \mathbb{R}^q a la métrica. Fuente: Elaboración propia.

El comportamiento asintótico de la función *lapse* es

$$f(r) = \alpha_d(P) - \frac{\tilde{\mu}(d, \mu, P)}{r^{\frac{d-7}{3}}} + \dots, \quad (2.78)$$

donde las elipses denotan términos de orden más bajo. Aquí α_d y $\tilde{\mu}$ dependen tanto de la dimensión como de las constantes de integración μ y P . Es interesante notar que la primera dependencia en r tiene el decaimiento habitual para la solución de agujero negro de la teoría de Lovelock cúbica en vacío [62], por lo tanto, podemos esperar que para un $P = \bar{P}$ fijo, estas soluciones deben tener masa finita cuando la densidad de energía es medida con respecto al espacio de fondo

$$ds_\infty^2 = -\alpha_d(\bar{P}) dt^2 + \frac{dr^2}{\alpha_d(\bar{P})} + r^2 \left(d\Omega_{(1)}^2 + \dots + d\Omega_{(m)}^2 \right) + d\vec{x}_q^2, \quad (2.79)$$

con un flujo magnético no nulo. Es también interesante notar que el término que decae como $r^{-(d-7)/3}$ tiene una caída más lenta que la de una solución asintóticamente plana con masa finita en Relatividad General ($r^{-(d-3)}$), sin embargo, dado que solo el término cúbico está presente, la masa vendrá del término con decaimiento $r^{-(d-7)/3}$ en la función *lapse*.

Lovelock cuártico y 3-forma: soluciones magnéticamente cargadas

Construyamos ahora nuevas soluciones de branas negras en la teoría de Lovelock cuártica acoplada a un 4-forma intensidad de campo.

Primero construiremos soluciones cargadas únicamente de forma magnética, para lo que usaremos el ansatz (2.64)-(2.65) donde ahora $d\Omega_{(i)}$ representa el elemento de línea de la i -ésima variedad 4-dimensional de curvatura constante γ , normalizada a ± 1 . Nuevamente, y para ser concretos, una carta coordenada (x_i, y_i, z_i, w_i) sobre la i -ésima variedad cuatridimensional de elemento de línea $d\Omega_{(i)}$ puede ser usada, luego

$$d\Omega_{(i)}^2 = \frac{dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2 + dw_i^2}{\left(1 + \frac{\gamma}{4}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + w_i^2)\right)^2} \text{ (sin suma sobre } i \text{)}, \quad (2.80)$$

y el ansatz magnético para la 4-forma queda

$$F_{(4)} = P \sum_{i=1}^m \text{Vol}(\Omega_{(i)}) , \quad (2.81)$$

lo que en componentes es

$$F_{\mu\nu\lambda\rho}^{(4)} = \frac{P}{\left(1 + \frac{\gamma}{4}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2)\right)^3} \delta_{[\mu}^{x_1} \delta_{\nu}^{y_1} \delta_{\lambda}^{z_1} \delta_{\rho]}^{w_1} + \dots \\ + \frac{P}{\left(1 + \frac{\gamma}{4}(x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 + w_m^2)\right)^3} \delta_{[\mu}^{x_m} \delta_{\nu}^{y_m} \delta_{\lambda}^{z_m} \delta_{\rho]}^{w_m} , \quad (2.82)$$

sin suma sobre m . Ahora, la dimensión del espaciotiempo es $D = d + q = (2 + 4m) + q$. Nuevamente, las ecuaciones de Maxwell para la 3-forma fundamental son trivialmente satisfechas e introduciendo el acoplamiento gravitacional c_4 quedamos con el sistema

$$\mathcal{E}_{ab}^{(4,4)} := c_4 \mathcal{G}_{ab}^{(4)} - \left(F_{acde} F_B{}^{cde} - \frac{1}{8} g_{ab} F_{cdeh} F^{cdeh} \right) = 0, \quad (2.83)$$

que explícitamente queda

$$-\frac{c_4}{2^5} \delta_{bd_1 \dots d_8}^{ac_1 \dots c_8} R_{c_1 c_2}^{d_1 d_2} R_{c_3 c_4}^{d_3 d_4} R_{c_5 c_6}^{d_5 d_6} R_{c_7 c_8}^{d_7 d_8} - \left(F_{cde}^a F_b{}^{cde} - \frac{1}{8} g_{ab} F_{cdeh} F^{cdeh} \right) = 0. \quad (2.84)$$

Como antes, dado que hay una única función métrica y el sistema proviene de una acción que es invariante bajo difeomorfismos, es suficiente integrar la ecuación (tt) , lo que lleva al siguiente polinomio cuártico tipo Wheeler

$$f^4 - \frac{12\gamma}{(d-3)} f^3 + \frac{18(3d-16)\gamma^2}{(d-5)(d-4)(d-3)} f^2 - \frac{108\gamma(d-8)}{(d-7)(d-5)(d-4)(d-3)} f - \frac{1}{384} \frac{(d-10)! P^2}{(d-3)! c_4} + \frac{27(3d^2 - 48d + 188)}{(d-9)(d-8)(d-7)(d-5)(d-4)(d-3)} - \frac{\mu}{r^{d-9} c_4} = 0.$$

Nuevamente, μ es una constante de integración. La expresión para la temperatura y la densidad de entropía de un agujero negro con horizonte localizado en $r = r_+$ queda

$$T = \frac{f'(r_+)}{4\pi} = \frac{1}{432} \frac{\mu(d-9)(d-7)(d-5)(d-4)(d-3)}{(d-8)\gamma\pi c_4 r_+^{d-8}},$$

$$s = 216\pi^3 \gamma (d-8)(d-6)(d-2) c_4 r_+^{d-8}, \quad (2.85)$$

y en este caso $\mu = \mu(r_+)$ es dada por

$$\mu(r_+) = \frac{(d-10)!}{(d-3)!} \left[27(3d^2 - 48d + 188)(d-6)c_4 - \frac{1}{384}P^2 \right] r_+^{d-9} . \quad (2.86)$$

Considerando la última expresión y además restringiendo la entropía y temperatura a ser positivas, tenemos que $c_4 > 0$, $\mu > 0$ y $\gamma = 1$. Consecuentemente, en este caso el horizonte de eventos de la brana negra tiene la geometría local de un producto de m 4-esferas y \mathbb{R}^q . En la Figura (2.5) mostramos algunas gráficas de la función *lapse* para diferentes valores de las constantes de integración y dimensiones.

Tal como antes, cuando $r \rightarrow +\infty$, la función *lapse* va a una constante $\alpha_d(P)$ en adición a un término proporcional a una función $\tilde{\mu}(d, \mu, P)$ que decae como $r^{-(d-9)/3}$. Esto coincide con el decaimiento asintótico de la solución en la teoría de Lovelock cuártica en vacío [62].

Lovelock cuártico y 3-forma: soluciones diónicas

Finalmente, construyamos nuevas soluciones de cuerda negra con carga tanto eléctrica como magnética, es decir, soluciones diónicas. Asumimos que el elemento de línea es dado por (2.64)-(2.65) y ahora $d\Omega_{(i)}$ representa el elemento de línea de la i -ésima variedad 2-dimensional de curvatura constante γ , normalizada a ± 1 . Podemos escoger la carta coordenada (x_i, y_i) sobre la i -ésima variedad 2-dimensional, tal que

$$d\Omega_{(i)}^2 = \frac{dx_i^2 + dy_i^2}{\left(1 + \frac{\gamma}{4}(x_i^2 + y_i^2)\right)^2} \text{ (sin suma sobre } i \text{)} . \quad (2.87)$$

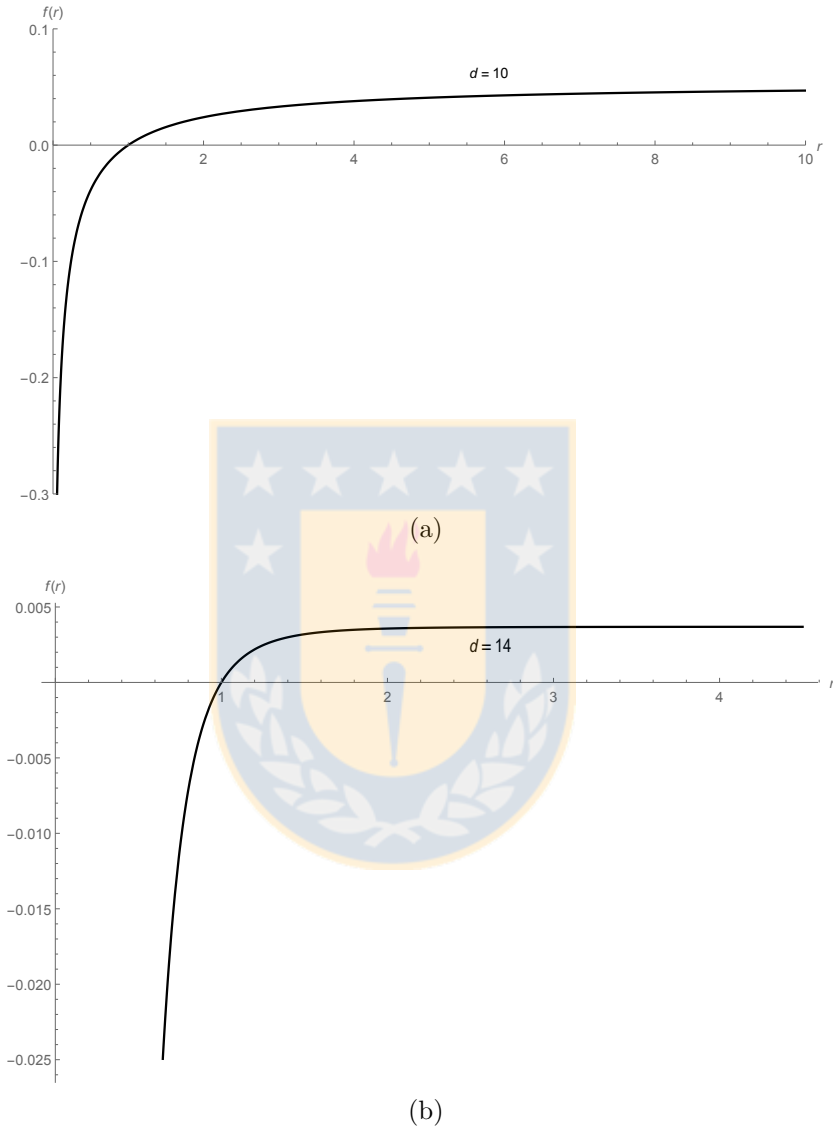


Figura 2.5: $f(r)$ de agujeros negros cargados magnéticamente para teoría cuártica soportados por una 4-forma intensidad de campo. Graficamos $d = 10$ con $P = 2900$ (a) y $d = 14$ con $P = 550$ (b). En ambas figuras hemos escogido $c_4 = 1$ y $r_+ = 1$. El horizonte de eventos es dado como el producto de 4-esferas y estas soluciones pueden ser oxidadas cilíndricamente a mayores dimensiones agregando un factor \mathbb{R}^q a la métrica. Fuente: Elaboración propia.

Con el fin de tener términos eléctricos y magnéticos de la intensidad de campo no nulos asumimos

$$F_{(4)} = Q dt \wedge dr \wedge \sum_i Vol(\Omega_{(i)}) + P \sum_{i < j} Vol(\Omega_{(i)}) \wedge Vol(\Omega_{(j)}) , \quad (2.88)$$

lo que en componentes es escrito como

$$F_{\mu\nu\lambda\rho}^{(4)} = P \sum_{i < j}^m \frac{\delta_{[\mu}^{x_i} \delta_{\nu]}^{y_i} \delta_{\lambda}^{x_j} \delta_{\rho]}^{y_j}}{\left(1 + \frac{\gamma}{4} (x_i^2 + y_i^2)\right) \left(1 + \frac{\gamma}{4} (x_j^2 + y_j^2)\right)} + Q \sum_i^m \frac{\delta_{[\mu}^t \delta_{\nu]}^r \delta_{\lambda}^{x_i} \delta_{\rho]}^{y_i}}{\left(1 + \frac{\gamma}{4} (x_i^2 + y_i^2)\right)} . \quad (2.89)$$

La dimensión del espaciotiempo es ahora $D = d + q = (2 + 2m) + q$. Las ecuaciones de Maxwell para la 3-forma fundamental son idénticamente satisfechas, y como antes el sistema (2.84) lleva a una única ecuación polinomial

$$f^4 - \frac{4\gamma}{(d-3)} f^3 + \frac{6\gamma^2}{(d-5)(d-3)} f^2 - \frac{4\gamma}{(d-7)(d-5)(d-3)} f - \frac{\mu}{r^{d-9} c_4} - \frac{1}{768} \frac{(d-10)!(d-4)P^2}{c_4(d-3)!} + \frac{1}{192} \frac{(d-9)!Q^2}{c_4(d-7)(d-3)!r^{2(d-8)}} + \frac{\gamma^2}{(d-9)(d-7)(d-5)(d-3)} = 0 . \quad (2.90)$$

La temperatura y la densidad de entropía

$$T = \frac{(d-5)(d-3)}{16\gamma\pi c_4 r_+^{d-8}} \left[\mu(d-9)(d-7) - \frac{1}{96} \frac{(d-9)!(d-8)}{(d-3)!} \frac{Q^2}{r_+^{d-7}} \right] , \quad (2.91)$$

$$s = 16\pi^2 \gamma c_4 (d-6)(d-4)(d-2) r_+^{d-8} , \quad (2.92)$$

y $\mu = \mu(r_+)$ en este caso es dado por

$$\mu(r_+) = \frac{r_+^{d-9}}{(d-7)(d-5)(d-3)} \left(\frac{\gamma^2 c_4}{(d-9)} + \frac{1}{192(d-8)(d-6)} \left[\frac{Q^2 r_+^{2(8-d)}}{(d-7)(d-4)} - \frac{P^2}{4(d-9)} \right] \right) .$$

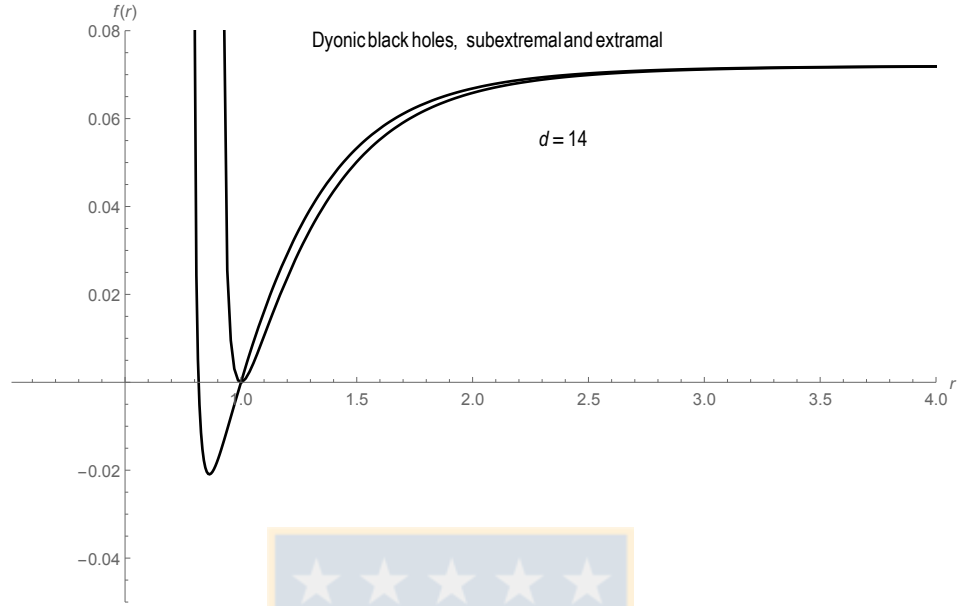


Figura 2.6: Soluciones diónicas en teoría de Lovelock cuártica en dimensión $d = 14$. El horizonte de eventos es dado por un producto de seis 2-esferas y podemos escoger $c_4 = 1$, $P = 1$ y $r_+ = 1$. Dos valores diferentes de la carga eléctrica son mostrados, lo que corresponden al valor subextremal que lleva a un espaciotiempo con un horizonte de evento y de Cauchy y también el caso extremo para el que los horizontes se degeneran y la solución tiene temperatura nula. Fuente: Elaboración propia.

La Figura 2.6 contiene las funciones *lapse* de las branas negras diónicas en la teoría de Lovelock cuártica con horizontes dados por el producto de m 2-esferas producto \mathbb{R}^q .

Conclusiones

En esta tesis hemos presentado tres nuevas familias de soluciones analíticas de objetos extendidos, tanto en relatividad general como en teorías de Lovelock en presencia de materia.

En primer lugar, las cuerdas negras construidas en relatividad general en cuatro dimensiones, acoplada al modelo sigma no lineal $SU(2)$, se caracterizan por poseer un radio de compactificación fijo determinado por las constantes de acoplamiento, los parámetros de pelo y un valor negativo de la constante cosmológica. La geometría en la sección transversal de estas cuerdas corresponde a un agujero negro tipo BTZ cargado, donde la carga eléctrica es reemplazada en este caso por la constante de acoplamiento de los piones. La comparación de los potenciales termodinámicos de la cuerda negra con los del agujero negro con pelo en este mismo escenario sugieren la no existencia de una transición de fase.

Por otro lado, hemos generalizado las p -branas negras de relatividad general acopladas minimalmente a campos escalares sin masa construidas en [44] al caso de teorías de Lovelock *puras*. Los campos escalares son proporcionales a las coordenadas cartesianas a lo largo de las direcciones extendidas, y el factor de proporcionalidad de estas p -branas negras homogéneas se relaciona con el valor de la constante cosmológica, el que resulta ser negativo. El análisis de la estabilidad perturbativa de estas soluciones es un problema abierto que se desprende de

nuestros resultados.

Hemos mostramos además que, en teorías de Lovelock de orden n , es posible construir soluciones de p -branas negras al acoplar campos de $(p - 1)$ -formas simplemente *oxidando* las soluciones de agujero negro, siempre y cuando $n = p$. Explícitamente, hemos presentado soluciones en la teoría de Gauss-Bonnet acoplada a Maxwell, en la teoría de Lovelock cúbica soportada por un campo de Kalb-Ramond y, por último, soluciones diónicas en la teórica de Lovelock cuártica.

Además, hemos visto que usando el mismo ansatz del caso anterior es posible construir soluciones de agujeros negros diónicos en modelos inspirados en teoría de cuerdas para diferentes elecciones de la variedad base del ansatz métrico. Este modelo, que incluye acoplamientos con campos de 1-formas y 3-formas, nos ha permitido estudiar de manera analítica los efectos de términos cuárticos en la curvatura.

Finalmente, también en el contexto de teorías de Lovelock de orden n , hemos mostrado que las p -branas negras homogéneas en la teoría de Gauss-Bonnet sufren de inestabilidades de Gregory-Laflamme, de la misma manera que ocurre en relatividad general, aportando de esta forma evidencia a la conjetura de Gubser-Mitra [43] en teorías de orden superior en la curvatura.

Ya fuera de los objetivos planteados en la presente tesis, es interesante analizar la estabilidad perturbativa de nuestras cuerdas negras en la teoría Einstein-modelo sigma no lineal y de las branas cargadas en las diferentes teorías de Lovelock aquí presentadas, además de estudiar su comportamiento en el límite cuando D es grande [81]. También resulta relevante el analizar la evolución no lineal de nuestras soluciones de cuerdas negra y ver si el resultado de su estado final defiere del encontrado en relatividad general [59]. Además de considerar

la pregunta sobre qué efectos introducirían los términos truncados de orden más bajo en la serie de Lovelock. Con respecto a nuestros agujeros negros en teorías inspiradas en teoría de cuerda, resulta relevante el comparar estas soluciones con aquellas que podrían existir al considerar también el término asociado a la constante c_2 , que fue anulado en nuestro caso para tener soluciones exactas.



Referencias

- [1] G.T. Horowitz, *Black Holes in Higher Dimensions* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2012).
- [2] S.W. Hawking and G.F.R Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973).
- [3] R. Gregory and R. Laflamme, “Black strings and p-branes are unstable,” *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2837 (1993).
- [4] R. Emparan and H. S. Reall, “A Rotating black ring solution in five-dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 101101 (2002).
- [5] R. C. Myers and M. J. Perry, “Black Holes in Higher Dimensional Space-Times,” *Annals Phys.* **172**, 304 (1986).
- [6] D. Lovelock, “The Einstein tensor and its generalizations,” *J. Math. Phys.* **12**, 498 (1971).
- [7] B. Zwiebach, “Curvature Squared Terms and String Theories,” *Phys. Lett.* **156B**, 315 (1985).
- [8] B. Zumino, “Gravity Theories in More Than Four-Dimensions,” *Phys. Rept.* **137**, 109 (1986).

- [9] H. Reissner, “Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie,” *Annalen der Physik* **50**, 106–120 (1916).
- [10] G. Nordström, “On the Energy of the Gravitational Field in Einstein’s Theory,” *Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam* **26**, 1201–1208, (1918).
- [11] S. Chandrasekhar and J.B. Hartle, “On crossing the Cauchy horizon of a Reissner-Nordström black-hole,” *Proc. R. Soc. London A* **384**, 301 (1982).
- [12] F. Kottler, “Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie,” *Annalen der Physik* **56**, 410 (1918).
- [13] J. P. S. Lemos, “Cylindrical black hole in general relativity,” *Phys. Lett. B* **353**, 46 (1995).
- [14] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, “The Four laws of black hole mechanics,” *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
- [15] S. W. Hawking, “Black hole explosions,” *Nature* **248**, 30 (1974).
- [16] A. Strominger and C. Vafa, “Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy,” *Phys. Lett. B* **379**, 99 (1996).
- [17] D. C. Robinson, “Uniqueness of the Kerr black hole,” *Phys. Rev. Lett.* **34**, 905 (1975).
- [18] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, (Clarendon Press, 1992).
- [19] D. Christodoulou and S. Klainerman, *The global nonlinear stability of the Minkowski space* (Princeton Math. Ser. 41, 1993).

- [20] J. L. Friedman, K. Schleich and D. M. Witt, “Topological censorship,” Phys. Rev. Lett. **71**, 1486 (1993) Erratum: [Phys. Rev. Lett. **75**, 1872 (1995)].
- [21] R. Penrose, “Gravitational collapse and space-time singularities,” Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965).
- [22] R. Penrose, “Gravitational collapse: The role of general relativity,” Riv. Nuovo Cim. **1**, 252 (1969) [Gen. Rel. Grav. **34**, 1141 (2002)].
- [23] A. Ishibashi and H. Kodama, “Perturbations and Stability of Static Black Holes in Higher Dimensions,” Prog. Theor. Phys. Suppl. **189**, 165 (2011).
- [24] C. A. R. Herdeiro and E. Radu, “Asymptotically flat black holes with scalar hair: a review,” Int. J. Mod. Phys. D **24**, no. 09, 1542014 (2015).
- [25] S. S. Gubser, “Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon,” Phys. Rev. D **78**, 065034 (2008).
- [26] A.P. Balachandran, G. Marmo, B. S. Skagerstam, A. Stern, ” *Classical Topology and Quantum States*” World Scientific, 1991.
- [27] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [28] A. Anabalón, “Exact Black Holes and Universality in the Backreaction of non-linear Sigma Models with a potential in (A)dS₄,” JHEP **1206**, 127 (2012).
- [29] M. Astorino, F. Canfora, M. Lagos and A. Vera, “Black hole and BTZ-black string in the Einstein-SU(2) Skyrme model,” Phys. Rev. D **97**, no. 12, 124032 (2018).

- [30] P. D. Alvarez, F. Canfora, N. Dimakis and A. Paliathanasis, “Integrability and chemical potential in the $(3 + 1)$ -dimensional Skyrme model,” *Phys. Lett. B* **773**, 401 (2017).
- [31] L. Avilés, F. Canfora, N. Dimakis and D. Hidalgo, “Analytic topologically nontrivial solutions of the $(3+1)$ -dimensional $U(1)$ gauged Skyrme model and extended duality,” *Phys. Rev. D* **96**, no. 12, 125005 (2017).
- [32] E. Ayon-Beato, F. Canfora and J. Zanelli, “Analytic self-gravitating Skyrmions, cosmological bounces and AdS wormholes,” *Phys. Lett. B* **752**, 201 (2016).
- [33] F. Canfora, N. Dimakis and A. Paliathanasis, “Topologically nontrivial configurations in the 4d Einstein-nonlinear σ -model system,” *Phys. Rev. D* **96**, no. 2, 025021 (2017).
- [34] A. Giacomini, M. Lagos, J. Oliva and A. Vera, “Solitons in a cavity for the Einstein- $SU(2)$ Non-linear Sigma Model and Skyrme model,” *Phys. Lett. B* **783**, 193 (2018).
- [35] F. Canfora and P. Salgado-Rebolledo, “Generalized hedgehog ansatz and Gribov copies in regions with nontrivial topologies,” *Phys. Rev. D* **87**, 045023 (2013).
- [36] F. Canfora, “Nonlinear superposition law and Skyrme crystals,” *Phys. Rev. D* **88**, no. 6, 065028 (2013).
- [37] F. Canfora and H. Maeda, “Hedgehog ansatz and its generalization for self-gravitating Skyrmions,” *Phys. Rev. D* **87**, no. 8, 084049 (2013).
- [38] E. Ayón-Beato, F. Canfora and J. Zanelli, “Self-gravitating skyrmions,” *Int. J. Mod. Phys. D* **25**, no. 09, 1641009 (2016).

- [39] C. Martinez, C. Teitelboim and J. Zanelli, “Charged rotating black hole in three space-time dimensions,” *Phys. Rev. D* **61**, 104013 (2000).
- [40] R. Emparan, G. T. Horowitz and R. C. Myers, “Exact description of black holes on branes,” *JHEP* **0001**, 007 (2000); *JHEP* **0001**, 021 (2000).
- [41] M. Astorino, F. Canfora, A. Giacomini and M. Ortaggio, “Hairy AdS black holes with a toroidal horizon in 4D Einstein-nonlinear σ -model system,” *Phys. Lett. B* **776**, 236 (2018).
- [42] R. Gregory and R. Laflamme, “The Instability of charged black strings and p-branes,” *Nucl. Phys. B* **428**, 399 (1994).
- [43] S. S. Gubser and I. Mitra, “The Evolution of unstable black holes in anti-de Sitter space,” *JHEP* **0108**, 018 (2001).
- [44] A. Cisterna and J. Oliva, “Exact black strings and p-branes in general relativity,” *Class. Quant. Grav.* **35**, no. 3, 035012 (2018).
- [45] S. L. Liebling and C. Palenzuela, “Dynamical Boson Stars,” *Living Rev. Rel.* **15**, 6 (2012) [*Living Rev. Rel.* **20**, no. 1, 5 (2017)].
- [46] C. A. R. Herdeiro and E. Radu, “Kerr black holes with scalar hair,” *Phys. Rev. Lett.* **112**, 221101 (2014).
- [47] G. Giribet, J. Oliva and R. Troncoso, “Simple compactifications and black p-branes in Gauss-Bonnet and Lovelock theories,” *JHEP* **0605**, 007 (2006).
- [48] D. Kastor and R. B. Mann, “On black strings and branes in Lovelock gravity,” *JHEP* **0604**, 048 (2006).
- [49] A. Giacomini, J. Oliva and A. Vera, “Black Strings in Gauss-Bonnet Theory are Unstable,” *Phys. Rev. D* **91**, no. 10, 104033 (2015).

- [50] A. Giacomini, C. Henríquez-Báez, M. Lagos, J. Oliva and A. Vera, “Instability of black strings in the third-order Lovelock theory,” *Phys. Rev. D* **93**, no. 10, 104005 (2016).
- [51] M. Lagos, J. Oliva and A. Vera, “Instability of black p -branes in Gauss-Bonnet theory in ten dimensions.”
- [52] G. T. Horowitz and K. Maeda, “Fate of the black string instability,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 131301 (2001).
- [53] S. S. Gubser, “On nonuniform black branes,” *Class. Quant. Grav.* **19**, 4825 (2002).
- [54] T. Wiseman, “Static axisymmetric vacuum solutions and nonuniform black strings,” *Class. Quant. Grav.* **20**, 1137 (2003).
- [55] E. Sorkin, “A Critical dimension in the black string phase transition,” *Phys. Rev. Lett.* **93**, 031601 (2004).
- [56] J. L. Hovdebo and R. C. Myers, “Black rings, boosted strings and Gregory-Laflamme,” *Phys. Rev. D* **73**, 084013 (2006).
- [57] M. W. Choptuik, L. Lehner, I. Olabarrieta, R. Petryk, F. Pretorius and H. Villegas, “Towards the final fate of an unstable black string,” *Phys. Rev. D* **68**, 044001 (2003).
- [58] D. Garfinkle, L. Lehner and F. Pretorius, “A Numerical examination of an evolving black string horizon,” *Phys. Rev. D* **71**, 064009 (2005).
- [59] L. Lehner and F. Pretorius, “Black Strings, Low Viscosity Fluids, and Violation of Cosmic Censorship,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 101102 (2010).
- [60] P. Figueras, M. Kunesch and S. Tunyasuvunakool, “End Point of Black Ring Instabilities and the Weak Cosmic Censorship Conjecture,” *Phys. Rev.*

- Lett. **116**, no. 7, 071102 (2016).
- [61] Y. Hyakutake, “Boosted Quantum Black Hole and Black String in M-theory, and Quantum Correction to Gregory-Laflamme Instability,” JHEP **1509**, 067 (2015).
- [62] J. Crisostomo, R. Troncoso and J. Zanelli, “Black hole scan,” Phys. Rev. D **62**, 084013 (2000).
- [63] G. W. Gibbons, H. Lu and C. N. Pope, “Einstein Metrics on Group Manifolds and Cosets,” J. Geom. Phys. **61**, 947 (2011).
- [64] G. Giribet, M. Lagos, J. Oliva and A. Vera, “ $D = 10$ dyonic black holes in string inspired models,” arXiv:1808.04040 [hep-th].
- [65] D. J. Gross and E. Witten, “Superstring Modifications of Einstein’s Equations,” Nucl. Phys. B **277**, 1 (1986).
- [66] S. Giusto and S. D. Mathur, “Fuzzball geometries and higher derivative corrections for extremal holes,” Nucl. Phys. B **738**, 48 (2006). [hep-th/0412133].
- [67] A. Gruzinov and M. Kleban, “Causality Constrains Higher Curvature Corrections to Gravity,” Class. Quant. Grav. **24**, 3521 (2007).
- [68] X. O. Camanho, J. D. Edelstein, J. Maldacena and A. Zhiboedov, “Causality Constraints on Corrections to the Graviton Three-Point Coupling,” JHEP **1602**, 020 (2016).
- [69] Y. Bardoux, M. M. Caldarelli and C. Charmousis, “Shaping black holes with free fields,” JHEP **1205**, 054 (2012).
- [70] Y. Bardoux, C. Charmousis and T. Kolyvaris, “Lovelock solutions in the presence of matter sources,” Phys. Rev. D **83**, 104020 (2011).

- [71] G. Gibbons and S. A. Hartnoll, “A Gravitational instability in higher dimensions,” *Phys. Rev. D* **66**, 064024 (2002).
- [72] G. Dotti and R. J. Gleiser, “Obstructions on the horizon geometry from string theory corrections to Einstein gravity,” *Phys. Lett. B* **627**, 174 (2005).
- [73] G. W. Gibbons and P. K. Townsend, “Self-gravitating Yang Monopoles in all Dimensions,” *Class. Quant. Grav.* **23**, 4873 (2006).
- [74] A. Giacomini, M. Lagos, J. Oliva and A. Vera, “Charged black strings and black branes in Lovelock theories,” *Phys. Rev. D* **98**, no. 4, 044019 (2018).
- [75] A. I. Janis, E. T. Newman and J. Winicour, “Reality of the Schwarzschild Singularity,” *Phys. Rev. Lett.* **20**, 878 (1968).
- [76] B. C. Xanthopoulos and T. Zannias, “Einstein Gravity Coupled to a Massless Scalar Field in Arbitrary Space-time Dimensions,” *Phys. Rev. D* **40**, 2564 (1989).
- [77] S. H. Hendi and M. H. Dehghani, “Taub-NUT Black Holes in Third order Lovelock Gravity,” *Phys. Lett. B* **666**, 116 (2008), M. H. Dehghani, N. Bostani and S. H. Hendi, *Phys. Rev. D* **78**, 064031 (2008), S. H. Hendi, S. Panahiyan and H. Mohammadpour, *Eur. Phys. J. C* **72**, 2184 (2012), S. H. Hendi and A. Dehghani, *Phys. Rev. D* **91**, no. 6, 064045 (2015).
- [78] T. Jacobson and R. C. Myers, “Black hole entropy and higher curvature interactions,” *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3684 (1993).
- [79] K. Copsey and R. Mann, “Pathologies in Asymptotically Lifshitz Spacetimes,” *JHEP* **1103**, 039 (2011).
- [80] M. Barriola and A. Vilenkin, “Gravitational Field of a Global Monopole,” *Phys. Rev. Lett.* **63**, 341 (1989).

- [81] R. Emparan, R. Suzuki and K. Tanabe, “Evolution and End Point of the Black String Instability: Large D Solution,” *Phys. Rev. Lett.* **115**, no. 9, 091102 (2015).

