



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE  
ECUACIONES DIFERENCIALES  
ESTOCÁSTICAS DE ITÔ SOBRE LOS  
NÚMEROS COMPLEJOS

POR

**Mario Alejandro Muñoz Muñoz**

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción para optar al grado de **Ingeniero Civil Matemático**

Profesor Guía: Dr.(c) Sebastián Niklitschek

Marzo de 2018  
Concepción, Chile

---

# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>4</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>10</b>
2.1. Probabilidad, cálculo de Itô y ecuaciones diferenciales estocásticas . . . . .	10
2.1.1. Teoría de probabilidad . . . . .	11
2.1.2. Procesos estocásticos . . . . .	29
2.1.3. Cálculo estocástico y semimartingalas . . . . .	39
2.1.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas . . . . .	49
2.2. Derivada de una función de variable compleja . . . . .	61
2.2.1. Derivada de una función holomorfa . . . . .	65
2.2.2. Cálculo de Wirtinger . . . . .	67
<b>3. Cálculo de Itô en <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>73</b>
3.1. Procesos estocásticos en $\mathbb{C}$ . . . . .	73
3.2. Martingalas y cálculo de Itô en $\mathbb{C}$ . . . . .	75
3.3. Fórmula de Itô sobre funciones de variable compleja . . . . .	83
<b>4. Ecuaciones diferenciales estocásticas en <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>92</b>
4.1. Existencia y unicidad . . . . .	92
4.2. Interpretación probabilista . . . . .	101
4.3. Esquemas numéricos y órdenes de convergencia . . . . .	106
4.3.1. Esquema de Euler Maruyama . . . . .	107
4.3.2. Esquema de Milstein . . . . .	121
<b>5. Implementación y resultados</b>	<b>137</b>
5.1. Esquema de Euler Maruyama . . . . .	138
5.1.1. Ejemplo 1: Browniano geométrico . . . . .	139

---

5.1.2. Ejemplo 2: Proceso de Oernstein-Uhlenbeck . . . . .	141
5.1.3. Casos especiales . . . . .	144
5.2. Esquema de Milstein . . . . .	148
5.2.1. Ejemplo: Browniano geométrico . . . . .	150
<b>6. Conclusiones y Trabajo futuro</b>	<b>154</b>
6.1. Conclusión . . . . .	154
6.2. Trabajo futuro . . . . .	155
<b>A. Resultados anexos</b>	<b>156</b>
A.1. Espacio de funciones continuas . . . . .	156
A.2. Espacios de medida compleja . . . . .	160
A.3. Resultados adicionales . . . . .	162



---

# Índice de figuras

Figura 2.1. Simulación Proceso de Wiener . . . . .	35
Figura 5.1. Convergencia fuerte esquema de Euler Maruyama ej BG . . . . .	139
Figura 5.2. Convergencia débil esquema de Euler Maruyama ej BG . . . . .	140
Figura 5.3. Convergencia fuerte esquema de Euler Maruyama ej OU . . . . .	141
Figura 5.4. Convergencia débil esquema de Euler Maruyama ej OU . . . . .	142
Figura 5.5. Convergencia fuerte Euler Maruyama caso especial 1 . . . . .	143
Figura 5.6. Convergencia débil Euler Maruyama caso especial 1 . . . . .	144
Figura 5.7. Convergencia fuerte Euler Maruyama caso especial 2 . . . . .	145
Figura 5.8. Convergencia débil Euler Maruyama caso especial 2 . . . . .	146
Figura 5.9. Convergencia fuerte Euler Maruyama caso especial 3 . . . . .	147
Figura 5.10. Convergencia fuerte esquema de Milstein ej 1 BG . . . . .	151
Figura 5.11. Convergencia fuerte esquema de Milstein ej 2 BG . . . . .	152

---

## Índice de tablas

Tabla 5.1. Órdenes de convergencia fuerte esquema de Euler Maruyama BG . . . . .	140
Tabla 5.2. Órdenes de convergencia fuerte esquema de Euler Maruyama OU . . . . .	143
Tabla 5.3. Órdenes de convergencia fuerte Euler Maruyama caso especial 1 . . . . .	144
Tabla 5.4. Órdenes de convergencia fuerte Euler Maruyama caso especial 2 . . . . .	146
Tabla 5.5. Órdenes de convergencia fuerte Euler Maruyama caso especial 3 . . . . .	148
Tabla 5.6. Órdenes de convergencia fuerte esquema de Milstein ej 1 BG . . . . .	151
Tabla 5.7. Órdenes de convergencia fuerte esquema de Milstein ej 2 BG . . . . .	153



---

# Capítulo 1

## Introducción

Este trabajo estudia de forma independiente dos áreas del análisis matemático; el primero corresponde al cálculo de Itô y el segundo es una rama del análisis complejo, llamada cálculo de Wirtinger. Esto con el propósito de utilizar las herramientas que proporciona el cálculo de Wirtinger y utilizarlas para extender el formalismo real presente en el cálculo de Itô, para estudiar y aproximar numéricamente procesos de difusión en el campo de los números complejos.

Más precisamente, el cálculo de Itô es una de las principales ramas del análisis estocástico que permite extender el cálculo integral a ciertos procesos cuya variación no es necesariamente finita. De entre estos procesos, el Movimiento Browniano, o también llamado Proceso de Wiener, destaca como un ejemplo notable debido a que permite modelar dinámicas de algunos procesos que presentan cierto tipo de variabilidad, ya sea producto de la falta de información del observador o de una característica propia del fenómeno. El comportamiento presentado por el Proceso de Wiener es generalizado por los procesos de Itô o también llamados procesos de difusión. Procesos cuya dinámica viene representada para cada  $t \geq 0$  por

$$X_t = \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad (1.1)$$

con  $W = (W_t, t \geq 0)$  un Proceso de Wiener. Para trabajar con estos procesos, el cálculo de Itô brinda la fórmula de Itô, la cual permite estudiar la dinámica del proceso bajo la aplicación de funciones  $f$  de clase  $C_b^{1,2}(\mathbb{R})$ , obteniendo que

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d\langle X, X \rangle_s. \quad (1.2)$$

Sin embargo, el estudio de los procesos de difusión (1.1) se realiza a través de una ecuación

diferencial estocástica, llamada ecuación diferencial de Itô

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, & \forall t \in [0, T] \\ X_0 = x, \end{cases} \quad (1.3)$$

para la cual se hayan las condiciones de regularidad necesarias de los coeficientes  $b$  y  $\sigma$  para que el problema (1.3) esté bien planteado, esto es, exista su solución y además ésta sea única. No obstante, muchas veces no es posible trabajar con la dinámica del proceso, teniendo que recurrir a aproximaciones de ésta, que en algún sentido sean lo más similar posible. Dichos esquemas de aproximación para asegurar su funcionamiento requieren hipótesis sobre los coeficientes  $b$  y  $\sigma$ , donde su desempeño puede ser medido de más de una forma.

Al igual que la fórmula de Itô (1.2), la SDE (1.3) está definida para procesos de difusión reales. Sin embargo existen procesos de difusión que se definen sobre el campo de los números complejos, entre ellos están las martingalas conformes, destacando el Proceso de Wiener complejo. Para dichos procesos no existe una representación natural compleja de esquemas de aproximación. Esto debido a que dichos procesos deben ser estudiados como un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas reales, al considerar la parte real e imaginaria del proceso. Lo anterior hace que las condiciones necesarias para asegurar existencia y unicidad, como también la convergencia de los esquemas de aproximación no se formulen sobre el espacio de funciones de variable compleja, si no al imponer las condiciones reales al sistema real asociado al proceso de difusión complejo. Esto es aún más crítico dado que la formula de Itô (1.2) no aplica a este tipo de procesos, por lo que su manipulación resulta difícil. Para solucionar estos inconvenientes existen generalizaciones del cálculo de Itô al cuerpo de los números complejos, las cuales tienen como objetivo poder derivar funciones de variable compleja para recuperar la formula de Itô sobre dichas funciones.

Teniendo en cuenta lo anterior, considere una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , para la cual existen funciones  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $f$  se puede describir por

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Entonces el cálculo complejo dice que la función  $f$  es llamada analítica si las funciones  $u$  y  $v$  son derivables con respecto a  $x$  e  $y$ , y verifican las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Sobre dichas funciones, es decir, las funciones analíticas se desarrolla el cálculo complejo. Definiendo su derivada por

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

donde  $g(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

Si bien el cálculo complejo puede mostrarse como un punto de partida natural para las extensiones que busca este proyecto, éste no se puede utilizar debido a que la familia de funciones complejas a las que se aplica es muy reducido. Esto se ve al considerar una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde se tiene que la parte imaginaria  $v$  de la función es nula y  $f(z) = u(x, y)$ . De esta forma las ecuaciones de Cauchy-Riemann entregan que,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

de donde  $u$  debe ser constante. De esta forma las únicas funciones de variable compleja a valores reales, derivables en el sentido del cálculo complejo usual son las funciones constantes. Así, dado que las funciones que permiten cuantificar el error asociado a un esquema numérico son real-valuadas, esta restricción hace inviable considerar el cálculo complejo estándar como alternativa para desarrollar el cálculo de Itô en el campo de los números complejos.

La propuesta es recurrir al cálculo de Wirtinger [5]; introducido en 1927 por el matemático austríaco Wilhelm Wirtinger, quien presentó un nuevo concepto de derivación de funciones complejas, a través de los operadores

$$\begin{aligned} \partial_z f &:= \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - j \frac{\partial g}{\partial y} \right) \\ \partial_{z^*} f &:= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} + j \frac{\partial g}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

los cuales no se restringen a funciones holomorfas, como en el cálculo complejo clásico; y poseen las propiedades de derivadas parciales en el caso de funciones real valuadas considerando  $z$  y  $z^*$  como variables independientes.

Motivados por los conceptos presentados anteriormente, el objetivo principal de este proyecto de título es estudiar un proceso de Itô o difusión complejo, por lo que se debe extender la fórmula de Itô (1.2) y estudiar la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dZ_t = b(t, Z_t, Z_t^*)dt + \sigma^1(t, Z_t, Z_t^*)dW_t + \sigma^2(t, Z_t, Z_t^*)dW_t^*, & \forall t \in [0, T] \\ Z_0 = z. \end{cases} \quad (1.4)$$

donde  $W$  es un Proceso de Wiener complejo dado por  $W = W_1 + iW_2$  con  $W_1$  y  $W_2$  Procesos de Wiener estándar sobre  $\mathbb{R}$  y  $z \in \mathbb{C}$ . Más precisamente, al problema (1.4) se le realiza un estudio de existencia y unicidad de solución, junto con un análisis de aproximación numérica al construir símiles complejos de los esquemas de aproximación estándar del caso real.



Para realizar el trabajo planteado anteriormente, este proyecto se divide en seis capítulos, siendo el primero la introducción del mismo, presentando a grandes rasgos el problema en cuestión y enseñado al lector las motivaciones por las que se realiza este estudio.

El segundo capítulo muestra los conceptos básicos para entender el cálculo de Itô y el análisis complejo, con el objetivo de generar intuición al entender la construcción de ambas áreas del análisis. Esto haciendo énfasis en el análisis mismo, en vez del objetivo del trabajo. De esta forma, la primera sección de este capítulo abarca desde las bases de la teoría de la probabilidad, hasta el cálculo de Itô y las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas; mientras que la segunda sección se enfoca en el análisis complejo, mostrando el cálculo complejo estándar y el cálculo de Wirtinger. Este capítulo está fuertemente ligado con el tercero, ya que en él se combinan ambas áreas del análisis y se muestra como con herramientas de la segunda se extienden los conceptos de la primera. Dentro de esos resultado se destacan varios resultados propios que permiten realizar el análisis procedente en los siguientes capítulos; resaltando entre todos ellos la fórmula de Itô.

El cuarto capítulo de este proyecto introduce el concepto de proceso de difusión complejo y enseña como tratarlos. Esto se logra al definir una ecuación diferencial estocástica sobre el cuerpo de los números complejos, estudiar el problema de existencia y unicidad de solución, junto con probar esquemas numéricos que aproximen el proceso de difusión complejo. Para comprobar lo anterior, el quinto capítulo de este trabajo recoge los resultados de convergencia que se prueban en el capítulo cuatro y los comprueba numéricamente. Para esto es necesario implementar computacionalmente los esquemas y considerar problemas de interés; con los cuales, a partir de varios ejemplos se comprueba su desempeño y se ve cuan fiel son a los resultados teóricos.

El último capítulo, el capítulo seis, concluye el proyecto, mostrando lo significativo de los resultados obtenidos; señalando las líneas de trabajo que se abren a partir de este proyecto, como también posibles consecuencias y trabajos futuros.

---

# Capítulo 2

## Preliminares

No se puede utilizar el cálculo de Itô sin entender conceptos previos, como espacio de probabilidad, variables aleatorias, esperanza condicional y procesos estocásticos. De misma forma, para poder derivar funciones complejas se debe saber trabajar con el cuerpo de los números complejos, entender el concepto de función compleja de variable compleja, conocer la noción clásica de derivada compleja y el cálculo de Wirtinger. De esta forma, para extender las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô al campo de los números complejos, se debe manejar muy bien las bases de ambas áreas, poseyendo además de los conceptos, la intuición generada por las construcción de estos campos del análisis matemático.

Este capítulo presenta los conceptos básicos utilizados en este trabajo, siendo un compendio de toda la información necesaria para entender los resultados que se mostrarán en los siguientes capítulos. Es por lo anterior, que si el lector desea, puede renunciar a su lectura, pudiendo siempre recapitular cuando necesite dilucidar algún concepto.

### 2.1. Probabilidad, cálculo de Itô y ecuaciones diferenciales estocásticas

Se invita al lector a pensar y tratar de buscar una solución a las tres situaciones que se presentan a continuación:

#### **Situación 1:**

*Suponga que una persona desea instalar en una ciudad un empresa dedicada a vender productos de aseo para bebés, pero no sabe cuan rentable resulta este negocio, Es por lo anterior, que desea estimar su público objetivo, es decir, la cantidad de personas a la cual están destinados sus productos. Sin embargo, no sabe como hacer dicho estudio, ni que tan significativo o representativo de la realidad resultará.*

**Situación 2:**

*Suponga que en un banco se encuentran 5 cajas disponibles para atención al público, las cuales, durante el día se ven colapsadas y nos son capaces de dar a basto a los clientes del banco que esperan su atención. El gerente del banco para solucionar este problema, desea calcular el número exacto de cajas que debe agregar para que los clientes puedan ser atendidos de forma expedita, pero al mismo tiempo sin agregar cajas de más que no serán utilizadas, puesto que conlleva un gasto innecesario para el banco.*

**Situación 3:**

*Suponga que un inversionista se dedica a la divisa de acciones y monedas. Éste, realiza sus inversiones basado en su intuición y experiencia, pero no posee una estrategia que respalde su accionar. El inversionista está interesado en encontrar una forma más confiable de invertir y correr menos riesgo con sus inversiones.*

En los tres problemas anteriores notamos un patrón común, la aleatoriedad, la cual en todos los casos determina una conducta errática e impredecible. Es más el estudio de la misma, provee las herramientas para dar solución a cada una de las problemáticas planteadas. En el primer caso, mediante la estimación de estadísticos sobre una variable aleatoria; en el segundo caso, mediante el manejo de procesos estocásticos; mientras que en el último, a través de la resolución de una ecuación diferencial estocástica. De esta forma, en esta sección se desarrolla y formaliza las ideas planteadas anteriormente, enmarcando la aleatoriedad como objeto de estudio y al mismo tiempo viendo la importancia de su análisis.

### 2.1.1. Teoría de probabilidad

La teoría de la medida o de probabilidad es una rama del análisis que tuvo sus primeros pasos en la antigüedad con la necesidad de manipular longitudes y áreas. Sus primeros registros llegaron a través de manuscritos egipcios de problemas matemáticos en los años 1800 A.C. Reseñas más directas llegaron en el año 300 A.C de la mano de Euclides, en su libro *Los Elementos*. En el año 1654 los franceses Antoine Gombaud, Blaise Pascal y Pierre de Fermat interesados en el estudio matemático de un juego de azar idearon las bases de la probabilidad, las cuales formalizaría Christian Huygens en 1657 con su documento *De Ratiociniis in Ludo Aleae*. Sin embargo no fue hasta fines de los 1800 que Cantor, G. Peano, Jordan y Borel empezaron a formular conceptos más abstractos como *medida*, *conjunto medible* e *integración*, los cuales fueron desarrollados a cabalidad por H. Lebesgue en su tesis de 1902.

## Espacios de Medida Positiva

Cuando se trata de medir objetos, resulta el problema de que no todo se puede medir o mejor dicho conocer su medida. Esto queda muy claro en los primeros intentos de medir el área de una región curva, donde se aproximaba su área por medio de cuadrados de distintas dimensiones, sabiendo de antemano medir el área de un cuadrado. Obviamente dicha región no se podía medir, o mejor dicho, no sólo conociendo el área de un cuadrado.

Suponga ahora se desea medir un trapecio. Al igual que en el ejemplo anterior, no se puede medir sólo a base de cuadrados, dado que quedarían espacios que con cuadrados no se puede rellenar. Sin embargo, si se sabe medir el área de un triángulo, entonces el trapecio sí podría ser medido, dado que se puede descomponer en triángulos menores, siendo su área la suma de todos los triángulos menores. Esto dice, que el problema de medir no sólo depende del objeto que se desea medir, si no que también de los objetos que se sabe medir, o dicho de otra forma si el objeto pertenece a la familia de objetos medibles. De esta forma, se tiene que el trapecio pertenecería a la familia de los triángulos, más no a la de los cuadrados.

Grandes matemáticos discutieron el tema anterior, tratando de caracterizar las familias de “objetos” dentro de un conjunto que se pueden medir y cuales no. Más específicamente englobar o juntar en una familia “objetos” de forma que al pertenecer a esa familia se puedan medir. A continuación éstas se presentan formalmente.

**Definición 2.1.1.** Sea  $\Omega$  un conjunto arbitrario y  $\mathcal{F}$  una colección de subconjuntos de  $\Omega$ . Diremos que  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra si:

- $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$ ;
- $A_n \in \mathcal{F}, \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ .

Donde al par  $(\Omega, \mathcal{F})$  se le denomina *espacio medible*.

Para generar más intuición y clarificar las dudas generadas por la definición anterior, se presentan los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 2.1.1.** El conjunto  $\{\emptyset, \Omega\}$  es la menor  $\sigma$ -álgebra de  $\Omega$ . Además, el conjunto de las partes  $\mathcal{P}(\Omega) := \{A : A \subset \Omega\}$  es la mayor  $\sigma$ -álgebra de  $\Omega$ .

**Ejemplo 2.1.2.** La familia de conjuntos contables o de complemento contable de  $\Omega$ , es una  $\sigma$ -álgebra de  $\Omega$ . Esto es, si llamamos

$$N := \{A \subset \Omega \mid A \text{ finito o numerable}\}.$$

Entonces el conjunto

$$\mathcal{F} := \{A \subset \Omega \mid A \in N \vee A^c \in N\},$$

es una  $\sigma$ -álgebra de  $\Omega$ .

Por otra parte, para una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  de  $\Omega$  se puede extraer de su definición las siguientes propiedades:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$  ;
- $\mathcal{F}$  es cerrada bajo intersección finita o numerable;
- $\mathcal{F}$  es cerrada bajo unión finita;
- $\mathcal{F}$  es cerrada bajo la operación diferencia  $A \setminus B$ .

Como se vió, para un conjunto  $\Omega$  dado existe más de una  $\sigma$ -álgebra, las cuales pueden poseer más elementos (finas) o menos elementos (gruesas). Sin embargo, el interés se puede presentar en medir sólo un objeto o una clase de objetos, por lo que no se necesita una  $\sigma$ -álgebra tan fina como el conjunto de las partes  $\mathcal{P}(\Omega)$ , es más, el interés está en trabajar con la menor familia que permita medir los objetos que realmente se desea medir. El siguiente teorema define y asegura la existencia de dicha familia.

**Teorema 2.1.1.** Sea  $\rho$  una colección de subconjuntos de  $\Omega$ . Entonces existe una única  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(\rho)$  tal que

- i)  $\rho \subseteq \sigma(\rho)$ ;
- ii) Si  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra con la propiedad de que  $\rho \subseteq \mathcal{F}$ , entonces  $\sigma(\rho) \subseteq \mathcal{F}$ .

Además, si al conjunto  $\Omega$  se le puede añadir una topología, existe una  $\sigma$ -álgebra de gran relevancia, la cual nos permite medir todos los abiertos de  $\Omega$ .

**Definición 2.1.2.** Se define la  $\sigma$ -álgebra de Borel o Borelianos de un conjunto  $\Omega$ , como el menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los abiertos del conjunto, es decir,

$$\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\{A : A \text{ abierto de } \Omega\}).$$

Notar que en el ejemplo del trapecio, el propósito era medir el área de figuras geométricas. Sin embargo, si ahora el lector desea ver la convexidad de las figuras, las propiedades presentes en el ejemplo del trapecio no se mantienen. Esto se debe que la convexidad a diferencia del área de una figura geométrica no se conserva, dado que la unión de dos figuras convexas no necesariamente es convexa. Esto ocurre dado que en el segundo caso no se está midiendo, por lo que es necesario determinar de forma general y precisa las propiedades que presenta un proceso de medición.

**Definición 2.1.3.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible. Una *medida positiva*  $\mu$  es una función sobre conjuntos, definida de  $\mathcal{F}$  en  $[0, +\infty]$ , que satisface:

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- ii) Si  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  tal que  $A_i \cap A_j = \emptyset \implies \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ .

Donde a  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  se le llama *espacio de medida positiva*.

Dependiendo tanto del espacio  $\Omega$ , como de la medida  $\mu$  tendremos espacios de medida finita, es decir,  $\mu(\Omega) < \infty$ ; o espacios de medida infinita. Dentro del primer caso se encuentra un caso muy importante, llamado espacio de *probabilidad*.

**Observación 2.1.1.** Si en un espacio de medida positiva  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ,  $\mu$  es tal que

$$\mu(\Omega) = 1,$$

entonces a  $\mu$  se le llama *medida de probabilidad* y se denota usualmente por  $\mathbb{P}$ . Además, el espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es llamado *espacio de probabilidad*, a los subconjuntos  $A \in \mathcal{F}$  se les llama *eventos* y a la medida de un evento  $\mathbb{P}(A)$  se le llama *probabilidad de ocurrencia* del evento  $A$ .

**Ejemplo 2.1.3.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio de medida, entonces:

- la función  $\mu \equiv 0$  es una medida, llamada *medida nula*.
- la función

$$\mu(A) := \begin{cases} |A|, & A \text{ es finito} \\ \infty, & A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

con  $|\cdot|$  la cardinalidad de un conjunto, es una medida; llamada *medida contadora*.

- dado  $\omega \in \Omega$ , la función

$$\mu(A) := \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

es una medida; llamada *medida de Dirac*.

**Ejemplo 2.1.4.** Para cada función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , creciente y continua a derecha, se define la medida positiva  $\mu_F$  sobre el espacio de medida  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , dada para cada  $c \leq d$ , por:

$$\mu_F([c, d]) = F(d) - F(c), \tag{2.1}$$

la cual es acotada en cada compacto de  $\mathbb{R}$  y es llamada medida de Stieltjes. Además, en el caso particular de considerar la función  $F(t) = t$ , la medida asociada  $\mu_F$  es llamada de Lebesgue y denotada por  $\nu$ .

Muchas veces se desea probar o trabajar ciertas propiedades dentro de un espacio de probabilidad. Sin embargo, existen casos puntuales dentro del espacio de probabilidad donde no se cumple dicha propiedad, por lo que no se puede asegurar su cumplimiento en todo el espacio. Lo anterior se puede solucionar si al agrupar todos los casos donde no se cumple la propiedad se obtiene un conjunto insignificante, esto quiere decir que dicho conjunto esta acotado por otro de medida nula. Esto amerita ser formalizado, lo cual se presenta en la siguiente definición.

**Definición 2.1.4.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida positiva. Se dirá que la propiedad  $Q(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , se cumple *casi donde quiera* ( $\mu$ -c.d.), si existe  $A \in \mathcal{F}$  con  $\mu(A) = 0$ , tal que

$$\{\omega \in \Omega \mid \text{no se cumple } Q(\omega)\} \subseteq A.$$

Además, si  $\mu(\Omega) = 1$  y  $Q$  se cumple  $\mu$ -c.d., se dice que  $Q$  se cumple *casi seguramente* (a.s.).

### Funciones medibles y Variables Aleatorias

Ahora con la estructura de espacios medibles  $(\Omega, \mathcal{F})$  a los cuales se le puede anexar una medida positiva  $\mu$ , es necesario estudiar aquellas transformaciones que manipulan los elementos de éste. El interés de estudiar dichas transformaciones nace en poder llevar la estructura de un espacio en principio puramente matemático e inobservable a un espacio que se pueda observar, por ejemplo  $\mathbb{R}^n$ . En la siguiente definición, se muestra una clase de transformaciones, las cuales son de interés, puesto que preservan la estructura del espacio de forma controlada.

**Definición 2.1.5.** Sean dos espacios medibles  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $(\Theta, \mathcal{U})$  y una función  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Theta, \mathcal{U})$ . Se dice que  $X$  es *medible* si  $X^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{F}$ , es decir, si para cada  $A \in \mathcal{U}$  :

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

Además, se denota  $M(\Omega, \Theta)$  al conjunto de todas las funciones medibles de  $(\Omega, \mathcal{F})$  en  $(\Theta, \mathcal{U})$ .

La propiedad que poseen este tipo de funciones, es similar a la definición de continuidad de una función entre espacios topológicos. Se hablará más tarde de la estrecha conexión que presentan estas dos estructuras. Sin embargo, a continuación se muestran algunas consecuencias provenientes directamente su definición.

**Lema 2.1.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  y  $(\Theta, \mathcal{U})$  dos espacios medibles y una función  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Theta, \mathcal{U})$ . Luego:

- Si  $\mathcal{F} = P(\Omega)$  ó  $\mathcal{U} = \{\emptyset, \Theta\}$ . Entonces  $X$  es siempre medible.
- Si  $X$  es constante, entonces es medible.
- Si  $\Omega = \Theta$  y  $X$  es la identidad, entonces  $X$  es medible si y sólo si  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ .

Para generar más intuición acerca de las funciones medibles y como saber identificarlas, se presentan los siguientes ejemplos, los cuales son muy importantes en el desarrollo de la teoría de la medida, y serán utilizados más adelante.

**Ejemplo 2.1.5.** Sea  $A \in \mathcal{F}$ , entonces

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A, \end{cases}$$



es una función medible, llamada *función indicadora*.

**Ejemplo 2.1.6.** Sean  $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{F}$  y una sucesión de números reales  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ , entonces la función

$$X(\omega) := \sum_{i=1}^m a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega),$$

es una función medible, llamada *función simple*. Además, se denota por  $S(\Omega, \mathbb{R})$  al conjunto de todas las funciones simples de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$ .

Recordando las definiciones de  $\sigma$ -álgebra y función medible, se puede probar que dadas dos funciones medibles  $X, Y : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Theta, \mathcal{U})$  su suma, resta, máximo y mínimo son funciones medibles entre dichos espacios. Además, dada una sucesión de funciones medibles  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Theta, \mathcal{U})$  que converge puntualmente, es decir, para cada  $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_k(\omega) = X(\omega).$$

Entonces se puede probar que su límite  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Theta, \mathcal{U})$  es también una función medible.

Dentro del espacio de funciones medibles, existe un grupo de gran importancia en el modelamiento matemático, llamadas *variables aleatorias*, las cuales presentan una medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  anexada a su dominio. Este tipo de funciones medibles tienen muchas aplicaciones prácticas, y se utilizan para representar diferentes sucesos y experimentos. A continuación, se muestran algunos de sus ejemplos.

**Ejemplo 2.1.7.** El número de hijos de una familia se puede representar como una variable aleatoria.

**Ejemplo 2.1.8.** El tiempo que un rodamiento de una máquina industrial permanecerá en buen estado se puede representar como una variable aleatoria.

**Ejemplo 2.1.9.** La altura de un árbol en un bosque se puede modelar como una variable aleatoria.

**Ejemplo 2.1.10.** La cantidad de salmones que se obtendrán en una jaula de criadero se puede modelar como una variable aleatoria.

En los ejemplos anteriores, hay que tener en consideración de que el recorrido de las funciones es conocido, siendo en todos ellos  $\Omega \subseteq \mathbb{N}$ , con  $\mathcal{F} = \sigma(\Omega)$ . Sin embargo su dominio es desconocido, esto se debe a que no se conoce todos los factores que afectan o de cuales depende la función; en el primer ejemplo sabemos que la cantidad de hijos en una familia depende del país, ciudad, religión y salud de los padres; mientras que en el tercer ejemplo, sabemos que el crecimiento de un árbol depende de sus años de vida, de la locación geográfica, humedad, temperatura y fertilidad de la tierra. No obstante, pueden existir muchos otros factores que influyan en las funciones que desconocemos, los cuales generan incerteza, que junto con la variación y rigidez propios de cada problema, no permiten asegurar con exactitud el tiempo que permanecerá en buenas condiciones un rodamiento, ni la cantidad de salmones que se obtendrán en un criadero, por ejemplo. Por lo anterior, como no se conoce el dominio de dichas funciones, es que no se puede asegurar su medibilidad. Sin embargo, dicho comportamiento se asume, y de esta forma se obtiene información acerca de estos sucesos gracias a las buenas propiedades que presentan las funciones medibles.

Como se vió anteriormente, es de interés utilizar la  $\sigma$ -álgebra que mejor se ajusta a nuestros propósitos, siendo ésta siempre lo más gruesa que se pueda. Al considerar una función entre espacios medibles, son las  $\sigma$ -álgebras las que dan la propiedad de medibilidad a la función. Es más, fijado el recorrido de una función, existirán  $\sigma$ -álgebras con las que la función es medible, y existirán otras con las que no. Sin embargo, siempre existirá una  $\sigma$ -álgebra “óptima” que será la más gruesa que contiene toda la información relevante de la función. Este resultado se presenta formalmente en el siguiente lema.

**Lema 2.1.2.** *Dada una función real  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se tiene que*

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\},$$

*es una  $\sigma$ -álgebra, llamada  $\sigma$ -álgebra generada por  $X$ ; y corresponde a la menor  $\sigma$ -álgebra con la cual  $X$  es medible.*

Como ya se mencionó, las variables aleatorias tienen el propósito de relacionar un espacio de probabilidad con un espacio medible observable. Sin embargo el interés de esto es poder medir los eventos del segundo espacio, aprovechando la estructura del primero. Para ello se requiere el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.2.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida positiva y  $(\Theta, \mathcal{U})$  un espacio medible. Suponga que  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Theta, \mathcal{U})$  es medible, entonces para todo  $A \in \mathcal{U}$  la función*

$$\mu \circ X^{-1}(A) = \mu(X^{-1}(A)),$$

es una medida sobre  $\mathcal{U}$ .

De esta forma, en los ejemplos anteriores se puede obtener la probabilidad de que una familia tenga 2 hijos, que la altura de un árbol sea mayor a 5 metros y que la cantidad de salmones extraídos sea menor a la mitad de los que se introdujeron; por dar algunos ejemplos.

Hablemos ahora acerca de la conexión entre funciones medibles y funciones continuas. Se dice que una función entre espacios topológicos  $X : (\Omega, \tau_\Omega) \rightarrow (\Theta, \tau_\Theta)$  es continua si para todo abierto  $A \in \tau_\Theta$  se tiene que

$$X^{-1}(A) \in \tau_\Omega.$$

Pero esa misma función se puede escribir entre espacios medibles, es decir,  $X : (\Omega, \mathcal{B}(\Omega)) \rightarrow (\Theta, \mathcal{B}(\Theta))$ , de donde entendiendo la definición de topología se extrae el siguiente resultado,

**Lema 2.1.3.** Sean  $(\Omega, \tau_\Omega)$  y  $(Y, \tau_Y)$  dos espacios topológicos. Si  $X : (\Omega, \tau_\Omega) \rightarrow (\Theta, \tau_\Theta)$  es una función continua, entonces  $X$  es una función medible entre los espacios  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$  y  $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta))$ .

Sin embargo, el recíproco de este resultado no es cierto, puesto que no toda función medible es continua. Un ejemplo de esto es la función *delta de Dirac*,  $\delta_a : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ , dada por

$$\delta_a(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a, \end{cases}$$

la cual es una función simple, y puesto que  $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , es una función medible. Sin embargo, la función delta de Dirac no es continua en  $a$ , dado que sus límites laterales son 0.

Cabe mencionar, que la relación entre estos dos tipos de funciones es aún más estrecha, esto se debe al teorema de Luzin (Teorema A.3.1), el cual nos dice las condiciones necesarias para que una función medible sea continua en un dominio tan ajustado al original como se desee.

## Integración

Como se mencionó en el principio de esta subsección, la necesidad de manipular longitudes, áreas y volúmenes ha estado presente desde hace mucho, siendo imperativo en la actualidad

dado el progreso de la ciencia. Para trabajar con estas magnitudes es necesario entender el concepto de integral, el cual se introduce en el cálculo integral como el proceso límite de una suma de Riemann. Sin embargo, dicha estructura no es adecuada para el marco abstracto generado en la teoría de la medida, no presentando todas las características o propiedades deseadas para trabajar con ella.

Se comienza esta construcción considerando un espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  y una función simple real valuada  $X = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$ , medible. Para la cual se define su *integral* como

$$\int_{\Omega} X d\mu := \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k).$$

Ahora, para poder integrar funciones no negativas, es necesario utilizar un resultado que establezca que para cualquier función medible no negativa  $f$  existe una sucesión de funciones simples  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $S_n \nearrow f$ , es decir, converge puntualmente a  $f$  de forma creciente.

De esta forma, se puede definir la integral para una función medible no negativa  $X$ , como

$$\int_{\Omega} X d\mu := \sup \left\{ \int_{\Omega} S d\mu : S \leq X, S \in \mathcal{S}(\Omega, \mathbb{R}) \right\}.$$

Así, al descomponer una función medible  $X$  en su parte positiva  $X^+ := \max\{X, 0\}$  y su parte negativa  $X^- := \max\{-X, 0\}$ , es decir, al escribir  $X = X^+ - X^-$ , se puede definir su integral

$$\int_{\Omega} X d\mu := \int_{\Omega} X^+ d\mu - \int_{\Omega} X^- d\mu.$$

Con lo que se define el espacio de todas las funciones medibles cuya integral existe,

$$L_1(\Omega, \mu) := \left\{ X \in M(\Omega, \overline{\mathbb{R}}_+) : \int_{\Omega} X d\mu < \infty \right\},$$

llamándose a estas funciones integrables en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ .

Finalmente, para cualquier conjunto medible  $A \in \mathcal{F}$ , se define la integral de cualquier función medible  $f$  sobre el como

$$\int_A X d\mu := \int_{\Omega} X \mathbb{1}_A d\mu.$$

**Observación 2.1.2.** De forma análoga a como se define  $L_1(\Omega, \mu)$ , se puede definir para cada  $p \geq 0$  los espacios

$$L_p(\Omega, \mu) := \left\{ X \in M(\Omega, \bar{\mathbb{R}}_+) : \int_{\Omega} |X|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Además, es común denotar por  $L_p(\Omega)$ , al espacio  $L_p(\Omega, \nu)$ , cuando  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y  $\nu$  denota la medida de Lebesgue.

**Ejemplo 2.1.11.** Sea  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  dada para cada  $x \in \mathbb{R}$ , por  $f(x) = x^2$ . Entonces para cada  $p \in (0, \infty)$  se tiene que  $f \in L_p([0, T])$ . En efecto, para cada  $p \in (0, \infty)$ :

$$\|f\|_{L_p([0, T])}^p = \int_0^T |f(x)|^p d\nu(x) = \int_0^T x^{2p} dx = \frac{T^{2p+1}}{2p+1} < \infty.$$

Es más, si se considera ahora la función dada para cada  $x \in \mathbb{R}$  por  $f_q(x) = x^q$ , con  $q \geq 0$ . Entonces para cada  $p \in (0, \infty)$   $f_q \in L_p([0, T])$ . En efecto,

$$\|f_q\|_{L_p([0, T])}^p = \int_0^T |f_q(x)|^p d\nu(x) = \int_0^T x^{qp} dx = \frac{T^{qp+1}}{qp+1} < \infty.$$

El ejemplo anterior es importante por dos cosas, la primera por que muestra un caso donde la integral de Lebesgue coincide con la integral de Riemann, lo cual se cumple siempre que la función es Riemann integrable; y la segunda es que las funciones consideradas no son integrables en todo  $\mathbb{R}$ , puesto que el valor de su norma no es acotado. Un ejemplo clásico para tratar el primer punto del ejemplo anterior es la función de Dirichlet, que se muestra a continuación.

**Ejemplo 2.1.12.** La función  $D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada para cada  $x \in [0, 1]$  por

$$D(x) := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

es llamada *función de Dirichlet*, la cual es una función indicadora medible, puesto que  $\mathbb{Q}$  es un conjunto medible de  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . De esta forma se tiene que

$$\int_0^1 |D(x)| d\nu(x) = \int_0^1 |\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)| d\nu(x) = \nu(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0.$$

Por lo que  $D \in L_1([0, 1])$ . Sin embargo  $D$  no es Riemann integrable dado que su suma superior e inferior no coinciden, siendo estas 1 y 0 respectivamente.

Con la estructura de integral construida, cabe destacar que dada una función medible sobre un espacio de medida positiva, existirán integrales que otorgan información con respecto a dicha función. Dichas integrales son de gran importancia y son ampliamente utilizadas, dado que caracterizan a la función.

**Definición 2.1.6.** Sea  $X$  una variable aleatoria sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Se define el *valor esperado* o *esperanza* de  $X$ ,

$$E[X] := \int_{\Omega} X d\mathbb{P}. \quad (2.2)$$

Además, se llama *varianza* de  $X$  al valor

$$V(X) := \int_{\Omega} |X - \mathbb{E}(X)|^2 d\mathbb{P}, \quad (2.3)$$

donde  $|\cdot|$  denota la norma Euclideana.

Entendiendo la integral como una transformación desde el espacio de funciones medibles al cuerpo de los números reales, es posible componer la integral de una función medible con cualquier función real. Ahora, si la función medible se considera una variable aleatoria real, esta también se puede componer con dicha función real, donde aparentemente ambas composiciones no presentan ninguna conexión. El siguiente lema corresponde a un resultado muy célebre de la teoría de probabilidad, que establece las condiciones que debe cumplir una función real para que ambas composiciones estén relacionadas.

**Teorema 2.1.3. (Desigualdad de Jensen)**

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad, una variable aleatoria real  $X \in L_1(\Omega, \mu)$  y una función convexa  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]. \quad (2.4)$$

La desigualdad de Jensen es un resultado muy utilizado, presentando muchas aplicaciones. A continuación se presentan dos ejemplos, los cuales corresponden a dos de sus principales consecuencias.

**Ejemplo 2.1.13.** Sea  $X$  una variable aleatoria real y una función real dada por  $\varphi(t) = t^p$ , con

$p \geq 1$ . Entonces de la Desigualdad de Jensen (2.4) se tiene que:

$$(\mathbb{E}[X])^p \leq \mathbb{E}[X^p].$$

**Ejemplo 2.1.14.** Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrable y una función convexa  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Al reescalar y aplicar la desigualdad de Jensen (2.4), se tiene que para cada  $a < b$ :

$$\varphi \left( \int_a^b f(x) dx \right) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi((b-a)f(x)) dx.$$

### Función de Distribución y Densidad

Considere un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y una variable aleatoria  $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . En este caso, la variable aleatoria  $X$  toma valores sobre  $\mathbb{R}^n$ , siendo su  $\sigma$ -álgebra de llegada generada por todos los paralelepípedos  $n$ - dimensionales acotados, es decir,

$$B(\mathbb{R}^n) = \sigma \left( \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \leq x\} \right),$$

donde  $y \leq x$  denota a  $y_i \leq x_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . De esta forma, como la  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  contiene toda la información de  $X$ , las probabilidades

$$P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

también contienen toda la información relevante de la variable aleatoria  $X$ . Esto permite conocer completamente una variable aleatoria sólo con conocer la probabilidad de ocurrencia de sus eventos. Para utilizar esta propiedad es necesario formalizar lo anterior.

**Definición 2.1.7.** Se denomina *función de distribución* de una variable aleatoria  $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  a la función  $F_X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ , dada por

$$F_X := \mathbb{P}(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Además, si se tienen  $m$  variables aleatorias  $X_1, \dots, X_m : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , se define su

función de distribución conjunta  $F_{X_1, \dots, X_m} : (\mathbb{R}^n)^m \rightarrow [0, 1]$ , por

$$X_1, \dots, X_m := \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

A pesar de ser muy útil teóricamente la función de distribución, en ninguna parte se especifica como calcular sus probabilidades. Es por ello que para un cierto tipo de funciones, aquellas que cumplen cierta regularidad, existe una forma sencilla de calcular dichas probabilidades. Este procedimiento se presenta a continuación.

**Definición 2.1.8.** Dada una variable aleatoria  $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  con función de distribución  $F_X$ . Si existe una función integrable, no negativa  $f_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(y_1, \dots, y_n) dy_n \cdots dy_1,$$

para cada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , entonces ésta es llamada *función de densidad* de  $X$ . De esta forma, la función de densidad permite calcular la probabilidad de ocurrencia de cualquier evento  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , como

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx.$$

Cabe destacar que la existencia de la función de densidad no es algo trivial, teniendo que recurrir en la mayoría de los casos al teorema de Radón-Nikodym A.2.1 (Ver apéndice A.2). A pesar de que no se incluye el resultado anterior, en el siguiente ejemplo se muestran algunas funciones de densidad muy utilizadas.

**Ejemplo 2.1.15.** Si la variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  tiene función de densidad

$$f(x) := \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

se dice que  $X$  tiene función de distribución *exponencial*, con parámetro  $\lambda$ , lo cual se denota  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

**Ejemplo 2.1.16.** Si la variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  tiene función de densidad

$$f(x) := p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\},$$



se dice que  $X$  tiene función de distribución *Bernoulli*, con parámetro  $p$ , lo cual se denota  $X \sim Be(p)$ .

**Ejemplo 2.1.17.** Si la variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  tiene función de densidad

$$f(x) := \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x \in \mathbb{N},$$

se dice que  $X$  tiene función de distribución *Poisson*, con parámetro  $\lambda$ , lo cual se denota  $X \sim Poiss(\lambda)$ .

**Ejemplo 2.1.18.** Si la variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{|x-\mu|^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

se dice que  $X$  tiene función de distribución *Gaussiana* o *Normal*, con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , lo cual se denota  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

## Independencia

Considere dos eventos  $A$  y  $B$  en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , con  $\mathbb{P}(B) > 0$ , y suponga que se selecciona un punto  $\omega \in \Omega$  al azar, pero se sabe que  $\omega \in B$ . ¿Cómo se calcularía la probabilidad de que  $\omega$  también esté en  $A$ ?

En primer lugar hay que notar que el espacio de probabilidad no es el mismo, dado que el espacio se redujo al conjunto  $B$  y las probabilidades aumentan para seguir siendo un espacio de probabilidad, es decir, que la medida del espacio sea uno. Teniendo en cuenta lo anterior, una buena idea es definir el nuevo espacio  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ , con  $\tilde{\Omega} := B$ ,  $\tilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F}|_B := \{C \cap B \mid C \in \mathcal{F}\}$  y  $\tilde{\mathbb{P}}(A) := \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ , para cada  $A \in \mathcal{F}$ . La noción anterior motiva la siguiente definición.

**Definición 2.1.9.** Dado dos eventos  $A$  y  $B$ , tal que  $\mathbb{P}(B) > 0$ , se define la *probabilidad de ocurrencia del evento  $A$  dado el evento  $B$*

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

lo que consiste en la probabilidad de que ocurra el evento  $A$  asumiendo que el evento  $B$  se cumple.

De esta forma, se dirá que dos eventos  $A, B$  son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Análogamente, se dirá que los eventos de una colección  $\{A_i\}_{i \in I}$ , con  $I \subset \mathbb{N}$ , son independientes si para cada elección  $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m$ , con  $m \leq |I|$ , se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^m A_{k_i}\right) = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(A_{k_i}).$$

De lo anterior, se dirá que las  $\sigma$ -álgebras de una colección  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ , con  $I \subset \mathbb{N}$ , son independientes si para toda elección  $A_{k_i} \in \mathcal{F}_{k_i}$ , con  $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m$  y  $m \leq |I|$ , se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^m A_{k_i}\right) = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(A_{k_i}).$$

Por lo que se puede hablar de independencia de funciones. Esto es, las variables aleatorias  $X_i : (\Omega, \mathcal{F}_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  de una colección  $\{X_i\}_{i \in I}$ , con  $I \subset \mathbb{N}$ , son independientes si sus  $\sigma$ -álgebras generadas  $\{\sigma(X_i)\}_{i \in I}$  son independientes, o equivalentemente, si para cada  $2 \leq k \leq |I|$  y toda elección de borelianos  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , se tiene que

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_k \in B_k) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(X_i \in B_i).$$

Finalmente, como una variable aleatoria queda determinada por su función de distribución, y en caso de poseer, también por su función de densidad se puede determinar la independencia de variables aleatorias en función de sus distribuciones y densidades.

**Teorema 2.1.4.** *Las variables aleatorias  $X_i : (\Omega, \mathcal{F}_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  de una colección finita  $\{X_i\}_{i=1}^m$  son independientes sí y sólo sí*

$$F_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) = \prod_{k=1}^m F_{X_k}(x_k), \quad \forall x_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m.$$

Además, si las variables aleatorias poseen función de densidad, lo anterior es equivalente a

$$f_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) = \prod_{k=1}^m f_{X_k}(x_k), \quad \forall x_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m.$$

### Esperanza Condicional

Anteriormente se discutió como interpretar el concepto de probabilidad condicionada, resultando que la probabilidad condicionada de dos eventos  $A$  y  $B$ , tal que  $\mathbb{P}(B) > 0$ , viene dada por

$$\mathbb{P}(A | B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Es por esto, que al considerar la definición de valor esperado (2.2), es natural entender en concepto del valor esperado de una variable aleatoria  $X$  dado un evento  $A$ , por

$$\mathbb{E}[X|A] = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A X d\mathbb{P}. \quad (2.5)$$

No obstante, entender el concepto de valor esperado de una variable aleatoria  $X$ , con respecto a otra variable aleatoria  $Y$  no es sencillo. Sin embargo al considerar en primera instancia funciones simples, y gracias a (2.5) se concluye la siguiente definición.

**Definición 2.1.10.** Dadas dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  de un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , se define la esperanza condicional  $\mathbb{E}[X|Y]$  como cualquier variable aleatoria  $\sigma(Y)$ -medible tal que

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|Y] d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \sigma(Y). \quad (2.6)$$

De la definición anterior se destaca que la real participación de la variable aleatoria  $Y$  viene dada por su  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(Y)$ , lo cual tiene completa concordancia con lo estudiado anteriormente, puesto que se vió que toda la información de una variable aleatoria se puede obtener de su  $\sigma$ -álgebra generada. Es por lo anterior que es más intuitivo definir la esperanza de una variable aleatoria condicionada a una  $\sigma$ -álgebra. Lo cual se presenta en la siguiente definición.

**Definición 2.1.11.** Dado un espacio probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$  y una variable aleatoria integrable  $X \in L_1(\Omega, \mathbb{P})$ , se define la esperanza condicional de  $X$  con respecto a  $\mathcal{U}$ , como cualquier variable aleatoria  $\mathbb{E}[X|\mathcal{U}]$ , definida sobre  $\Omega$ ,  $\mathcal{U}$ -medible tal que

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{U}] d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{U}. \quad (2.7)$$

De esta forma, se entiende el concepto de esperanza condicional como una aproximación de la variable aleatoria  $X$  a partir de la información disponible, es decir, de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{U}$ . Es más

dicha aproximación pretende comportarse como la variable aleatoria  $X$  al restringir su dominio a  $\mathcal{U}$ , donde su comportamiento se rige por su integral. De esta forma la esperanza condicional  $\mathbb{E}[X|\mathcal{U}]$  corresponde a una variable aleatoria cuya integral no se distingue de la integral de  $X$ , al restringirse a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{U}$ .

Por otra parte, es importante observar que de las dos definiciones anteriores se puede probar que la esperanza de una variable aleatoria  $X$ , condicionada a otra  $Y$  corresponde a la esperanza de  $X$  condicionada a la  $\sigma$ -álgebra generada por  $Y$ . Esto es,

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|\sigma(Y)].$$

Además, se tiene que el valor esperado de la esperanza condicional de una variable aleatoria  $X$  corresponde al valor esperado de la variable aleatoria. Esto es,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{U}]] = \mathbb{E}[X].$$

Por último se destaca, que la definición de esperanza condicional no especifica la unicidad de ésta. Sin embargo, se prueba que  $\mathbb{E}[X|\mathcal{U}]$  es única sobre los conjuntos de medida no nula de  $\mathcal{U}$ .

Para terminar el análisis sobre la esperanza condicional se presentan algunas propiedades, que son muy útiles a la hora de trabajar con estas estructuras.

**Lema 2.1.4.** *Dado un espacio probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$  y dos variables aleatorias  $X, Y \in L_1(\Omega, \mathbb{P})$ , se tiene que:*

- Para cada  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y|\mathcal{U}] = \alpha \mathbb{E}[X|\mathcal{U}] + \beta \mathbb{E}[Y|\mathcal{U}] \quad a.s. \quad (2.8)$$

- Si  $X$  es  $\mathcal{U}$ -medible, entonces

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{U}] = X \quad a.s. \quad (2.9)$$

- Si  $X$  es  $\mathcal{U}$ -medible y  $XY \in L_1(\Omega, \mu)$ , entonces

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{U}] = X \mathbb{E}[Y|\mathcal{U}] \quad a.s. \quad (2.10)$$

- Si  $X$  es independiente de  $\mathcal{U}$ , entonces

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{U}] = \mathbb{E}[X] \quad a.s. \quad (2.11)$$

Con esto se cumple el objetivo de construir las bases para poder definir, entender y trabajar de forma adecuada el concepto de Martingala. Proceso que se define en el próximo capítulo y sustenta los resultados deseados de este trabajo.

### 2.1.2. Procesos estocásticos

En la subsección anterior se vió la estructura de los espacios de medida positiva y las propiedades que presentan las funciones medibles. Dichas propiedades, como se mencionó, pueden ser utilizadas para modelar fenómenos físicos dentro de un espacio de probabilidad, como lo pueden ser la altura de un árbol, o el número de hijos de una familia. Sin embargo, si se quisiera calcular la cantidad de peces vivos en un criadero todos los días; o el estado de un rodamiento de una maquina industrial, hay que darse cuenta que la variable aleatoria que modela el fenómeno cambia, o mejor dicho evoluciona, teniendo que modelar cada vez con una variable aleatoria nueva, correspondiente a la evolución de la anterior. Sin embargo dicha sucesión de variables aleatorias preserva la incerteza o mejor dicho los factores que la generan, puesto a que el proceso que se está realizando es el mismo, sólo que ahora depende de un parámetro extra que no agrega aleatoriedad al sistema, el cual en la mayoría de los casos es el tiempo.

Para dejar más claro lo anterior, suponga que se desea medir la altura de los árboles de un bosque, todos los días durante una semana. Como ya se mencionó, la altura de un árbol depende de sus años de vida, fertilidad de la tierra, humedad, entre otros factores. Sin embargo, al pasar los días de la semana dicha dependencia no varía; la vida del árbol aumenta, la fertilidad de la tierra y la humedad cambian, pero no aparecen nuevos factores que afecten el crecimiento del árbol, por lo que la incerteza presente todos los días es la misma. Sin embargo, las variables aleatorias no son las mismas, puesto que son modificadas por un parámetro, en este caso temporal, el cual es determinista y es el responsable de la evolución del sistema.

**Definición 2.1.12.** Un proceso estocástico real valuado es una colección de funciones  $(X_t, t \in I) : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ , tales que:

$$\forall t \in I: \quad X_t(\cdot) : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), \\ \omega \longmapsto X_t(\omega)$$

es una variable aleatoria de un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ . Además, el mapeo

$$\forall \omega \in \Omega: \quad X_{(\cdot)}(\omega) : I \longrightarrow \mathbb{R}, \\ t \longmapsto X_t(\omega)$$

es llamado trayectoria del proceso en  $\omega$ .

Por simplicidad se denota por  $X$  al proceso estocástico  $(X_t, t \in I)$ , el cual como se mencionó, corresponde a una evolución de variables aleatorias. Para entender más el concepto se presenta al lector los siguientes ejemplos de procesos estocásticos.

**Ejemplo 2.1.19.** El proceso  $X$  de un espacio de probabilidad  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$  dado para cada  $t > 0$  por

$$X_t(x) = e^{\frac{x}{t}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

es un proceso estocástico.

**Ejemplo 2.1.20.** El proceso  $X$  de un espacio de probabilidad  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$  dado para cada  $t > 0$  por

$$X_t(x) = \sin(tx), \quad x \in \mathbb{R}$$

es un proceso estocástico.

**Ejemplo 2.1.21.** El proceso  $X$ , donde para cada  $t \in \mathbb{N}$ ,  $X_t \sim Be(p)$ , con  $p \in (0, 1)$  es un proceso estocástico.

**Ejemplo 2.1.22.** El proceso  $X$ , donde para cada  $t \in \mathbb{N}$ ,  $X_t \sim Poiss(\lambda t)$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  es un proceso estocástico.

Sabiendo que la finalidad de una variable aleatoria es poder entender la estructura inobservable del dominio a partir de su recorrido, notamos que los dos primeros ejemplos a pesar de ser ciertos, no presentan mayor relevancia, puesto que su dominio ya es un espacio observable. Sin embargo, los otros dos ejemplos son mucho más interesantes, puesto que los procesos se rigen por una distribución, lo cual hace alusión a un espacio de probabilidad inobservable, el cual se puede usar para modelar. Esto último es de vital importancia, ya que los procesos estocásticos son un objeto matemático que enriquece la estructura de variable aleatoria, permitiendo modelar fenómenos que una variable aleatoria por sí sola no logra representar. Para justificar lo anterior, se presentan los siguientes ejemplos de modelamiento.

**Ejemplo 2.1.23.** Los potenciales de acción emitidos por una neurona se pueden representar mediante un proceso estocástico.

**Ejemplo 2.1.24.** Las turbulencias de capa límite presentes en un avión se pueden describir mediante un proceso estocástico.

**Ejemplo 2.1.25.** El conteo de fotones que llegan a un fotodiodo puede representarse mediante un proceso estocástico.

**Ejemplo 2.1.26.** La cantidad de personas en una cola se puede describir mediante un proceso estocástico.

### Espacios de probabilidad filtrados

Dado que la  $\sigma$ -álgebra generada  $\sigma(X)$  contiene toda la información relevante de la variable aleatoria  $X$ , se tiene que la colección  $\{\sigma(X_i)\}_{i \in I}$  de  $\sigma$ -álgebras generadas para cada variable aleatoria  $X_i$  de un proceso estocástico  $X = (X_t, t \in I)$ , contiene toda la información relevante del proceso. De lo anterior, si dicha colección de  $\sigma$ -álgebras posee ciertas características, se puede conocer propiedades importantes del proceso. Debido a esto, se procede introducir los conceptos que permiten realizar dicho análisis.

**Definición 2.1.13.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U})$  un espacio medible. Una familia  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  de  $\sigma$ -álgebras es una *filtración*, si para cada  $0 \leq s \leq t$  se tiene que

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{U}.$$

De esta forma, al agregar a un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$  una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  de  $\mathcal{U}$ , la tupla resultante  $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$  recibe el nombre de *espacio de probabilidad filtrado*. A continuación se describen las características que presentan las filtraciones de interés.

**Definición 2.1.14.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U})$  un espacio medible y  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  una filtración de  $\mathcal{U}$ . Se dirá que  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es *continua por la derecha* si

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}.$$

Además, se dice que  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es *completa* si  $\mathcal{F}_0$  contiene a todos los conjuntos  $\mathbb{P}$ -nulos de  $\mathcal{U}$ , es decir, cuya medida de probabilidad es cero. De esta forma, una filtración satisface las *hipótesis habituales* si es completa y continua por la derecha.

De igual modo como una variable aleatoria genera una sigma álgebra, un proceso puede generar una filtración, la cual conserva el concepto de “optimalidad” mencionado para  $\sigma$ -álgebra.

**Definición 2.1.15.** Sea  $X$  un proceso estocástico real valuado. Se definen las siguientes  $\sigma$ -álgebras:

i) la *historia* del proceso  $X$  hasta el tiempo  $t$ ,

$$\mathcal{X}_t := \sigma(X_s \mid 0 \leq s \leq t),$$

ii) el *futuro* del proceso  $X$  desde el tiempo  $t$ ,

$$\mathcal{X}_t^+ := \sigma(X_s - X_t \mid s \geq t).$$

Notemos que la historia  $(\mathcal{X}_t)_{t \geq 0}$  de un proceso estocástico  $X$  siempre será una filtración. La cual se llamará *filtración natural de  $X$* , y corresponde a la filtración más grosera que posee toda la información relevante del proceso.

Por otra parte, para un proceso  $X$  existirán muchas filtraciones, de las cuales hay que seleccionar las realmente “útiles”. Dicha característica, que hace una filtración “útil” motiva la siguiente definición.

**Definición 2.1.16.** Sea  $X$  un proceso estocástico. Una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  de  $\mathcal{U}$  es llamada *no anticipativa* con respecto a  $X$ , si

i)  $\mathcal{X}_s \subset \mathcal{F}_t$  para cada  $0 \leq s \leq t$ ;

ii)  $\mathcal{F}_t$  es independiente de  $\mathcal{X}_t^+$  para cada  $t \geq 0$ .

Además, se dirá que el proceso  $X$  es  $(\mathcal{F}_t)$ -*adaptado*, si  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es una filtración no anticipativa de  $X$ , o equivalentemente, si para cada  $t \geq 0$ ,  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.

De la definición anterior es claro que la filtración natural de un proceso siempre será una filtración no anticipativa del mismo proceso, siendo esta la filtración no anticipativa más grosera, con la que el proceso es adaptado.

Al introducir el concepto de filtración, notamos que al hablar de un proceso estocástico hacemos alusión automáticamente a un espacio de probabilidad filtrado, análogo al caso de que una variable aleatoria viene relacionada con un espacio de probabilidad. Es por lo anterior, que al igual que como se estudió las propiedades de medibilidad de una variable aleatoria dependiendo de su espacio de medida positiva, es que a continuación se estudiará las propiedades de medibilidad de un proceso estocástico a partir de su espacio de probabilidad filtrado asociado.



**Definición 2.1.17.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$  un espacio de probabilidad filtrado. Un proceso estocástico  $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se dice:

- *medible*, si el mapeo  $[0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $(s, \omega) \mapsto X(s, \omega)$  es medible, es decir,  $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}_T$ -medible.
- *progresivamente medible*, si para cada  $t > 0$  el mapeo  $[0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $(s, \omega) \mapsto X(s, \omega)$  es  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -medible.

donde el producto  $\otimes$  viene dado por  $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 := \sigma(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2)$  y corresponde a la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene los productos cruz entre todos los elementos de las  $\sigma$ -álgebras.

Es importante notar que la condición de progresiva medibilidad es más restrictiva que la condición de medibilidad, siendo a la vez estrictamente más fuerte que la condición de adaptabilidad. Lo primero se debe a que la medibilidad considera sólo un espacio de medida, incluyendo sólo una  $\sigma$ -álgebra de la filtración; mientras que lo segundo se debe a que la adaptabilidad estudia el proceso estacionado en un instante, sin considerar al espacio medible  $([0, T], \mathcal{B}([0, T]))$ . Sin embargo al combinar ambas condiciones menos restrictivas se recupera la condición más fuerte, es decir, si un proceso es medible y adaptado, entonces es progresivamente medible.

Por último se enuncia un resultado que permite entender mejor estos conceptos, siendo una herramienta sencilla para identificar procesos con estas características.

**Lema 2.1.5.** *Sea  $X$  un proceso estocástico. Si  $X$  tiene trayectorias continuas a derecha, entonces  $X$  es medible.*

Por lo que si un proceso estocástico  $X$  es  $(\mathcal{F}_\cdot)$ -adaptado y con trayectorias continuas a derecha, entonces es progresivamente medible.

## Proceso de Wiener

El Proceso de Wiener corresponde a la formulación matemática del comportamiento de un sistema que se ve afectado simultáneamente por un número incalculable de fuerzas, de magnitudes indeterminadas en direcciones aleatorias. El primero en registrar este comportamiento fue el botánico Robert Brown en el año 1827, quien estudiando con un microscopio partículas de polen flotando en agua, observó un movimiento peculiar y errático. Hubo varios intentos de precisar dicho comportamiento, siendo el más relevante el proporcionado por Albert Einstein, quien describió al Movimiento Browniano como el proceso límite de una caminata aleatoria,

dando de esta forma una solución física al problema, que sería descrito rigurosamente luego por el matemático Norbert Wiener.

**Definición 2.1.18.** Un *Movimiento Browniano* o *Proceso de Wiener* con respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es un proceso real continuo  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado  $W = (W_t, t \geq 0)$ , tal que:

- (i)  $W_0 = 0$  a.s.,
- (ii)  $W_t - W_s$  es una variable aleatoria  $N(0, t - s)$ ,  $\forall t \geq s \geq 0$ ,
- (iii)  $W$  es de incrementos independientes, es decir, para toda partición de tiempos  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , los incrementos  $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  son independientes.

Notar que de la definición se tiene que

$$\mathbb{E}(W_t) = 0, \mathbb{E}(W_t^2) = t, \forall t \geq 0.$$

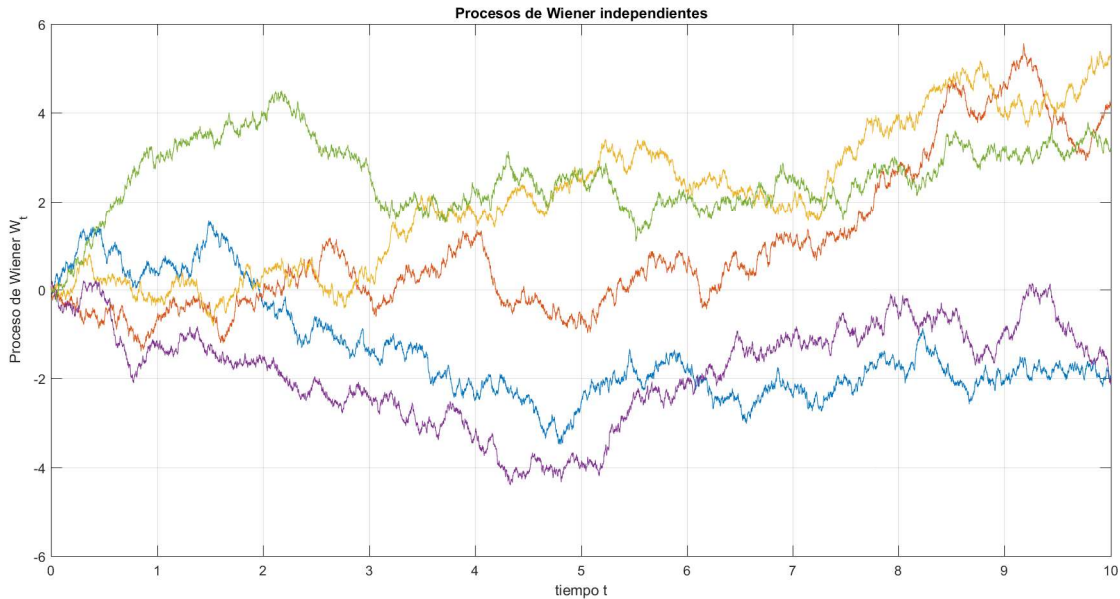
La existencia de este proceso no es directa y no es el propósito del trabajo presentar su demostración. Sin embargo, en la literatura presenta la construcción generada por el método Lévy Ciesielski [1](página 43) y el método de Kolmogorov [8], como los procedimientos clásicos.

Para ilustrar el comportamiento de este proceso, se presenta en la Figura 2.1, el cual muestra las trayectorias de cinco procesos de Wiener independientes, simulados como la sumatoria acumulativa de incrementos iguales a la raíz cuadrada de una variable aleatoria  $N(0, \Delta t)$ . El comportamiento errático presentado en 2.1 da la intuición de que ciertas transformaciones de un Proceso de Wiener mantendrán su conducta, es decir, seguirán siendo un Proceso de Wiener. Específicamente, se tiene que dado un Proceso de Wiener  $W$ :

- $-W$  es un Proceso de Wiener,
- Para cada  $c > 0$ , el proceso  $\frac{W_{ct}}{\sqrt{c}}, t \geq 0$  es un Proceso de Wiener,
- El proceso

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ tW_{\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

es un Proceso de Wiener.



**Figura 2.1:** Simulación de cinco trayectorias de un Proceso de Wiener en el intervalo  $[0,10]$ .

Finalmente, se presentan las características principales de los procesos de Wiener, que hacen a estos procesos tan importantes. Dentro de las propiedades básicas de un Proceso de Wiener, se tiene que

$$\mathbb{E}(W_t W_s) = t \wedge s := \min(s, t), \quad \forall s, t \geq 0.$$

Además, para cada  $T$  y para todo  $\omega$ , el mapeo  $t \mapsto W_t(\omega)$  es uniformemente Hölder continuo en  $[0, T]$  con exponente  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ . Sin embargo, para casi todo  $\omega$ , el mapeo  $t \mapsto W_t(\omega)$  en ningún punto es Hölder continuo con exponente  $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ . De lo anterior, se extrae que todo Proceso de Wiener tiene una versión con trayectorias continuas a.s.. No obstante, Para casi todo  $\omega$  el mapeo  $t \mapsto W_t(\omega)$  en ningún punto es diferenciable.

Por último cabe destacar que un Proceso de Wiener no tiene variación acotada, es decir, para cada  $T > 0$ , las trayectorias de un Proceso de Wiener  $W$  tienen variación

$$V[W](T) = \sup \sum_{1 \leq k \leq N} |W_{t_k} - W_{t_{k-1}}| = \infty, \quad a.s.,$$

donde el supremo se toma sobre todo  $N \in \mathbb{N}$  y sobre toda partición  $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_N = T$ . Sin embargo, más adelante se verá que su variación cuadrática si es finita, lo cual permitirá integrar con respecto a un Proceso de Wiener a pesar de que su variación no sea acotada.

## Martingalas

Una martingala es un proceso estocástico introducido por Paul Pierre Lévy, el cual lleva su nombre por un método de apuestas popularizado en el siglo XVIII, con fama de ser una estrategia empleada por gente ingenua, tal como se catalogaba en esa época a la gente de Martigues (martingales en francés), Francia. La estrategia consistía en apostar el doble de la cantidad perdida, cada vez que se perdía una apuesta; dando la impresión de ser una estrategia ganadora, debido a que al ganar una apuesta se recupera todo lo perdido más la apuesta inicial. Sin embargo, esta estrategia suele llevar a la quiebra a los jugadores debido al crecimiento exponencial en la tasa de apuesta que presenta, pudiendo dejar sin dinero al jugador con un número de pérdidas consecutivas. Un claro ejemplo de esto se presentó en el casino Monte Carlo, donde una ruleta dio 26 negros consecutivos, mientras los jugadores, apuesta tras apuesta, aumentaban sus pujas al color rojo.

**Definición 2.1.19.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  una filtración de  $\mathcal{U}$  y  $M$  un proceso estocástico real valuado  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado tal que  $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty, \forall t \geq 0$ . Si

$$M_s = \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \text{ a.s., } 0 < s < t, \quad (2.12)$$

entonces  $M$  es llamado  $(\mathcal{F}_t)$ -Martingala. En otras palabras, una  $(\mathcal{F}_t)$ -Martingala es una familia de variables aleatorias  $\mathcal{F}_t$  adaptadas, tales que para todo medible  $A \in \mathcal{U}$

$$\int_A M_s d\mathbb{P} = \int_A M_t d\mathbb{P}, \quad \forall s < t.$$

Analogamente, si en (2.12) se cambia la igualdad por  $\leq$  ( $\geq$ , resp.), entonces a  $M$  se le llama  $(\mathcal{F}_t)$ -submartingala ( $(\mathcal{F}_t)$ -supermartingala, resp.). Además si la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  corresponde a la historia  $(\mathcal{M}_t)_{t \geq 0}$  del proceso, entonces  $M$  es llamado simplemente martingala (submartingala o supermartingala, resp.).

**Ejemplo 2.1.27.** Sea  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una colección de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media finita  $\mu$ . Si se considera el proceso

$$S_0 = 0; \quad S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \in \mathbb{N};$$

se tiene que el proceso  $X$  dado por

$$X_n = S_n - n\mu, \quad n \in \mathbb{N},$$

es una martingala con respecto a la filtración natural de  $S$ . Además, si las variables aleatorias

$\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  poseen varianza finita  $\sigma^2$ , entonces el proceso  $Y$  dado por

$$Y_n = X_n^2 - n\sigma^2 = (Sn - n\mu)^2 - n\sigma^2, \quad n \in \mathbb{N};$$

también es una martingala con respecto a la misma filtración.

**Ejemplo 2.1.28.** Un Proceso de Wiener  $W$  real es una Martingala. Es más, los procesos dados por  $\forall t > 0, W_t^2 - t$  y  $e^{\alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2}t}$ , con  $\alpha > 0$ , también son martingalas.

**Ejemplo 2.1.29.** La fortuna de un jugador que apuesta continuamente puede modelarse a través de un proceso estocástico  $X$ . Además, si el juego en donde apuesta es justo, el proceso  $X$  corresponde a una martingala; respectivamente si el juego es favorable o desfavorable, el proceso sera una submartingala o una supermartingala, respectivamente.

Teniendo una noción más amplia del sentido de martingala, se procede a enunciar las propiedades que hacen de ella una herramienta práctica y poderosa. El siguiente resultado, muestra dos de las desigualdades más importantes definidas para ellas.

**Teorema 2.1.5.** Sea  $M$  un proceso estocástico real valuado con trayectorias continuas a.s.. Si  $M$  es una martingala y  $1 < p < \infty$ , entonces

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|^p \right] \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[|M_t|^p].$$

Por otro lado, al igual que como se mide la variación de funciones real valuadas, se puede medir la variación de las trayectorias de un proceso estocástico. Esto se logra al introducir un proceso auxiliar, el cual toma relevancia al aplicarlo sobre martingalas y cumple un rol fundamental para construir el cálculo de Itô.

**Teorema 2.1.6.** Sean  $M$  y  $N$  dos martingalas cuadrado integrables, esto es,  $\sup_t \mathbb{E}[M_t^2] < \infty$  y  $\sup_t \mathbb{E}[N_t^2] < \infty$ . Entonces existe un único proceso de variación localmente finita  $\langle M, N \rangle$  tal que  $\langle M, N \rangle_0 = 0$  y  $MN - \langle M, N \rangle$  es una martingala; el cual viene dado  $\forall t \geq 0$ , por

$$\langle M, N \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (M_{t_{k+1}} - M_{t_k})(N_{t_{k+1}} - N_{t_k}), \quad (2.13)$$

para toda partición  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ , tal que  $\max_{1 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

El bracket process mencionado  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . también es conocido como covariación cuadrática, el cual es de gran relevancia es este estudio, como se verá más adelante. Es por lo anterior, que para entender más este proceso se destacan las siguientes observaciones.

**Observación 2.1.3.**

- Se denota por  $\langle M \rangle$  al proceso  $\langle M, M \rangle$ , el cual es un proceso creciente y es llamado simplemente variación cuadrática.
- Si  $F$  es un proceso estocástico acotado, entonces como  $\langle M, N \rangle$  es de variación localmente finita, se puede definir la integral de Lebesgue-Stielgest asociada a él

$$\int_0^\cdot F_s d\langle M, N \rangle_s.$$

- El operador  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es bilineal, es decir,

$$\langle \alpha M + \hat{M}, \beta N - \hat{N} \rangle = \alpha\beta \langle M, N \rangle - \langle \hat{M}, \hat{N} \rangle.$$

- El operador  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  cumple la identidad de polarización, es decir,

$$\langle M, N \rangle = \frac{1}{4}(\langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle)$$

**Ejemplo 2.1.30.** La variación cuadrática de un Proceso de Wiener  $W$  viene dada para cada  $t \geq 0$  por

$$\langle W, W \rangle_t = t.$$

Esto resulta como consecuencia del Ejemplo 2.1.28, y se muestra en detalle en [1] (Página 60).

Bajo la observación anterior, es de interés estudiar este nuevo concepto de integración, es decir, integrar con respecto a un bracket process. Lo anterior motiva la siguiente subsección. La cual tiene por finalidad estudiar la estructura generada a partir de la integral de este tipo de objetos.

### 2.1.3. Cálculo estocástico y semimartingalas

#### Cálculo de estocástico

El cálculo estocástico o también llamado cálculo de Itô, fue formulado por el matemático japonés Kiyoshi Itô, quien estudiando los procesos de difusión, originó el concepto de Ecuación diferencial estocástica, gracias su concepción de integral estocástica. En esta sección abordaremos algunos resultados de esta materia, introduciendo los conceptos necesarios para construir la integral estocástica.

Se comienza esta subsección, determinando la familia de martingalas con la que se desea generar una integral con respecto a su bracket process.

**Definición 2.1.20.** Se define el espacio de martingalas cuadrado integrables iniciadas en cero

$$\mathbb{M}_0^2(\mathbb{R}) = \left\{ M \text{ martingala continua} \mid M_0 = 0 \wedge \sup_t \mathbb{E} [M_t^2] < \infty \right\}$$

el cual dotado por el producto interior inducido por la norma

$$\|M\|_{\mathbb{M}_0^2(\mathbb{R})} := \sup_t \mathbb{E} [M_t^2],$$

genera el espacio  $(\mathbb{M}_0^2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , el cual es un espacio de Hilbert.

De esta forma, dada una martingala con la cual su proceso bracket se puede integrar, es de interés diferenciar los procesos para los cuales está bien definida dicha integral.

**Definición 2.1.21.** Sea  $M \in \mathbb{M}_0^2(\mathbb{R})$ . Se define el espacio

$$\mathbb{L}^2(M) = \left\{ F \text{ progresivamente medible} \mid \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty F_t^2 d\langle M \rangle_t \right] < \infty \right\}$$

el cual dotado por el producto interior inducido por la norma

$$\|F\|_{\mathbb{L}^2(M)} := \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty F_t^2 d\langle M \rangle_t \right],$$

genera el espacio  $(\mathbb{L}^2(M), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , el cual es un espacio de Hilbert.

Al igual que como se construyó la integral de Lebesgue, comenzaremos definiendo la integral para un step process, el equivalente a las funciones simples.

Un proceso estocástico  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ -adaptado  $X$  se dice *simple* o *step process*, si existe una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$  y una colección de variables aleatorias  $(a_k)_{k=1}^n$   $\mathcal{F}_t$ -medibles, tales que

$$X_t = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}.$$

Además, se denota  $\mathbb{S}(\mathbb{R})$  al espacio de todos los procesos simples real valuados. De esta forma, su integral con respecto a una martingala cuadrado integrable  $M = (M_t, t \geq 0)$ , viene dada por

$$I[X]_t = \sum_{k=1}^{n-1} a_k (M_{t \wedge t_{k+1}} - M_{t \wedge t_k}).$$

Luego, para generalizar dicha integral se necesitan dos resultados. El primero presenta que el proceso  $I[X]$  es una martingala y el mapeo  $X \mapsto I[X]$  es una isometría entre los espacios  $(\mathbb{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathbb{S}(\mathbb{R})})$  y  $(\mathbb{M}_0^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathbb{M}_0^2(\mathbb{R})})$ . Mientras que el segundo resultado establece que  $\mathbb{S}(\mathbb{R})$  es denso en  $(\mathbb{L}^2(M), \|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(M)})$ . De esta forma, es posible desarrollar el concepto de integral de Itô.

**Definición 2.1.22. (Integral de Itô)**

Sea  $M \in \mathbb{M}_0^2(\mathbb{R})$ . Para cada  $F \in \mathbb{L}^2(M)$  la clausura del mapeo  $\cdot \mapsto I[\cdot]$  define el proceso

$$t \mapsto I_t := \int_0^t F_s dM_s,$$

el cual es llamado *integral de Itô* de  $F$  con respecto a  $M$ . Además, dada la construcción se tiene que el proceso  $I = (I_t, t \geq 0)$  es una martingala.

Como es normal se desea poder integrar con respecto a cualquier límite inferior, para eso, bajo la noción anterior se considera para cada  $0 < r < t$

$$\int_r^t F_s dM_s := \int_0^t F_s dM_s - \int_0^r F_s dM_s.$$

Además al igual que la integral de Lebesgue, la integral de Itô es lineal. Esto quiere decir, que



dado  $M \in \mathbb{M}_0^2(\mathbb{R})$ , para cada  $F, G \in \mathbb{L}^2(M)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\int_0^\cdot (F + \alpha G) dM_s = \int_0^\cdot F dM_s + \alpha \int_0^\cdot G dM_s.$$

Por otro lado, de la construcción de la integral de Itô, más específicamente de la isometría mencionada, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.7. (Isometría de Itô)**

Sea  $M \in \mathbb{M}_0^2(\mathbb{R})$ . Para cada  $F \in \mathbb{L}^2(M)$  y  $t > 0$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t F_s dM_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t F_s^2 d\langle M \rangle_s \right].$$

**Martingalas locales**

El concepto de Martingala local nace de la necesidad teórica de aplicar los buenos resultados presentes para martingalas a estructuras que a pesar de tener similitudes con ellas, no logran serlo. Lo anterior se observa en algunos procesos de difusión de Itô, los cuales para ser estudiados, se requiere de la estructura presentada a continuación.

**Definición 2.1.23.** Sea  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  una filtración. Un proceso estocástico real valuado  $(\mathcal{F}_\cdot)$ -adaptado  $M$ , es llamado  $(\mathcal{F}_\cdot)$ -martingala local, si existe una secuencia creciente  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  de tiempos de parada finitos tales que

- i)  $\tau_n \rightarrow \infty$  a.s. cuando  $n \rightarrow \infty$ ;
- ii) el proceso  $t \mapsto M_t^{\tau_n} = M_{t \wedge \tau_n}$  es una  $(\mathcal{F}_\cdot)$ -martingala para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Al igual que en las martingalas, si la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  corresponde a la historia  $(\mathcal{M}_t)_{t \geq 0}$  del proceso  $M$ , entonces sólo se llama a  $M$  martingala local. Además, a  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se le llama sucesión localizadora.

**Ejemplo 2.1.31.** Sea  $W$  un Proceso de Wiener y  $T = \min\{t : W_t = -1\}$ . Luego el proceso  $X$  dado por

$$X_t = \begin{cases} W_{(\frac{1}{1-t}) \wedge T} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq t \leq \infty, \end{cases}$$

no es una martingala puesto que

$$\mathbb{E}[X_t] = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Sin embargo, es una martingala local. Esto debido a que si se toma la sucesión localizadora dada para cada  $k \in \mathbb{N}$  por  $\tau_k = \min\{t : X_t = k\}$ , se tiene que  $\mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_k}] = 0, \forall t \geq 0$ .

Como se observa de la definición, una martingala local a pesar de no tener las propiedades de una martingala, estas presentan una estrecha de conexión. Por un lado toda martingala es una martingala local, pero lo importante es la relación inversa, vínculo que se muestra en el siguiente resultado y dota de relevancia a las martingalas locales.

**Lema 2.1.6.** *Sea  $M$  una martingala local continua con  $M_0 = 0$ , entonces existe una sucesión localizadora  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $M$  tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^{\tau_n}$  es una martingala acotada, donde  $\tau_n \leq n$ .*

De esta forma, dada la conexión entre martingalas locales y martingalas acotadas, es útil obtener resultados trabajando las martingalas locales como martingalas acotadas, pudiendo de esta forma, asegurar la integrabilidad del proceso. Lo anterior se logra al aplicar los resultados de martingalas sobre la evaluación de una martingala local evaluada en su sucesión localizadora de forma adecuada.

**Teorema 2.1.8.** *Sean  $M$  y  $N$  martingalas locales continuas. Entonces existe un único proceso de variación localmente finita  $\langle M, N \rangle'$  tal que  $\langle M, N \rangle'_0 = 0$  y  $MN - \langle M, N \rangle'$  es una martingala local; el cual viene dado  $\forall t \geq 0$ , por*

$$\langle M, N \rangle'_t = \langle M^{\tau_n}, N^{\tau_n} \rangle_t,$$

donde el operador  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el operador bracket definido en (2.13).

Notar que dada la construcción del operador  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ , se tiene que el proceso bracket de una martingala local posee las mismas propiedades que el proceso bracket para martingalas  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . De donde concluimos que la integral de Lebesgue-Stieljes del proceso bracket de una martingala local está bien definido. Es más, a ambos procesos se le denotara  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de manera indistinta.

Una vez entendido el concepto de variación cuadrática sobre martingalas locales, se procede a mostrar un resultado nuevo, llamado desigualdad de *Burkholder-Davis-Gundy* el cual permite relacionar el valor esperado de una martingala local, con el valor esperado de su variación.

**Lema 2.1.7. (Desigualdad BDG)**

Sea  $M$  una martingala local iniciada en cero, entonces para cada  $1 \leq p < \infty$  y tiempo de parada  $\tau > 0$ , existen constantes positivas  $c_p$  y  $C_p$ , tales que:

$$c_p \mathbb{E} \left[ \langle M \rangle_{\tau}^{\frac{p}{2}} \right] \leq \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < \tau} |M_t|^p \right] \leq C_p \mathbb{E} \left[ \langle M \rangle_{\tau}^{\frac{p}{2}} \right].$$

Además, si  $M$  es continua el exponente  $p$  vive en  $(0, \infty)$ .

Por otra lado, para generar la integral con respecto a una martingala local, aun es necesario trabajar con el proceso bracket y como incluir los tiempos de parada en la integral. Es por lo anterior que se necesita introducir el siguientes resultado.

**Lema 2.1.8.** Sean  $M$  una martingala local y  $\tau < \infty$  un tiempo de parada. Entonces

$$\langle M^\tau \rangle_{\cdot} = \langle M \rangle_{\cdot}^{\tau},$$

De esta forma, si se considera  $F \in \mathbb{L}^2(M^\tau)$ , se tiene que

$$\int_0^{\cdot \wedge \tau} F_s dM_s = \int_0^{\cdot} F_s dM_s^{\tau}.$$

Ahora, con las herramientas necesarias para extender el cálculo de Itô a martingalas locales, se define el espacio de funciones con las cuales es de interés integrar, y el espacio de funciones cuya integral esté bien definida.

**Definición 2.1.24.** Se define el espacio de martingalas locales iniciadas en cero

$$\mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{R}) = \{ M \text{ martingala local continua} \mid M_0 = 0 \}.$$

Además, para cada  $M \in \mathbb{M}_{loc}(\mathbb{R})$  se define el espacio

$$\mathbb{L}_{loc}^2(M) = \left\{ F \text{ progresivamente medible} \mid \mathbb{E} \left[ \int_0^{\infty} F_t^2 d\langle M \rangle_t \right] < \infty \right\}.$$

De esta forma, se logra expandir la integral de Itô (Definición 2.1.22) para martingalas locales como sigue.

**Definición 2.1.25. (Integral de Itô)**

Sea  $M \in \mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{R})$ . Para cada  $F \in \mathbb{L}_{loc}^2(M)$ , la *integral de Itô* de  $F$  con respecto a  $M$ , viene dada por

$$t \mapsto I_t = \int_0^t F_s dM_s := \int_0^t F_s dM_s^{\tau_n}, \quad (2.14)$$

donde  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\tau_n \leq n$ . Además, dada la construcción, se tiene que  $I \in \mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{R})$ .

**Observación 2.1.4.** Notar que la definición de integral de Itô con respecto a martingalas locales no depende de la sucesión localizadora  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , por lo que esta no se menciona al integrar.

Como es de esperarse, al igual que la integral de Itô respecto a una martingala, para una martingala local se mantiene la linealidad de la integral. Esto es, dado  $M \in \mathbb{M}_{loc}(\mathbb{R})$ , para cada  $F, G \in \mathbb{L}_{loc}^2(M)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\int_0^\cdot (F + \alpha G) dM_s = \int_0^\cdot F dM_s + \alpha \int_0^\cdot G dM_s.$$

Ahora definida la integral de Itô respecto a una martingala local, podemos ver sus propiedades, las cuales se muestran en los siguientes resultados. La primera propiedad, es una consecuencia directa del Lema 2.1.8.

**Lema 2.1.9.** Sean  $M \in \mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{R})$ ,  $F \in \mathbb{L}_{loc}^2(M)$  y un tiempo de parada  $\tau < \infty$ . Entonces

$$\int_0^{\cdot \wedge \tau} F_s dM_s = \int_0^\cdot F_s dM_s^\tau.$$

Además, se rescatan los resultados importantes, como el de la variación cuadrática de integrales.

**Lema 2.1.10.** Sean  $M, N \in \mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{R})$ ,  $F \in \mathbb{L}_{loc}^2(M)$  y  $G \in \mathbb{L}_{loc}^2(N)$ . Entonces para cada  $t > 0$

$$\left\langle \int_0^\cdot F_s dM_s, \int_0^\cdot G_s dN_s \right\rangle_t = \int_0^t F_s G_s d\langle M, N \rangle_s$$

Junto con la isometría de Itô.

**Teorema 2.1.9. (Isometría de Itô)**

Sea  $M \in \mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{R})$  y  $F \in \mathbb{L}_{loc}^2(M)$ . Si existe  $T > 0$  tal que  $\mathbb{E}[M_T^2] < \infty$  y  $\int_0^T \mathbb{E}[F_s^2] d\langle M \rangle_s < \infty$ . Entonces

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t F_s dM_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t F_s^2 d\langle M \rangle_s \right].$$

Además, de la isometría de Itô y de la identidad de polarización para martingalas locales, se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 2.1.1.** Sean  $M$  y  $N \in \mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{R})$ ,  $F \in \mathbb{L}_{loc}^2(M)$  y  $G \in \mathbb{L}_{loc}^2(N)$ . Si existe  $T > 0$  tal que  $\mathbb{E}[M_T^2] < \infty$ ,  $\mathbb{E}[N_T^2] < \infty$ ,  $\int_0^T \mathbb{E}[F_s^2] d\langle M \rangle_s < \infty$  y  $\int_0^T \mathbb{E}[G_s^2] d\langle N \rangle_s < \infty$ . Entonces para cada  $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t F_s dM_s \right) \left( \int_0^t G_s dN_s \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t F_s G_s d\langle M, N \rangle_s \right].$$

Finalmente, dado que la integral con respecto a una martingala local, es también una martingala local, su integral está bien definida. El siguiente resultado entrega una forma de manipular este tipo de estructuras.

**Lema 2.1.11.** Sea  $M \in \mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{R})$  y  $G \in \mathbb{L}_{loc}^2(M)$ . Si  $FG \in \mathbb{L}_{loc}^2(M)$ , entonces para cada  $F \in \mathbb{L}_{loc}^2 \left( \int_0^\cdot G_s dM_s \right)$  y para cada  $t > 0$ ,

$$\int_0^t F_s d \left( \int_0^s G_r dM_r \right) = \int_0^t F_s G_s dM_s.$$

## Semimartingalas

Un clase de procesos más general que una martingala local contiene los procesos de difusión es lo que motiva a definir el concepto de semimartingala. Estos corresponden a la piedra

angular para lo que después conoceremos como ecuación diferencial estocástica, objetivo de estudio principal de este documento.

**Definición 2.1.26.** Un proceso estocástico  $X$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -semimartingala continua, si para cada  $t > 0$

$$X_t = A_t + M_t,$$

donde  $M$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala local y  $A$  es un proceso continuo  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado de variación finita.

Al igual que en las definiciones anteriores, si la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  corresponde a la historia  $(\mathcal{X}_t)_{t \geq 0}$  del proceso  $X$ , entonces  $X$  es llamado *semimartingala*. De esta forma, se recupera el proceso bracket, es decir, dado dos semimartingalas  $X = X_0 + M + A$  e  $Y = Y_0 + N + B$ , con  $M, N$  semimartingalas y  $A, B$  procesos adaptados de variación finita. Entonces, su variación cuadrática viene dada para cada  $t \geq 0$  por

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_t &= \langle X_0 + M + A, Y_0 + N + B \rangle_t \\ &= \langle M, N \rangle_t + \langle M, B \rangle_t + \langle A, N \rangle_t + \langle A, B \rangle_t \\ &= \langle M, N \rangle_t \end{aligned}$$

Además, gracias a la construcción de integral de Itô generada hasta ahora, la noción de integral con respecto a una semimartingala es directa, la cual se formaliza a continuación.

**Definición 2.1.27. (Integral de Itô)**

Sea  $X = A + M$  una semimartingala con  $A$  su parte de variación finita. Para cada  $F \in \mathbb{L}_{loc}^2(X)$ , la *Integral de Itô* de  $F$  respecto a  $X$  es el proceso

$$t \mapsto I_t = \int_0^t F_s dX_s := \int_0^t F_s dA_s + \int_0^t F_s dM_s.$$

Aquí la integral respecto a  $M$  es una integral de Itô dada por (2.14) y la integral respecto a  $A$  es una integral de Lebesgue-Stieltjes. Además dada la construcción, se tiene que  $I = (I_t, t \geq 0)$  es una semimartingala.

Ahora, se introduce un nuevo concepto a partir de la integral indefinida de una semimartingala, el cual motiva la siguiente subsección.

**Definición 2.1.28.** Sea  $X$  un proceso estocástico real valuado tal que

$$X_t = X_s + \int_s^t F_r dA_r + \int_s^t G_r dM_r, \quad 0 \leq s \leq t; \quad (2.15)$$

para algún  $F \in L_1([0, T], A)$  progresivamente medible, y  $G \in \mathbb{L}_{loc}^2(M)$ . Para todo  $t > 0$ , se define el *diferencial estocástico* de  $X$

$$dX_t = F_t dA_t + G_t dM_t. \quad (2.16)$$

Notar que aquí (2.16) no tiene un sentido diferencial clásico, debido a la regularidad de  $M$ . Sin embargo al decir que un proceso posee un diferencial estocástico (2.16), se hace alusión a que el proceso viene dado por (2.15).

En particular, si se considera los procesos  $A_t = t$  y  $M_t = W_t$ , donde los coeficientes son  $F_t = b(t, X_t)$  y  $G_t = \sigma(t, X_t)$  para cada  $t \geq 0$ , con  $W$  un Proceso de Wiener, entonces el diferencial del proceso  $X$  viene dado por

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

el cual al agregar una condición inicial, genera una *ecuación diferencial estocástica (SDE)*, llamada *ecuación diferencial de Itô*.

En la siguiente subsección se introduce el concepto de SDE de Itô, junto con ver los sentidos de su solución y condiciones necesarias para asegurar su existencia y unicidad. Sin embargo, es preciso formular dicha teoría sobre semimartingalas multidimensionales. Estas siguen la noción uno dimensional al estar compuestas por un proceso de variación finita y una martingala local de dimensión  $n \geq 0$ .

Específicamente, se dice que un proceso estocástico multidimensional  $X = (X^1, X^2, \dots, X^n) = \{(X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n); t \geq 0\}$  es una martingala (local) si cada una de sus componentes  $X^i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$  es una martingala (local) con respecto a la filtración natural de  $X$ . De esta forma se denota por  $M_0^2(\mathbb{R}^n)$  al espacio de martingalas cuadrado integrables  $\mathbb{R}^n$  valuadas iniciadas en cero; y de misma forma, se denota por  $M_0^{loc}(\mathbb{R}^n)$  al espacio de martingalas locales  $\mathbb{R}^n$  valuadas iniciadas en cero. Dichos espacios al estar contruidos a partir de la definición de martingalas de dimensión uno, presentan todas las propiedades ya mencionadas en este capítulo, por lo que su manipulación es natural.

Con esto se puede presentar el resultado insignia del cálculo estocástico. el cual permitirá estudiar los procesos de difusión.

**Teorema 2.1.10. (Fórmula de Itô)** Sea  $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  y  $X$  una semi-

martingala  $d$ -dimensional, donde  $X^i = X_0^i + M^i + A^i$  con  $M$  su semimartingala y  $A$  su proceso adaptado de variación finita. Entonces, para cada  $t \geq 0$

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s) dX_s^i + \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

o equivalentemente, escrito en su forma diferencial

$$df(t, X) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_t^i + \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X^i, X^j \rangle_t. \quad (2.17)$$

**Observación 2.1.5.** Si en la fórmula de Itô se considera  $X^i = X_0^i + M^i + A^i$ , con  $M$  su martingala local y  $A$  su proceso adaptado de variación finita. Entonces al desarrollar los términos, la expresión (2.17) se escribe

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(0, X_0) &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s) dM_s^i + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s) dA_s^i \dots \\ &+ \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s) d\langle M^i, M^j \rangle_s. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.1.32.** Considere dos funciones continuas  $f$  y  $g$ , y dos procesos  $X$  e  $Y$  dados por

$$\begin{aligned} dX_t &= fX_t dt + gX_t dW_t \\ Y_t &= \ln(X_t). \end{aligned}$$

Entonces la fórmula de Itô dice que

$$\begin{aligned} d(\ln(X_t)) &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{X_t^2} d\langle X, X \rangle_t \\ &= \frac{1}{X_t} (fX_t dt + gX_t dW_t) - \frac{1}{X_t^2} g^2 X_t^2 dt \\ &= \left( f - \frac{1}{2} g^2 \right) dt + g dW_t. \end{aligned}$$

Como se verá en la siguiente subsección este ejemplo tiene mucha importancia, donde al conocer el valor de  $\ln(X_0)$  se puede determinar una EDS, la cuál tiene una interpretación muy interesante.



**Ejemplo 2.1.33.** Considere dos escalares  $b > 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ , un proceso  $X$  dado por

$$dX_t = -bX_t dt + \sigma dW_t,$$

y una función  $f$  dada por

$$f(t, x) = xe^{bt}.$$

Entonces la fórmula de Itô dice que

$$\begin{aligned} d(f(t, X_t)) &= \left( be^{bt} X_t \right) dt + e^{bt} dX_t \\ &= (be^{bt} X_t) dt + e^{bt} (-bX_t dt + \sigma dW_t) \\ &= e^{bt} \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, al conocer el valor de  $f(X_0)$  se puede determinar una EDS, cuya interpretación se verá más adelante.

El siguiente resultado se extrae de la fórmula de Itô el cual nos dice que el espacio de semimartingalas es cerrado bajo la aplicación de funciones de clase  $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ . Esto se enuncia formalmente como sigue.

**Corolario 2.1.2.** Sea  $f : [0, \infty[ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  y  $X$  una semimartingala continua  $\mathbb{R}^n$  valuada. Entonces el proceso

$$t \mapsto f(t, X_t)$$

es una semimartingala continua  $\mathbb{R}$  valuada.

## 2.1.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Una herramienta de modelación poderosa provista por el cálculo estocástico son las llamadas *ecuaciones diferenciales de Itô*. Precisamente, dadas dos funciones  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ , un Proceso de Wiener  $m$ -dimensional  $W$  y  $x \in \mathbb{R}^d$ , se llama *ecuación diferencial de Itô* al problema

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, & \forall t \in [0, T] \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (2.18)$$

Dado que las trayectorias del Movimiento Browniano  $W$  no son derivables en ningún punto, esta ecuación debe ser interpretada en sentido integral, es decir,

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.19)$$

**Ejemplo 2.1.34.** La evolución del precio de una acción  $P$  se puede modelar suponiendo que su fluctuación relativa se rige por la siguiente SDE:

$$\begin{cases} \frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma dW_t, & \forall t \in [0, T] \\ P_0 = p. \end{cases} \quad (2.20)$$

para ciertas constantes  $\mu > 0$  y  $\sigma \in \mathbb{R}$ , llamadas *drift* y *volatilidad* de la acción, respectivamente.

**Ejemplo 2.1.35.** La variación de velocidad en el movimiento difuso de una partícula de polen para tiempos pequeños se modela a través de la siguiente SDE:

$$\begin{cases} dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t, & \forall t \in [0, T] \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (2.21)$$

para ciertas constantes  $\theta > 0$  y  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ . Donde  $X$  corresponde a la velocidad de la partícula,  $\theta$  corresponde al coeficiente de fricción,  $\sigma$  es el coeficiente de difusión y  $\mu$  es el punto de equilibrio o reposo de la partícula.

Los ejemplos anteriores son clásicos en la literatura, y se muestran dada su simplicidad, y puesto que sus coeficientes cumplen la regularidad solicitada por los resultados que proceden. Sin embargo, en [4] (Capítulo 7, página 353) se encuentran ejemplos de SDE's que modelan problemas complejos de la Economía, Química, Mecánica, Neurociencia y Astronomía.

Como se ve en la SDE (2.18) el interés de integrar procesos con respecto a martingala local, se reduce a integrar con respecto a un Proceso de Wiener en un intervalo de tiempo acotado  $[0, T]$ , en vez de una martingala local evaluada sobre todo  $\mathbb{R}$ . De esta forma al recordar que para cada  $t \geq 0$  se tiene que  $\langle W, W \rangle_t = t$ , se puede acotar el espacio de procesos que se desea integrar al espacio:

$$\mathbb{L}^2(0, T) := \left\{ F \text{ progresivamente medible} \mid \mathbb{E} \left[ \int_0^T F_t^2 dt \right] < \infty \right\}.$$

De misma forma, se denota:

$$\mathbb{L}^1(0, T) := \left\{ F \text{ progresivamente medible} \mid \mathbb{E} \left[ \int_0^T |F_t| dt \right] < \infty \right\}.$$

**Observación 2.1.6.** Es común utilizar la notación  $\mathbb{L}_n^k(0, T)$ , con  $k \in \{1, 2\}$ , cuando  $F$  es un proceso  $\mathbb{R}^n$  valuado y  $\mathbb{L}_{m \times n}^k(0, T)$ , con  $k \in \{1, 2\}$ , cuando  $F$  es un proceso  $\mathbb{R}^{m \times n}$  valuado.

Existen diferentes nociones de solución para este tipo de ecuaciones, esto es, que permiten definir sin ambigüedad la relación (2.18). A continuación se precisan los conceptos de solución fuerte y solución débil que serán de gran importancia en lo que sigue.

**Definición 2.1.29.** Sea  $W$  un Movimiento Browniano sobre un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ . Una solución fuerte de la SDE (2.18) es un proceso estocástico  $X$  con trayectorias continuas tal que:

- $X$  es progresivamente medible con respecto a la filtración  $\mathcal{F}_t$ , donde  $\forall t > 0$ ,  $\mathcal{F}_t := \sigma(x, W_s (0 \leq s \leq t))$  corresponde a la  $\sigma$ -álgebra generada por  $x$  y la historia del Proceso de Wiener  $W$  hasta el tiempo  $t$ ;
- $b(t, X_t) \in \mathbb{L}_n^1(0, T)$ ;
- $\sigma(t, X_t) \in \mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$ ;
- $X_t = x + \int_0^t b(t, X_t) ds + \int_0^t \sigma(t, X_t) dW_s$  a.s.,  $0 \leq t \leq T$ .

La existencia de dicho proceso no es para nada trivial, por lo que antes de enunciar las condiciones necesarias para su existencia, se recurre al siguiente resultado, el cuál es un resultado clásico para demostrar convergencia y será utilizado en los siguientes capítulos.

**Lema 2.1.12. (Lema de Gronwall)** Sea  $\phi$  una función continua, no negativa, definida para  $0 \leq t \leq T$ , y sea  $C_0 \geq 0$  una constante. Si

$$\phi(t) \leq C_0 + \int_0^t f \phi ds, \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

entonces

$$\phi(t) \leq C_0 e^{\int_0^t f ds}.$$

La prueba del lema de Gronwall se puede ver en [1] (Página 90). Con esto, se presenta el resultado que permite asegurar la existencia y unicidad de solución fuerte para el problema SDE (2.18).

**Teorema 2.1.11.** Sean dos funciones continuas  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  y  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ . Si se cumplen las condiciones

a) existe  $L > 0$  tal que  $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$  y  $\forall s, t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} |b(t, x) - b(t, y)| &\leq L|x - y| \\ \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| &\leq L|x - y|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |b(t, x)| &\leq L(1 + |x|) \\ \|\sigma(t, x)\| &\leq L(1 + |x|), \end{aligned}$$

donde  $\|\cdot\|_2$  corresponde a la norma de Frobenius.

b)  $X_0$  es una variable aleatoria tal que

$$\mathbb{E}[|X_0|^2] < \infty,$$

c)  $X_0$  es independiente de  $\mathcal{W}_0^+$ .

Entonces la SDE (2.18) admite única solución fuerte.

Notar que la unicidad mencionada significa que si dos procesos  $X, \widehat{X} \in \mathbb{L}_n^2(0, T)$ , con trayectorias continuas a.s., solucionan la SDE 2.18, entonces

$$\mathbb{P}(X_t = \widehat{X}_t, 0 \leq t \leq T) = 1.$$

La otra noción de solución, llamada solución débil, hace alusión al sentido distribucional del proceso en vez del sentido trayectorial presentado por la definición de solución fuerte.

**Definición 2.1.30.** Una solución débil de (2.18) es una tripleta  $((X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$  donde

- $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  es un espacio de probabilidad filtrado que satisface las condiciones usuales;
- $X$  es un proceso  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ -adaptado de trayectorias continuas, y  $W$  es un Browniano  $m$ -dimensional  $\mathcal{F}$ -adaptado sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ;
- $b(t, X_t) \in \mathbb{L}_n^1(0, T)$ ;
- $\sigma(t, X_t) \in \mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$ ;
- $X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$  a.s.,  $\forall 0 \leq t \leq T$ .

De las definiciones de ambas nociones de solución, es importante observar que toda solución fuerte de la SDE (2.18), es también una solución débil mismo problema, o mejor dicho genera una solución débil del mismo problema. Sin embargo, para asegurar unicidad de solución débil, es generalmente utilizado el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.12.** *Unicidad de solución trayectorial (solución fuerte), asegura unicidad de solución en ley (solución débil).*

La prueba del resultado anterior junto con una mayor discusión al respecto de los tipos de solución para ecuaciones diferenciales estocásticas se encuentra en [9]. Sin embargo con esto se cubren todos los resultados necesarios para desarrollar este trabajo, no teniendo que entrar a desarrollar la teoría presente para soluciones débiles. Esto se debe a que bajo las condiciones del teorema 2.1.11 y gracias al teorema 2.1.12, se asegura existencia y unicidad tanto de solución fuerte, como débil. Por lo que sin ambigüedad al probar las hipótesis de 2.1.11 se puede hablar de única solución, entendiendo que la solución fuerte considera sólo el proceso, mientras que la solución débil considera además del proceso, al Proceso de Wiener, el espacio de probabilidad y la filtración.

Lo mencionado anteriormente a pesar de ser cierto tiene ciertas sutilezas. Esto se debe a que el recíproco del teorema 2.1.12 no se cumple siempre necesariamente. Para esto se considera el siguiente contraejemplo.

**Ejemplo 2.1.36.** Considere la ecuación diferencial estocástica dada para cada  $t \geq 0$  por

$$\begin{cases} dX_t = \text{sgn}(X_t)dt + dW_t, & \forall t \in [0, T] \\ X_0 = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

donde  $W$  es un Proceso de Wiener real y la función  $sgn : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$  dada por

$$sgn(x) = \mathbb{1}_{[0, \infty[} - \mathbb{1}_{] \infty, 0]}.$$

Entonces (2.22) no posee única solución fuerte. Esto se debe a que tanto  $W$ , como  $-W$  satisfacen la SDE, pero estas no poseen las mismas trayectorias. Sin embargo  $W$  y  $-W$ , tienen la misma ley, y como se prueba en [9] (Capítulo 3, página 29) la SDE (2.22) posee única solución débil.

El ejemplo anterior, a pesar de ser muy ilustrativo, se encuentra fuera del interés de este proyecto, debido a que se desea estudiar problemas que presenten solución fuerte. De esta forma, con el objetivo de entender mejor los conceptos anteriores, en los siguientes ejemplos se presenta la solución de algunas SDE's clásicas.

**Ejemplo 2.1.37.** Sea  $W$  un Proceso de Wiener 1-dimensional y dos funciones continuas  $f$  y  $g$ . Entonces el Teorema 2.1.11 asegura que la SDE

$$\begin{cases} dX_t = fX_t dt + gX_t dW_t, & \forall t \in [0, T] \\ X_0 = 1, \end{cases} \quad (2.23)$$

posee única solución, la cual se obtiene del Ejemplo 2.1.32, de donde se tiene que

$$\ln(X_t) = \int_0^t \left( f - \frac{1}{2}g^2 \right) ds + \int_0^t g dW_s.$$

Concluyendo que

$$X_t = \exp \left( \int_0^t \left( f - \frac{1}{2}g^2 \right) ds + \int_0^t g dW_s \right).$$

De este ejemplo se pueden modelar muchos problemas importantes, como lo son el caso de Black and Scholes o Movimiento Browniano geométrico. Lo cuales se obtiene al considerar las funciones  $f$  y  $g$  constantes.

**Ejemplo 2.1.38.** Considere un Proceso de Wiener 1-dimensional  $W$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\theta, \sigma \geq 0$ , entonces el Teorema 2.1.11 asegura que la SDE

$$\begin{cases} dX_t = \theta(\mu - X_t) dt + \sigma dW_t, & \forall t \in [0, T] \\ X_0 = x_0, \end{cases} \quad (2.24)$$

posee solución única. En efecto, al utilizar el proceso auxiliar

$$Y_t = X_t - \mu, \quad (2.25)$$

se tiene que para cada  $t \in [0, T]$

$$dY_t = -\theta Y_t dt + \sigma dW_t.$$

Así al utilizar ejemplo (2.1.33), se tiene que

$$Y_t e^{\theta t} = Y_s e^{\theta s} + \int_s^t e^{-\theta u} \sigma dW_u,$$

de donde

$$Y_t = Y_s e^{-\theta(t-s)} + \int_s^t e^{-\theta(t-u)} \sigma dW_u.$$

Así, al recordar (2.25), se concluye que

$$X_t = \mu + (x_0 - \mu) e^{-\theta t} + \int_0^t e^{-\theta(t-u)} \sigma dW_u.$$

Más general aún que los ejemplos anteriores, se puede considerar una SDE Lineal. Esto es una SDE dada por:

$$\begin{cases} dX_t = (a(t) + b(t)X_t) dt + (c(t) + d(t)X_t) dW_t, & t \in [0, T] \\ X_0 = x_0, \end{cases} \quad (2.26)$$

con  $a, b, c$  y  $d$  funciones acotadas definidas en  $[0, T]$ . De esta forma, bajo las hipótesis del Teorema 2.1.11 se tiene que existe solución única de (2.26), la cual viene dada por:

$$X_t = \Phi_{t,t_0} \left( X_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} (b(s) - c(s)d(s)) ds + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} d(s) dW_s \right),$$

donde su solución fundamental es

$$\Phi_{t,t_0} = \exp \left( \int_{t_0}^t \left( a(s) - \frac{1}{2} c^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t c(s) dW_s \right).$$

Hasta ahora se han mostrado las soluciones de algunas SDE's clásicas, sin embargo no se explica el procedimiento para obtenerlas. Esto se debe a que los procedimientos están limitados para ciertos tipo de SDE's, como lo son las lineales, sin embargo aun así es difícil trabajar con ellas en la práctica puesto que su simulación requiere un alto costo computacional. Es más, existen muchas SDE que no poseen solución analítica explícita, por lo que trabajar con aproximaciones es la única forma de abordar estos problemas.

Un esquema de aproximación  $X^n = (X_t^n, t \in [0, T])$  corresponde a un proceso estocástico que se ajusta a una SDE a través de una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  del intervalo  $[0, T]$ . De donde se tiene que la aproximación esta determinada por la partición que se tome, o también se puede pensar que depende de de su tamaño de paso

$$\delta_n = \max_{0 \leq k \leq n-1} |t_{k+1} - t_k|.$$

Como un esquema numérico sólo aproxima la dinámica del proceso original es de gran importancia cuantificar el error que este tipo de aproximación induce en términos de los parámetros del método, usualmente, la etapa de discretización temporal. Es por esto, que antes de introducir directamente los esquemas de aproximación, hay que tener claro los criterios de comparación, es decir, los mecanismos con los cuales se valida el funcionamiento del esquema. El primer procedimiento estudia que tan fiel es trayectorialmente la aproximación  $X^n$  a la solución  $X$  de la SDE. Esto se logra al acotar el valor

$$\mathbb{E}[\max_{0 \leq t \leq T} |X_t - X_t^n|^p] \leq C \delta_n^{\alpha(p)}, \quad (2.27)$$

donde  $\alpha(p)$  representa la tasa de convergencia del esquema de aproximación. De esta forma mientras mayor sea el valor  $\alpha(p)$  mejor será el desempeño del esquema, esto es, a medida que se refina la aproximación más rápido converge el error fuerte, es decir, más se parece puntualmente la aproximación a la solución.

El otro criterio de comparación hace alusión a la distribución que posee la solución, estudiando cuan fiel es la ley de la aproximación  $X^n$  con respecto a la ley de la solución  $X$ . De esta forma, se dirá que un esquema de aproximación converge débilmente con orden  $\alpha$ , si para cada función  $g \in C^2(\mathbb{R})$  se tiene

$$|\mathbb{E}[g(X_T)] - \mathbb{E}[g(X_T^n)]| \leq C \delta_n^\alpha. \quad (2.28)$$

Donde al igual que en la convergencia fuerte,  $\alpha$  representa la tasa de convergencia del esquema de aproximación. Sin embargo ahora a medida se refina la partición, la ley de la aproximación se parece más a la de la solución.



El primer método que se estudia es el esquema de Euler Maruyama, el cual consiste en una adaptación del método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) a ecuaciones diferenciales estocásticas (SDE). El método fue acuñado por el matemático japonés Gisiro Maruyama, razón por la cual, el esquema lleva su nombre.

**Definición 2.1.31.** Para toda partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , se define el esquema de aproximación de Euler para la SDE (2.18)

$$X_t^{n,k} = X_0 + \int_0^t b_n^k(s) ds + \int_0^t \sum_{i=1}^d \sigma_n^{i,k}(s) dW_s^{j_1}, \quad 1 \leq k \leq d; \quad (2.29)$$

con

$$b_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b(t_k, X_{t_k}^n) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(t);$$

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(t_k, X_{t_k}^n) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(t).$$

Este esquema se caracteriza por presentar bajo las hipótesis

$$\|\sigma(s, x) - \sigma(t, y)\|^2 + |b(s, x) - b(t, y)|^2 \leq L_1^2(|t - s|^2 + |x - y|^2); \quad (2.30)$$

$$\|\sigma(t, x)\|^2 + |b(s, y)|^2 \leq L_2^2; \quad (2.31)$$

una convergencia fuerte

$$\mathbb{E}[\max_{0 \leq t \leq T} |X_t - X_t^n|^p] \leq C \delta_n^{\frac{p}{2}}, \quad (2.32)$$

como se prueba en [3]. Además, si  $b \in \mathcal{H}_T^{(l)}(\mathbb{R}^d)$  y  $a = \sigma \sigma^t \in \mathcal{H}_T^{(l)}(\mathbb{R}^{d \times m})$ , es decir, son funciones Hölder continuas de parámetro  $l$ , y existe  $\lambda > 0$  tal que para cada  $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\sum_{i,j=1}^d \xi_i a^{i,j}(t, x) \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d. \quad (2.33)$$

Entonces el esquema presenta un convergencia débil, para toda función  $g \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$|\mathbb{E}[g(X_T)] - \mathbb{E}[g(X_T^n)]| \leq C \delta_n^{\gamma(l)}. \quad (2.34)$$

donde

$$\gamma(l) = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{si } l \in (0, 1) \\ \frac{1}{(3-l)} & \text{si } l \in (1, 2) \\ 1 & \text{si } l \in (2, 3) \end{cases},$$

y  $\delta_n$  es su tamaño de paso, como se prueba en [4] (página 460, Teorema 14.1.5).

**Ejemplo 2.1.39.** Al recordar el Ejemplo 2.1.37, se tiene que el esquema de aproximación de Euler Maruyama para la SDE (4.5) viene dada para cada partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  por

$$X_{k+1}^n = X_k^n + fX_k^n(t_{k+1} - t_k) + gX_k^n(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

Además, de forma analoga para el Ejemplo 2.1.38, se tiene que el esquema de Euler Maruyama para la SDE (4.6) viene dada para cada partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  por

$$X_{k+1}^n = X_k^n + bX_k^n(t_{k+1} - t_k) + \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

El segundo método que se estudia es el esquema de Milstein, el cual corresponde a la generalización natural del esquema de Euler Maruyama, puesto que ambos pertenecen a una familia de esquemas de aproximación, llamados Métodos de Taylor (ver página 286, [4]). Siendo el esquema de Euler Maruyama el esquema de Taylor hasta orden uno, mientras que el esquema de Milstein corresponde al esquema de Taylor hasta orden dos.

Para definir el esquema de Milstein, es necesario introducir primero algunos operadores. Estos vienen determinados por dos funciones  $b \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  y  $\sigma \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d \times m})$ , y se definen por:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d b_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \sum_{j=1}^m \sigma_{k,j} \sigma_{l,j} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}. \quad (2.35)$$

$$\mathcal{L}^j = \sum_{k=1}^d \sigma_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (2.36)$$

con  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

**Definición 2.1.32.** Considere una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T \in \mathbb{R}$ . Se define  $\forall n \in \mathbb{N}$  el

esquema de Milstein de aproximación numérica, para la SDE (2.18)

$$X_t^{n,k} = X_0 + \int_0^t b_n^k(s) ds + \int_0^t \sum_{i=1}^d \sigma_n^{i,k}(s) dW_s^{j_1} + \int_0^t \left( \sum_{j_1, j_2=1}^m \mathcal{L}^{j_1} \sigma_n^{k, j_2}(s) \int_{\eta(s)}^s dW_u^{j_1} \right) dW_s^{j_2}; \quad (2.37)$$

con

$$b_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b(t_k, X_{t_k}^n) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(t);$$

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(t_k, X_{t_k}^n) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(t).$$

Este esquema se caracteriza por presentar bajo las hipótesis

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq M_1 |x - y|; \quad (2.38)$$

$$\|\sigma^{j_1}(t, x) - \sigma^{j_1}(t, y)\| \leq M_2 |x - y|; \quad (2.39)$$

$$\|\mathcal{L}^{j_2} \sigma^{j_1}(t, x) - \mathcal{L}^{j_2} \sigma^{j_1}(t, y)\| \leq M_3 |x - y|; \quad (2.40)$$

$$|b(t, x)| + |\mathcal{L}^j b(t, x)| \leq M_4 (1 + |x|); \quad (2.41)$$

$$\|\sigma^{j_1}(t, x)\| + \|\mathcal{L}^j \sigma^{j_1}(t, x)\| \leq M_5 (1 + |x|); \quad (2.42)$$

$$\|\mathcal{L}^j \mathcal{L}^{j_2} \sigma^{j_1}(t, x)\| \leq M_6 (1 + |x|); \quad (2.43)$$

$$|b(s, x) - b(t, x)| \leq M_7 (1 + |x|) |s - t|^{\frac{1}{2}}; \quad (2.44)$$

$$\|\sigma^{j_1}(s, x) - \sigma^{j_1}(t, x)\| \leq M_8 (1 + |x|) |s - t|^{\frac{1}{2}}; \quad (2.45)$$

$$\|\mathcal{L}^{j_2} \sigma^{j_1}(s, x) - \mathcal{L}^{j_2} \sigma^{j_1}(t, x)\| \leq M_9 (1 + |x|) |s - t|^{\frac{1}{2}}. \quad (2.46)$$

con  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$  y  $j_1, j_2 \in \{1, \dots, m\}$ ; una convergencia fuerte

$$\mathbb{E}[\max_{0 \leq t \leq T} |X_t - X_t^n|] \leq C \delta_n. \quad (2.47)$$

Como se prueba en [4] (página 350, Teorema 10.3.5).

**Ejemplo 2.1.40.** Al recordar el Ejemplo 2.1.37, se tiene que el esquema de aproximación de

Milstein para la SDE (4.5) viene dada para cada partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  por

$$X_{k+1}^n = X_k^n + fX_k^n(t_{k+1} - t_k) + gX_k^n(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \frac{1}{2}g^2X_k^n \{(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k)\}.$$

Además, de forma análoga para el Ejemplo 2.1.38, se tiene que el esquema de Euler Maruyama para la SDE (4.6) viene dada para cada partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  por

$$X_{k+1}^n = X_k^n + bX_k^n(t_{k+1} - t_k) + \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

De esta forma, se poseen las herramientas necesarias para trabajar numéricamente con SDE como (2.18). Sin embargo el siguiente ejemplo extraído de [4], resulta inquietante dada la naturaleza de sus coeficientes.

**Ejemplo 2.1.41.** Sea  $W$  un Proceso de Wiener real, entonces la SDE

$$\begin{cases} dZ_t = -\frac{1}{2}Z_t dt + iZ_t dW_t, & t \in [0, T] \\ Z_0 = z_0, \end{cases} \quad (2.48)$$

tiene única solución, dada por

$$Z_t = z_0 e^{iW_t}.$$

En efecto,

$$Z_t = z_0 e^{iW_t} = z_0 (\cos(W_t) + i \sin(W_t)).$$

Luego al utilizar la fórmula de Itô se obtiene que

$$\begin{aligned} \sin(W_t) &= \sin(0) + \int_0^t \cos(W_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sin(W_s) ds \\ \cos(W_t) &= \cos(0) + \int_0^t \sin(W_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \cos(W_s) ds \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$\begin{aligned} Z_t &= z_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(W_s) + i \sin(W_s)) ds + i \int_0^t (\cos(W_s) + i \sin(W_s)) dW_s \right) \\ &= z_0 - \frac{1}{2} \int_0^t Z_s ds + i \int_0^t Z_s dW_s. \end{aligned}$$

Este ejemplo a pesar de ser muy elegante, genera muchas interrogantes, como lo son:

- El sentido de derivada de un proceso complejo, el cual no se menciona en el ejemplo, pero restringe considerablemente la regularidad que debe presentar el proceso.
- La generalidad de esta extensión, es decir, si toda SDE a valores complejos se puede reducir tan sencillamente a un sistema real, doblando su dimensión para poder aplicar los resultados clásicos.
- Se cuestiona si considerar un Proceso de Wiener real es adecuado para definir un proceso estocástico complejo.
- Se cuestiona como resultan los esquemas de aproximación, y si son aún válidos.
- Se cuestiona si las hipótesis de los resultados sobre SDE's reales se mantienen para SDE a valores complejos, como lo son en el caso de la formula de Itô y la convergencia de los esquemas numéricos.

Para resolver estas interrogantes la literatura presenta adaptaciones del Cálculo de Itô al campo de los números complejos, siendo [7] y [2] las más significativa. Ambas extienden el cálculo de Itô centrando su atención en martingalas conformes; con el propósito de probar su comportamiento trayectorial. Sin embargo no utilizan sus resultados para desarrollar un análisis sobre ecuaciones diferenciales estocásticas en el cuerpo de los número complejos.

## 2.2. Derivada de una función de variable compleja

Los números complejos tuvieron su primera aparición en el siglo XVI generando recelo y controversia, dado que su interpretación carecía de sentido para los matemáticos de ese tiempo. Uno de los primeros en dar utilidad o significado a estos números fue René Descartes, quien postulo que "*ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación*" acuñando el termino "*Imaginarias*", para llamar a dichas soluciones. Sin embargo fue la contribución de Euler y Gauss las que solventaron un mayor entendimiento, generando de esta forma una aceptación común a los números complejos. Lo que permitió a matemáticos como Riemann, Cauchy y Weierstrass construir las bases del análisis complejo.

Si se considera el conjunto  $\mathbb{R}^2$  con las operaciones dadas para cada  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , por


$$+ : (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \quad (2.49)$$

$$\cdot : (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1); \quad (2.50)$$

se tiene que la tupla  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  es un cuerpo. Esto es, la operación (2.49) es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro  $(x_2, y_2) = (0, 0)$  y opuesto  $(x_2, y_2) = (-x_1, -y_1)$ . Además la operación (2.50) es asociativa, conmutativa, distributiva, tiene elemento neutro  $(x_2, y_2) = (1, 0)$  e inverso  $(x_2, y_2) = (\frac{1}{x_1}, \frac{1}{y_1})$ . Dicho cuerpo se denota por  $\mathbb{C}$ , es llamado cuerpo de los complejos, y sus elementos  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  se dicen números complejos.

**Definición 2.2.1.** Todo número complejo de la forma  $z = (0, y)$ , es llamado *imaginario*. Además, la unidad imaginaria se denota por  $i = (0, 1)$ .

De esta forma, como todo número real  $x$  se representa biunívocamente con un número complejo  $(x, 0)$  se puede escribir cualquier número complejo  $z$  de la forma



$$z = (x, y) = x + iy.$$

para el cual se define:

- Su parte real:  $Re(z) = x$ ;
- Su parte imaginaria:  $Im(z) = y$ ;
- Su conjugado:  $z^* = x - iy$ ;
- Su módulo:  $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Es importante considerar que por construcción,  $\mathbb{C}$  es un isomorfismo de  $\mathbb{R}^2$ , de donde el módulo de un número complejo coincide con la norma euclidiana. Esto es, para cada  $z, w \in \mathbb{C}$ , se tiene que

- $|z| = 0 \iff z = (0, 0)$ ;
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} : |\alpha z| = |\alpha| |z|$ ;
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ .

De esto, se tiene que el módulo de un número complejo genera una distancia, dada para cada  $z, w \in \mathbb{C}$  por

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Es más, gracias a la formula de Euler, la cual permite escribir cada número complejo  $z = x + iy$ , de la forma

$$z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)),$$

donde el valor  $\varphi$  viene dado por:

$$\varphi = \text{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{si } x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{si } y \geq 0, x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{si } y < 0, x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{si } y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } y < 0, x = 0 \\ \text{indefinido} & \text{si } y = 0, x = 0 \end{cases};$$

se puede probar que para cada  $z, w \in \mathbb{C}$ , se tiene que

$$|zw| = |z||w|.$$

Avanzando el estudio del cuerpo de los números complejo, es natural continuar el análisis con las aplicaciones que operan sobre él. De esta forma, se dice que una aplicación  $f$  definida sobre un conjunto  $A \subseteq \mathbb{C}$  será una función compleja de variable compleja, si para cada  $z \in A$ , le corresponde un único valor complejo  $f(z) \in \mathbb{C}$ . Además si  $z = x + iy$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ ; la función  $f$  se puede descomponer en

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

donde  $u, v$  son dos funciones reales definidas sobre  $\mathbb{R}^2$  y representan la parte real e imaginaria de la función  $f$  respectivamente.

**Ejemplo 2.2.1.** La función exponencial compleja  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  viene dada para cada  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , por

$$\exp(z) = e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i \sin(y)).$$

**Ejemplo 2.2.2.** La función seno complejo  $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  viene dada para cada  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , por

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Además, La función coseno complejo  $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  viene dada para cada  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , por

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

**Ejemplo 2.2.3.** La función logaritmo complejo  $\log : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  viene dada para cada  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , con  $z \neq (0, 0)$  por

$$\log(z) = \log(|z|) + i(\text{Arg}(z) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Como se ve, la función logaritmo complejo asocia a cada número complejo, infinitos valores complejos, los cuales difieren sólo en su parte imaginaria por un múltiplo entero de  $2\pi$ . Sin embargo, si se restringe el argumento de  $z$  a su intervalo principal  $[-\pi, \pi[$ , el logaritmo complejo se convierte en una función unívoca, denominada *logaritmo principal*, el cual es denotado por

$$\text{Log}(z) = \log(|z|) + i\text{Arg}(z), \quad \text{Arg}(z) \in [-\pi, \pi[.$$

Junto con lo anterior, se destacan las siguientes propiedades que al igual que el logaritmo real, presenta el logaritmo complejo para cada  $z, w \in \mathbb{C}$ .

- $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$
- $\log\left(\frac{z}{w}\right) = \log(z) - \log(w)$
- $\text{Log}(zw) = \log(z) + \log(w) \pm 2\pi i$

Además de las propiedades anteriores se destaca que para cualquier valor complejo  $z$

$$\begin{aligned} \exp(\text{Log}(z)) &= e^{\text{Log}(z)} \\ &= e^{\log(|z|)} e^{i\text{arg}(z)} \\ &= |z| e^{i(\text{arg}(z))} \\ &= z. \end{aligned}$$

Sin embargo el recíproco no se cumple. Para esto se considera  $z = x + iy$ , con  $y > \pi$ , de donde

$$\text{Log}(e^z) = \log(e^x) + i\text{Arg}(e^z) = x + i(y - 2k\pi) = z - 2k\pi i \neq z.$$

Por lo las funciones exponencial compleja y logaritmo principal complejo no son funciones inversas, pero al menos se satisface la condición en un sentido.



### 2.2.1. Derivada de una función holomorfa

Recordar que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en un punto  $x \in \mathbb{R}$ , si el valor

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

existe. Donde dicho límite es la derivada de  $f$  en  $x$  y es denotado por  $f'(x)$ . De misma forma, se puede definir la derivada compleja, siguiendo la noción anterior de derivada real.

**Definición 2.2.2.** Sea  $A$  un abierto de  $\mathbb{C}$ , una función  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se dirá *derivable* en  $z \in A$  si existe

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \quad (2.51)$$

Donde  $f'(z)$  es la derivada de  $f$  en  $z$ .

En la definición anterior, (2.51) se debe satisfacer independiente de la trayectoria con que  $\Delta z$  se acerque a cero, es decir, se debe cumplir para toda trayectoria. Esto no es sencillo de comprobar dada la infinidad de caminos existentes. sin embargo al introducir el siguiente concepto, su análisis se hace más sencillo.

**Definición 2.2.3.** Sea  $A$  un abierto de  $\mathbb{C}$ , una función  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se dice que es *holomorfa* en  $A$ , si  $f$  es derivable para cada punto  $z$  de  $A$ . Además, para cada punto  $z \in A$ , se dice que  $f$  es *holomorfa* en el punto  $z$ , si existe  $r > 0$  tal que  $f$  es holomorfa en la vecindad  $B(z, r) \subseteq A$ .

Esto dice que para que una función compleja sea derivable en un punto debe ser holomorfa en una vecindad de él. A partir de esto se puede definir la derivada de una función compleja y las condiciones que debe satisfacer, en función de la regularidad de su parte real e imaginaria.

**Teorema 2.2.1. (Cauchy-Riemann)** Sea  $A$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y una función  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $u = \text{Re}(f) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $v = \text{Im}(f) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado  $z = x + iy$ , se tiene que  $f$  es derivable en  $z$  si y sólo si las funciones  $u$  y  $v$  son diferenciables en  $(x, y)$  y verifican

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y); \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \quad (2.53)$$

Además, bajo lo anterior se tiene que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + j \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - j \frac{\partial u}{\partial y}(x, y). \quad (2.54)$$

**Observación 2.2.1.** Las ecuaciones (2.52) y (2.53) se conocen como ecuaciones de *Cauchy-Riemann*. Además, bajo dichas condiciones (2.54) caracteriza la definición de derivada compleja (2.51).

Para entender mejor que es lo que realmente exigen las condiciones de Cauchy-Riemann, suponga las partes real e imaginaria de la función  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  poseen segundas derivadas, esto es,  $u, v \in C^2(A)$ . Luego, si  $f$  es holomorfa, se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, de donde

$$\begin{aligned} \Delta u &:= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Condición que cumple de forma análoga la parte imaginaria  $v$  de  $f$  en todo punto de  $A$ . La regularidad asumida de las funciones  $u, v$  no son restrictivas ni mucho menos antojadizas, puesto que la familia de funciones  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^2(A)$  que satisfacen la *Ecuación de Laplace*

$$\Delta f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0,$$

en todo punto de  $A$ , son llamadas *funciones armónicas*, las cuales se caracterizan por ser infinitamente derivables en cada punto de  $A$ . De esta forma, se tiene que para que una función compleja de variable compleja  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sea derivable en un punto  $z = x + iy \in A$ , esta debe ser holomorfa en  $z$ , es decir, tanto su parte real  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como su parte imaginaria  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann y por lo tanto ser armónicas, o equivalentemente, infinitamente derivables en una vecindad del punto  $z$ , lo cual es una condición muy restrictiva y pocas familias de funciones cumplen.

Para argumentar la observación anterior se ilustra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.2.4.** Las siguientes funciones no son satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

- $f(z) = z^*$ ;
- $f(z) = \text{Im}(z)$ ;
- $f(z) = \text{Re}(z)$ ;
- $f(z) = |z|^2 = z^*z$ ;
- $f(z) = |z|$ .

Del ejemplo anterior se destaca que 4 de las 5 funciones mostradas son funciones real valuadas. Situación que es aún más crítica, esto es, al considerar una función holomorfa  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , se tiene que la parte imaginaria  $v$  de la función es nula y  $f(z) = u(x, y)$ . De esta forma las ecuaciones de Cauchy-Riemann entregan que,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

de donde  $u$  debe ser constante. Esto dice que las únicas funciones de variable compleja a valores reales, derivables en el sentido del cálculo complejo usual son las funciones constantes.

Lo anterior impide considerar el cálculo complejo estándar, puesto que las funciones que permiten cuantificar el error asociado a un esquema numérico son real-valuadas, y para aplicar la Fórmula de Itô (2.17), dichas funciones requieren ser derivadas. Esto motiva buscar una forma de poder derivar una clase mayor de funciones complejas y no sólo las holomorfas; extendiendo la definición que se tiene de derivada compleja. De esta forma, la literatura presenta como opción ya existente el cálculo de Wirtinger, por lo que se estudiará su noción de derivada y estructura que genera.

### 2.2.2. Cálculo de Wirtinger

El cálculo de Wirtinger, es el campo del análisis complejo que se genera por la introducción de los operadores de Wirtinger en el año 1926, por el Matemático austríaco Wilhelm Wirtinger. Su trabajo buscaba simplificar los cálculos generados al trabajar con funciones complejas de varias variables complejas. Estudio que ya habían realizado los matemáticos Henri Poincaré y Dimitrie Pompeiu, quienes al igual que lo hizo Wirtinger entendieron el rol que posee la variable conjugada compleja en el proceso de derivación de una función compleja de variable compleja.

Los operadores de Wirtinger cumplen la función de derivada parcial para funciones complejas de variables complejas, las cuales se entienden en dependencia tanto de la variable compleja

como de su conjugada. Además su definición es menos restrictiva, permitiendo derivar una clase mayor de funciones.

**Definición 2.2.4.** Sea  $A$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y una función  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Si se escribe  $f$  en dependencia de  $z$  y  $z^*$ , es decir,

$$f(z, z^*) = f(z) = g(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

se pueden definir los siguientes operadores

$$\partial_z f := \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y} \right); \quad (2.55)$$

$$\partial_{z^*} f := \frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial y} \right); \quad (2.56)$$

donde las derivadas  $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$  significan

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Notar que los operadores  $\partial_z, \partial_{z^*}$  no imponen la necesidad de que la función  $f$  sea holomorfa para que existan sus derivadas, sólo basta que la función sea diferenciable en los ejes canónicos de  $\mathbb{R}^2$ . Además se destaca que de su definición se obtiene rápidamente que

- $\partial_{z^*} f^* = (\partial_z f)^*$ ;
- $\partial_z f^* = (\partial_{z^*} f)^*$ .

Por otra parte, dichos operadores conservan las propiedades de derivada parcial presentes en  $\mathbb{R}^2$ , considerando como variables independientes a  $z$  y  $z^*$ . Esto es, dado un abierto de  $A \subset \mathbb{C}$  y dos funciones  $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , se tiene que:

- $\partial_z z = \partial_{z^*} z^* = 1$ ;
- $\partial_z z^* = \partial_{z^*} z = 0$ ;
- $\partial_z(\alpha f + \lambda g) = \alpha \partial_z f + \lambda \partial_z g, \quad \forall \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ ;
- $\partial_{z^*}(\alpha f + \lambda g) = \alpha \partial_{z^*} f + \lambda \partial_{z^*} g, \quad \forall \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Por último, si se aplican los operadores a la composición de funciones, se presenta la regla de la cadena:

- $\partial_z(g \circ f) = \left(\frac{\partial g}{\partial z} \circ f\right) \partial_z f + \left(\frac{\partial g}{\partial z^*} \circ f^*\right) \partial_z f^*$ ;
- $\partial_{z^*}(g \circ f) = \left(\frac{\partial g}{\partial z} \circ f\right) \partial_{z^*} f + \left(\frac{\partial g}{\partial z^*} \circ f^*\right) \partial_{z^*} f^*$ .

Pruebas de las propiedades anteriores se encuentran en [5], de donde se extrae todo el contenido presente en esta subsección. Sin embargo el cometido de ésta es formular los conceptos básicos del cálculo de Wirtinger y generar la intuición para poder utilizar estas herramientas. Es por esto que se evitan demostraciones y se enfatiza en la manipulación de los operadores (2.55) y (2.56).

**Ejemplo 2.2.5.** Si se considera un abierto  $A$  de  $\mathbb{C}$  y la función  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada para todo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  por  $f(z) = Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$ , las propiedades mencionadas anteriormente dan rápidamente que

$$\frac{\partial Re(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial Re(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2}.$$

Lo cual se comprueba al notar que  $Re(z) = g(x, y) = x$ . Luego

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

De esta forma, gracias a la definición del operador de Wirtinger (2.55), se obtiene:

$$\frac{\partial Re(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

y al mismo tiempo se concluye que

$$\frac{\partial Re(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (1 + 0) = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, si se considera la función  $f$  dada para todo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  por  $f(z) = Im(z) = \frac{1}{2}(z - z^*)$ , de misma forma se tiene que:

$$\frac{\partial Im(z)}{\partial z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial Im(z)}{\partial z^*} = -\frac{1}{2}.$$

**Ejemplo 2.2.6.** Si se considera un abierto  $A$  de  $\mathbb{C}$  y la función  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada para todo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  por  $f(z) = |z| = (zz^*)^{\frac{1}{2}}$ , se tiene que:

$$\frac{\partial |z|}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{z^*}{|z|}, \quad \frac{\partial |z|}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \frac{z}{|z|}.$$

En efecto, dado que  $|z| = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

De esta forma, gracias a la definición del operador de Wirtinger (2.55), se obtiene:

$$\frac{\partial |z|}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{|z|} - i \frac{y}{|z|} \right) = \frac{1}{2} \frac{z^*}{|z|}.$$

Además, de manera análoga se concluye

$$\frac{\partial |z|}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right) = \frac{1}{2} \frac{z}{|z|}.$$

Por otro lado, si se considera la función  $f$  dada para todo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  por  $f(z) = |z|^2 = zz^*$ , de misma forma se tiene que:

$$\frac{\partial |z|^2}{\partial z} = z^*, \quad \frac{\partial |z|^2}{\partial z^*} = z.$$

Junto con las propiedades ya mencionadas, un resultado interesante se logra al componer los operadores de Wirtinger, es decir derivar en sentido Wirtinger una función compleja con respecto a ambas variables independientes  $z$  y  $z^*$ .

**Proposición 2.2.1.** Sea  $A$  un abierto de  $\mathbb{C}$ , dos funciones  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2(\mathbb{R})$  (Ver apéndice A) tal que  $f(z) = g(x, y)$ ,  $\forall z = x + jy \in A$ . Entonces

$$\partial_z \partial_{z^*} f = \partial_{z^*} \partial_z f = \frac{1}{4} \Delta g.$$

donde el operador Laplaciano  $\Delta$ , corresponde a  $\Delta = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2$ .

*Demostración.* De una parte, al desarrollar los operadores de Wirtinger, se tiene:

$$\begin{aligned}
\partial_{z_i^*} \partial_{z_i} &= \partial_{z_i^*} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} - j \frac{\partial g}{\partial y_i} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \partial_{z_i^*} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) - j \partial_{z_i^*} \left( \frac{\partial g}{\partial y_i} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} + j \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial x_i} \right) - j \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial y_i} + j \frac{\partial^2 g}{\partial y_i^2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} + j \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial x_i} - j \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial y_i} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_i^2} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_i^2} \right).
\end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene por la otra parte que

$$\begin{aligned}
\partial_{z_i} \partial_{z_i^*} &= \partial_{z_i} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} + j \frac{\partial g}{\partial y_i} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \partial_{z_i} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) + j \partial_{z_i} \left( \frac{\partial g}{\partial y_i} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} - j \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial x_i} \right) + j \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial y_i} - j \frac{\partial^2 g}{\partial y_i^2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} - j \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial x_i} + j \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial y_i} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_i^2} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_i^2} \right).
\end{aligned}$$

De donde se concluye. □

Finalmente, queda entender la relación presente entre estos dos tipos de derivación, es decir, derivada de Wirtinger y clásica. Para eso se reescribe las condiciones de existencia de la segunda en términos de la primera.

**Proposición 2.2.2.** *Sea  $A$  un abierto de  $\mathbb{C}$ , una función  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $z$  un punto de  $A$ . La función  $f$  satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en  $z$  si y sólo si*

$$\partial_{z^*} f(z) = 0. \tag{2.57}$$

Lo anterior dice que  $f$  es holomorfa si y sólo si no depende de  $z^*$ , es decir, sólo depende de  $z$ . Además cabe mencionar, que a la restricción (2.57) también es llamada *condición de Cauchy-Riemann*.

Por último, se muestra que si una función presenta la regularidad para que su derivada clásica exista, entonces ésta coincide con su derivada de Wirtinger. Esto es, dado un abierto  $A$  de  $\mathbb{C}$ , si una función  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en un punto  $z$  de  $A$ , entonces

$$\partial_z f(z) = f'(z),$$

donde  $f'$  corresponde a la derivada compleja clásica (2.51) de la función  $f$  y el operador  $\partial_z$  corresponde a la derivada de Wirtinger (2.55). De donde se concluye que el concepto de derivada de Wirtinger generaliza la derivada clásica para funciones complejas de variables complejas.





---

# Capítulo 3

## Cálculo de Itô en $\mathbb{C}$

### 3.1. Procesos estocásticos en $\mathbb{C}$

En consecuencia con la notación de número complejo  $z = x + iy$ , se denota un proceso estocástico complejo dado para cada  $t \geq 0$  por

$$Z_t = X_t + iY_t,$$

donde  $X$  e  $Y$  son procesos estocásticos reales.

**Definición 3.1.1.** Un proceso estocástico evaluado sobre los complejos  $W$  es un *Proceso de Wiener complejo* si su parte real  $Re(W)$  y su parte imaginaria  $Im(W)$  son Procesos de Wiener reales independientes.

De la definición anterior se destaca que el proceso  $W$  es un Proceso de Wiener sí y sólo sí  $(Re(W), Im(W))$  es un Proceso de Wiener real de dimensión dos. De esto se tiene que todas las propiedades vistas para Procesos de Wiener Reales se presentan en las componentes reales e imaginarias de un Proceso de Wiener complejo. Dentro de esas propiedades existe una forma sencilla caracterizar un Proceso de Wiener.

**Teorema 3.1.1. (Caracterización de Lèvy)**

Sea  $M = \{(M_t^1, M_t^2, \dots, M_t^d), t \geq 0\}$  un proceso  $(\mathcal{F}_t)$  adaptado  $\mathbb{R}^d$  valuado, con trayectorias continuas. Entonces  $M$  es un Proceso de Wiener si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- i) Para cada  $k = 1, 2, \dots, d$ , el proceso  $M^k = (M_t^k, t \geq 0)$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -Martingala real;
- ii) Para cada  $i, j \leq d$  y  $t \geq 0$  la covariación  $\langle M^i, M^j \rangle_t = \delta_{i,j}t$ .

El resultado anterior es muy importante en el cálculo estocástico, y su aplicación al caso de procesos complejos permite caracterizar de forma sencilla los procesos de Wiener complejos.

**Observación 3.1.1.** Considere un Proceso de Wiener complejo  $W$  y un escalar  $c \in \mathbb{C}$  tal que  $|c| = 1$ . Entonces existen dos Procesos de Wiener reales independientes  $W^1, W^2$  y escalares  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que

$$W = W^1 + iW^2, \quad c = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Si ahora se define  $\tilde{W} = cW$ , a través de un cálculo sencillo se obtiene

$$\tilde{W} = (W^1 + iW^2) \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \frac{aW^1 - bW^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{bW^1 + aW^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

De donde es claro que tanto la parte real  $Re(\tilde{W})$ , como la imaginaria  $Im(\tilde{W})$  son martingalas con trayectorias continuas iniciadas en cero y satisfacen que para cada  $t \geq 0$ ,

$$\langle Re(\tilde{W}), Re(\tilde{W}) \rangle_t = \left\langle \frac{aW^1 - bW^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{aW^1 - bW^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\rangle_t = \frac{a^2 \langle W^1, W^1 \rangle_t + b^2 \langle W^2, W^2 \rangle_t}{a^2 + b^2} = t;$$

$$\langle Im(\tilde{W}), Im(\tilde{W}) \rangle_t = \left\langle \frac{bW^1 + aW^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bW^1 + aW^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\rangle_t = \frac{b^2 \langle W^1, W^1 \rangle_t + a^2 \langle W^2, W^2 \rangle_t}{a^2 + b^2} = t;$$

$$\langle Re(\tilde{W}), Im(\tilde{W}) \rangle_t = \left\langle \frac{aW^1 - bW^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bW^1 + aW^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\rangle_t = \frac{ab \langle W^1, W^1 \rangle_t - ab \langle W^2, W^2 \rangle_t}{a^2 + b^2} = 0;$$

lo cual se obtiene al hacer uso de la independencia de  $W^1$  y  $W^2$ . Esto muestra, en particular, que al hacer uso del teorema de caracterización de Lèvy (Teorema 3.1.1),  $cW$  es un Proceso de Wiener complejo.

Como se ve, los procesos de Wiener complejos mantienen la estructura real, presentando sus propiedades que lo caracterizan. Sin embargo, el Proceso de Wiener complejo es particularmente interesante debido a que se encuentra en la frontera de un comportamiento recurrente y de uno transiente, esto se muestra en [2] y se debe a que por un lado las trayectorias de un Proceso de Wiener son densas en  $\mathbb{C}$ ; mientras que por otra parte, la probabilidad de que una trayectoria de un Proceso de Wiener tome un valor dado  $\omega \in \mathbb{C}$  es cero. Estas propiedades hacen del Proceso de Wiener complejo un proceso único, cuyas propiedades pueden ser muy útiles en la modelación matemática.

## 3.2. Martingalas y cálculo de Itô en $\mathbb{C}$

De la definición de proceso estocástico complejo y de martingala multidimensional, se puede extender los espacios de martingalas presentados en el caso real valuado. Considerando ahora martingalas a valores complejos.

**Definición 3.2.1.** Se definen los espacios de:

- martingalas complejas cuadrado integrables iniciadas en cero

$$\mathbb{M}_0^2(\mathbb{C}) := \{M = M^1 + iM^2 \mid (M^1, M^2) \in \mathbb{M}_0^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

- martingalas locales complejas iniciadas en cero

$$\mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{C}) := \{M = M^1 + iM^2 \mid (M^1, M^2) \in \mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{R}^2)\}$$

De donde es claro que si  $M \in \mathbb{M}_0^2(\mathbb{C})$ , entonces  $M^* \in \mathbb{M}_0^2(\mathbb{C})$ . Análogamente, si  $M \in \mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{C})$ , entonces  $M^* \in \mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{C})$ .

**Ejemplo 3.2.1.** Un Proceso de Wiener complejo  $W$  es una martingala compleja cuadrado integrable iniciada en cero, es decir,  $W \in \mathbb{M}_0^2(\mathbb{C})$ .

Esta construcción de martingalas complejas permite recuperar importantes resultados presentados para su análogo real. Dentro de ellas, se muestra a continuación el caso de la *desigualdad p*.

**Lema 3.2.1.** Sea  $M_t = M_t^1 + iM_t^2 \in \mathbb{M}_0^2(\mathbb{C})$ . Entonces para cada  $1 < p < \infty$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t|^p \right] \leq C_p \mathbb{E} [|M_T|^p].$$

*Demostración.* Se desarrolla la martingala local en su parte real e imaginaria, para luego acotar el módulo por el valor absoluto de su parte real e imaginaria, para finalmente utilizar la sublinealidad del supremo y la linealidad de la esperanza. De esta forma,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t|^p \right] &= \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t^1 + jM_t^2|^p \right] \\
 &\leq C_p \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} \{ |M_t^1|^p + |M_t^2|^p \} \right] \\
 &\leq C_p \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t^1|^p + \sup_{0 < t < T} |M_t^2|^p \right] \\
 &= C_p \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t^1|^p \right] + \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t^2|^p \right]
 \end{aligned}$$

Luego, aplicando el teorema de desigualdad  $p$  real (Teorema 2.1.5) a  $M^1$  y a  $M^2$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t|^p \right] &\leq C_p \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [|M_T^1|^p] + C_p \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [|M_T^2|^p] \\
 &= C_p \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [|M_T^1|^p + |M_T^2|^p] \\
 &\leq 2C_p \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [|M_T|^p].
 \end{aligned}$$

□

La construcción del cálculo de Itô presentada en el la sección 2.1.3, motiva extender la metodología e introducir una integral indefinida sobre martingalas complejas, para lo cual se necesita un nuevo proceso braket que opere sobre éstas. La construcción de este nuevo proceso bracket resulta natural bajo la definición real (2.13) y operando según la regla de signos de los números complejos, es decir, dados dos martingalas complejas  $M = M^1 + iM^2$  y  $N = N^1 + iN^2$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 \langle M, N \rangle_t &= \langle M^1 + iM^2, N^1 + iN^2 \rangle_t \\
 &= \langle M^1, N^1 \rangle_t - \langle M^2, N^2 \rangle_t + i\langle M^2, N^1 \rangle_t + i\langle M^1, N^2 \rangle_t,
 \end{aligned}$$

de donde se nota que el proceso braket se extiende a martingalas complejas manteniendo las mismas propiedades presentadas en la observación 2.1.3 y en el teorema 2.1.6 como se muestra a continuación.

**Teorema 3.2.1.** Sean  $M$  y  $N$  dos  $(\mathcal{F}_t)$ -martingalas (martingalas locales, resp.) complejas, continuas cuadrado integrables (acotadas, resp.). Entonces el proceso  $\langle M, N \rangle$  es el único proceso continuo  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptado de variación localmente finita, tal que  $\langle M, N \rangle_0 = 0$  y  $MN - \langle M, N \rangle$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala (martingala local, resp.).

*Demostración.* Se obtiene directamente de la bilinealidad del proceso bracket y del resultado para martingalas reales (Teorema 2.1.6). □

De esto, se puede extender también la *desigualdad BDG*, el cual como se verá en el próximo capítulo será uno de los resultados más utilizados, para demostrar la convergencia de esquemas numéricos.

**Lema 3.2.2.** *Sea  $M_t = M_t^1 + iM_t^2 \in \mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{C})$ , entonces para cada  $1 \leq p < \infty$  y tiempo de parada  $T \geq 0$*

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t|^p \right] \leq C_p \mathbb{E} \left[ \langle M, M^* \rangle_T^{\frac{p}{2}} \right].$$

*Además si  $M$  es continua, entonces la potencia  $p$  vive en  $(0, \infty)$ .*

*Demostración.* Se desarrolla la martingala local en su parte real e imaginaria, para luego acotar el módulo por el valor absoluto de su parte real e imaginaria, para finalmente utilizar la sublinealidad del supremo y la linealidad de la esperanza. De esta forma,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t|^p \right] &= \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t^1 + iM_t^2|^p \right] \\ &\leq C_p \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} \{ |M_t^1|^p + |M_t^2|^p \} \right] \\ &\leq C_p \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t^1|^p + \sup_{0 < t < T} |M_t^2|^p \right] \\ &= C_p \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t^1|^p \right] + C_p \mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t^2|^p \right]. \end{aligned}$$

Luego, aplicando el teorema BDG real (Teorema 2.1.7) a  $M^1$  y  $M^2$ , se tiene que

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t|^p \right] \leq \widehat{C}_p \mathbb{E} \left[ \langle M^1 \rangle_T^{\frac{p}{2}} \right] + \widehat{C}_p \mathbb{E} \left[ \langle M^2 \rangle_T^{\frac{p}{2}} \right].$$

Así al notar que  $2 \langle M, M^* \rangle \geq \langle M^1 \rangle + \langle M^2 \rangle$ , se concluye que

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 < t < T} |M_t|^p \right] \leq 2\widehat{C}_p \mathbb{E} \left[ \langle M, M^* \rangle_T^{\frac{p}{2}} \right].$$

□

Una consecuencia importante de este resultado corresponde a un símil del caso real, donde dado un Proceso de Wiener real  $W$  se tiene que

$$\mathbb{E} [|W_t - W_s|^2] = |t - s|.$$

Propiedad que es utilizada para probar la convergencia de los esquemas de aproximación, por lo que es indispensable tener un resultado análogo para el caso complejo.

**Lema 3.2.3.** *Sea  $W = (W_t, t \geq 0)$  un Movimiento Browniano complejo y  $0 < p < \infty$ . Entonces para todo  $0 < s < t$ , se tiene:*

$$\mathbb{E}[|W_t - W_s|^p] \leq C|t - s|^{\frac{p}{2}}.$$

*Demostración.* Al hacer uso del Lema 3.2.2, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|W_t - W_s|^p] &\leq \mathbb{E} \left[ \sup_{s \leq r \leq t} |W_r - W_s|^p \right] \leq C_p \mathbb{E} \left[ \langle W_t - W_s, (W_t - W_s)^* \rangle_t^{\frac{p}{2}} \right] \\ &= C_p \mathbb{E} \left[ \langle W_t - W_s, W_t^* - W_s^* \rangle^{\frac{p}{2}} \right] \end{aligned}$$

Por lo que si se denota  $W^1 := \text{Re}(W)$  y por  $W^2 = \text{Im}(W)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|W_t - W_s|^p] &\leq C_p \mathbb{E} \left[ \left( \langle W_t^1 - W_s^1, W_t^1 - W_s^1 \rangle + \langle W_t^2 - W_s^2, W_t^2 - W_s^2 \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i \langle W_t^1 - W_s^1, W_t^2 - W_s^2 \rangle + i \langle W_t^2 - W_s^2, W_t^1 - W_s^1 \rangle \right)^{\frac{p}{2}} \right] \\ &= C_p \mathbb{E} \left[ \left( \langle W_t^1 - W_s^1, W_t^1 - W_s^1 \rangle + \langle W_t^2 - W_s^2, W_t^2 - W_s^2 \rangle \right)^{\frac{p}{2}} \right], \end{aligned}$$

donde para cada  $j \in 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle W_t^j - W_s^j, W_t^j - W_s^j \right\rangle &= \left\langle \int_s^t dW^j, \int_s^t dW^j \right\rangle_r \\ &= \int_s^t d \langle W^j \rangle_r \\ &= \int_s^t dt \\ &= |t - s|. \end{aligned}$$

De esta forma, se concluye

$$\mathbb{E}[|W_t - W_s|^p] \leq 2C_p |t - s|^{\frac{p}{2}}.$$

□

Por otro lado, dado que el proceso bracket para martingalas complejas es de variación finita, al igual que en el caso real se puede definir su integral de Lebesgue. De esta forma, dada una martingala compleja  $M \in \mathbb{M}_0^2(\mathbb{C})$ , se dirá que  $F$  es integrable con respecto a  $M$  si su parte real e imaginaria son integrables con respecto a la parte real e imaginaria de  $M$ , es decir, si

$$\operatorname{Re}(F), \operatorname{Im}(F) \in \mathbb{L}^2(M^1) \cap \mathbb{L}^2(M^2), \quad (3.1)$$

donde el espacio de todas aquellas funciones que satisfacen (3.1) es denotado  $\mathbb{L}^2(M)$ .

De esta manera se puede introducir la integral indefinida con respecto a una martingala compleja, bajo el funcionamiento de la integral con respecto a una martingala real.

**Definición 3.2.2. (Integral de Itô)** Si  $M = M^1 + iM^2 \in \mathbb{M}_0^2(\mathbb{C})$  y  $f \in \mathbb{L}^2(M)$ , la *integral de Itô* de  $F$  con respecto a  $M$ , viene dada por

$$t \mapsto \int_0^t f_s dM_s := \int_0^t f_s dM_s^1 + i \int_0^t f_s dM_s^2. \quad (3.2)$$

Proceso el cual debido a su construcción esta en  $\mathbb{M}_0^2(\mathbb{C})$ . Además, si se considera  $M \in \mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{C})$  y  $f \in \mathbb{L}_{loc}^2(M)$ , entonces la *integral de Itô* de  $F$  con respecto a  $M$ , viene dada por

$$t \mapsto \int_0^t F_s dM_s := \int_0^t F_s dM_s^{\tau_n}, \quad (3.3)$$

donde  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\tau_n \leq n$ . Proceso que por su definición es independiente de la sucesión localizadora  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y por construcción está en  $\mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{C})$ .

Con esto se puede recuperar los grandes resultados para martingalas reales mostrados en la sección 2.1. Esto se logra al descomponer los procesos complejos en su parte real e imaginaria, para luego utilizar los resultados de martingalas locales reales, tal cual como ilustra el Dr. Nic Freeman en [2]. Es por lo anterior que los resultados rescatados presentan las mismas condiciones requeridas por su símil real. De esto, dado dos martingalas locales complejas  $M, N$ , dos procesos progresivamente medible  $F, G$  y una constante  $\alpha \in \mathbb{C}$ , que respetan las hipótesis mencionadas para el caso real se tiene:

$$\int_0^t \alpha F_s dM_s = \alpha \int_0^t F_s dM_s; \quad (3.4)$$

$$\int_0^t F_s + G_s dM_s = \int_0^t F_s dM_s + \int_0^t G_s dM_s; \quad (3.5)$$

$$\int_0^u F_s dM_s + \int_u^t F_s dM_s = \int_0^t F_s dM_s; \quad (3.6)$$

$$\int_0^t F_s d \left( \int_0^s G_r dM_r \right) = \int_0^t F_s G_s dM_s; \quad (3.7)$$

$$\left\langle \int_0^\cdot F_s dM_s, \int_0^\cdot G_s dN_s \right\rangle_t = \int_0^t F_s G_s d \langle M, N \rangle_s; \quad (3.8)$$

$$\int_0^{t \wedge \tau} F_s dM_s = \int_0^t F_s dM_{s \wedge \tau}; \quad (3.9)$$

$$\left( \int_0^t F_s dM_s \right)^* = \int_0^t F_s^* dM_s^*. \quad (3.10)$$

De esta forma se genera una estructura robusta de integral sobre martingalas locales complejas, que concuerda con la vista en el caso real. De esto se sigue la noción real y se considera una semimartingala compleja como cualquier proceso  $Z$  dado para cada  $t \geq 0$  por

$$Z_t = A_t + M_t,$$

donde  $A$  es proceso de variación finita y  $M$  una martingala local compleja, de donde se define su integral de Itô para toda función  $F \in L_1(A) \cap \mathbb{L}(M)$  por el proceso

$$t \longmapsto I_t = \int_0^t F_s dX_s := \int_0^t F_s dA_s + \int_0^t F_s dM_s.$$

donde la primera integral corresponde a una integral de Lebesgue, mientras que la segunda es una integral de Itô dada por (3.2). Además, de su definición se observa que el proceso  $I$  es una semimartingala compleja.

Por otra parte, las herramientas presentes para martingalas locales complejas permite probar un resultado que además de ser interesante permite simplificar la manipulación de estos procesos, como se verá en el próximo capítulo.

**Lema 3.2.4.** *Sea  $W = (W_t, t \in [0, T])$  un Proceso de Wiener complejo y  $F \in \mathbb{L}_{loc}^2(W)$ , entonces*



para todo  $0 < r \leq T$  y  $2 \leq p < \infty$ , se tiene que

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t F_s dW_s \right|^p \right] \leq C_p \int_0^r \mathbb{E} [|F_s|^p] ds.$$

*Demostración.* Dado que  $\int_0^t F_s dW_s \in \mathbb{M}_0^{loc}$ , se procede a utilizar el Lema 3.2.2, de donde se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t F_s dW_s \right|^p \right] &= \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t F_s dW_s \right|^p \right] \\ &\leq C_p \mathbb{E} \left[ \left\langle \int_0^\bullet F_s dW_s, \left( \int_0^\bullet F_s dW_s \right)^* \right\rangle_r^{\frac{p}{2}} \right] \\ &\leq C_p \mathbb{E} \left[ \left\langle \int_0^\bullet F_s dW_s, \int_0^\bullet F_s^* dW_s^* \right\rangle_r^{\frac{p}{2}} \right] \end{aligned}$$

Luego al aplicar la propiedad (3.8), junto con remplazar el valor de la variación cuadrática, utilizar la desigualdad de Jensen (ver Ejemplo 2.1.14) e intercambiar las integrales, se obtiene el resultado.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t F_s dW_s \right|^p \right] &\leq C_p \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^r |F_s|^2 d\langle W, W^* \rangle_s \right)^{\frac{p}{2}} \right] \\ &\leq 2C_p \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^r |F_s|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \right] \\ &\leq \frac{2C_p}{r} \mathbb{E} \left[ \int_0^r (r|F_s|^2)^{\frac{p}{2}} ds \right] \\ &\leq 2C_p r^{\frac{p}{2}-1} \mathbb{E} \left[ \int_0^r |F_s|^p ds \right] \\ &\leq 2C_p r^{\frac{p}{2}-1} \int_0^r \mathbb{E} [|F_s|^p] ds \\ &\leq 2C_p T^{\frac{p}{2}-1} \int_0^r \mathbb{E} [|F_s|^p] ds. \end{aligned}$$

□

Finalmente se destaca una familia de martingalas complejas de gran importancia, la cual viene caracterizada por su variación cuadrática, y como se verá en las próximas subsecciones,

posee fuertes propiedades para el estudio de las SDE complejas que procede.

**Definición 3.2.3.** Una martingala local  $M \in \mathbb{M}_0^{loc}(\mathbb{C})$  se dice conforme si

$$\langle M, M \rangle = 0.$$

Esta familia de martingalas es cerrada bajo la conjugación, es decir, si una martingala compleja  $Z$  es conforme, entonces su conjugado  $Z^*$  también es una martingala conforme. Además su integral de Itô sigue siendo una martingala conforme, como lo muestra el siguiente resultado.

**Lema 3.2.5.** Dada una martingala conforme  $M$  y un proceso  $F \in \mathbb{L}_{loc}^2(M)$ , se tiene que para cada  $0 < t \leq T$  el proceso dado por

$$\int_0^t F_s dM_s,$$

es una martingala conforme.

*Demostración.* El resultado se obtiene al aplicar la propiedad (3.8) y dado que  $M$  es una martingala conforme, De esta forma, para todo  $t > 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^\cdot F_s dM_s, \int_0^\cdot F_s dM_s \right\rangle_t &= \int_0^t F_s^2 d\langle M, M \rangle_s \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3.2.2.** Para todo  $T > 0$ , un Proceso de Wiener complejo  $W = (W_t, t \in [0, T])$  es una martingala conforme. En efecto, si se considera  $W = W^1 + iW^2$ , con  $W^1, W^2$  dos procesos de Wiener reales independientes, se tiene que para cada  $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \langle W, W \rangle_t &= \langle W^1 + iW^2, W^1 + iW^2 \rangle_t \\ &= \langle W^1, W^1 \rangle_t - \langle W^2, W^2 \rangle_t + i\langle W^1, W^2 \rangle_t + i\langle W^2, W^1 \rangle_t \\ &= t - t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además de esto, al hacer uso del lema 3.2.5, se tiene que para cada  $F \in \mathbb{L}_{loc}^2(M)$ , el proceso

$$\int_0^t F_s dW_s,$$

es también una martingala conforme.

### 3.3. Fórmula de Itô sobre funciones de variable compleja

Como se vió en la subsección 2.1.3 la fórmula de Itô es uno de los resultados fundamentales del cálculo estocástico, siendo indispensable para la construcción de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Es por lo anterior, que para estudiar procesos de difusión complejos se necesita recuperar la desigualdad de Itô (2.17) para martingalas locales complejas. Razón que motiva esta subsubsección.

Se comienza esta construcción, considerando en primera instancia la integral indefinida de Itô a partir de un Proceso de Wiener complejo. De esta forma notamos que dado un Proceso de Wiener complejo  $n$  dimensional  $W$ , sus variaciones cuadráticas vienen dadas por :

- $\langle W_{\cdot}^i, W_{\cdot}^k \rangle_t = \langle (W^*)_{\cdot}^i, (W^*)_{\cdot}^k \rangle_t = 0, \quad \forall i, k \in \{1, \dots, n\};$
- $\langle W_{\cdot}^i, (W^*)_{\cdot}^k \rangle_t = \langle (W^*)_{\cdot}^i, W_{\cdot}^k \rangle_t = 0, \quad \forall i \neq k;$
- $\langle W_{\cdot}^i, (W^*)_{\cdot}^i \rangle_t = \langle (W^*)_{\cdot}^i, W_{\cdot}^i \rangle_t = 2t, \quad \forall i = 1, \dots, n.$

De esta, si el interés radica en integrar procesos con respecto a un Proceso de Wiener complejo en un intervalo de tiempo acotado  $[0, T]$ , se puede reducir el espacio de funciones integrables a

$$\mathbb{L}^2(0, T) := \left\{ F \text{ progresivamente medible} \mid \int_0^T F_t dW_t < \infty \right\}.$$

Dicho espacio se denota igual que su análogo real, pero dado el contexto en que se trabaja no se generan problemas de notación. Junto con lo anterior, las variaciones cuadráticas de un Proceso de Wiener complejo permiten probar el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.1.** Sean dos funciones  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  tales que para cada  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $f(z, z^*) = g(x, y)$ , y un Proceso de Wiener complejo multidimensional  $W_t = W_t^1 + iW_t^2$ ,  $\forall t > 0$ . Si  $f \in C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{C})$  en sentido Wirtinger, entonces

$$df(W_t, W_t^*) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dW_t^j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j^*} d(W^*)_t^j + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_j^*} dt. \quad (3.11)$$

*Demostración.* Como  $g$  posee segundas derivadas continuas, se puede utilizar la fórmula de Itô real (2.17), obteniendo

$$\begin{aligned} dg(W_t^1, W_t^2) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} dW_t^{1,j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j} dW_t^{2,j} + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} d\langle W_t^{1,j}, W_t^{1,k} \rangle_t \right. \\ &\quad + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial y_k} d\langle W_t^{1,j}, W_t^{2,k} \rangle_t + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial y_j \partial x_k} d\langle W_t^{2,j}, W_t^{1,k} \rangle_t \\ &\quad \left. + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial y_j \partial y_k} d\langle W_t^{2,j}, W_t^{2,k} \rangle_t \right\}. \end{aligned}$$

Así, al remplazar la variaciones de  $W$  y  $W^*$ , se tiene

$$\begin{aligned} dg(W_t^1, W_t^2) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} dW_t^{1,j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j} dW_t^{2,j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} dt + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial y_j^2} dt \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x_j} - i \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) (dW_t^{1,j} + idW_t^{2,j}) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x_j} + i \frac{\partial g}{\partial y_j} \right) (dW_t^{1,j} - idW_t^{2,j}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} dt + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial y_j^2} dt \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x_j} - i \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) dW_t^j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial x_j} + i \frac{\partial g}{\partial y_j} \right) d(W^*)_t^j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} dt + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial y_j^2} dt. \end{aligned}$$

De esta forma, al recordar la definición de derivadas de Wirtinger (2.55) y (2.56), se tiene que

$$d(g(W_t^1, W_t^2)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dW_t^j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j^*} d(W^*)_t^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} dt + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial y_j^2} dt.$$

Finalmente, al utilizar la proposición 2.2.1 se concluye que,

$$d(g(W_t^1, W_t^2)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dW_t^j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j^*} d(W^*)_t^j + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_j^*} dt.$$

□

Aquí es importante notar que dadas las variaciones cuadráticas presentadas por el Proceso

de Wiener complejo, se puede escribir la ecuación (3.11) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} d(f(W_t, W_t^*)) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dW_t^j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j^*} d(W^*)^j_t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_j^2} d\langle W^j, W^j \rangle_t \\ &\quad + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_k^*} d\langle W^j, (W^*)^k \rangle_t + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial (z_j^*)^2} d\langle (W^*)^j, (W^*)^j \rangle_t, \end{aligned}$$

presentando una estructura similar a la formula de Itô real (2.17). Sin embargo, aún se puede agregar la dependencia temporal a la función  $f$ , como también considerar en vez de un Proceso de Wiener complejo cualquier martingala conforme, o si es posible cualquier semimartingala compleja. El siguiente teorema esclarece todas estas dudas y presenta un fuerte resultado que provee de un análogo a la formula de Itô para funciones complejas.

**Teorema 3.3.2. (Fórmula de Itô)**

Sea  $Z$  una semimartingala compleja y  $f : [0, T] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función de clase  $C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{C})$  en sentido Wirtinger. Entonces, para cada  $t \in ]0, T]$ ,

$$\begin{aligned} f(t, Z_t, Z_t^*) &= f(0, z, z^*) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, Z_s, Z_s^*) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z}(s, Z_s, Z_s^*) dZ_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z^*}(s, Z_s, Z_s^*) dZ_s^* \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(s, Z_s, Z_s^*) d\langle Z, Z \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial (z^*)^2}(s, Z_s, Z_s^*) d\langle Z^*, Z^* \rangle_s \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z^*}(s, Z_s, Z_s^*) d\langle Z, Z^* \rangle_s. \end{aligned}$$

*Demostración.* Sean  $h_1, h_2 : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tales que para cada  $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$f(t, x + iy, x - iy) = h_1(t, x, y) + ih_2(t, x, y).$$

Dada la regularidad de  $f$ , las funciones  $h_1, h_2$  pertenecen a  $C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ . De esta forma, al denotar  $X_t = \text{Re}(Z_t)$  e  $Y_t = \text{Im}(Z_t)$  y a aplicar la fórmula de Itô clásica (2.17), para cada  $i \in \{1, 2\}$  se obtiene,

$$\begin{aligned} h_i(t, X_t, Y_t) &= h_i(0, x, y) + \int_0^t \frac{\partial h_i}{\partial t}(s, X_s, Y_s) ds + \int_0^t \frac{\partial h_i}{\partial x}(s, X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial h_i}{\partial y}(s, X_s, Y_s) dY_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2}(s, X_s, Y_s) d\langle X, X \rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 h_i}{\partial x \partial y}(s, X_s, Y_s) d\langle X, Y \rangle_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2}(s, X_s, Y_s) d\langle Y, Y \rangle_s. \end{aligned}$$

Así, al abreviar por  $H$  la expresión

$$H = \int_0^t \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} + i \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) (s, X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} + i \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) (s, X_s, Y_s) dY_s,$$

y abreviar por  $K$  la expresión

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} \right) (s, X_s, Y_s) d\langle X, X \rangle_s + \int_0^t \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 h_2}{\partial x \partial y} \right) (s, X_s, Y_s) d\langle X, Y \rangle_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} + i \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \right) (s, X_s, Y_s) d\langle Y, Y \rangle_s \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} H &= \int_0^t \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} + i \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) (s, X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} + i \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) (s, X_s, Y_s) dY_s \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} + i \frac{\partial h_2}{\partial x} - i \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} + i \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) \right) (s, X_s, Y_s) dX_s \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} + i \frac{\partial h_2}{\partial x} + i \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} + i \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) \right) (s, X_s, Y_s) dX_s \\ &\quad + \int_0^t \frac{i}{2} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} + i \frac{\partial h_2}{\partial x} - i \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} + i \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) \right) (s, X_s, Y_s) dY_s \\ &\quad - \int_0^t \frac{i}{2} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} + i \frac{\partial h_2}{\partial x} + i \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} + i \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) \right) (s, X_s, Y_s) dY_s \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} + i \frac{\partial h_2}{\partial x} - i \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} + i \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) \right) (s, X_s, Y_s) d(X + iY)_s \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} + i \frac{\partial h_2}{\partial x} + i \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} + i \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) \right) (s, X_s, Y_s) d(X - iY)_s \\ &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z} (s, Z_s) dZ_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z^*} (s, Z_s) dZ_s^*, \end{aligned}$$

junto con

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{8} \int_0^t \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - 2i \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 h_2}{\partial x \partial y} \right) - \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} + i \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \right) \right) (s, X_s, Y_s) d \langle X + iY, X + iY \rangle_s \\
 &+ \frac{1}{8} \int_0^t \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + 2i \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 h_2}{\partial x \partial y} \right) - \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} + i \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \right) \right) (s, X_s, Y_s) d \langle X - iY, X - iY \rangle_s \\
 &+ \frac{1}{4} \int_0^t \left( \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} + i \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \right) (s, X_s, Y_s) d \langle X + iY, X - iY \rangle_s \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (t, Z_s, Z_s^*) d \langle Z, Z \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial (z^*)^2} (t, Z_s, Z_s^*) d \langle Z^*, Z^* \rangle_s \\
 &+ \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z^*} (t, Z_s, Z_s^*) d \langle Z, Z^* \rangle_s.
 \end{aligned}$$

Luego, dado que

$$\begin{aligned}
 f(t, Z_t, Z_t^*) &= h_1(t, X_t, Y_t) + ih_2(t, X_t, Y_t) \\
 &= \sum_{j \in \{1, 2\}} i^{j-1} \left( h_j(0, x, y) + \int_0^t \frac{\partial h_j}{\partial t} (s, X_s, Y_s) ds + \int_0^t \frac{\partial h_j}{\partial x} (s, X_s, Y_s) dX_s \right. \\
 &\quad + \int_0^t \frac{\partial h_j}{\partial y} (s, X_s, Y_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 h_j}{\partial x^2} (s, X_s, Y_s) d \langle X, X \rangle_s \\
 &\quad \left. + \int_0^t \frac{\partial^2 h_j}{\partial x \partial y} (s, X_s, Y_s) d \langle X, Y \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 h_j}{\partial y^2} (s, X_s, Y_s) d \langle Y, Y \rangle_s \right).
 \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\begin{aligned}
 f(t, Z_t, Z_t^*) &= f(0, z, z^*) + H + K \\
 &= f(0, z, z^*) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} (s, Z_s, Z_s^*) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z} (s, Z_s, Z_s^*) dZ_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z^*} (s, Z_s, Z_s^*) dZ_s^* \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (s, Z_s, Z_s^*) d \langle Z, Z \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial (z^*)^2} (s, Z_s, Z_s^*) d \langle Z^*, Z^* \rangle_s \\
 &\quad + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z^*} (s, Z_s, Z_s^*) d \langle Z, Z^* \rangle_s.
 \end{aligned}$$

□

Es importante considerar que el resultado anterior a demás de extender la Fórmula de Itô para semimartingalas complejas, muestra que el conjunto de semimartingalas complejas se cierra bajo la aplicación de funciones dos veces diferenciables en sentido Wirtinger. Esto al observar el resultado de aplicar la fórmula de Itô, esto es su lado derecho, siempre es una semimartingala compleja.

Además de lo comentado, existen consecuencias muy importantes y de gran interés que se obtienen a partir de la fórmula de Itô generada. Estos se presentan a continuación en los ejemplos y corolarios que proceden.

**Ejemplo 3.3.1.** Considere una función  $f : [0, T] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analítica, i.e.,  $\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$ . Entonces, como  $f \in C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{C})$  se puede aplicar el teorema anterior para obtener, para una semimartingala compleja  $Z$  y  $t \in [0, T]$ :

$$f(t, Z_t, Z_t^*) = f(0, Z_0, Z_0^*) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, Z_s, Z_s^*) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z}(s, Z_s, Z_s^*) dZ_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(s, Z_s, Z_s^*) d\langle Z, Z \rangle_s.$$

**Ejemplo 3.3.2.** Adicionalmente a las hipótesis del ejemplo anterior, si se considera  $Z_t$  como una martingala conforme, entonces se tiene que

$$f(t, Z_t, Z_t^*) = f(0, 0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, Z_s, Z_s^*) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z}(s, Z_s, Z_s^*) dZ_s,$$

que en particular muestra la estrecha conexión entre las semi-martingalas conformes y las funciones analíticas en analogía con el caso real, donde las semi-martingalas estaban relacionadas con funciones dos veces diferenciables.

**Corolario 3.3.1.** Dado  $T > 0$  y un proceso estocástico  $Z$  definido para cada  $t \in [0, T]$  por

$$Z_t = z + \int_0^t b(s, Z_s, Z_s^*) ds + \int_0^t \sigma_1(s, Z_s, Z_s^*) dW_s + \int_0^t \sigma_2(s, Z_s, Z_s^*) dW_s^*, \quad (3.12)$$

donde  $z \in \mathbb{C}$ ,  $W$  es un Proceso de Wiener complejo y las funciones  $b, \sigma_1, \sigma_2 : [0, T] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  son tales que  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{L}^2([0, T])$  y  $b \in \mathbb{L}^1([0, T])$ . Entonces, para cada función  $f : [0, T] \times$



$(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$  de clase  $C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{C})$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
 f(t, Z_t, Z_t^*) &= f(0, z) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, Z_s, Z_s^*) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z}(s, Z_s, Z_s^*) b(s, Z_s) ds \\
 &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z^*}(s, Z_s, Z_s^*) b^*(s, Z_s, Z_s^*) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z}(s, Z_s, Z_s^*) \sigma_1(s, Z_s, Z_s^*) dW_s \\
 &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z^*}(s, Z_s, Z_s^*) \sigma_2(s, Z_s, Z_s^*) dW_s^* + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z^*}(s, Z_s, Z_s^*) \sigma_1^*(s, Z_s, Z_s^*) dW_s^* \\
 &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z^*}(s, Z_s, Z_s^*) \sigma_2^*(s, Z_s, Z_s^*) dW_s + 2 \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(s, Z_s, Z_s^*) \sigma_1(s, Z_s) \sigma_2(s, Z_s, Z_s^*) ds \\
 &+ 2 \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial (z^*)^2}(s, Z_s, Z_s^*) \sigma_1^*(s, Z_s, Z_s^*) \sigma_2^*(s, Z_s, Z_s^*) ds \\
 &+ 2 \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z^*}(s, Z_s, Z_s^*) \left( |\sigma_1(s, Z_s, Z_s^*)|^2 + |\sigma_2(s, Z_s, Z_s^*)|^2 \right) ds.
 \end{aligned}$$

*Demostración.* Se observa primero que, en forma diferencial, la dinámica conjugada de (3.12) está dada por

$$dZ_t^* = b^*(t, Z_t, Z_t^*) dt + \sigma_1^*(t, Z_t, Z_t^*) dW_t^* + \sigma_2^*(t, Z_t, Z_t^*) dW_t.$$

Luego al aplicar el Teorema 3.3.2, se obtiene que para toda función  $f : [0, T] \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  de clase  $C_b^{1,2}(\mathbb{C})$  en sentido Wirtinger

$$\begin{aligned}
 f(t, Z_t, Z_t^*) &= f(0, z, z^*) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, Z_s, Z_s^*) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z}(s, Z_s, Z_s^*) dZ_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z^*}(s, Z_s, Z_s^*) dZ_s^* \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(s, Z_s, Z_s^*) d\langle Z, Z \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial (z^*)^2}(s, Z_s, Z_s^*) d\langle Z^*, Z^* \rangle_s \\
 &+ \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z^*}(s, Z_s, Z_s^*) d\langle Z, Z^* \rangle_s,
 \end{aligned}$$

y se concluye el resultado como consecuencia de que

$$\begin{aligned}
 d\langle Z, Z \rangle_t &= 4\sigma_1(t, Z_t, Z_t^*) \sigma_2(t, Z_t, Z_t^*) dt, \\
 d\langle Z^*, Z^* \rangle_t &= 4\sigma_1^*(t, Z_t, Z_t^*) \sigma_2^*(t, Z_t, Z_t^*) dt, \\
 d\langle Z, Z^* \rangle_t &= 2 \left( |\sigma_1(s, Z_s, Z_s^*)|^2 + |\sigma_2(s, Z_s, Z_s^*)|^2 \right) dt.
 \end{aligned}$$

□

A partir del último corolario se pueden deducir algunos ejemplos interesantes, que además de los ejemplos y resultados anteriores realzan el significado de la fórmula de Itô (Teorema (3.3.2)).

**Ejemplo 3.3.3.** Sea  $W$  un Proceso de Wiener real, entonces la SDE

$$\begin{cases} dZ_t = -\frac{1}{2}Z_t dt + iZ_t dW_t, & t \in [0, T] \\ Z_0 = z_0, \end{cases} \quad (3.13)$$

tiene única solución, dada por

$$Z_t = z_0 e^{iW_t}.$$

En efecto, al utilizar la fórmula de Itô se tiene

$$\begin{aligned} de^{iW_t} &= e^{iW_t} d(iW_t) + \frac{1}{2}e^{iW_t} d\langle iW, iW \rangle_t \\ &= ie^{iW_t} dW_t - \frac{1}{2}e^{iW_t} dt \end{aligned}$$

de donde se concluye.

Este ejemplo se contrasta con el Ejemplo 2.1.40, donde se muestra como se resuelve (3.13) con el cálculo de Itô real, siendo dicho desarrollo mucho más engorroso que el utilizado en el ejemplo anterior.

**Ejemplo 3.3.4.** Considere dos funciones continuas  $f$  y  $g$ , un Proceso de Wiener complejo  $W$  y un proceso  $Z$  dado por

$$Z_t = \int_0^t f ds + \int_0^t g dW_s.$$

Entonces la fórmula de Itô dice que

$$\begin{aligned} d(e^{Z_t}) &= e^{Z_t} dZ_t \\ &= e^{Z_t} (f dt + g dW_t) \\ &= e^{Z_t} f dt + e^{Z_t} g dW_t. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.3.5.** Considere dos escalares  $b > 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ , un Proceso de Wiener complejo  $W$  y un proceso  $Z$  dado por

$$dZ_t = -bZ_t dt + \sigma dW_t,$$

Entonces la fórmula de Itô dice que

$$\begin{aligned} d(Z_t e^{bt}) &= \left( b e^{bt} Z_t \right) dt + e^{bt} dZ_t \\ &= (b e^{bt} Z_t) dt + e^{bt} (-bZ_t dt + \sigma dW_t) \\ &= e^{bt} \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Cumpliendo de esta forma el mismo comportamiento presentado en el caso real (Ver Ejemplo 2.1.33).



---

## Capítulo 4

# Ecuaciones diferenciales estocásticas en $\mathbb{C}$

Este capítulo combina los resultados expuestos en el capítulo anterior para extender el concepto de SDE de Itô al cuerpo de los números complejos, siendo éste el cometido de este trabajo. Más específicamente en este capítulo se establece la familia de SDE's a valores complejos que se estudian, se analiza su existencia y unicidad, para luego proponer esquemas de aproximación basados en los métodos de Euler y Milstein reales y probar su convergencia.

Con el propósito de trabajar con una SDE lo más general posible, siendo está un similitudine complejo de la SDE (2.18), se considera la SDE dada para cada  $t \in [0, T]$  por

$$\begin{cases} dZ_t = b(t, Z_t)dt + \sigma^1(t, Z_t)dW_t + \sigma^2(t, Z_t)dW_t^* \\ Z_0 = z_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Donde los coeficientes son  $b : [0, T] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\sigma^1, \sigma^2 : [0, T] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $W$  es un Proceso de Wiener complejo y  $z_0 \in \mathbb{C}$  es la condición inicial del problema.

### 4.1. Existencia y unicidad

Hay que prestar atención que en el problema anterior (4.1), no se ha puesto ninguna restricción bajo sus coeficientes, estando formulado de forma muy general, lo cual no asegura que dicho problema se pueda resolver. Es por lo anterior que es imperativo reducir la generalidad del problema y reducir la clase de SDE's que se estudian a aquellas que cumplan cierta regularidad en sus coeficientes, con el objetivo de que el problema (4.1) esté bien definido, es decir, posea solución y esta sea única. Esto se especifica detalladamente en el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.1.** *Considere los coeficientes  $b : [0, T] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\sigma^1, \sigma^2 : [0, T] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  del problema (4.1). Si existen  $L_1, L_2 > 0$  tales que para cada  $z, w \in \mathbb{C}$  y  $\forall s, t \in [0, T]$ ,*

$$\sum_{K \in \{1, 2\}} \left| \sigma^K(t, z, z^*) - \sigma^K(s, w, w^*) \right|^2 + |b(t, z, z^*) - b(s, w, w^*)|^2 \leq L_1^2(|t - s|^2 + |z - w|^2); \quad (4.2)$$

$$|\sigma^1(t, z, z^*)|^2 + |\sigma^2(t, z, z^*)|^2 + |b(s, y, y^*)|^2 \leq L_2^2(1 + |z|)^2. \quad (4.3)$$

Entonces la SDE (4.1) admite única solución fuerte (Ver Definición 2.1.29).

*Demostración.* Si se considera el proceso dado para cada  $t \in [0, T]$  por,

$$\widehat{Z}_t := \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(Z_t) \\ \operatorname{Im}(Z_t) \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

y si además se define

$$\widehat{W} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(W_t) \\ \operatorname{Im}(W_t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \widehat{b}(t, Z_t) := \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(b(t, Z_t)) \\ \operatorname{Im}(b(t, Z_t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$\widehat{\sigma}(t, Z_t) := \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\sigma^1(t, Z_t)) + \operatorname{Re}(\sigma^2(t, Z_t)) & -\operatorname{Im}(\sigma^1(t, Z_t)) + \operatorname{Im}(\sigma^2(t, Z_t)) \\ \operatorname{Im}(\sigma^1(t, Z_t)) + \operatorname{Im}(\sigma^2(t, Z_t)) & \operatorname{Re}(\sigma^1(t, Z_t)) - \operatorname{Re}(\sigma^2(t, Z_t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

se puede escribir la siguiente SDE

$$\widehat{Z}_t = \widehat{Z}_0 + \int_0^t \widehat{b}(s, Z_s) ds + \int_0^t \widehat{\sigma}(s, Z_s) d\widehat{W}_s. \quad (4.4)$$

La cual posee solución única y bajo la aplicación

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

entrega a  $Z_t = \operatorname{Re}(Z_t) + i \operatorname{Im}(Z_t)$  como única solución fuerte de la SDE (4.1). En efecto, la SDE (4.4) tiene solución única:

(i) tomando  $L = 2\sqrt{2} \max\{L_1, L_2\}$ ,

$$|\widehat{b}(t, z)| = \sqrt{\widehat{b}(t, z) \widehat{b}^*(t, z)} = \sqrt{\operatorname{Re}(b(t, z))^2 + \operatorname{Im}(b(t, z))^2} = |b(t, z)| \leq L(1 + |z|).$$

Además, si se llama

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}^1(t, Z_t) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\sigma^1(t, Z_t)) & -\operatorname{Im}(\sigma^1(t, Z_t)) \\ \operatorname{Im}(\sigma^1(t, Z_t)) & \operatorname{Re}(\sigma^1(t, Z_t)) \end{pmatrix}; \\ \widehat{\sigma}^2(t, Z_t) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\sigma^2(t, Z_t)) & \operatorname{Im}(\sigma^2(t, Z_t)) \\ \operatorname{Im}(\sigma^2(t, Z_t)) & -\operatorname{Re}(\sigma^2(t, Z_t)) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned}\|\widehat{\sigma}(t, z)\|_2 &\leq \|\widehat{\sigma}^1\|_2 + \|\widehat{\sigma}^2\|_2 \\ &= \sqrt{2|\operatorname{Re}(\sigma^1(t, z))|^2 + |\operatorname{Im}(\sigma^1(t, z))|^2} + \sqrt{2|\operatorname{Re}(\sigma^2(t, z))|^2 + |\operatorname{Im}(\sigma^2(t, z))|^2} \\ &\leq \sqrt{2|\sigma^1(t, z)|^2} + \sqrt{2|\sigma^2(t, z)|^2} \\ &= \sqrt{2} (|\sigma^1(t, z)| + |\sigma^2(t, z)|) \\ &\leq L(1 + |z|).\end{aligned}$$

(ii) Bajo el mismo argumento anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}|\widehat{b}(t, z) - \widehat{b}(t, \widehat{z})| &\leq |b(t, z) - b(t, \widehat{z})| \\ &\leq L|z - \widehat{z}|.\end{aligned}$$

Y análogamente,

$$\begin{aligned}|\widehat{\sigma}(t, z) - \widehat{\sigma}(t, \widehat{z})| &\leq \sqrt{2} (|\sigma^1(t, z) - \sigma^1(t, \widehat{z})| + |\sigma^2(t, z) - \sigma^2(t, \widehat{z})|) \\ &\leq L|z - \widehat{z}|.\end{aligned}$$

(iii)  $\mathbb{E}[|\widehat{Z}_0|^2] = \mathbb{E}[\operatorname{Re}(Z_0)^2] + \mathbb{E}[\operatorname{Im}(Z_0)^2] = \mathbb{E}[\operatorname{Re}(z_0)^2] + \mathbb{E}[\operatorname{Im}(z_0)^2] < \infty$ .

(iv)  $\widehat{Z}_0 = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z_0) \\ \operatorname{Im}(z_0) \end{pmatrix}$  es independiente de  $\widehat{\mathcal{W}}^+(0)$ .

Luego de (i), (ii), (iii), (iv) y haciendo uso del Teorema 2.1.11 se asegura única solución fuerte de la SDE (4.4), con lo cual se prueba existencia y unicidad de solución para la SDE (4.1).  $\square$

**Ejemplo 4.1.1.** Sea  $W$  un Proceso de Wiener complejo y dos funciones continuas. Entonces el Teorema 4.1.1 dice que la SDE

$$\begin{cases} dZ_t = fZ_t dt + gZ_t dW_t, & \forall t \in [0, T] \\ Z_0 = 1, \end{cases} \quad (4.5)$$

posee única solución

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t f ds + \int_0^t g dW_s\right),$$

la cual se obtiene del Ejemplo 3.3.4.

**Ejemplo 4.1.2.** Considere un Proceso de Wiener complejo  $W$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\theta, \sigma \geq 0$ , entonces el Teorema 4.1.1 dice que la SDE

$$\begin{cases} dZ_t = \theta(\mu - Z_t) dt + \sigma dZ_t, & \forall t \in [0, T] \\ Z_0 = Z_0, \end{cases} \quad (4.6)$$

posee solución única. En efecto, al utilizar el proceso auxiliar

$$Y_t = Z_t - \mu, \quad (4.7)$$

se tiene que para cada  $t \in [0, T]$

$$dY_t = -\theta Y_t dt + \sigma dW_t.$$

Así al utilizar ejemplo (3.3.5), se tiene que

$$Y_t e^{\theta t} = Y_s e^{\theta s} + \int_s^t e^{-\theta u} \sigma dW_u,$$

de donde

$$Y_t = Y_s e^{-\theta(t-s)} + \int_s^t e^{-\theta(t-u)} \sigma dW_u.$$

Así, al recordar (4.7), se concluye que

$$Z_t = \mu + (Z_s - \mu) e^{-\theta(t-s)} + \int_s^t e^{-\theta(t-u)} \sigma dW_u.$$

Resultando tener el mismo comportamiento que presenta el Proceso de Ornstein-uhlenbeck real visto en el Ejemplo 2.1.33.

Ahora conociendo las condiciones necesarias para asegurar existencia y unicidad de solución para la SDE (4.1), se continua mostrando una propiedad muy importante que cumplen los procesos de Itô que satisface (4.1).

**Lema 4.1.1.** *Suponga  $Z = (Z_t, t \in [0, T])$  solución de la SDE (4.1). Si los coeficientes  $b, \sigma^1, \sigma^2 \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{C})$  en sentido Wirtinger, satisfacen:*

$$|b(t, z, z^*)| \leq M_b (1 + |z|); \quad (4.8)$$

$$|\sigma^1(t, z, z^*)| \leq M_{\sigma^1} (1 + |z|); \quad (4.9)$$

$$|\sigma^2(t, z, z^*)| \leq M_{\sigma^2} (1 + |z|). \quad (4.10)$$

Entonces para cada  $2 \leq p < \infty$  y  $0 < r \leq T$ , se tiene que :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |Z_t|^p \right] \leq K(p, r). \quad (4.11)$$

*Demostración.* Desarrollando  $Z$  y al distribuir el módulo dentro de las integrales, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |Z_t|^p \right] &= \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t b(s, Z_s, Z_s^*) ds + \int_0^t \sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) dW_s + \int_0^t \sigma^2(s, Z_s, Z_s^*) dW_s^* \right|^p \right] \\ &\leq C(p) \left\{ \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t b(s, Z_s, Z_s^*) ds \right|^p \right]}_{I_1} + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t \sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) dW_s \right|^p \right]}_{I_2} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t \sigma^2(s, Z_s, Z_s^*) dW_s^* \right|^p \right]}_{I_3} \right\}. \end{aligned}$$

Donde se procede a acotar cada uno de los términos  $I_k$ , con  $k \in \{1, 2, 3\}$ .



- Acotando  $I_1$  : Se comienza distribuyendo el módulo a la  $p$  dentro de la integral, junto con pasar el supremo de la integral a su límite superior de integración. De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t b(s, Z_s, Z_s^*) ds \right|^p \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \int_0^t |b(s, Z_s, Z_s^*)|^p ds \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^r |b(s, Z_s, Z_s^*)|^p ds \right]. \end{aligned}$$

Se continua utilizando la hipótesis (4.39), acotando la potencia de la suma por la suma de las potencias; para luego integrar, tomar esperanza y acotar por el supremo. De esta forma se tiene que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq M_b^p \mathbb{E} \left[ \int_0^r (1 + |Z_s|)^p ds \right] \\ &\leq C_1(p) M_b^p \mathbb{E} \left[ \int_0^r (1 + |Z_s|^p) ds \right] \\ &\leq C_1(p) M_b^p r + C_1(p) M_b^p \mathbb{E} \left[ \int_0^r \sup_{0 \leq t \leq s} |Z_t|^p ds \right]. \end{aligned}$$

Así, al intercambiar la esperanza con la integral, se tiene que

$$I_1 \leq K_1(p)r + K_1(p) \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq s} |Z_t|^p \right] ds \quad (4.12)$$

- Acotando  $I_2$  e  $I_3$  : Se comienza utilizando el Lema (3.2.4), de donde,

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t \sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) dW_s \right|^p \right] \\ &\leq C_1(p) \int_0^r \mathbb{E} \left[ |\sigma^1(s, Z_s, Z_s^*)|^p \right] ds. \end{aligned}$$

Luego el resultado se obtiene al utilizar la hipótesis (4.40), acotar el cuadrado de la suma por la suma de los cuadrados; para luego integrar, tomar esperanza y acotar por el supremo. De esta forma se tiene que

$$\begin{aligned}
 I_2 &\leq C_1(p)M_{\sigma_1}^p \int_0^r \mathbb{E}[(1 + |Z_s|)^p] ds \\
 &\leq C_1(p)C_2(p)M_{\sigma_1}^p \int_0^r \mathbb{E}[1 + |Z_s|^p] ds \\
 &\leq C_1(p)C_2(p)M_{\sigma_1}^p r + C_1(p)C_2(p)M_{\sigma_1}^p C_1(p) \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq s} |Z_t|^p \right] ds,
 \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$I_2 \leq K_2(p)r + K_2(p) \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq s} |Z_t|^p \right] ds. \quad (4.13)$$

Además, bajo el mismo procedimiento se tiene que

$$I_3 \leq K_3(p)r + K_3(p) \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq s} |Z_t|^p \right] ds. \quad (4.14)$$

Así, de (4.12), (4.13) y (4.14), se obtiene que

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |Z_t|^p \right] \leq \widehat{K}_1(p)r + \widehat{K}_1(p) \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq s} |Z_t|^p \right] ds. \quad (4.15)$$

Donde al aplicar Gronwall (Lema 2.1.12), se concluye que

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |Z_t|^p \right] \leq \widehat{K}_1(p)r e^{\widehat{K}_1(p)r} = K(p, r).$$

□

**Corolario 4.1.1.** Sea  $Z = (Z_t, t \in [0, T])$  solución de la SDE (4.1). Si los coeficientes  $b, \sigma^1, \sigma^2 \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{C})$  en sentido Wirtinger, satisfacen:

$$|b(t, z, z^*)| \leq M_b (1 + |z|); \quad (4.16)$$

$$|\sigma^1(t, z, z^*)| \leq M_{\sigma^1} (1 + |z|); \quad (4.17)$$

$$|\sigma^2(t, z, z^*)| \leq M_{\sigma^2} (1 + |z|). \quad (4.18)$$

Entonces para cada  $2 \leq p < \infty$  y  $0 < r < t \leq T$ , se tiene que :

$$\mathbb{E} [|Z_t - Z_r|^p] \leq K(p)|t - r|. \quad (4.19)$$

*Demostración.* Desarrollando  $Z$  y al distribuir el módulo dentro de las integrales, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|Z_t - Z_r|^p] &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_r^t b(s, Z_s, Z_s^*) ds + \int_r^t \sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) dW_s + \int_r^t \sigma^2(s, Z_s, Z_s^*) dW_s^* \right|^p \right] \\ &\leq C \left\{ \underbrace{\mathbb{E} \left[ \left| \int_r^t b(s, Z_s, Z_s^*) ds \right|^p \right]}_{I_1} + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \left| \int_r^t \sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) dW_s \right|^p \right]}_{I_2} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \left| \int_r^t \sigma^2(s, Z_s, Z_s^*) dW_s^* \right|^p \right]}_{I_3} \right\}. \end{aligned}$$

Donde se procede a acotar cada uno de los términos  $I_k$ , con  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

- Acotando  $I_1$  : Se comienza distribuyendo el módulo a la  $p$  dentro de la integral, junto utilizar la hipótesis (4.16). Se continua acotando la potencia de la suma por la suma de las potencias, se integra, se cambia el orden de la integral con la esperanza y acota por el supremo. De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_r^t b(s, Z_s, Z_s^*) ds \right|^p \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \int_r^t |b(s, Z_s, Z_s^*)|^p ds \right] \\ &\leq M_b^p \mathbb{E} \left[ \int_r^t (1 + |Z_s|)^p ds \right] \\ &\leq M_b^p \mathbb{E} \left[ \int_r^t 1 + |Z_s|^p ds \right] \\ &\leq M_b^p |t - r| + M_b^p \mathbb{E} \left[ \int_r^t |Z_s|^p ds \right] \\ &\leq M_b^p |t - r| + M_b^p \int_r^t \mathbb{E} [|Z_s|^p] ds \\ &\leq M_b^p |t - r| + M_b^p |t - r| \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq t} |Z_u|^p \right]. \end{aligned}$$

Así, al utilizar el Lema 4.1.1, se tiene que

$$I_1 \leq K_1(p, r)|t - r|. \quad (4.20)$$

- Acotando  $I_2$  e  $I_3$  : Se comienza acotando por el supremo en  $[r, t]$  y utilizando el Lema (3.2.4), de donde,

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_r^t \sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) dW_s \right|^p \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \sup_{r \leq u \leq t} \left| \int_r^u \sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) dW_s \right|^p \right] \\ &\leq C_1(p) \int_r^t \mathbb{E} \left[ |\sigma^1(s, Z_s, Z_s^*)|^p \right] ds. \end{aligned}$$

Luego se obtiene el resultado al utilizar la hipótesis (4.17); acotar la potencia de la suma por la suma de las potencias; integrar, tomar esperanza y acotar por el supremo. De esta forma se tiene que

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C_1(p) M_{\sigma^1} \int_r^t \mathbb{E} [(1 + |Z_s|)^p] ds \\ &\leq C_1(p) C_2(p) M_{\sigma^1}^p \int_r^t \mathbb{E} [1 + |Z_s|^p] ds \\ &\leq C_1(p) C_2(p) M_{\sigma^1}^p |t - r| + C_1(p) C_2(p) M_{\sigma^1}^p \int_r^t \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq s} |Z_u|^p \right] ds. \end{aligned}$$

Así, al utilizar el Lema 4.1.1, se tiene que

$$I_2 \leq K_2(p, r)|t - r|. \quad (4.21)$$

De misma forma, es decir, bajo el mismo procedimiento se tiene que

$$I_3 \leq K_3(p, r)|t - r|. \quad (4.22)$$

De esta forma, gracias a (4.20), (4.21) y (4.22), se obtiene que

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |Z_t^n - Z_r^n|^p \right] \leq K(p, r)|t - r|.$$

□

De esta forma, sabiendo las condiciones necesarias para asegurar existencia y unicidad de solución para la SDE (4.1), junto con las propiedades que ésta cumple, se procede a estudiar los mecanismos para obtener dicha solución, los cuales como se vió anteriormente, consisten en generar aproximaciones de ésta, tratando de ser lo más fiel posible. Es por esto, que en las siguientes secciones se formalizan los esquemas de Euler Maruyama y Milstein complejos, junto con desarrollar las herramientas para estudiar su desempeño.

## 4.2. Interpretación probabilista

Como se mencionó en la subsección 2.1.4, para estudiar que tan fiel es un esquema de aproximación, existen dos tipos de criterios, uno trayectorial llamado convergencia fuerte y uno distribucional, llamada convergencia débil. El estudio del segundo criterio, requiere una formulación que permita conectar los procesos de Itô con ecuaciones diferenciales parciales (EDP), procedimiento el cual es llamado Interpretación probabilista, y resulta como consecuencia de la fórmula de Itô. En esta sección mostraremos como a partir de la fórmula de Itô compleja (2.17) se puede hacer una conexión entre una SDE compleja y una EDP.

Para realizar dicho cometido, se comienza de forma inversa, por lo cual se estudia la regularidad del siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \mathcal{L}u, \forall (t, z, z^*) \in ]0, T[ \times \mathbb{C}, \\ u(0, z) &= f(z), \end{cases} \quad (4.23)$$

con el operador  $\mathcal{L}$  dado por,

$$\mathcal{L}u = b \frac{\partial u}{\partial z} + b^* \frac{\partial u}{\partial z^*} + 2\sigma^1 \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \left( |\sigma^1|^2 + |\sigma^2|^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*} + 2(\sigma^1)^* (\sigma^2)^* \frac{\partial^2 u}{\partial (z^*)^2};$$

donde  $b : [0, T] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\sigma^1, \sigma^2 : [0, T] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Este problema consiste en una EDP compleja, el cual se descompone en un sistema de dos EDP's reales al separar la parte real e imaginaria de (4.23). De esta forma, al considerar  $u = u_1 + iu_2$ , el problema (4.23) es equivalente a resolver para las funciones  $u_1, u_2$  de forma independiente la siguiente EDP real:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} &= B \cdot \nabla(v) + \frac{1}{2} \text{Tr}(A^T H(v)), \quad (t, x, y) \in ]0, T[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ v(0, x, y) &= f(x, y). \end{cases} \quad (4.24)$$

donde  $H$  es la matriz Hessiana, y los coeficientes  $A, B$  viene determinados para cada  $(t, x, y) \in$

$[0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  por

$$B(t, x, y) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(b) \\ \operatorname{Im}(b) \end{bmatrix} (t, x + iy);$$

$$A(t, x, y) = \begin{bmatrix} |\sigma^1|^2 + |\sigma^2|^2 + 2\operatorname{Re}(\sigma^1 \sigma^2) & 2\operatorname{Im}(\sigma^1 \sigma^2) \\ 2\operatorname{Im}(\sigma^1 \sigma^2) & |\sigma^1|^2 + |\sigma^2|^2 - 2\operatorname{Re}(\sigma^1 \sigma^2) \end{bmatrix} (t, x + iy).$$

En efecto, al notar que  $u(t, x + iy, x - iy) = u_1(t, x, y) + iu_2(t, x, y)$ , se tiene:

- $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right);$
- $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right);$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \Delta u_1 + i \frac{1}{4} \Delta u_2;$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + i \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right);$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial (\bar{z}^*)^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + i \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right).$

Así, al remplazar las derivadas anteriores en (4.23), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + i \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{b}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + i \frac{b}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{b^*}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + i \frac{b^*}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{2\sigma^1 \sigma^2}{4} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + i \frac{2\sigma^1 \sigma^2}{4} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + \frac{2(\sigma^1)^*(\sigma^2)^*}{4} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + i \frac{2(\sigma^1)^*(\sigma^2)^*}{4} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + \frac{2|\sigma^1|^2 + |\sigma^2|^2}{4} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + i \frac{2|\sigma^1|^2 + |\sigma^2|^2}{4} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

De esta forma, al igualar las partes reales e imaginarias se obtiene que  $u_1$  y  $u_2$  satisfacen (4.23), y dado que sólo se usaron equivalencias, el recíproco se cumple. Es por esto que el estudio de la EDP (4.23) radica en estudiar la EDP real (4.24). Friedman en [10] establece la existencia y unicidad de solución  $v \in C^{1,2}([t_0, T] \times \mathbb{R}^2)$  a partir de la construcción de la solución fundamental asociada al (4.24), para lo cual es necesario que se cumplan las siguientes hipótesis:

- (i)  $A$  y  $B$  son continuos y acotados en  $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ ;

(iii) Existen constantes positivas  $\lambda_1, \lambda_2$  tales que para cada vector  $\xi \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\lambda_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(t,x) \xi_i \xi_j \leq \lambda_1 |\xi|^2, \quad (4.25)$$

para cada  $(t,x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$ .

(ii)  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^2$  y tiene crecimiento no exponencial, esto es, existe  $C > 0$  tal que para cada  $x \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|f(x)| \leq C e^{h|x|^2},$$

donde la constante positiva  $h$  satisface

$$h < \frac{\lambda_0}{T}.$$

(iv) Existe  $0 < \alpha \leq 1$  y  $M \geq 0$  tal que para cada  $x, y, \in \mathbb{R}^2$  y  $s, t \in [0, T]$ , se satisface:

$$|A_{ij}(t,x) - A_{ij}(s,y)| \leq M \left( |x-y|^\alpha + |t-s|^{\frac{\alpha}{2}} \right); \quad (4.26)$$

$$|b_i(t,x) - b_i(t,y)| \leq M |x-y|^\alpha. \quad (4.27)$$

Aquí es importante notar que la solución  $v$  es tal que para cada  $(t,x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^2$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t,x) = u(0,x) = f(x).$$

Con lo que se concluye que si  $u_1$  y  $u_2$  satisfacen (i),(ii),(iii), entonces la EDP (4.23) tiene solución  $u$ , de clase  $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{C})$  en sentido Wirtinger.

**Observación 4.2.1.** Notar que las condiciones (i),(ii) y (iii) se traducen a los coeficientes de la EDP (4.23) de la siguiente forma:

(v)  $b, \sigma_1$  y  $\sigma_2$  son continuos y acotados en  $[0, T] \times \mathbb{C}$ ;

(vi)  $f$  es continua en  $\mathbb{C}$ ;

(vii) Existe una constante positiva  $\lambda$  tal que para cada  $(t,z) \in [0, T] \times \mathbb{C}$  se tiene:

$$(|\sigma_1(t,z,z^*)| - |\sigma_2(t,z,z^*)|)^2 > \lambda; \quad (4.28)$$

(viii) Existe  $0 < \alpha \leq 1$  y  $M \geq 0$  tal que para cada  $x, y, \in \mathbb{R}^2$  y  $s, t \in [0, T]$ , se satisface:

$$|\sigma_1(t, z, z^*) - \sigma_1(s, w, w^*)| + |\sigma_2(t, z, z^*) - \sigma_2(s, w, w^*)| \leq M \left( |z - w|^\alpha + |t - s|^{\frac{\alpha}{2}} \right); \quad (4.29)$$

$$|b(t, z, z^*) - b(s, w, w^*)| \leq M |z - w|^\alpha. \quad (4.30)$$

En efecto, tanto la implicancia de (v) a (i), de (vi) a (ii) y de (viii) a (iv) son directas. Sin embargo para probar que (vii) implica (iii), se determina al probar que el menor valor propio de  $A$  es acotado inferiormente para cada  $(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{C}$ . De esta forma, se tiene que para cada  $(t, z) \in [0, t] \times \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A(t, z) - \lambda I) \\ &= (|\sigma^1|^2 + |\sigma^2|^2 + 2\operatorname{Re}(\sigma^1 \sigma^2) - \lambda) (|\sigma^1|^2 + |\sigma^2|^2 + 2\operatorname{Re}(\sigma^1 \sigma^2) - \lambda) - 4\operatorname{Im}(\sigma^1 \sigma^2)^2 \\ &\geq (|\sigma^1|^2 + |\sigma^2|^2 - \lambda) - 4\operatorname{Re}(\sigma^1 \sigma^2) - 4\operatorname{Re}(\sigma^1 \sigma^2) \\ &= (|\sigma^1|^2 + |\sigma^2|^2)^2 - 2\lambda (|\sigma^1|^2 + |\sigma^2|^2) + \lambda^2 - 4|\sigma^1 \sigma^2|^2 \\ &= (|\sigma^1|^2 - |\sigma^2|^2)^2 - 2\lambda (|\sigma^1|^2 + |\sigma^2|^2) + \lambda^2 \end{aligned}$$

donde las raíces del polinomio característico  $P$  vienen dadas por

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (|\sigma_1| + |\sigma_2|)^2; \\ \lambda_2 &= (|\sigma_1| - |\sigma_2|)^2. \end{aligned}$$

de donde se concluye que (viii) implica (iii), pero dada la construcción, se tiene que el recíproco también se cumple.

Por otro lado, aunque no tan preciso como en [10], en [4](Capítulo 14, página 463) se trabaja con la regularidad de la solución del problema (4.24), resultando que bajo las condiciones

a) *Regularidad:*

$$b, AA^t \in \mathcal{H}_T^\alpha(\mathbb{R}^2); \quad (4.31)$$

$$f \in \mathcal{H}^{\alpha+2}(\mathbb{R}^2). \quad (4.32)$$

b) *Positividad:* Existe una constante positiva  $\lambda$  tal que para cada vector  $\xi \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\sum_{i,j=1}^2 (AA^t)_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \quad (4.33)$$

para cada  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$ .



se asegura existencia y unicidad de solución  $v \in \mathcal{H}_T^{\alpha+2}(\mathbb{R}^2)$  de la EDP (4.24), donde además se asegura que las funciones

$$AA^t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, A \frac{\partial u}{\partial x}, A \frac{\partial u}{\partial y} \in \mathcal{H}_T^\alpha(\mathbb{R}^2).$$

**Observación 4.2.2.** Notar que las condiciones de regularidad y positividad (a) y (b) se traducen a los coeficientes de la EDP (4.23) de la siguiente forma:

c)  $b, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{H}_T^\alpha(\mathbb{C})$  y  $f \in \mathcal{H}^{\alpha+2}(\mathbb{C})$  (Ver apéndice A) ;

d) Existe una constante positiva  $\lambda$  tal que para cada  $(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{C}$  se tiene:

$$(|\sigma_1(t, z, z^*)| - |\sigma_2(t, z, z^*)|)^2 > \lambda. \quad (4.34)$$

En efecto, la implicancia de c) a a) es evidente, contrario a lo ocurrido en la implicancia de c) a b). Para demostrar esto hay que notar que la matriz  $A$  es simétrica por lo que  $AA^t = A^2$ , de donde demostrar que  $AA^t$  satisface b) se reduce a demostrar que el menor valor propio de  $A$  se a positivo. De esta forma se concluye al recordar la Observación 4.2.1.

Apartir de esto se concluye que si tanto la parte real como la imaginaria de la solución  $u$  de (4.23) satisfacen (4.31) y (4.33) entonces

$$u \in \mathcal{H}_T^{\alpha+2}(\mathbb{C}),$$

y a demás para cada  $j, k = 1, 2$ ,

$$b \frac{\partial u}{\partial z}, b \frac{\partial u}{\partial z^*}, \sigma^k \frac{\partial u}{\partial z}, \sigma^k \frac{\partial u}{\partial z^*}, \sigma^j \sigma^k \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*} \in \mathcal{H}_T^\alpha(\mathbb{C}).$$

**Teorema 4.2.1. (Fórmula de Feynman-kac)** Sean  $b, \sigma_1, \sigma_2$  y  $f$  satisfaciendo las condiciones de la observación 4.2.2, entonces la única solución de la EDP (4.23) satisface para cada  $z \in \mathbb{C}$ :

$$u(T, z, z^*) = \mathbb{E}^{(z, z^*)} [f(Z_T, Z_T^*)],$$

aquí,  $Z$  es la única solución débil de (4.1) donde se tienen invertidos los coeficientes de la variable temporal, i.e.,

$$Z_t = z + \int_0^t b(T-s, Z_s, Z_s^*) ds + \int_0^t \sigma_1(T-s, Z_s, Z_s^*) dW_s + \int_0^t \sigma_2(T-s, Z_s, Z_s^*) dW_s^*. \quad (4.35)$$

*Demostración.* Bajo las hipótesis de regularidad de los coeficientes y condición inicial de la EDP, se tiene gracias a la observación 4.2.2 que la solución única de (4.23) es de clase  $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{C})$ , donde las derivadas espaciales (variables complejas) se consideran en sentido Wirtiger. Así, al aplicar la fórmula de Itô, tenemos que para cada  $0 \leq t < T$

$$\begin{aligned}
 u(T-t, Z_t, Z_t^*) &= u(T, z, z^*) + \int_0^t \left\{ -\frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial z} + b^* \frac{\partial u}{\partial z^*} \right\} (T-s, Z_s, Z_s^*) ds \\
 &\quad + 2 \int_0^t \left\{ \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (|\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*} + \sigma_1^* \sigma_2^* \frac{\partial^2 u}{\partial (z^*)^2} \right\} (T-s, Z_s, Z_s^*) ds \\
 &\quad + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial z} (T-s, Z_s, Z_s^*) \sigma_1 (T-s, Z_s, Z_s^*) dW_s \\
 &\quad + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial z} (T-s, Z_s, Z_s^*) \sigma_2 (T-s, Z_s, Z_s^*) dW_s^* \\
 &\quad + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial z^*} (T-s, Z_s, Z_s^*) \sigma_1^* (T-s, Z_s, Z_s^*) dW_s^* \\
 &\quad + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial z^*} (T-s, Z_s, Z_s^*) \sigma_2^* (T-s, Z_s, Z_s^*) dW_s.
 \end{aligned}$$

Tomando esperanza a ambos lados de la ecuación, y usando que la integral con respecto a  $W$  y  $W^*$  son martingalas locales y que  $u$  resuelve la EDP (4.23), se obtiene

$$\mathbb{E}[u(T-t, Z_t, Z_t^*)] = u(T, z, z^*).$$

De esta forma, si se toma límite cuando  $t \rightarrow T$ ,

$$\mathbb{E}[f(Z_T, Z_T^*)] = \mathbb{E}[u(0, Z_T, Z_T^*)] = u(T, z, z^*),$$

con lo que se concluye la demostración. □

### 4.3. Esquemas numéricos y órdenes de convergencia

Como en el caso real valuado, por lo general no se puede describir explícitamente la ley del proceso definido por (4.1). Por lo tanto, los esquemas numéricos que se aproximan y, en cierto sentido, convergen a la única solución de (4.1) se convierten en una poderosa herramienta en el estudio y análisis de este tipo de objetos.

La presente sección presenta el análogo complejo de los esquemas de aproximación de Euler Maruyama y Milstein mencionados en la sección 2.1.4 para la SDE (4.1). Mostrando su tasa de convergencia e hipótesis involucradas.

### 4.3.1. Esquema de Euler Maruyama

Basados en el esquema de Euler Maruyama real (2.29), se construye un esquema de aproximación para la SDE (4.1), que presente bajo hipótesis similares a (2.30) y (2.31), un convergencia fuerte

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t - Z_t^n|^p \right] \leq C \delta_n^{\frac{p}{2}}, \quad (4.36)$$

junto con una convergencia débil para toda función  $g \in \mathcal{H}^{l+2}(\mathbb{C})$  (ver Apéndice A),

$$|\mathbb{E}[g(Z_T)] - \mathbb{E}[g(Z_T^n)]| \leq C \delta_n^{\gamma(l)}; \quad (4.37)$$

al requerir hipótesis similares a (2.33) y la Hölder continuidad requerida en el caso real, donde

$$\gamma(l) = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{si } l \in (0, 1) \\ \frac{1}{(3-l)} & \text{si } l \in (1, 2) \\ 1 & \text{si } l \in (2, 3) \end{cases},$$

$$\text{y } \delta_n = \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k).$$

**Definición 4.3.1.** Para toda partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , se define el esquema de aproximación de Euler Maruyama para la SDE (4.1)

$$Z_t^n = z_0 + \int_0^t b_n(s) ds + \int_0^t \sigma_n^1(s) dW_s + \int_0^t \sigma_n^2(s) dW_s^*, \quad (4.38)$$

donde para cada  $s \in [t_k, t_{k+1}[$ ,

$$\begin{aligned} b_n(s) &= b(t_k, Z_{t_k}^n, (Z_{t_k}^n)^*); \\ \sigma_n^j(s) &= \sigma^j(t_k, Z_{t_k}^n, (Z_{t_k}^n)^*), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Para la definición anterior, si se considera la función  $\eta$  dada para cada  $t \in [t_k, t_{k+1}[$  por  $\eta(t) = t_k$ , se tiene que el esquema de aproximación (4.38) se puede escribir equivalentemente por

$$\begin{aligned} Z_t^n &= z_0 + \int_0^t b_n(\eta(s)) ds + \int_0^t \sigma_n^1(\eta(s)) dW_s + \int_0^t \sigma_n^2(\eta(s)) dW_s^* \\ &= z_0 + \int_0^t b(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) ds + \int_0^t \sigma^1(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) dW_s \\ &\quad + \int_0^t \sigma^2(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) dW_s^*, \end{aligned}$$

**Lema 4.3.1.** Sea  $Z^n = (Z_t^n, t \geq 0)$  el esquema de Euler Maruyama para la SDE (4.1) presentado en (4.38) y  $\eta$  la función dada para cada  $t \in [t_k, t_{k+1}[$  por  $\eta(t) = t_k$ . Entonces las variaciones cuadráticas del proceso vienen dadas para cada  $t \geq 0$  por

- $\langle Z^n, Z^n \rangle_t = 4 \int_0^t \sigma^1 \left( \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^* \right) \sigma^2 \left( \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^* \right) ds;$
- $\langle (Z^n)^*, (Z^n)^* \rangle_t = 4 \int_0^t (\sigma^1)^* \left( \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^* \right) (\sigma^2)^* \left( \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^* \right) ds;$
- $\langle (Z^n)^*, Z^n \rangle_t = 2 \int_0^t \left( \left| \sigma^1 \left( \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^* \right) \right|^2 + \left| \sigma^2 \left( \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^* \right) \right|^2 \right) ds;$

Antes de probar las condiciones (4.36) y (4.37), se muestran algunas importantes propiedades que presenta el esquema de Euler Maruyama (4.38), las cuales cumple su símil real, y son condiciones requeridas para el buen desempeño del esquema.

**Lema 4.3.2.** Sea  $Z^n = (Z_t^n, t \in [0, T])$  el esquema de aproximación de Euler (4.38) de la SDE (4.1). Si los coeficientes  $b, \sigma^1, \sigma^2 \in C^{1,2}([0, T[ \times \mathbb{C})$  en sentido Wirtinger, satisfacen:

$$|b(t, z, z^*)| \leq M_b (1 + |z|); \quad (4.39)$$

$$|\sigma^1(t, z, z^*)| \leq M_{\sigma^1} (1 + |z|); \quad (4.40)$$

$$|\sigma^2(t, z, z^*)| \leq M_{\sigma^2} (1 + |z|). \quad (4.41)$$

Entonces para cada  $2 \leq p < \infty$  y  $0 < r \leq T$ , se tiene que

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |Z_t^n|^p \right] \leq K(r). \quad (4.42)$$

*Demostración.* Se obtiene de misma forma a como se probó el Lema 4.1.1, al recordar la definición del esquema de Euler Maruyama (4.38). □

De esta forma, se puede enunciar las hipótesis requeridas para probar (4.36). Resultado que se muestra y prueba a continuación.

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $Z$  la solución de (4.1) y  $Z^n = (Z_t^n, t \geq 0)$  el esquema de Euler (4.38). Si para los coeficientes  $b, \sigma^1, \sigma^2 \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{C})$  en sentido Wirtinger y existen  $L_1, L_2 > 0$  tales que para cada  $z, w \in \mathbb{C}$  y  $s, t \in [0, T]$ :*

$$\sum_{k \in \{1,2\}} \left| \sigma^k(t, z, z^*) - \sigma^k(s, w, w^*) \right|^2 + |b(t, z, z^*) - b(s, w, w^*)|^2 \leq L_1^2 (|t - s|^2 + |z - w|^2) \quad (4.43)$$

$$|\sigma^1(t, z, z^*)|^2 + |\sigma^2(t, z, z^*)|^2 + |b(t, z, z^*)|^2 \leq L_2^2, \quad (4.44)$$

Entonces para cada  $p > 1$ :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t - Z_t^n|^p \right] \leq C \delta_n^{\frac{p}{2}}. \quad (4.45)$$

con  $\delta_n = \max_{0 \leq k \leq n-1} |t_{k+1} - t_k|$ .

*Demostración.* Se comienza mencionado que la demostración se realiza mediante dos etapas, la primera al considerar el caso  $p \geq 2$ ; mientras que la segunda considera  $1 < p < 2$ . De esta forma, para cada  $p \geq 2$  y para cada  $t \in [0, T]$  se nota que

$$\begin{aligned} Z_t - Z_t^n &= \int_0^t (b(s, Z_s, Z_s^*) - b_n(s)) ds + \int_0^t (\sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) - \sigma_n^1(s)) dW_s \\ &\quad + \int_0^t (\sigma^2(s, Z_s, Z_s^*) - \sigma_n^2(s)) dW_s^*. \end{aligned}$$

Así, al tomar modulo  $p$ , acotar el módulo de la suma por la suma de los módulos, junto con acotar la potencia de la suma por la suma de las potencias, se tiene que

$$\begin{aligned} |Z_t - Z_t^n|^p &\leq C_p \left\{ \left| \int_0^t (b(s, Z_s, Z_s^*) - b_n(s)) ds \right|^p + \left| \int_0^t (\sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) - \sigma_n^1(s)) dW_s \right|^p \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^t (\sigma^2(s, Z_s, Z_s^*) - \sigma_n^2(s)) dW_s^* \right|^p \right\} \end{aligned}$$

De esta forma, gracias a la sublinealidad del supremo y la linealidad de la esperanza, se tiene que  $\forall r \in [t, T]$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |Z_t - Z_t^n|^p \right] &\leq C_p \left\{ \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t (b(s, Z_s, Z_s^*) - b_n(s)) ds \right|^p \right]}_{I_1} \right. \\
 &\quad + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t (\sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) - \sigma_n^1(s)) dW_s \right|^p \right]}_{I_2} \\
 &\quad \left. + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t (\sigma^2(s, Z_s, Z_s^*) - \sigma_n^2(s)) dW_s^* \right|^p \right]}_{I_3} \right\} \\
 &= C_p \{I_1 + I_2 + I_3\}
 \end{aligned}$$

Por lo que al sumar y restar  $b(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*)$ ,  $\sigma^1(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*)$  y  $\sigma^2(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*)$  se obtiene,

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq C_p \mathbb{E} \left[ \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t (b(s, Z_s, Z_s^*) - b(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*)) ds \right|^p}_{I_3} \right] \\
 &\quad + C_p \mathbb{E} \left[ \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t (b(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - b_n(s)) ds \right|^p}_{I_4} \right]. \\
 I_2 &\leq C_p \mathbb{E} \left[ \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t (\sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) - \sigma^1(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*)) dW_s \right|^p}_{I_5} \right] \\
 &\quad + C_p \mathbb{E} \left[ \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t (\sigma^1(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - \sigma_n^1(s)) dW_s \right|^p}_{I_6} \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 \leq C_p \mathbb{E} \left[ \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t (\sigma^2(s, Z_s, Z_s^*) - \sigma^2(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*)) dW_s^* \right|^p}_{I_7} \right] \\
 + \mathbb{E} \left[ \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t (\sigma^2(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - \sigma_n^2(s)) dW_s^* \right|^p}_{I_8} \right].
 \end{aligned}$$

de donde,

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |Z_t - Z_t^n|^p \right] \leq C_p^2 \{I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8\}. \quad (4.46)$$

De esta forma, se procede a acotar cada uno de los términos de  $I_k$ , con  $k \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

■ Acotando  $I_3$ :

Se procede distribuyendo el módulo  $p$  dentro de la integral, aplicando la hipótesis (4.43), tomando el supremo de la integral e intercambiando la integral con la esperanza.

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t (b(s, Z_s, Z_s^*) - b(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*)) ds \right|^p \right] \\
 &\leq \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \int_0^t |b(s, Z_s, Z_s^*) - b(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*)|^p ds \right] \\
 &\leq L_1^p \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \int_0^t |Z_s - Z_s^n|^p ds \right] \\
 &\leq L_1^p \mathbb{E} \left[ \int_0^r |Z_s - Z_s^n|^p ds \right] \\
 &\leq L_1^p \int_0^r \mathbb{E} [|Z_s - Z_s^n|^p] ds
 \end{aligned}$$

por lo que

$$I_3 \leq \widehat{C}_3 \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq s} |Z_u - Z_u^n|^p \right] ds \quad (4.47)$$

■ Acotando  $I_4$ : La primera parte se procede distribuyendo el módulo  $p$  dentro de la integral,

tomando el supremo de la integral e intercambiando la integral con la esperanza.

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t (b(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - b_n(s)) ds \right|^p \right] \\
 &\leq \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \int_0^t |b(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - b_n(s)|^p ds \right] \\
 &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^r |b(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - b_n(s)|^p ds \right] \\
 &\leq \int_0^r \mathbb{E} [|b(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - b_n(s)|^p] ds.
 \end{aligned}$$

Luego, al desarrollar el termino  $b_n(s)$ , suponiendo  $s \in [t_k, t_{k+1}[$ , y al utilizar la hipótesis (4.43), se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [|b(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - b_n(s)|^p] &= \mathbb{E} [|b(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - b(t_k, Z_{t_k}^n, (Z_{t_k}^n)^*)|^p] \\
 &\leq L_1^p \mathbb{E} \left[ (|s - t_k|^2 + |Z_s^n - Z_{t_k}^n|^2)^{\frac{p}{2}} \right] \\
 &\leq C_{\frac{p}{2}} L_1^p (|s - t_k|^p + \mathbb{E}[|Z_s^n - Z_{t_k}^n|^p]).
 \end{aligned}$$

Así, gracias a la definición del esquema de Euler Maruyama (4.38), al acotar la potencia de la suma por la suma de las potencias, al utilizar la hipótesis (4.44) y recordar que el módulo de un número complejo es igual al de su conjugado; se obtiene,

$$\left. \begin{aligned}
 |Z_s^n - Z_{t_k}^n|^p &= |Z_{t_k}^n + b(t_k, Z_{t_k}^n, (Z_{t_k}^n)^*)(s - t_k) + \sigma^1(t_k, Z_{t_k}^n, (Z_{t_k}^n)^*)(W_s - W_{t_k}) \\
 &\quad + \sigma^2(t_k, Z_{t_k}^n, (Z_{t_k}^n)^*)(W_s^* - W_{t_k}^*) - Z_{t_k}^n|^p \\
 &\leq C_{p,1} \{ (|b(t_k, Z_{t_k}^n, (Z_{t_k}^n)^*)(s - t_k)|^p + |\sigma^1(t_k, Z_{t_k}^n, (Z_{t_k}^n)^*)(W_s - W_{t_k})|^p \\
 &\quad + |\sigma^2(t_k, Z_{t_k}^n, (Z_{t_k}^n)^*)(W_s^* - W_{t_k}^*)|^p) \} \\
 &\leq C_{p,2} L_2^p \{ |s - t_k|^p + |W_s - W_{t_k}|^p + |W_s^* - W_{t_k}^*|^p \} \\
 &\leq C_{p,3} \{ |s - t_k|^p + |W_s - W_{t_k}|^p \}.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

De esta forma, al hacer uso del Lema 3.2.3, se tiene que,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [|b(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - b_n(s)|^p] &\leq C_{p,3} \{ |s - t_k|^p + \mathbb{E}[|W_s - W_{t_k}|^p] \} \\
 &\leq C_{p,3} \left\{ |s - t_k|^p + C_{p,4} |s - t_k|^{\frac{p}{2}} \right\} \\
 &\leq C_{p,5} \left\{ \delta_n^p + \delta_n^{\frac{p}{2}} \right\}
 \end{aligned}$$



con lo cual

$$I_4 \leq \int_0^r C_{p,5} \left\{ \delta_n^p + \delta_n^{\frac{p}{2}} \right\} ds \leq \widehat{C}_4 r \delta_n^{\frac{p}{2}} \quad (4.49)$$

- Acotando  $I_5$  e  $I_7$  : Se procede utilizando el Lema 3.2.4 junto con la hipótesis (4.43):

$$\begin{aligned} I_5 &= \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t \sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) - \sigma^1(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) dW_s \right|^p \right] \\ &\leq C_{p,1} \int_0^r \mathbb{E} \left[ \left| \sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) - \sigma^1(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \right|^p \right] ds \\ &\leq C_{p,1} L_1^p \int_0^r \mathbb{E} [|Z_s - Z_s^n|^p] ds, \end{aligned}$$

por lo que

$$I_5 \leq \widehat{C}_5 \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq s} |Z_u - Z_u^n|^p \right] ds. \quad (4.50)$$

Además de forma análoga, es decir, bajo los mismos argumentos se prueba que

$$I_7 \leq \widehat{C}_7 \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq s} |Z_u - Z_u^n|^p \right] ds. \quad (4.51)$$

- Acotando  $I_6$  e  $I_8$ : Se comienza utilizando el Lema 3.2.4

$$\begin{aligned} I_6 &= \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t \sigma^1(s, Z_s, Z_s^*) - \sigma_n^1(s) dW_s \right|^p \right] \\ &\leq C_{p,1} \int_0^r \mathbb{E} \left[ \left| \sigma^1(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - \sigma_n^1(s) \right|^p \right] ds, \end{aligned}$$

para luego desarrollar el termino  $\sigma_n^1(s)$ , suponiendo  $s \in [t_k, t_{k+1}[$ , y utilizar la hipótesis (4.43),

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left| \sigma^1(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - \sigma_n^1(s) \right|^p \right] &= \mathbb{E} \left[ \left| \sigma^1(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - \sigma^1(t_k, Z_{t_k}^n, (Z_{t_k}^n)^*) \right|^p \right] \\ &\leq L_1^p \mathbb{E} \left[ (|s - t_k|^2 + |Z_s^n - Z_{t_k}^n|^2)^{\frac{p}{2}} \right] \\ &\leq C_{p,1} L_1^p (|s - t_k|^p + \mathbb{E} [|Z_s^n - Z_{t_k}^n|^p]). \end{aligned}$$

Así, bajo el argumento (4.48), se tiene que

$$|Z_s^n - Z_{t_k}^n|^p \leq C_{p,2} \{ |s - t_k|^p + |W_s - W_{t_k}|^p \}.$$

Donde al remplazar y utilizar el Lema 3.2.3, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left| \sigma^1(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - \sigma_n^1(s) \right|^p \right] &\leq C_{p,2} \{ |s - t_k|^p + 2\mathbb{E} [|W_s - W_{t_k}|^p] \} \\ &\leq C_{p,2} \left\{ |s - t_k|^p + 2C_{p,3} |s - t_k|^{\frac{p}{2}} \right\} \\ &\leq C_{p,4} \left\{ \delta_n^p + \delta_n^{\frac{p}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

con lo que se concluye que

$$I_6 \leq C_{p,5} \int_0^r \left\{ \delta_n^p + \delta_n^{\frac{p}{2}} \right\} ds \leq \widehat{C}_6 r \delta_n^{\frac{p}{2}}. \quad (4.52)$$

Además de forma análoga, es decir, bajo el mismo se procedimiento se prueba que

$$I_8 \leq \widehat{C}_8 r \delta_n^{\frac{p}{2}}. \quad (4.53)$$

Luego de (4.47), (4.49), (4.50), (4.51), (4.52) y (4.53) se concluye que

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |Z_t - Z_t^n|^p \right] \leq K_1 r \delta_n^{\frac{p}{2}} + K_2 \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq s} |Z_t - Z_t^n|^p \right] ds.$$

Donde al aplicar la desigualdad de Gronwall ( Lema 2.1.12)

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |Z_t - Z_t^n|^p \right] \leq K_1 r \delta_n^{\frac{p}{2}} e^{K_2 r}.$$

Así, tomando límite cuando  $r \rightarrow T$ , se tiene que para cada  $p \geq 2$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t - Z_t^n|^p \right] \leq C \delta_n^{\frac{p}{2}}.$$

Finalmente, se aborda el caso  $1 < p < 2$ , gracias al resultado obtenido para  $p \geq 2$ . Esto es, para cada  $1 < p < 2$ , al aplicar A.3.3 y la desigualdad de Hölder A.3.2, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t - Z_t^n|^p \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t - Z_t^n| \right)^p \right] \\
 &\leq \mathbb{E} \left[ \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t - Z_t^n| \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}} \\
 &= \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t - Z_t^n|^2 \right]^{\frac{p}{2}} \\
 &\leq C \delta_n^{\frac{p}{2}}.
 \end{aligned}$$

□

Probado (4.36), resta enunciar las hipótesis necesarias para que se cumpla (4.37), Resultado que se muestra y prueba a continuación.

**Teorema 4.3.2.** Sea  $Z = (Z_t, t \in [0, T])$  la solución de (4.1) y  $Z^n = (Z_t^n, t \in [0, T])$  el esquema de aproximación de Euler Maruyama (4.38). Si los coeficientes  $b, \sigma^1$  y  $\sigma^2$  de  $Z$  cumplen:

i) Regularidad:

$$b, \sigma^j \sigma^k \in \mathcal{H}_T^l([0, T] \times \mathbb{C}), \quad j, k = 1, 2; \quad (4.54)$$

ii) Positividad: Existe  $\lambda > 0$  tal que para cada  $(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{C}$

$$\left( |\sigma^1(t, z, z^*)| - |\sigma^2(t, z, z^*)| \right)^2 \geq \lambda. \quad (4.55)$$

Entonces para toda función  $g \in \mathcal{H}^{l+2}(\mathbb{C})$  (ver Apéndice A), se tiene que

$$|\mathbb{E}[g(Z_T, Z_T^*)] - \mathbb{E}[g(Z_T^n, (Z_T^n)^*)]| \leq C \delta_n^{\gamma(l)}. \quad (4.56)$$

$$\text{donde } \gamma(l) = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{si } l \in (0, 1) \\ \frac{1}{(3-l)} & \text{si } l \in (1, 2), \text{ y } \delta_n = \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k). \\ 1 & \text{si } l \in (2, 3) \end{cases}$$

*Demostración.* Dada las hipótesis (4.54) y (4.55), gracias a la Observación 4.2.2, se puede considerar  $u$  cómo la única solución del problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, z, z^*) &= \mathcal{L}u(t, z, z^*) \\ u(0, z, z^*) &= g(z, z^*), \end{cases} \quad (4.57)$$

con  $(t, z, z^*) \in ]0, T[ \times \mathbb{C}$ , donde el operador  $\mathcal{L}$  está definido por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(t, z, z^*) &= b(T-t, z, z^*) \frac{\partial u}{\partial z}(t, z, z^*) + b^*(T-t, z, z^*) \frac{\partial u}{\partial z^*}(t, z, z^*) \dots \\ &+ 2\sigma_1(T-t, z, z^*) \sigma_2(T-t, z, z^*) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t, z, z^*) \dots \\ &+ 2\sigma_1^*(T-t, z, z^*) \sigma_2^*(T-t, z, z^*) \frac{\partial^2 u}{\partial (z^*)^2}(t, z, z^*) \dots \\ &+ 2 \left( |\sigma_1(T-t, z, z^*)|^2 + |\sigma_2(T-t, z, z^*)|^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*}(t, z, z^*). \end{aligned}$$

Luego por la fórmula de Feynman-kac (Teorema 4.2.1), se tiene que

$$\mathbb{E}[u(T, z, z^*)] = \mathbb{E}^{(z, z^*)}[g(Z_T, Z_T^*)]$$

de donde se tiene

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[g(Z_T)] - \mathbb{E}[g(Z_T^n)]| &= |\mathbb{E}[u(T, z, z^*)] - \mathbb{E}[u(0, Z_T^n, (Z_T^n)^*)]| \\ &= |\mathbb{E}[u(0, Z_T^n, (Z_T^n)^*)] - \mathbb{E}[u(T, z, z^*)]| \\ &= |\mathbb{E}[u(0, Z_T^n, (Z_T^n)^*)] - \mathbb{E}[u(T, Z_0^n, (Z_0^n)^*)]| \\ &= |\mathbb{E}[u(0, Z_T^n, (Z_T^n)^*)] - u(T, Z_0^n, (Z_0^n)^*)|. \end{aligned}$$

De esta forma, aplicando la fórmula de Itô (Teorema 3.3.2) y remplazar las variaciones cuadráticas del esquema de Euler (Lema 4.3.1), se obtiene

$$\begin{aligned}
u(0, Z_T^n, (Z_T^n)^*) &= u(T, Z_0^n, (Z_0^n)^*) - \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) ds \\
&+ \int_0^T b\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \frac{\partial u}{\partial z}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) ds \\
&+ \int_0^T b^*\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \frac{\partial u}{\partial z^*}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) ds \\
&+ \int_0^T \sigma^1\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \frac{\partial u}{\partial z}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) dW_s \\
&+ \int_0^T (\sigma^1)^*\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \frac{\partial u}{\partial z^*}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) dW_s^* \\
&+ \int_0^T \sigma^2\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \frac{\partial u}{\partial z}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) dW_s \\
&+ \int_0^T (\sigma^2)^*\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \frac{\partial u}{\partial z^*}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) dW_s \\
&+ 2 \int_0^T (\sigma^1 \sigma^2)\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) ds \\
&+ 2 \int_0^T (\sigma^1 \sigma^2)^*\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) ds \\
&+ 2 \int_0^T \left(|\sigma^1|^2 + |\sigma^2|^2\right)\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) ds.
\end{aligned}$$

Luego como  $u$  es solución de (4.57), al remplazar  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
 & |\mathbb{E}[g(Z_T)] - \mathbb{E}[g(Z_T^n)]| \\
 & \leq \underbrace{\left| \mathbb{E} \left[ \int_0^T \frac{\partial u}{\partial z} (T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \left\{ b \left( \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^* \right) - b(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \right\} ds \right] \right|}_{I_1} \\
 & + \underbrace{\left| \mathbb{E} \left[ \int_0^T \frac{\partial u}{\partial z^*} (T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \left\{ b^* \left( \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^* \right) - b^*(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \right\} ds \right] \right|}_{I_2} \\
 & + \underbrace{\left| 2\mathbb{E} \left[ \int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*} (T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \left\{ \left| \sigma^1 \left( \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^* \right) \right|^2 - \left| \sigma^1(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \right|^2 \right\} ds \right] \right|}_{I_3} \\
 & + \underbrace{\left| 2\mathbb{E} \left[ \int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*} (T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \left\{ \left| \sigma^2 \left( \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^* \right) \right|^2 - \left| \sigma^2(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \right|^2 \right\} ds \right] \right|}_{I_4} \\
 & + \underbrace{\left| 2\mathbb{E} \left[ \int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*} (T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \left\{ \sigma^1 \sigma^2 \left( \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^* \right) - \sigma^1 \sigma^2(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \right\} ds \right] \right|}_{I_5} \\
 & + \underbrace{\left| 2\mathbb{E} \left[ \int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*} (T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \left\{ (\sigma^1)^* (\sigma^2)^* \left( \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^* \right) - (\sigma^1)^* (\sigma^2)^*(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \right\} ds \right] \right|}_{I_6}.
 \end{aligned}$$

De donde se puede acotar cada termino  $I_k$ , con  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Para acotar  $I_1$  se distribuye el módulo dentro de la esperanza e integral, y se continua sumando y restando  $b\left(T - \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right)$ . De esta forma

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \left| \mathbb{E} \left[ \int_0^T \frac{\partial u}{\partial z}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \left\{ b\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) - b\left(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*\right) \right\} ds \right] \right| \\
 &\leq \left| \mathbb{E} \left[ \int_0^T b\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \left\{ \frac{\partial u}{\partial z}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - \frac{\partial u}{\partial z}(T-\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) \right\} ds \right] \right| \\
 &\quad + \left| \mathbb{E} \left[ \int_0^T b\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \frac{\partial u}{\partial z}(T-\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - b\left(s, Z_s^n, (Z_s^n)^*\right) \frac{\partial u}{\partial z}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) ds \right] \right|. \\
 &\leq \underbrace{\left| \mathbb{E} \left[ \int_0^T b\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \left\{ \frac{\partial u}{\partial z}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - \frac{\partial u}{\partial z}(T-\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) \right\} ds \right] \right|}_{I_1^1} \\
 &\quad + \underbrace{\left| \mathbb{E} \left[ \int_0^T \left( b \frac{\partial u}{\partial z} \right) (T-\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) - \left( b \frac{\partial u}{\partial z} \right) (T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) ds \right] \right|}_{I_1^2} \\
 &= I_1^1 + I_1^2.
 \end{aligned}$$

Para el primer término se procede distribuyendo el módulo dentro de la integral, para luego hacer uso de que  $b$  es acotada y que la función  $u \in \mathcal{H}_T^{l+2}(\mathbb{C})$  debido a la Observación 4.2.2.

$$\begin{aligned}
 I_1^1 &= \left| \mathbb{E} \left[ \int_0^T b\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \left\{ \frac{\partial u}{\partial z}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - \frac{\partial u}{\partial z}(T-\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) \right\} ds \right] \right| \\
 &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T \left| b\left(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) \right| \left| \frac{\partial u}{\partial z}(T-s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) - \frac{\partial u}{\partial z}(T-\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) \right| ds \right] \\
 &= K_b \mathbb{E} \left[ \int_0^T |s - \eta(s)|^{\frac{l}{2}} + |Z_s^n - Z_{\eta(s)}^n|^l ds \right].
 \end{aligned}$$

Luego como

$$\begin{aligned}
 Z_s^n - Z_{\eta(s)}^n &= b\left(T - \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) (s - \eta(s)) + \sigma^1\left(T - \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) (W_s - W_{\eta(s)}) \\
 &\quad + \sigma^2\left(T - \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*\right) (W_s^* - W_{\eta(s)}^*),
 \end{aligned}$$

utilizando que  $b$ ,  $\sigma^1$  y  $\sigma^2$  son acotadas junto con el Lema 3.2.3, se tiene que

$$\begin{aligned} I_1^1 &\leq K_b \left\{ \delta_n^{\frac{l}{2}} T + C_{l,1} \left( K_b^l \delta_n^l T + K_{\sigma^1}^l \int_0^T \mathbb{E} \left[ |W_s - W_{\eta(s)}|^l \right] + K_{\sigma^2}^l \int_0^T \mathbb{E} \left[ |W_s^* - W_{\eta(s)}^*|^l \right] ds \right) \right\} \\ &\leq K_b T \left\{ \delta_n^{\frac{l}{2}} + C_{l,1} \left( K_b^l \delta_n^{\frac{l}{2}} + C_{l,2} K_{\sigma^1}^l \delta_n^{\frac{l}{2}} \right) \right\} \\ &\leq C_{l,3} \delta_n^{\frac{l}{2}}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$I_1^1 \leq K_{1,1} \delta_n^{\gamma(l)}. \quad (4.58)$$

Por otro lado, para acotar  $I_1^2$ , se procede distribuyendo el módulo dentro de la integral, gracias a la linealidad de la integral y la esperanza; para luego utilizar que la función  $b \frac{\partial u}{\partial z} \in \mathcal{H}_T^l(\mathbb{C})$  debido a la Observación 4.2.2. De esta forma

$$\begin{aligned} I_1^2 &= \left| \mathbb{E} \left[ \int_0^T \left( b \frac{\partial u}{\partial z} \right) (T - \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) - \left( b \frac{\partial u}{\partial z} \right) (T - s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) ds \right] \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^T \left| \left( b \frac{\partial u}{\partial z} \right) (T - \eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) - \left( b \frac{\partial u}{\partial z} \right) (T - s, Z_s^n, (Z_s^n)^*) \right| ds \right] \\ &= K_b \mathbb{E} \left[ \int_0^T |s - \eta(s)|^{\frac{l}{2}} + |Z_s^n - Z_{\eta(s)}^n|^l ds \right] \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$I_1^2 \leq K_{1,2} \delta_n^{\gamma(l)}. \quad (4.59)$$

Así, bajo (4.58) y (4.59), resulta

$$I_1 \leq K_1 \delta_n^{\gamma(l)}. \quad (4.60)$$

De aquí es claro que el procedimiento para acotar los terminos  $I_k$  restantes es idéntico al utilizado para acotar  $I_1$ , puesto que las hipótesis y la Observación 4.2.2 establecen la misma regularidad para las funciones presentes en cada término. De donde se concluye

$$|\mathbb{E}[g(Z_T)] - \mathbb{E}[g(Z_T^n)]| \leq \sum_{k=1}^6 I_k \leq K \delta^{\gamma(l)}.$$

□

Con esto se prueba que el esquema de Euler Maruyama (4.38) que se postuló es consistente, puesto que además de definirse con la misma intuición del esquema real, ambos presentan el mismo comportamiento. Esto es, bajo hipótesis idénticas a las reales se cumple (4.36) y (4.37). No obstante, en el próximo capítulo se ilustran pruebas numéricas para comprobar si lo anterior aplica numéricamente.



### 4.3.2. Esquema de Milstein

Basados en el esquema de Milstein real (2.37), se construye un esquema de aproximación para la SDE (4.1), que mejore el desempeño trayectorial del esquema de Euler Maruyama (4.38). Esto es, bajo hipótesis similares (2.38) - (2.46) presente una convergencia fuerte

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t - Z_t^n| \right] \leq C \delta_n. \quad (4.61)$$

Para definir el esquema de Milstein complejo se necesita introducir primero para cada función  $u \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{C})$  en sentido Wirtinger, los siguientes operadores:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 u &= \frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial z} + b^* \frac{\partial u}{\partial z^*} + 2\sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \left( |\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z^*} + 2\sigma_1^* \sigma_2^* \frac{\partial^2 u}{\partial (z^*)^2}; \\ \mathcal{L}_1 u &= \sigma^1 \frac{\partial u}{\partial z} + (\sigma^2)^* \frac{\partial u}{\partial z^*}; \\ \mathcal{L}_2 u &= \sigma^2 \frac{\partial u}{\partial z} + (\sigma^1)^* \frac{\partial u}{\partial z^*}. \end{aligned}$$

De esta forma se puede precisar correctamente el Esquema de Milstein.

**Definición 4.3.2.** Considere una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T \in \mathbb{R}$ . Se define  $\forall n \in \mathbb{N}$  el esquema de Milstein de aproximación numérica, para la SDE (4.1)

$$Z_t^n = Z_0 + \int_0^t b_n(s) ds + \int_0^t \sigma_n^1(s) dW_s + \int_0^t \sigma_n^2(s) dW_s^* + E(t, n). \quad (4.62)$$

donde

$$\begin{aligned} E(t, n) &= \int_0^t \left( \mathcal{L}_1 \sigma_n^1(s) \int_{\eta(s)}^s dW_r \right) dW_s + \int_0^t \left( \mathcal{L}_2 \sigma_n^1(s) \int_{\eta(s)}^s dW_r^* \right) dW_s \dots \\ &+ \int_0^t \left( \mathcal{L}_1 \sigma_n^2(s) \int_{\eta(s)}^s dW_r \right) dW_s^* + \int_0^t \left( \mathcal{L}_2 \sigma_n^2(s) \int_{\eta(s)}^s dW_r^* \right) dW_s^*. \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} b_n(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} b(\eta(t), Z_{\eta(t)}^n, (Z_{\eta(t)}^n)^*); \\ \sigma_n^i(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^i(\eta(t), Z_{\eta(t)}^n, (Z_{\eta(t)}^n)^*), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

**Observación 4.3.1.** En la definición anterior, algunas integrales dobles de la expresión  $E(t, n)$  se pueden calcular de forma explícita, resultando que :

$$\begin{aligned}\int_{\eta(t)}^t \int_{\eta(t)}^s dW_r dW_s &= \frac{1}{2} (W_t - W_{\eta(t)})^2; \\ \int_{\eta(t)}^t \int_{\eta(t)}^s dW_r^* dW_s^* &= \frac{1}{2} (W_t^* - W_{\eta(t)}^*)^2.\end{aligned}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\int_{\eta(t)}^t \int_{\eta(t)}^s dW_r dW_s &= \int_{\eta(t)}^t (W_s - W_{\eta(t)}) dW_s = \int_{\eta(t)}^t W_s dW_s - W_{\eta(t)} (W_t - W_{\eta(t)}) \\ &= \frac{1}{2} (W_t^2 - W_{\eta(t)}^2) - W_{\eta(t)} W_t + W_{\eta(t)}^2 \\ &= \frac{1}{2} (W_t^2 - 2W_{\eta(t)} W_t + W_{\eta(t)}^2) \\ &= \frac{1}{2} (W_t - W_{\eta(t)})^2.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\int_{\eta(t)}^t \int_{\eta(t)}^s dW_r^* dW_s^* = \left( \int_{\eta(t)}^t \int_{\eta(t)}^s dW_r dW_s \right)^* = \left( \frac{1}{2} (W_t - W_{\eta(t)})^2 \right)^* = \frac{1}{2} (W_t^* - W_{\eta(t)}^*)^2.$$

Antes de probar la convergencia fuerte (4.61) deseada para el esquema de Milstein (4.62), se necesita ver un resultado de acotamiento previo.

**Lema 4.3.3.** Sea  $Z^n = (Z_t^n, t \in [0, T])$  el esquema de aproximación de Milstein (4.62) de la SDE (4.1). Si los coeficientes  $b, \sigma^1, \sigma^2 \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{C})$  en sentido Wirtinger; satisfacen:

$$|b(t, z, z^*)| + |\mathcal{L}_i b(t, z, z^*)| \leq M_b (1 + |z|), \quad i \in \{1, 2\}; \quad (4.63)$$

$$|\sigma^1(t, z, z^*)| + |\mathcal{L}_i \sigma^1(t, z, z^*)| \leq M_{\sigma^1} (1 + |z|), \quad i \in \{1, 2\}; \quad (4.64)$$

$$|\sigma^2(t, z, z^*)| + |\mathcal{L}_i \sigma^2(t, z, z^*)| \leq M_{\sigma^2} (1 + |z|), \quad i \in \{1, 2\}. \quad (4.65)$$

Entonces para cada  $2 \leq p < \infty$  y  $0 < r \leq T$ , se tiene que :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |Z_t^n|^p \right] \leq K(p, r). \quad (4.66)$$

*Demostración.* Se comienza considerando la función  $\eta$  dada para cada  $t \in [t_k, t_{k+1}[$  por  $\eta(t) =$

$t_k$ , junto con desarrollar  $Z^n$  y distribuir el módulo dentro de la integral y esperanza. De esta forma se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |Z_t^n|^p \right] &= \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t b(\eta(s), Z_s^n, (Z_s^n)^*) ds + \int_0^t \sigma^1(\eta(s), Z_s^n, (Z_s^n)^*) dW_s \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_0^t \sigma^2(\eta(s), Z_s^n, (Z_s^n)^*) dW_s^* + E(n, t) \right|^p \right] \\
 &\leq C(p) \left\{ \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t b(\eta(s), Z_s^n, (Z_s^n)^*) ds \right|^p \right]}_{I_1} \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t \sigma^1(\eta(s), Z_s^n, (Z_s^n)^*) dW_s \right|^p \right]}_{I_2} \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t \sigma^2(\eta(s), Z_s^n, (Z_s^n)^*) dW_s^* \right|^p \right]}_{I_3} \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |E(n, t)|^p \right]}_{I_4} \right\} \\
 &= C(p)(I_1 + I_2 + I_3 + I_4).
 \end{aligned}$$

Donde los términos  $I_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$  se acotan de igual forma como se hizo en el Lema 4.1.1, obteniendo que para cada  $i = 1, 2, 3$

$$I_i \leq K_i(p)r + K_i(p) \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq s} |Z_t^n|^p \right] ds. \tag{4.67}$$

Por lo que se procede a acotar el término  $I_4$ . Para ello se ocupa su definición y se aplica la

sublinealidad del supremo y la linealidad de la integral. De esta forma se obtiene

$$\begin{aligned}
 I_4 = \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |E(n, t)|^p \right] &\leq C(p) \left\{ \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma_n^1(u) dW_u \right) dW_s \right|^p \right]}_{I_4^1} \right. \\
 &+ \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 \sigma_n^1(u) dW_u^* \right) dW_s \right|^p \right]}_{I_4^2} \\
 &+ \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma_n^2(u) dW_u \right) dW_s^* \right|^p \right]}_{I_4^3} \\
 &\left. + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 \sigma_n^2(u) dW_u^* \right) dW_s^* \right|^p \right]}_{I_4^4} \right\} \\
 &\leq C(p) (I_4^1 + I_4^2 + I_4^3 + I_4^4).
 \end{aligned}$$

De esta forma se procede a acotar cada término de forma independiente. Para acotar  $I_1$  se comienza utilizando el Lema 3.2.4 y acotando el integrando por su supremo hasta el tiempo  $s$ . De esta forma, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 I_4^1 &= \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} \left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma_n^1(u) dW_u \right) dW_s \right|^p \right] \\
 &\leq C_1(p) \int_0^r \mathbb{E} \left[ \left| \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma_n^1(u) dW_u \right|^p \right] ds \\
 &\leq C_1(p) \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{\eta(s) \leq t \leq s} \left| \int_{\eta(s)}^t \mathcal{L}_1 \sigma_n^1(u) dW_u \right|^p \right] ds.
 \end{aligned}$$

Luego se aplica el Lema 3.2.4 nuevamente, junto con la hipótesis (4.64). Para después acotar el cuadrado de la suma por la suma de los cuadrados, hacer la esperanza independiente de la

integral e integrar los términos resultantes. De esta forma,

$$\begin{aligned}
 I_4^1 &\leq C_1^2 \int_0^r \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ |\mathcal{L}_1 \sigma_n^1(u)|^p \right] du \right) ds \\
 &\leq C_1^2 M_{\sigma^1}^p \int_0^r \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ \left( 1 + |Z_{\eta(u)}^n| \right)^p \right] du \right) ds \\
 &\leq 2C_1^2 M_{\sigma^1}^p \int_0^r \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ 1 + |Z_{\eta(u)}^n|^p \right] du \right) ds \\
 &\leq C_3 \int_0^r \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ 1 + \sup_{0 \leq t \leq s} |Z_{\eta(t)}^n|^p \right] du \right) ds \\
 &\leq C_3 \int_0^r \left( \delta_n + \delta_n \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq s} |Z_{\eta(t)}^n|^p \right] \right) ds.
 \end{aligned}$$

Así, al acotar el supremo de la partición por el supremo sobre todo el intervalo e integrar, se obtiene

$$I_4^1 \leq k_1(p)r\delta_n + k_1(p)\delta_n \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq s} |Z_t^n|^p \right] ds. \quad (4.68)$$

Análogamente, se logra acotar los términos  $I_4^k$ , con  $k \in \{2, 3, 4\}$ , resultando de esta forma

$$I_4 \leq K_4(p)r\delta_n + K_4(p)\delta_n \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq s} |Z_t^n|^p \right] ds. \quad (4.69)$$

Así, gracias a (4.67) y (4.69), se tiene

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq r} |Z_t^n|^p \right] \leq \hat{K}_1(p)r + \hat{K}_2(p)\delta_n \int_0^r \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq s} |Z_t^n|^p \right] ds.$$

Donde al aplicar Gronwall (Lema 2.1.12), se tiene que

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{r \leq t \leq R} |Z_t^n|^p \right] \leq \hat{K}_1(p)r e^{\hat{K}_2(p)\delta_n r} \leq \hat{K}_3(p, r). \quad (4.70)$$

□

Con esto, se puede enunciar las hipótesis requeridas para probar (4.61). Resultado que se muestra y prueba a continuación.

**Teorema 4.3.3.** Sea  $Z$  la solución de (4.1) y  $Z^n$  como en (4.62) la aproximación mediante el esquema de Milstein. Si los coeficientes  $b, \sigma^1, \sigma^2 \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{C})$  en sentido Wirtinger, satisfacen:

$$|b(t, z, z^*) - b(t, w, w^*)| \leq M_1 |z - w|; \quad (4.71)$$

$$|\sigma^1(t, z, z^*) - \sigma^1(t, w, w^*)| \leq M_2 |z - w|; \quad (4.72)$$

$$|\sigma^2(t, z, z^*) - \sigma^2(t, w, w^*)| \leq M_3 |z - w|; \quad (4.73)$$

$$|\mathcal{L}_i \sigma^1(t, z, z^*) - \mathcal{L}_i \sigma^1(t, w, w^*)| \leq M_4 |z - w|, i \in \{1, 2\}; \quad (4.74)$$

$$|\mathcal{L}_i \sigma^2(t, z, z^*) - \mathcal{L}_i \sigma^2(t, w, w^*)| \leq M_5 |z - w|, i \in \{1, 2\}; \quad (4.75)$$

$$|b(t, z, z^*)| + |\mathcal{L}_i b(t, z, z^*)| \leq M_6 (1 + |z|), i \in \{0, 1, 2\}; \quad (4.76)$$

$$|\sigma^1(t, z, z^*)| + |\mathcal{L}_i \sigma^1(t, z, z^*)| \leq M_7 (1 + |z|), i \in \{0, 1, 2\}; \quad (4.77)$$

$$|\sigma^2(t, z, z^*)| + |\mathcal{L}_i \sigma^2(t, z, z^*)| \leq M_8 (1 + |z|), i \in \{0, 1, 2\}; \quad (4.78)$$

$$|b(s, z, z^*) - b(t, z, z^*)| \leq M_9 (1 + |z|) |s - t|^{\frac{1}{2}}; \quad (4.79)$$

$$|\sigma^1(s, z, z^*) - \sigma^1(t, z, z^*)| \leq M_{10} (1 + |z|) |s - t|^{\frac{1}{2}}; \quad (4.80)$$

$$|\sigma^2(s, z, z^*) - \sigma^2(t, z, z^*)| \leq M_{11} (1 + |z|) |s - t|^{\frac{1}{2}}; \quad (4.81)$$

$$|\mathcal{L}_i \sigma^1(s, z, z^*) - \mathcal{L}_i \sigma^1(t, z, z^*)| \leq M_{12} (1 + |z|) |s - t|^{\frac{1}{2}}, i \in \{1, 2\}; \quad (4.82)$$

$$|\mathcal{L}_i \sigma^2(s, z, z^*) - \mathcal{L}_i \sigma^2(t, z, z^*)| \leq M_{13} (1 + |z|) |s - t|^{\frac{1}{2}}, i \in \{1, 2\}; \quad (4.83)$$

$$(4.84)$$

Entonces para cada  $1 < p \leq 2$ , se tiene

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[|Z_t - Z_t^n|^p] \leq C \delta_n^p, \quad (4.85)$$

donde  $\delta_n = \max_{0 \leq k \leq n-1} |t_{k+1} - t_k|$ .

*Demostración.* Notemos que para  $M = Z, Z^n$ , al aplicar formula de Itô (3.3.2) a los coeficientes  $b, \sigma^1$  y  $\sigma^2$  se tiene

$$\begin{aligned} db(t, M_t, M_t^*) &= \mathcal{L}_0 b(t, M_t, M_t^*) dt + \mathcal{L}_1 b(t, M_t, M_t^*) dW_t + \mathcal{L}_2 b(t, M_t, M_t^*) dW_t^*; \\ d\sigma^1(t, M_t, M_t^*) &= \mathcal{L}_0 \sigma^1(t, M_t, M_t^*) dt + \mathcal{L}_1 \sigma^1(t, M_t, M_t^*) dW_t + \mathcal{L}_2 \sigma^1(t, M_t, M_t^*) dW_t^*; \\ d\sigma^2(t, M_t, M_t^*) &= \mathcal{L}_0 \sigma^2(t, M_t, M_t^*) dt + \mathcal{L}_1 \sigma^2(t, M_t, M_t^*) dW_t + \mathcal{L}_2 \sigma^2(t, M_t, M_t^*) dW_t^*. \end{aligned}$$

De esta forma, si se considera la función  $\eta$  dada para cada  $t \in [t_k, t_{k+1}[$  por  $\eta(t) = t_k$ ; se tiene que  $\forall t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned}
 Z_t - Z_t^n &= \int_0^t \left( b(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) + \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 b(u, Z_u, Z_u^*) du \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 b(u, Z_u, Z_u^*) dW_u + \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 b(u, Z_u, Z_u^*) dW_u^* \right) ds \\
 &\quad + \int_0^t \left( \sigma^1(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) + \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) du \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) dW_u + \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) dW_u^* \right) dW_s \\
 &\quad + \int_0^t \left( \sigma^2(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) + \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 \sigma^2(u, Z_u, Z_u^*) du \dots \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma^2(u, Z_u, Z_u^*) dW_u + \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 \sigma^2(u, Z_u, Z_u^*) dW_u^* \right) dW_s \\
 &\quad - \int_0^t b_n(s) ds - \int_0^t \left( \sigma_n^1(s) + \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma_n^1(u) dW_u + \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 \sigma_n^1(u) dW_u^* \right) dW_s \\
 &\quad - \int_0^t \left( \sigma_n^2(s) + \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma_n^2(u) dW_u + \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 \sigma_n^2(u) dW_u^* \right) dW_s^* - E(t, n).
 \end{aligned}$$

Así, al reagrupar los términos se tiene que

$$\begin{aligned}
 Z_t - Z_t^n &= \int_0^t \left( b(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) - b_n(s) \right) ds + \int_0^t \left( \sigma^1(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) - \sigma_n^1(s) \right) dW_s \\
 &\quad + \int_0^t \left( \sigma^2(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) - \sigma_n^2(s) \right) dW_s^* \\
 &\quad + \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_2 \sigma_n^1(u) dW_u^* \right) dW_s \\
 &\quad + \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_1 \sigma_n^1(u) dW_u \right) dW_s \\
 &\quad + \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma^2(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_1 \sigma_n^2(u) dW_u \right) dW_s^* \\
 &\quad + \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 \sigma^2(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_2 \sigma_n^2(u) dW_u^* \right) dW_s^* + \tilde{E}(t, n).
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{E}(t, n) = & - \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 b(u, Z_u, Z_u^*) du \right) ds - \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 b(u, Z_u, Z_u^*) dW_u \right) ds \\ & - \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 b(u, Z_u, Z_u^*) dW_u^* \right) ds - \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) du \right) dW_s \\ & - \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 \sigma^2(u, Z_u, Z_u^*) du \right) dW_s^*,\end{aligned}$$

Luego al aplicar el módulo cuadrado y esperanza, acotar el cuadrado de la suma con la suma de los cuadrados y utilizandr la linealidad del valor esperado, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ |Z_t - Z_t^n|^2 \right] \leq & C \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left| \int_0^t \left( b(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) - b_n(s) \right) ds \right|^2}_{I_1} \right] \\ & + C \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left| \int_0^t \left( \sigma^1(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) - \sigma_n^1(s) \right) dW_s \right|^2}_{I_2} \right] \\ & + C \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left| \int_0^t \left( \sigma^2(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) - \sigma_n^2(s) \right) dW_s^* \right|^2}_{I_3} \right] \\ & + C \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_1 \sigma_n^1(u) dW_u \right) dW_s \right|^2}_{I_4} \right] \\ & + C \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_2 \sigma_n^1(u) dW_u^* \right) dW_s \right|^2}_{I_5} \right] \\ & + C \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma^2(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_1 \sigma_n^2(u) dW_u \right) dW_s^* \right|^2}_{I_6} \right] \\ & + C \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 \sigma^2(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_2 \sigma_n^2(u) dW_u^* \right) dW_s^* \right|^2}_{I_7} \right] + C \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left| \tilde{E}(t, n) \right|^2}_{I_8} \right].\end{aligned}$$



Esto es,

$$\mathbb{E} \left[ |Z_t - Z_t^n|^2 \right] \leq C_p \{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8\}. \quad (4.86)$$

De donde se procede a acotar cada uno de los términos  $I_k$ , con  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

■ Acotando  $I_1$ :

El resultado se obtiene al introducir el módulo al cuadrado dentro de la integral, siguiendo con la aplicación de la hipótesis (4.71) para finalmente intercambiar el orden de las integrales,

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t \left( b(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) - b_n(s) \right) ds \right|^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t \left( b(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) - b(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) \right) ds \right|^2 \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^t \left| b(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) - b(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) \right|^2 ds \right] \\ &\leq M_1^2 \mathbb{E} \left[ \int_0^t |Z_{\eta(s)} - Z_{\eta(s)}^n|^2 ds \right] \end{aligned}$$

por lo que

$$I_1 \leq K_1 \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E} \left[ |Z_u - Z_u^n|^2 \right] ds. \quad (4.87)$$

■ Acotando  $I_2$  e  $I_3$ :

Se procede utilizando el Lema 3.2.4 junto con la hipótesis (4.72):

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t \left( \sigma^1(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) - \sigma_n^1(s) \right) dW_s \right|^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t \left( \sigma^1(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) - \sigma^1(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) \right) dW_s \right|^2 \right] \\ &\leq C_1 \int_0^t \mathbb{E} \left[ \left| \sigma^1(\eta(s), Z_{\eta(s)}, Z_{\eta(s)}^*) - \sigma^1(\eta(s), Z_{\eta(s)}^n, (Z_{\eta(s)}^n)^*) \right|^2 \right] ds \\ &\leq C_1 M_2^2 \int_0^t \mathbb{E} \left[ |Z_{\eta(s)} - Z_{\eta(s)}^n|^2 \right] ds. \end{aligned}$$

por lo que

$$I_2 \leq K_2 \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E} \left[ |Z_u - Z_u^n|^2 \right] ds. \quad (4.88)$$

Además, bajo el mismo procedimiento se obtiene que

$$I_3 \leq K_3 \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E} \left[ |Z_u - Z_u^n|^2 \right] ds. \quad (4.89)$$

- Acotando  $I_4, I_5, I_6$  e  $I_7$ :

Se comienza el procedimiento utilizando el Lema 3.2.4 dos veces, para obtener

$$\begin{aligned} I_4 &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_1 \sigma_n^1(u) dW_u \right) dW_s \right|^2 \right] \\ &\leq C \int_0^t \mathbb{E} \left[ \left| \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_1 \sigma_n^1(u) dW_u \right|^2 \right] ds \\ &\leq C_2 \int_0^t \mathbb{E} \left[ \left| \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_1 \sigma_n^1(u) dW_u \right|^2 \right] ds \\ &\leq C_2 \int_0^t \left( \mathbb{E} \left[ \int_{\eta(s)}^s |\mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_1 \sigma_n^1(u)|^2 du \right] \right) ds. \end{aligned}$$

Así, al sumar y restar  $\mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_{\eta(u)}, (Z_{\eta(u)})^*)$  y  $\mathcal{L}_1 \sigma^1(\eta(u), Z_{\eta(u)}, (Z_{\eta(u)})^*)$ , se tiene que

$$I_4 \leq C_2(I_4^1 + I_4^2 + I_4^3).$$

al considerar,

$$I_4^1 = \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ |\mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_{\eta(u)}, (Z_{\eta(u)})^*)|^2 \right] du \right) ds;$$

$$I_4^2 = \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ |\mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_{\eta(u)}, (Z_{\eta(u)})^*) - \mathcal{L}_1 \sigma^1(\eta(u), Z_{\eta(u)}, (Z_{\eta(u)})^*)|^2 \right] du \right) ds;$$

$$I_4^3 = \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ |\mathcal{L}_1 \sigma^1(\eta(u), Z_{\eta(u)}, (Z_{\eta(u)})^*) - \mathcal{L}_1 \sigma^1(\eta(u), Z_{\eta(u)}^n, (Z_{\eta(u)}^n)^*)|^2 \right] du \right) ds,$$

donde cada término se puede acotar de forma independiente.

Para acotar  $I_4^1$  se utiliza la hipótesis (4.74), junto con el Corolario 4.1.1. De esta forma,

$$\begin{aligned}
 I_4^1 &= \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ \left| \mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) - \mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_{\eta(u)}, Z_{\eta(u)}^*) \right|^2 \right] du \right) ds \\
 &\leq M_4^2 \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ |Z_u - Z_{\eta(u)}|^2 \right] du \right) ds \\
 &\leq M_4^2 K(p) \delta_n^2 t.
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

Para acotar  $I_4^2$  se utiliza la hipótesis (4.82), se hace la esperanza independiende de la integral, se acota el cuadrado de la suma por la suma de los cuadrados y se integra. Luego se acota el supremo del producto por el producto de los supremos, se utiliza la linealidad de la esperanza y se acota el supremo en la discretización por el supremo en todo el intervalo. De esta forma se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 I_4^2 &= \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ \left| \mathcal{L}_1 \sigma^1(u, Z_{\eta(u)}^n, (Z_{\eta(u)}^n)^*) - \mathcal{L}_1 \sigma^1(\eta(u), Z_{\eta(u)}^n, (Z_{\eta(u)}^n)^*) \right|^2 \right] du \right) ds \\
 &\leq M_{12} \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ \left( 1 + |Z_{\eta(u)}^n|^2 \right) |u - \eta(u)| \right] du \right) ds \\
 &\leq 2M_{12} \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ \left( 1 + |Z_{\eta(u)}^n|^2 \right) |u - \eta(u)| \right] du \right) ds \\
 &\leq 2M_{12} \delta_n^2 t + 2M_{12} \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ |Z_{\eta(u)}^n|^2 |u - \eta(u)| \right] du \right) ds \\
 &\leq 2M_{12} \delta_n^2 t + 2M_{12} \delta_n^2 t \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq t} |Z_u^n|^2 \right]
 \end{aligned}$$

Así, gracias al Corolario 4.3.3 se concluye que

$$I_4^2 \leq C_2 \delta_n^2 t + C_2 \delta_n^2 t K(t) \leq C_3(t) \delta_n^2. \tag{4.91}$$

Por otra parte, el último término asociado a  $I_4$ , se acota directamente al aplicar la hipótesis (4.74). De esta forma

$$\begin{aligned}
 I_4^3 &= \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ \left| \mathcal{L}_1 \sigma^1(\eta(u), Z_{\eta(u)}, (Z_{\eta(u)})^*) - \mathcal{L}_1 \sigma^1(\eta(u), Z_{\eta(u)}^n, (Z_{\eta(u)}^n)^*) \right|^2 \right] du \right) ds \\
 &\leq C_1 \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ |Z_{\eta(u)} - Z_{\eta(u)}^n|^2 \right] du \right) ds \\
 &\leq C_1 \delta_n \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E} \left[ |Z_u - Z_u^n|^2 \right] ds
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

Resumiendo, de (4.90),(4.91) y (4.92) se concluye que

$$I_4 \leq C_4 \delta_n \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E} \left[ |Z_u - Z_u^n|^2 \right] ds + K_4 \delta_n^2. \quad (4.93)$$

Además, de forma análoga se obtiene que

$$I_i \leq C_i \delta_n \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E} \left[ |Z_u - Z_u^n|^2 \right] ds + K_i \delta_n^2, \quad i \in \{5, 6, 7\}. \quad (4.94)$$

■ Acotando  $I_8$ :

Se comienza desarrollando  $\tilde{E}$  según su definición,

$$\begin{aligned} I_8 &= \mathbb{E} \left[ |\tilde{E}(t, n)|^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 b(u, Z_u, Z_u^*) du \right) ds + \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 b(u, Z_u, Z_u^*) dW_u \right) ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 b(u, Z_u, Z_u^*) dW_u^* \right) ds + \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) du \right) dW_s \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 \sigma^2(u, Z_u, Z_u^*) du \right) dW_s^* \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

Luego se distribuye el módulo cuadrado y se hace uso de la linealidad de la integral. De esta forma,

$$\begin{aligned} I_8 &\leq C \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 b(u, Z_u, Z_u^*) du \right) ds \right|^2}_{I_8^1} \right] + C \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 b(u, Z_u, Z_u^*) dW_u \right) ds \right|^2}_{I_8^2} \right] \\ &\quad + C \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_2 b(u, Z_u, Z_u^*) dW_u^* \right) ds \right|^2}_{I_8^3} \right] + C \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) du \right) dW_s \right|^2}_{I_8^4} \right] \\ &\quad + C \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 \sigma^2(u, Z_u, Z_u^*) du \right) dW_s^* \right|^2}_{I_8^5} \right]. \end{aligned}$$

De donde se procede a acotar cada término. De esta forma, para acotar  $I_8^1$  se introduce el módulo

cuadrado dentro de la integral y se intercambia el orden de la esperanza con la integral,

$$\begin{aligned} I_8^1 &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 b(u, Z_u, Z_u^*) du \right) ds \right|^2 \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^t \left| \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 b(u, Z_u, Z_u^*) du \right|^2 ds \right] \\ &\leq \int_0^t \mathbb{E} \left[ \left| \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 b(u, Z_u, Z_u^*) du \right|^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Se continúa introduciendo el módulo dentro de la integral, utilizando la hipótesis (4.76), integrando y acotando el cuadrado de la suma por la suma de los cuadrados

$$\begin{aligned} I_8^1 &\leq \int_0^t \mathbb{E} \left[ \left( \int_{\eta(s)}^s |\mathcal{L}_0 b(u, Z_u, Z_u^*)| du \right)^2 \right] ds \\ &\leq M_6^2 \int_0^t \mathbb{E} \left[ \left( \int_{\eta(s)}^s (1 + |Z_u|) du \right)^2 \right] ds \\ &\leq 2M_6^2 \int_0^t \mathbb{E} \left[ |s - \eta(s)|^2 + \left( \int_{\eta(s)}^s |Z_u| du \right)^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Se sigue acotando por el paso temporal, acotando el integrando por su supremo al tiempo  $s$  e integrando; para después volver a acotar por el paso temporal,

$$\begin{aligned} I_8^1 &\leq C_2 \delta_n^2 t + C_2 \int_0^t \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq s} |Z_u|^2 |s - \eta(s)|^2 \right] ds \\ &\leq C_2 \delta_n^2 t + C_2 \delta_n^2 \int_0^t \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq s} |Z_u|^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Así al utilizar el Lema 4.1.1, se concluye que

$$I_8^1 \leq C_2 \delta_n^2 t + C_2 \delta_n^2 t K(t) = C_3(t) \delta_n^2. \quad (4.95)$$

Para acotar el término  $I_8^2$  se introduce el módulo cuadrado dentro de la integral y se intercambia el orden de la esperanza con la integral. De esta forma,

$$\begin{aligned}
 I_8^2 &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 b(u, Z_u, Z_u^*) dW_u \right) ds \right|^2 \right] \\
 &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^t \left| \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 b(u, Z_u, Z_u^*) dW_u \right|^2 ds \right] \\
 &\leq \int_0^t \mathbb{E} \left[ \left| \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_1 b(u, Z_u, Z_u^*) dW_u \right|^2 \right] ds
 \end{aligned}$$

Se continúa utilizando el Lema 3.2.4 y la hipótesis (4.76). Se sigue, acotando el cuadrado de la suma por la suma de los cuadrados, integrando, acotando por el paso temporal y haciendo la esperanza independiente de las integrales. De esta forma,

$$\begin{aligned}
 I_8^2 &\leq C_1 \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ |\mathcal{L}_1 b(u, Z_u, Z_u^*)|^2 \right] du \right) ds \\
 &\leq C_1 M_6 \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathbb{E} \left[ (1 + |Z_u|)^2 \right] du \right) ds \\
 &\leq 2C_1 M_6 \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s 1 + \mathbb{E} \left[ |Z_u|^2 \right] du \right) ds \\
 &\leq C_2 |t - \eta(t)|^2 + C_3 \int_0^t \left( \int_s^{\eta(s)} \mathbb{E} \left[ |Z_u|^2 \right] du \right) ds \\
 &\leq C_2 \delta_n^2 + C_2 \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq t} |Z_u|^2 \right] \int_0^t \left( \int_s^{\eta(s)} du \right) ds
 \end{aligned}$$

Así, al ocupar el Lema 4.1.1 e integrar, se tiene que:

$$I_8^2 \leq C_2 \delta_n^2 + C_2 K(t) |t - \eta(t)|^2 \leq C_3(t) \delta_n^2 \quad (4.96)$$

De misma forma se logra acotar el término  $I_8^3$ , resultando

$$I_8^3 \leq C_4(t) \delta_n^2. \quad (4.97)$$

Por otro lado, para acotar el termino  $I_8^4$  se utiliza el Lema 3.2.4, se introduce el módulo dentro de la integral y se aplica la hipótesis (4.77). Luego se acota el cuadrado de la suma por la suma de los cuadrados, se integra y acota por el paso temporal  $\delta_n$ ; para finalmente acotar el integrando por su supremo hasta el tiempo  $s$ .

$$\begin{aligned}
 I_8^4 &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^t \left( \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) du \right) dW_s \right|^2 \right] \\
 &\leq \int_0^t \mathbb{E} \left[ \left| \int_{\eta(s)}^s \mathcal{L}_0 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*) du \right|^2 \right] ds \\
 &\leq C_1 \int_0^t \mathbb{E} \left[ \left( \int_{\eta(s)}^s |\mathcal{L}_0 \sigma^1(u, Z_u, Z_u^*)| du \right)^2 \right] ds \\
 &\leq C_1 M_7^2 \int_0^t \mathbb{E} \left[ \left( \int_{\eta(s)}^s (1 + |Z_u|) du \right)^2 \right] ds \\
 &\leq 2C_1 M_7^2 \int_0^t \mathbb{E} \left[ \delta_n^2 + \left( \int_{\eta(s)}^s |Z_u| du \right)^2 \right] ds \\
 &\leq 2C_1 M_7^2 \delta_n^2 t + 2C_1 M_7^2 \delta_n^2 \int_0^t \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq s} |Z_u|^2 \right] ds
 \end{aligned}$$

Así, al ocupar el Lema 4.1.1 se tiene que

$$I_8^4 \leq C_1 \delta_n^2 t + C_1 \delta_n^2 K(t) = C_2(t) \delta_n^2. \quad (4.98)$$

Logrando acotar de misma forma el término  $I_8^5$ , resultando

$$I_8^5 \leq C_3(t) \delta_n^2. \quad (4.99)$$

Resumiendo , de (4.95),(4.96),(4.97),(4.98) y (4.99) se concluye que,

$$I_8 \leq K_8(t) \delta_n^2. \quad (4.100)$$

Luego, al remplazar (4.87), (4.87), (4.88), (4.89), (4.93), (4.94) y (4.100) en (4.86); se tiene que para cada  $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E} [|Z_t - Z_t^n|^2] \leq \widehat{K}_1(t) \delta_n^2 + \widehat{K}_2(t) \int_0^t \sup_{0 \leq u \leq s} \mathbb{E} [|Z_u - Z_u^n|] ds.$$

de donde se obtiene

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} [|Z_t - Z_t^n|^2] \leq \widehat{K}_1(T) \delta_n^2 + \widehat{K}_2(T) \int_0^T \sup_{0 \leq t \leq s} \mathbb{E} [|Z_s - Z_s^n|] ds.$$

Por lo que al aplicar el Lema de Gronwall 2.1.12, se obtiene que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} [|Z_t - Z_t^n|^2] \leq \widehat{K}_1(T) \delta_n^2 e^{\widehat{K}_2(T)}.$$

Finalmente, se aborda el caso  $1 < p < 2$ , gracias al resultado obtenido para  $p = 2$ . Esto es, para cada  $1 < p < 2$ , al aplicar la desigualdad de Hölder A.3.2 y acotar el supremo de la potencia de una función positiva por la potencia de su supremo, se tiene que:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} [|Z_t - Z_t^n|^p] &= \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} [|Z_t - Z_t^n|^2]^{\frac{p}{2}} \\ &\leq \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} [|Z_t - Z_t^n|^2] \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq C \delta_n^p. \end{aligned}$$

□



---

## Capítulo 5

### Implementación y resultados

Para verificar la convergencia teórica presentada por los esquemas de aproximación de Euler Maruyama y Milstein, es necesario recurrir a la implementación numérica. Esto es, considerar una instancia de la SDE (4.1) que posea solución única en sentido fuerte y comparar los esquemas con dicha solución. Para realizar esto, se estudia por separado cada esquema de aproximación, considerando para cada uno dos ecuaciones similares al caso real.

El primer problema que se considera es un símil complejo del Browniano Geométrico en su forma más general posible. Para ello considere la SDE dada para cada  $t \in [0, T]$  por

$$\begin{cases} dZ_t = \mu \cdot \begin{pmatrix} Z_t \\ Z_t^* \end{pmatrix} dt + \alpha \cdot \begin{pmatrix} Z_t \\ Z_t^* \end{pmatrix} dW_t + \beta \cdot \begin{pmatrix} Z_t \\ Z_t^* \end{pmatrix} dW_t^* \\ Z_0 = z_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

donde  $\mu, \alpha, \beta \in \mathbb{C}^2$ . Mientras que el segundo problema considerado es un símil complejo de la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck. Para esto, se considera la SDE dada para cada  $t \in [0, T]$  por

$$\begin{cases} dZ_t = \theta(\mu - Z_t)dt + \alpha dW_t + \beta dW_t^* \\ Z_0 = z_0, \end{cases} \quad (5.2)$$

donde  $\theta, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Junto con los dos problemas ya mencionados se consideran ciertos casos especiales, los cuales se presentan por ser curiosos y de interés.

Antes de proceder a mostrar los resultados obtenidos hay que clarificar cómo se obtuvieron éstos. Lo primero a considerar es la cálculo del valor esperado, el cual está presente tanto en la convergencia fuerte, como en la débil. Para ello se utiliza el método Montecarlo, el cual

aproxima la integral de la forma

$$\mathbb{E}[X] \approx MC(X) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k,$$

donde  $\{X_k\}_{k=1}^N$  es una muestra iid de la variable aleatoria  $X$ . De esta forma, el método Montecarlo presenta una forma sencilla de aproxima el valor esperado de una variable aleatoria, y se caracteriza por que su error aproximadamente decae como la raíz del tamaño de la muestra  $N$ , esto es

$$|\mathbb{E}[X] - MC(X)| \approx \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Por otro lado, hay que tener en claro como se obtienen los órdenes de convergencia que se espera comprobar. Para ello se calculan los errores para distintas particiones temporales, las que vienen determinadas por sus pasos temporales  $Dt = (Dt_1, Dt_1, \dots, Dt_m)$ ; obteniendo un vector resultante  $Error = (Error_1, Error_2, \dots, Error_m)$  de donde se ajusta una curva de la forma

$$Error = \beta Dt^\alpha,$$

donde  $\alpha$  es el orden de convergencia estimado. Para ello se considera a  $\alpha$  como la segunda componente del vector solución del sistema lineal  $Ax = b$ , con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \log(Dt_1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \log(Dt_m) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \log(Error_1) \\ \vdots \\ \log(Error_m) \end{pmatrix}.$$

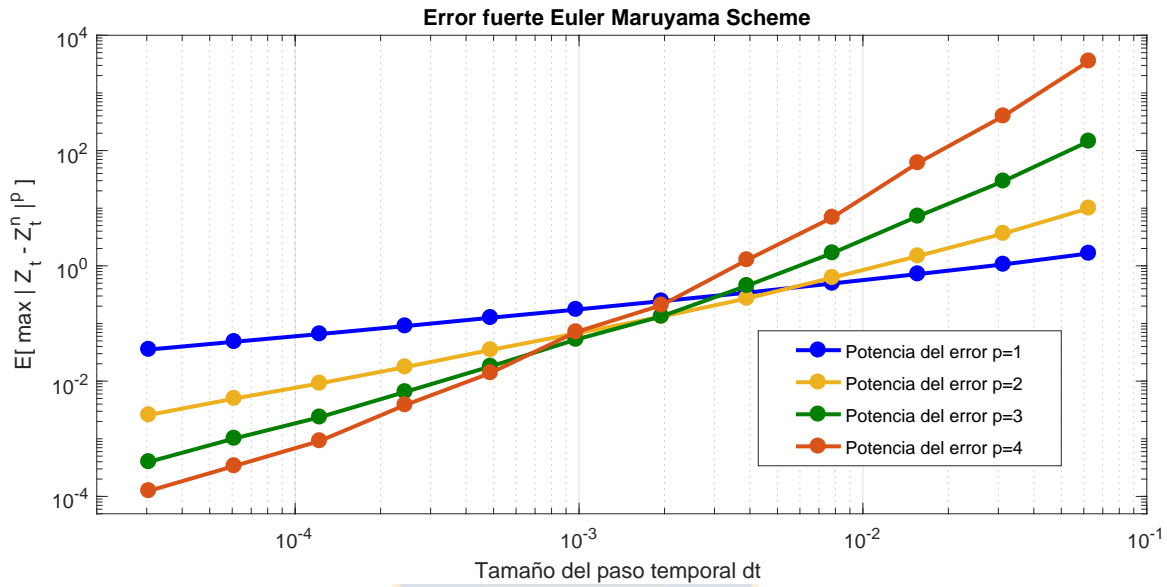
donde se considera las discretizaciones temporales como potencias enteras de 2, esto es,  $DT = (2^{n-m}, 2^{n-m+1}, \dots, 2^m)$ , con  $n$  entero mayor que  $m$ .

## 5.1. Esquema de Euler Maruyama

La implementación numérica del esquema de aproximación de Milstein (4.62), viene dada para cada partición equiespaciada  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$  por

$$Z_{k+1}^n = Z_k^n + b(Z_k^n)ds + \sigma^1(Z_k^n)\Delta W_k + \sigma^2(Z_k^n)\Delta W_k^*. \quad (5.3)$$

Donde todos los términos de (5.3) se pueden calcular de forma exacta. Lo anterior se realiza promediando sobre  $10^4$  trayectorias para calcular la convergencia fuerte, mientras que la convergencia débil se obtiene al al promediar sobre  $10^7$  trayectorias. Lo que permite tener una



**Figura 5.1:** Convergencia fuerte del esquema de Euler Maruyama (5.4) considerando particiones de tamaño de paso  $T/2^n$ , con  $n \in \{4, 5, \dots, 15\}$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

certeza aproximada hasta el segundo decimal en el caso de la convergencia fuerte y del tercer decimal para la convergencia débil.

### 5.1.1. Ejemplo 1: Browniano geométrico

Al considerar la SDE (5.1) notamos que por el Teorema 4.1.1, ésta tiene solución y es única, la cual si es aproximada mediante el esquema de Euler Maruyama, por el Teorema 4.3.1, presenta una convergencia fuerte dada para cada  $p \geq 0$  por

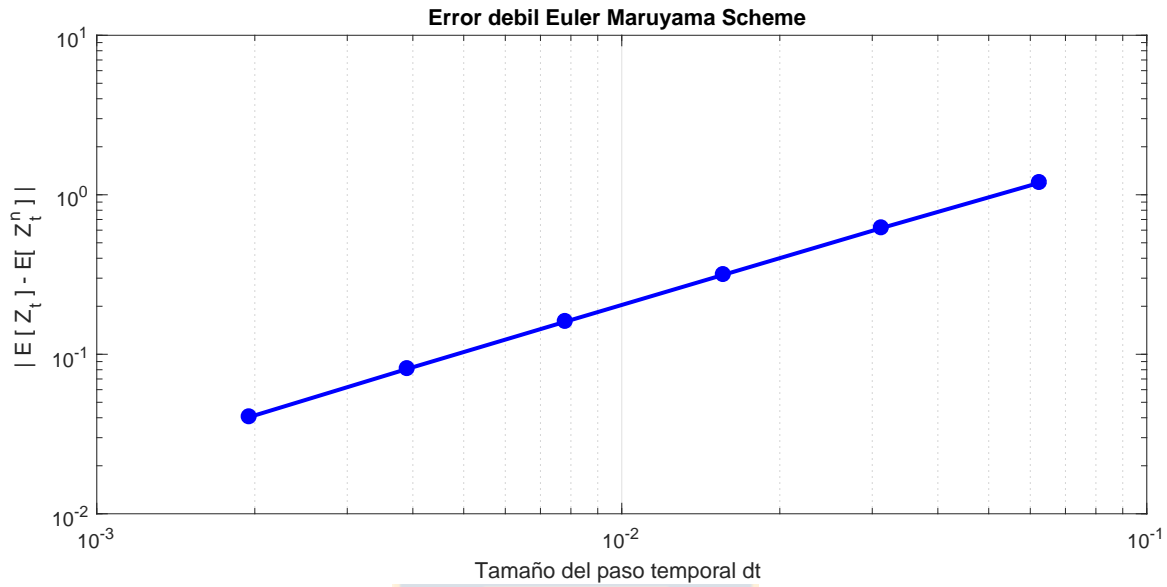
$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t - Z_t^n|^p \right] \leq C \delta_n^{\frac{p}{2}},$$

y por el Teorema 4.3.2 muestra una convergencia débil

$$|\mathbb{E}[Z_T] - \mathbb{E}[Z_T^n]| \leq C \delta_n.$$

Lo anterior se contrasta numéricamente al considerar una instancia de (5.1), por lo cual se elige  $T = 1$ , con coeficientes

$$\mu = (2 \ 0), \quad \alpha = (0.5 \ 0), \quad \beta = (0, 3 \ 0);$$



**Figura 5.2:** Convergencia débil del esquema de Euler Maruyama (5.4) considerando particiones de tamaño de paso  $T/2^n$ , con  $n \in \{5, 6, \dots, 10\}$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

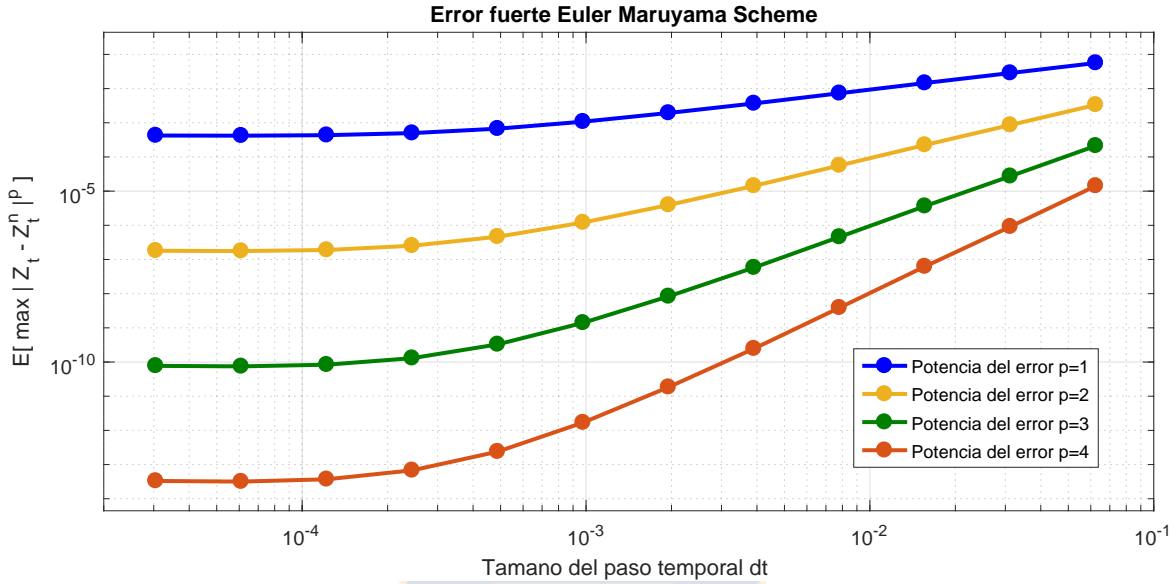
y condición inicial  $z_0 = 1 + 1i$ . De esta forma, el esquema de Euler Maruyama para la SDE (5.1) viene dado para una partición equiespaciada  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$  por

$$Z_{k+1}^n = Z_k^n + 2Z_k^n \Delta t + 0,5Z_k^n \Delta W_k + 0,3Z_k^n \Delta W_k^*, \quad 0 \leq k \leq n - 1. \quad (5.4)$$

donde  $\Delta t = (t_{k+1} - t_k)$  y  $\Delta W_k = (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$ . Lo anterior al ser implementado numéricamente, presenta una convergencia fuerte que se muestra en la Figura 5.1. En este gráfico se muestran cuatro curvas, correspondientes a los errores fuertes al considerar potencias del error  $p = 1, 2, 3, 4$ , y tamaños de pasos  $dt$  del orden de  $10^{-5}$  a  $10^{-1}$ . De esta forma, al ajustar dichas curvas, se obtiene unos órdenes de convergencia fuerte dados por la siguiente tabla:

Valor de p	Orden de Convergencia $\gamma$
1	0.4976
2	1.0615
3	1.6537
4	2.2417

**Tabla 5.1:** Resultados del orden de convergencia fuerte para el esquema de Euler maruyama (5.4) al ajustar las curvas de la Figura 5.1.



**Figura 5.3:** Convergencia fuerte del esquema de Euler Maruyama (5.5) considerando particiones de tamaño de paso  $T/2^n$ , con  $n \in \{4, 5, \dots, 15\}$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

De donde se concluye que los órdenes simulados coinciden con los teóricos.

Junto con lo anterior, la implementación numérica realizada presenta una convergencia débil que se muestra en la Figura 5.2. Aquí se destaca el comportamiento presentado por la curva del error, el cuál como se espera corresponde a un recta. De esta forma, al calcular la pendiente de dicha recta, se obtiene un orden de convergencia débil igual

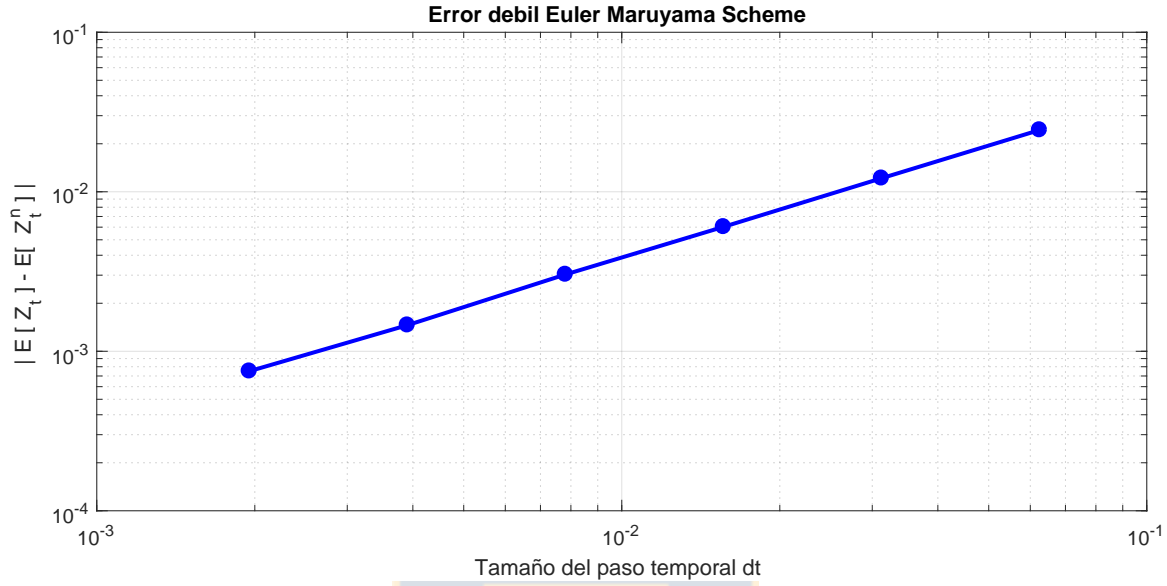
$$\gamma = 0.9765,$$

donde se observa que el orden simulado se encuentra muy cerca del teórico.

### 5.1.2. Ejemplo 2: Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Al considerar la SDE (5.2) notamos que por el Teorema 4.1.1, ésta tiene solución y es única, la cual si es aproximada mediante el esquema de Euler Maruyama, por el Teorema 4.3.1 presenta una convergencia fuerte dada para cada  $p \geq 0$  por

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t - Z_t^n|^p \right] \leq C \delta_n^{\frac{p}{2}},$$



**Figura 5.4:** Convergencia débil del esquema de Euler Maruyama (5.5) considerando particiones de tamaño de paso  $T/2^n$ , con  $n \in \{5, 6, \dots, 10\}$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

y por el Teorema 4.3.2 muestra una convergencia débil

$$|\mathbb{E}[Z_T] - \mathbb{E}[Z_T^n]| \leq C\delta_n.$$

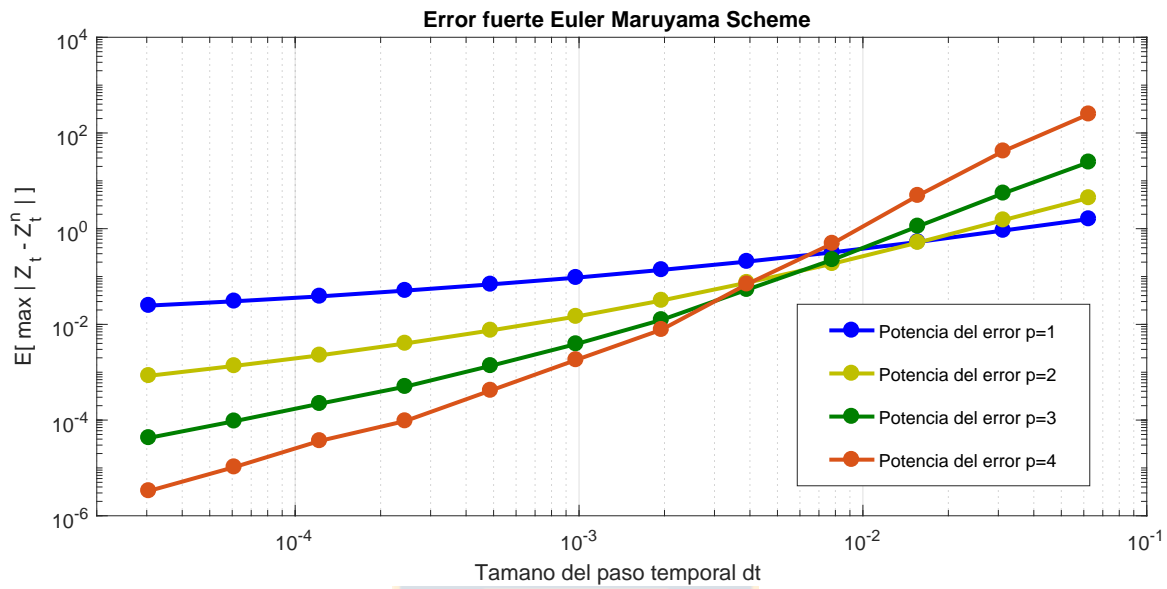
Lo anterior se contrasta numéricamente al considerar una instancia de (5.2), por lo cual se elige  $T = 1$ , con coeficientes

$$\theta = 2, \quad \mu = 0, \quad \alpha = 0.5, \quad \beta = 0.3,$$

y condición inicial  $z_0 = 1 + 1i$ . De esta forma, el esquema de Euler Maruyama para la SDE (5.1) viene dado para una partición equiespaciada  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$  por

$$Z_{k+1}^n = Z_k^n - 2Z_k^n \Delta t + 0,5\Delta W_k + 0,3\Delta W_k^*, \quad 0 \leq k \leq n - 1, \quad (5.5)$$

donde  $\Delta t = (t_{k+1} - t_k)$  y  $\Delta W_k = (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$ . Lo anterior al ser implementado numéricamente, presenta una convergencia fuerte que mostrada en la Figura 5.3. Aquí se muestra el comportamiento de cuatro curvas, correspondientes a los errores fuertes al considerar potencias del error  $p = 1, 2, 3, 4$ , y tamaños de pasos del orden de  $10^{-5}$  a  $10^{-1}$ . Dichas curvas presentan un decaimiento fuerte en las primeros refinamientos de la partición, lo cual se debe a que el modelo con un tamaño de paso muy grande ajusta mal el proceso, por lo que trae consigo grandes errores. De



**Figura 5.5:** Convergencia fuerte del esquema de Euler Maruyama considerando particiones de tamaño de paso  $2^n$ , con  $n \in \{4, 5, \dots, 15\}$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

esta forma, al ajustar las curvas de error, se obtiene unos órdenes de convergencia fuerte dados por:

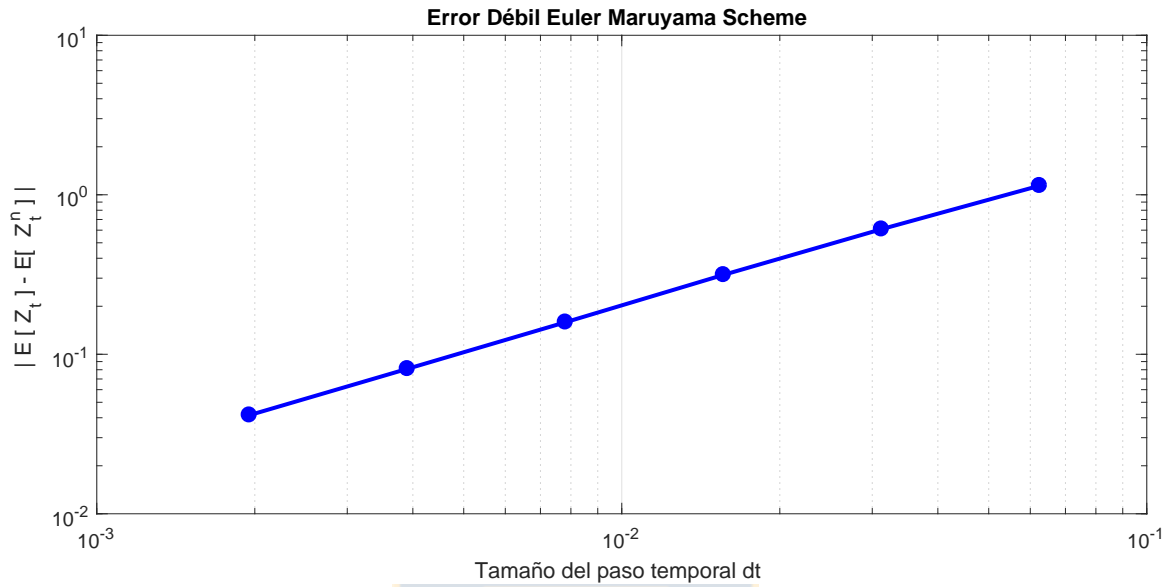
Valor de $p$	Orden de Convergencia $\gamma$
1	0.6832
2	1.3749
3	2.0747
4	2.7823

**Tabla 5.2:** Resultados del orden de convergencia fuerte para el esquema de Euler Maruyama (5.5) al ajustar las curvas de la Figura 5.3.

Además de esto, la implementación numérica realizada presenta una convergencia débil que se muestra en la Figura 5.4, donde se muestra el comportamiento presentado por la curva del error, el cuál como se espera corresponde a un recta. De esta forma, al calcular la pendiente de dicha recta, se obtiene un orden de convergencia débil igual

$$\gamma = 1.008,$$

donde se concluye que el orden simulado se encuentra muy cerca del teórico.



**Figura 5.6:** Convergencia débil del esquema de Euler Maruyama considerando particiones de tamaño de paso  $T/2^n$ , con  $n \in \{5, 6, \dots, 10\}$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

### 5.1.3. Casos especiales

- **Caso 1:** El primer caso interesante que se menciona corresponde a una instancia de (5.1), donde los coeficientes seleccionados no cumplen las hipótesis requeridas para asegurar convergencia débil del esquema (4.38). Esto se logra al considera  $T = 1$ ; con coeficientes

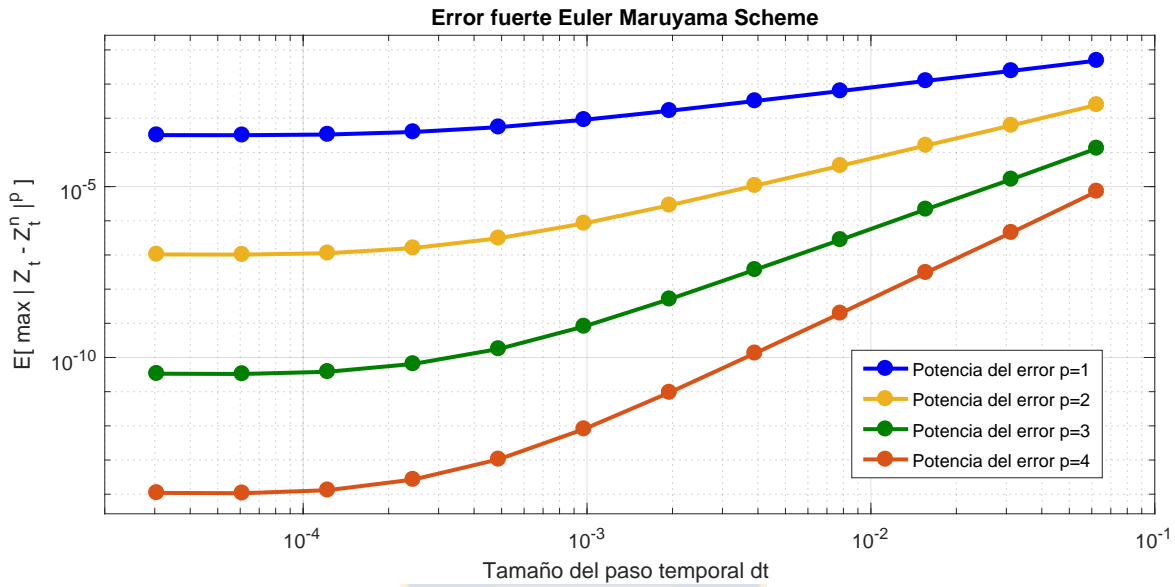
$$\mu = (2 \ 0), \quad \alpha = (0.3 \ 0), \quad \beta = (0 \ 0.3),$$

y condición inicial  $z_0 = 1 + 1i$ . De esta forma, al implementar computacionalmente el método de misma forma como se hizo en (5.4) se obtienen unos orden de convergencia fuerte dados por

Valor de p	Orden de Convergencia $\gamma$
1	0.5431
2	1.1205
3	1.7505
4	2.4132

**Tabla 5.3:** Resultados del orden de convergencia fuerte para el esquema de Euler Maruyama al ajustar las curvas de la Figura 5.5.





**Figura 5.7:** Convergencia fuerte del esquema de Euler Maruyama considerando particiones de tamaño de paso  $T/2^n$ , con  $n \in \{4, 5, \dots, 15\}$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

los cuales hacen alusión al comportamiento mostrado por la Figura 5.5. De donde se concluye que la convergencia fuerte se mantuvo para esa elección de coeficientes. Por otro lado, el comportamiento distribucional del proceso se ve reflejado en la Figura 5.6, donde se obtiene un orden de convergencia débil

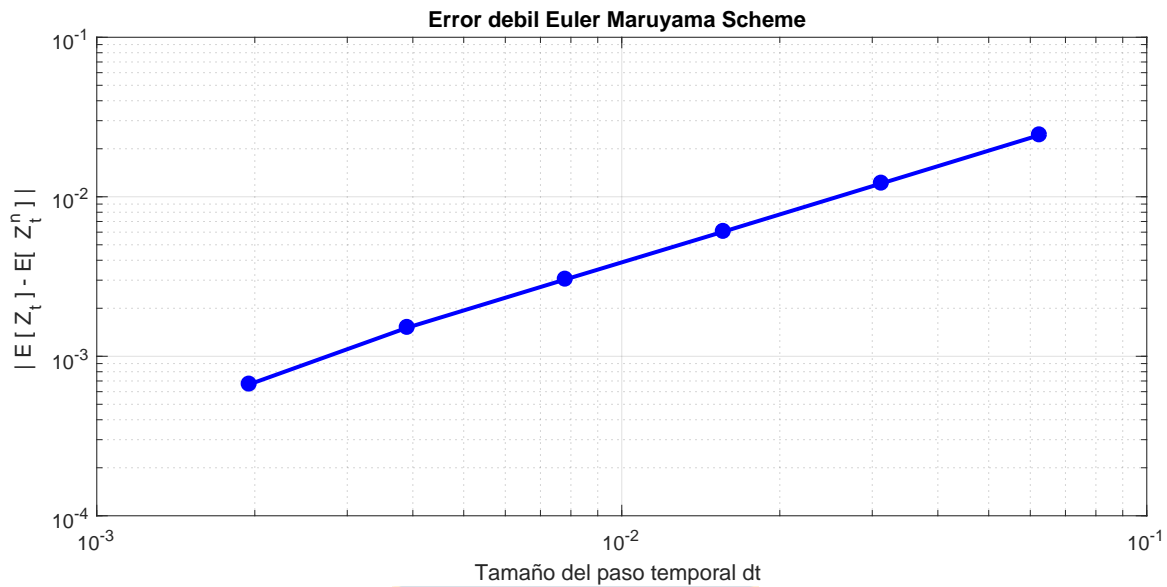
$$\gamma = 1.013,$$

de donde se concluye que a pesar de que no se cumplen las hipótesis del Teorema 4.3.2 la convergencia en ley se sigue manteniendo para este ejemplo.

- **Caso 2:** El segundo caso interesante corresponde a un análogo del ejemplo anterior, pero esta vez para la SDE (5.2). Para ello que se considera  $T = 1$ , con coeficientes

$$\theta = 2, \quad \mu = 0, \quad \alpha = 0.3, \quad \beta = 0.3,$$

y condición inicial  $z_0 = 1 + i$ . La simulación del proceso, operando de forma análoga a lo hecho en (5.5), muestra unos órdenes de convergencia fuerte dados por:



**Figura 5.8:** Convergencia débil del esquema de Euler Maruyama considerando particiones de tamaño de paso  $T/2^n$ , con  $n \in \{5, 6, \dots, 10\}$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

Valor de p	Orden de Convergencia $\gamma$
1	0.7019
2	1.4103
3	2.1247
4	2.8447

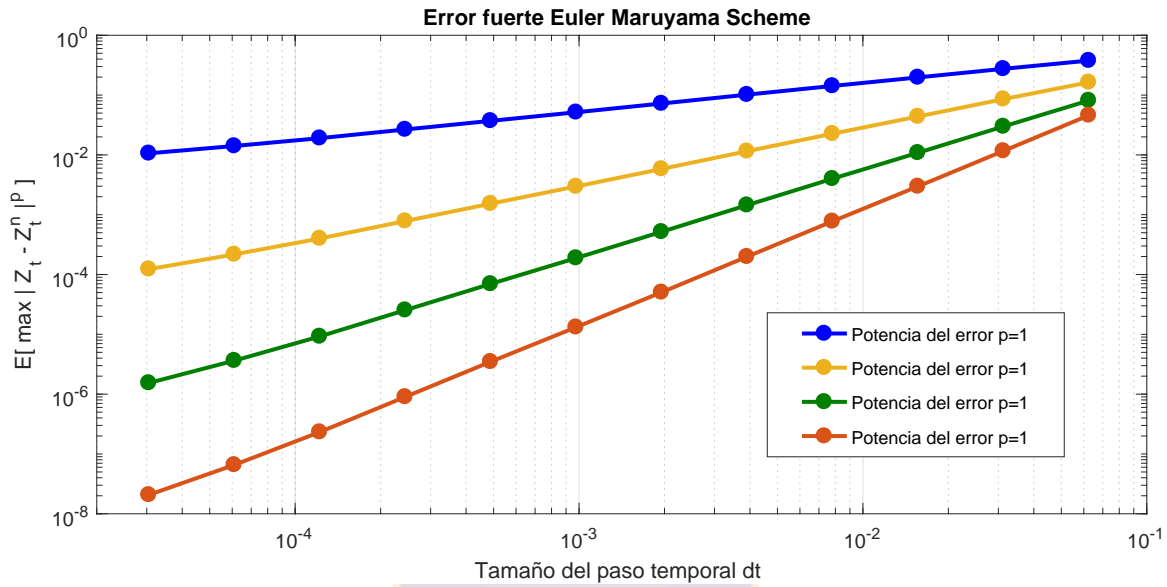
**Tabla 5.4:** Resultados del orden de convergencia fuerte para el esquema de Euler Maruyama al ajustar las curvas de la Figura 5.7.

los cuales se obtuvieron al ajustar las curvas que muestra la Figura 5.7, de donde se concluye que al igual que también se mantiene la convergencia fuerte para este ejemplo.

Además de esto, la implementación numérica realizada presenta una convergencia débil que se muestra en la Figura 5.8, presentando un orden de convergencia débil

$$\gamma = 1.027,$$

de donde se observa que el orden de convergencia débil se mantiene en este ejemplo a pesar de no cumplir con las hipótesis del Teorema 4.3.2.



**Figura 5.9:** Convergencia fuerte del esquema de Euler Maruyama considerando particiones de tamaño de paso  $T/2^n$ , con  $n \in \{4, 6, \dots, 15\}$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

- **Caso 3:** El tercer ejemplo interesante que se muestra corresponde a una aplicación. Suponga que desea resolver la integral iterada

$$A = \int_0^t \left( \int_0^s dW_r^* \right) dW_s,$$

para ello notamos que  $A$  corresponde a la segunda componente del vector solución de la SDE dada para cada  $t \in [0, T]$  por

$$\begin{cases} dZ = \begin{pmatrix} 0 \\ Z_1 \end{pmatrix} dW_t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dW_t^* \\ Z_0 = (0 \ 0). \end{cases} \tag{5.6}$$

Aquí es importante tener en cuenta que la expresión  $A$  no posee un cálculo explícito. Sin embargo al desarrollar  $A$  en su parte real e imaginaria se obtiene una representación dependiendo del área de Lévy, para la cual se asegura convergencia del esquema de Euler Maruyama real. De esta forma al simular  $A$  mediante el esquema de Euler Maruyama (4.38) y compararla con una simulación exhaustiva mediante el esquema real se obtiene una convergencia fuerte

que es mostrada en la Figura 5.9. Dichas curvas al ser ajustadas entregan unos órdenes de convergencia que vienen determinados por:

Valor de p	Orden de Convergencia $\gamma$
1	0.4747
2	1.9550
3	1.4407
4	1.9317

**Tabla 5.5:** Resultados del orden de convergencia fuerte para el esquema de Euler Maruyama al ajustar las curvas de la Figura 5.9.

donde se concluye que la convergencia trayectorial se cumple para este ejemplo, dado que los resultados se encuentran muy cerca de los teóricos.

Es importante tener en cuenta que gracias al buen comportamiento del esquema de Euler Maruyama para aproximar a  $A$ , es más eficiente aproximar a ésta mediante el esquema de Euler Maruyama complejo, que el real, debido a que con el primer método la expresión  $A$  viene determinada directamente, mientras que en el segundo método la expresión posee mas términos teniendo que incurrir en una cálculo mayor.

## 5.2. Esquema de Milstein

La implementación numérica del esquema de aproximación de Milstein (4.62), viene dada para cada partición equiespaciada  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$  por

$$Z_k^n = Z_k^n + b(Z_k^n)ds + \sigma^1(Z_k^n)\Delta W_k + \sigma^2(Z_k^n)\Delta W_k^* + \Delta E_k, \quad (5.7)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta E_k = & \mathcal{L}_1 \sigma^1(t_k, Z_k^n \cdot (Z_k^n)^*) \frac{1}{2} \Delta W_k^2 + \mathcal{L}_2 \sigma^1(t_k, Z_k^n \cdot (Z_k^n)^*) I_k \\ & + \mathcal{L}_1 \sigma^2(t_k, Z_k^n \cdot (Z_k^n)^*) I_k^* + \mathcal{L}_2 \sigma^2(t_k, Z_k^n \cdot (Z_k^n)^*) (\Delta W_k^*)^2, \end{aligned}$$

con

$$I_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( \int_{t_k}^s dW_r^* \right) dW_s.$$

Notar que todos los términos del esquema de aproximación de Euler Maruyama (5.7) a excepción de  $I_k$  se pueden calcular de forma exacta. Sin embargo la expresión  $I_k$  no posee un cálculo

explícito. Esto se ve al descomponer el término  $I_k$ , resultando

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( \int_{t_k}^s dW_r^* \right) dW_s \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s^* - W_{t_k}^*) dW_s \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s^* dW_s - W_{t_k}^* (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \end{aligned}$$

donde el primer término, esto es la integral con respecto a un Proceso de Wiener del Proceso de Wiener conjugado, no se puede calcular de forma exacta. Para ver esto se descompone el Proceso de Wiener en su parte real e imaginaria obteniendo que

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s^* dW_s &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s^1 + iW_s^2)^* d(W_s^1 + iW_s^2) \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s^1 + iW_s^2)^* d(W_s^1 + iW_s^2) \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s^1 - iW_s^2) d(W_s^1 + iW_s^2) \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s^1 dW_s^1 - i \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s^2 dW_s^1 + i \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s^1 dW_s^2 + \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s^2 dW_s^2 \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s^1 dW_s^1 + \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s^2 dW_s^2 + 2i A_{12}^k(\Delta t) \end{aligned}$$

donde la expresión

$$A_{12}^k(\Delta t) = \frac{1}{2} \left( \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s^1 dW_s^2 - \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s^2 dW_s^1 \right)$$

conocida como área de Lévy no se puede calcular de forma explícita, por lo que ésta se debe simular numéricamente. De este desarrollo, es natural considerar la aproximación de  $I_k$  como

$$\begin{aligned} \widehat{I}_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s^1 dW_s^1 + \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s^2 dW_s^2 + 2i A_{12}^k(\Delta t) - W_{t_k}^* (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \\ &= \frac{1}{2} (|W_{t_{k+1}}|^2 - |W_{t_k}|^2) - \Delta t + 2i A_{12}^k(\Delta t) - W_{t_k}^* (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}). \end{aligned}$$

donde el área de Lévy  $A_{12}^k(\Delta t)$  se aproxima mediante el esquema de Euler Maruyama real (2.29), como la tercera componente de la solución del problema

$$\begin{cases} dX_t^1 = dW_t^1 \\ dX_t^2 = dW_t^2 \\ dX_t^3 = \frac{1}{2} (X_t^1 dW_t^2 - X_t^2 dW_t^1) \\ X_0^1 = W_{t_k}^1, X_0^2 = W_{t_k}^2, X_0^3 = 0. \end{cases}$$

Sin embargo, como se vió en el caso 3 de la sección anterior, el problema (5.6) converge al valor  $I_k$ , por lo que se calcula su aproximación  $\widehat{I}_k$  al considerar una discretización temporal suficientemente fina, es decir, con un paso temporal menor al cuadrado del utilizado en el esquema de Milstein.

De esta forma, para llevar a cabo lo señalado anteriormente, la implementación computacional del esquema de Milstein (5.7) se realiza promediando sobre  $10^3$  trayectorias para calcular la convergencia fuerte, lo que permite aproximadamente tener certeza hasta el segundo decimal.

### 5.2.1. Ejemplo: Browniano geométrico

Al considerar la SDE (5.1) notamos que por el *Teorema* 4.1.1, ésta tiene solución y es única, la cual si es aproximada mediante el esquema de Milstein, por el *Teorema* 4.3.3, presenta una convergencia fuerte dada para cada  $1 < p \leq 2$  por

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t - Z_t^n|^p \right] \leq C \delta_n^p.$$

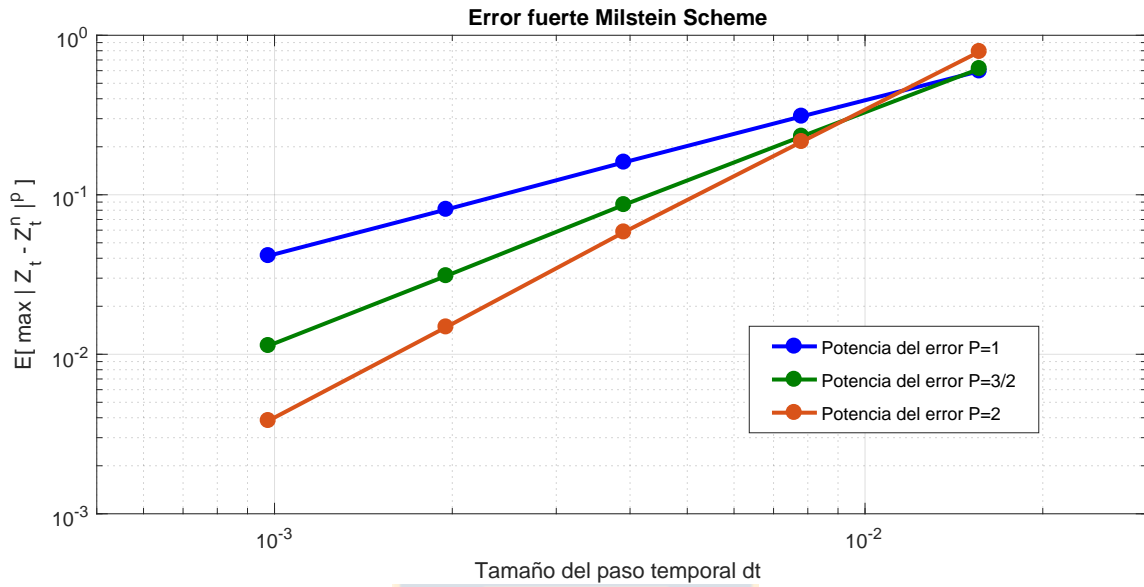
Para comprobar numéricamente esto, se consideran los siguientes dos casos:

- **Caso 1:** Se considera el mismo ejemplo de la SDE (5.1) visto en la implementación de Euler Maruyama de la sección anterior. Por lo que se elije  $T = 1$ , con coeficientes

$$\mu = (2 \ 0), \quad \alpha = (0 \ 0.5), \quad \beta = (0.3 \ 0),$$

y condición inicial  $z_0 = 1 + 1i$ . De esta forma, el esquema de Milstein para la SDE (5.1), viene dado para una partición equiespaciada  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$  por

$$Z_{k+1}^n = Z_k^n + 2Z_k^n \Delta t + 0,5(Z_k^n)^* \Delta W_k + 0,3Z_k^n \Delta W_k^* + \Delta E_k, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (5.8)$$



**Figura 5.10:** Convergencia fuerte del esquema de Milstein (5.8) considerando particiones de tamaño de paso  $T/2^n$ , con  $n \in \{4, 5, \dots, 15\}$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

donde

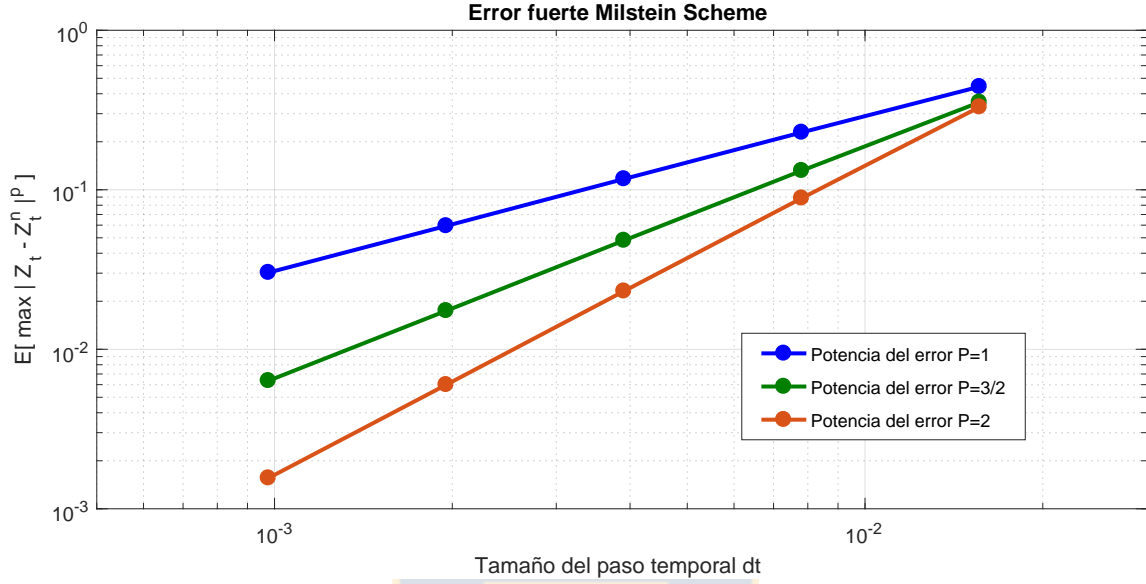
$$\Delta E_k = 0,25(Z_k^n)^* \frac{1}{2} (\Delta W_k)^2 + 0,09Z_k^n \frac{1}{2} (\Delta W_k^*)^2 + 0,25Z_k^n I_k + 0,15(Z_k^n)^* I_k^*,$$

con  $\Delta t = (t_{k+1} - t_k)$ ,  $\Delta W_k = (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$  e  $I_k$  obtenido al resolver (5.6). Lo anterior al ser implementado numéricamente presenta una convergencia fuerte dada por

Valor de p	Orden de Convergencia $\gamma$
1	0.9632
3/2	1.4443
2	1.9234

**Tabla 5.6:** Resultados del orden de convergencia fuerte para el esquema de Milstein (5.8) al ajustar las curvas de la Figura 5.10.

Estos resultados que son obtenidos al ajustar las curvas presentes en la Figura 5.10, donde se concluye que el esquema de Milstein logra ordenes de convergencia cercanos a los esperados teóricamente.



**Figura 5.11:** Convergencia fuerte del esquema de Milstein (5.9) considerando particiones de tamaño de paso  $T/2^n$ , con  $n \in \{4, 5, \dots, 15\}$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

- **Caso 2:** Se considera el primer caso especial mostrado en el esquema de Euler Maruyama de la sección anterior. Para ello se considera  $T = 1$ , con coeficientes

$$\mu_1 = (2 \ 0), \quad \alpha_1 = (0.3 \ 0), \quad \beta_1 = (0 \ 0.3),$$

y condición inicial  $z_0 = 1 + 1i$ . De esta forma, el esquema de Milstein para la SDE (5.1) viene dado por

$$Z_{k+1}^n = Z_k^n + 2Z_k^n \Delta t + 0,3Z_k^n \Delta W_k + 0,3(Z_k^n)^* \Delta W_k^* + \Delta E_k, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (5.9)$$

donde

$$\Delta E_k = 0,9Z_k^n \frac{1}{2} (\Delta W_k)^2 + 0,9(Z_k^n)^* \frac{1}{2} (\Delta W_k^*)^2 + 0,9(Z_k^n)^* I_k + 0,9Z_k^n I_k^*,$$

$\Delta t = (t_{k+1} - t_k)$ ,  $\Delta W_k = (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$  e  $I_k$  obtenido al resolver (5.6). Lo anterior al ser implementado numéricamente, presenta una convergencia fuerte que se muestra en la Figura 5.11. De esta forma, al ajustar dichas curvas, se obtiene unos órdenes de convergencia fuerte dados por la siguiente tabla:



Valor de p	Orden de Convergencia $\gamma$
1	0.9691
3/2	1.4518
2	1.9341

**Tabla 5.7:** Resultados del orden de convergencia fuerte para el esquema de Milstein (5.9) al ajustar las curvas de la Figura 5.11.

donde se puede notar que el desempeño del esquema de Milstein se encuentra muy cerca del esperado, siendo este un poco más deficiente de lo deseado puesto que el orden de convergencia débil obtenido no llega a ser uno. Esto se puede deber al error estadístico generado al aproximar la integral mediante el método Montecarlo, junto con la multiplicación de los errores producto de la aproximación de la expresión  $I_k$ .



---

## Capítulo 6

# Conclusiones y Trabajo futuro

### 6.1. Conclusión

Referente al trabajo realizado en el cálculo de Itô, se concluye que su extensión al cuerpo de los números complejos presentada en el capítulo 3, corresponde una teoría coherente al cálculo de Itô real mostrado en el capítulo 1. Además la extensión del cálculo de Itô al campo de los números complejos brinda poderosas herramientas, símiles al caso real, las cuales permiten desarrollar la teoría de Ecuaciones diferenciales Estocásticas en el cuerpo de los números complejos. Dentro de dichos resultados se destaca la Fórmula de Itô (Teorema 3.3.2), para la cual se presenta una prueba original, y permite trabajar con los procesos de difusión complejos y concluir que éstos son cerrados bajo la aplicación de funciones de clase  $C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{C})$  en sentido Wirtinger.

Con respecto al trabajo realizado sobre Ecuaciones Diferenciales Estocásticas se destaca el concepto de ecuación diferencial de Itô sobre el cuerpo de los números complejos (4.1), para la cual se probó existencia y unicidad de solución (Teorema 4.1.1), requiriendo hipótesis símiles al caso real valuado, pero formuladas naturalmente sobre el campo de los números complejos. Además se introduce los esquemas de aproximación (4.38) y (4.62) para la SDE (4.1), concluyendo que éstos generalizan los esquemas de Euler Maruyama y Milstein reales (2.29) y (2.37). Esto se demuestra al probar que el valor esperado de los esquemas están acotados (Lema 4.3.2 y Lema 4.3.3), junto con probar que sus órdenes de convergencia coinciden (Teorema 4.3.1, Teorema 4.3.2 y Teorema 4.3.3).

En relación al trabajo numérico realizado, se implementó computacionalmente los esquemas de Euler Maruyama (4.38) y Milstein (4.62). Estos fueron puestos a prueba al aproximar ejemplos de ecuaciones que generalizan a el Browniano Geométrico, al Procesos de Ornstein-Uhlenbeck. Esto con el objetivo de comprobar el desempeño teórico mencionado en el capítulo 4, concluyendo que ambos muestran un comportamiento positivo, afín a las expectativas. Ade-

más de esto, se destaca el problema (5.6), para el cual se prueba que además de ser conveniente trabajar con el sistema complejo por simplicidad, es también recomendable resolverlo así por un tema computacional, dado que se reduce la complejidad algorítmica. Lo anterior muestra que existen ejemplos donde se ve una ganancia numérica al trabajar con ecuaciones diferenciales formuladas directamente sobre el cuerpo de los números complejos.

Finalmente, con una visión más general se concluye que la extensión de los resultados reales para ecuaciones diferenciales estocásticas a ecuaciones diferenciales complejas, además de ser consistentes, simplifican su análisis. Esto se debe primeramente a que las hipótesis de dichos resultados se formulan directamente en su lenguaje nativo, es decir, el cuerpo de los números complejos; mientras que por otra parte se simplifica considerablemente el cálculo y desarrollo algebraico, puesto que no es necesario hacer la conversión de una SDE compleja a un sistema real doblando su dimensión. Esto respaldado con los resultados numéricos permite entender mejor las ecuaciones diferenciales estocásticas complejas, permitiendo al igual que en el caso real generar intuición con respecto a como estudiarlas.

## 6.2. Trabajo futuro

Sobre el trabajo realizado en ecuaciones diferenciales estocásticas sobre el cuerpo de los números complejos, algunos trabajos futuros que se consideran son:

1. Estudiar el problema de existencia y unicidad de solución para la SDE (4.1) relajando las hipótesis presente el Teorema 4.1.1.
2. Estudiar fenómenos físicos donde se aplique una modelación matemática que requiera de una SDE como (4.1).

Además, enfatizando el análisis realizado para los esquemas de Euler Maruyama (4.38) y de Milstein (4.62), algunas continuaciones a lo hecho hasta ahora son:

1. Estudiar la convergencia de los esquemas al relajar las hipótesis.
2. Estudiar la estabilidad y consistencia de los métodos.
3. Desarrollar esquemas de Taylor tanto fuertes como débiles y estudiar su desempeño.

---

# Apéndice A

## Resultados anexos

### A.1. Espacio de funciones continuas

**Definición A.1.1.** Sea  $(X, d_x)$  e  $(Y, d_y)$  dos espacios métricos y  $f : X \rightarrow Y$ , se dice que la aplicación  $f$  es *acotada* en  $A \subset X$ , si existe  $r > 0$  e  $y_0 \in Y$  tal que:

$$f(A) \subset B(y_0, r) := \{y \in Y \mid d(y_0, y) < r\}$$

En el caso de trabajar con aplicaciones definidas de sobre el cuerpo  $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , es decir  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ , la definición anterior es equivalente a

$$\|F(x)\|_{\mathbb{K}^m} \leq K, \quad \forall x \in A.$$

**Definición A.1.2.** Sea  $(X, d_x)$  e  $(Y, d_y)$  dos espacios métricos y  $f : X \rightarrow Y$ . Se dice que la aplicación  $f$  es *continua* en  $a \in X$ , si para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta(\varepsilon, a) > 0$  tal que:

$$d_x(a, b) \leq \delta \implies d_y(f(a), f(b)) \leq \varepsilon.$$

Además, se dirá que la aplicación  $f$  es continua en  $X$ , si  $f$  es continua en cada punto  $a$  de  $X$ . Por otra parte, se dirá que la aplicación  $f$  es *uniformemente continua* en  $X$ , si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que :

$$d_x(a, b) \leq \delta \implies d_y(f(a), f(b)) \leq \varepsilon, \quad \forall a, b \in X.$$

De esta forma, para todo  $k \geq 0$ , se denota  $C^k(X, Y)$  al espacio de funciones continuas de orden  $k$ , entre los espacio  $X \subset \mathbb{K}^n$  y  $Y \subset \mathbb{K}^m$  con  $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , cuyas derivadas de orden menor o

igual a  $k$  son continuas. Además, se denota  $C_b^k(X, Y)$  al espacio de funciones en  $C(X, Y)$ , cuyas derivadas están acotadas.

**Observación A.1.1.** Dado  $X \subset \mathbb{K}^n$  y  $n \in \mathbb{N}$ , es común que se denote por  $C^k(X)$  al espacio  $C^k(X, \mathbb{K})$ , y de misma, se denote por  $C_b^k(X)$  al espacio  $C_b^k(X, \mathbb{K})$ .

**Observación A.1.2.** Existen casos en que el dominio de una función esta definido sobre un espacio producto, esto es,  $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y$ , donde la regularidad de la función depende de la variable que se utilice. De esta forma, se dirá  $f$  es de clase  $C^{m,n}(X_1 \times X_2)$ , con  $m, n \in \mathbb{N}$ , si  $f$  posee  $m$  derivadas continuas con respecto a su primera variable y  $n$  derivadas continuas con respecto a su segunda variable. De misma forma, se dirá que  $f$  es de clase  $C_b^{m,n}(X_1 \times X_2)$ , si es de clase  $C^{m,n}(X_1 \times X_2)$  y además todas sus derivadas mencionadas son acotadas.

Dentro de la definición anterior, se destacan los espacios  $C^{m,n}([0, T] \times \mathbb{K})$  y  $C_b^{m,n}([0, T] \times \mathbb{K})$ , con  $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , dado que consideran funciones que dependen de una variable espacial y una temporal.

De la definición anterior se destaca que las aplicaciones uniformemente continuas presentan mejores propiedades que aquellas que son continuas simplemente. Sin embargo, la condición de uniforme continuidad no es suficientemente restrictiva, dejando un espacio de funciones con buenas propiedades, pero muchas veces inoperable debido a la regularidad necesitada por las funciones, en el caso de las ecuaciones diferenciales, por dar un ejemplo. Es por lo anterior, que se debe recurrir a espacios de funciones más restrictivos que mantengan las buenas propiedades de continuidad y se acerquen a las propiedades de una función diferenciable. Dichos espacios son los espacios de funciones Lipschitz y Hölder, los cuales se presentan a continuación.

**Definición A.1.3.** Sea  $(X, d_x)$  e  $(Y, d_y)$  dos espacios métricos y  $f : X \longrightarrow Y$ . se dice que la aplicación  $f$  es *Lipschitz continua*, si existe  $L > 0$  tal que

$$d_y(f(a), f(b)) \leq L d_x(a, b), \quad \forall a, b \in X.$$

**Definición A.1.4.** Sea  $(X, d_x)$  e  $(Y, d_y)$  dos espacios métricos y  $f : X \longrightarrow Y$ . se dice que la aplicación  $f$  es *Hölder continua*, con parámetro  $\gamma \in [0, 1]$ , si existe  $L > 0$  tal que para

$$d_y(f(a), f(b)) \leq L d_x(a, b)^\gamma, \quad \forall a, b \in X. \quad (\text{A.1})$$

**Observación A.1.3.** Las definiciones anteriores se extienden de forma natural sobre normas, puesto que dado un espacio vectorial normado  $(V, \|\cdot\|_V)$ , se tiene que

$$d_V(x, y) := \|x - y\|_V,$$

es una distancia en  $V$ .

De esta forma, para cada  $0 \leq l \leq 1$  y  $k \in \mathbb{N}_0$  se denota por  $\mathcal{H}^{(l)}(X, Y)$ , al espacio de todas las funciones  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ , cuyas derivadas de hasta orden  $\lceil l \rceil$  son continuas y acotadas, mientras que sus derivadas de orden  $\lceil l \rceil + 1$  son Hölder continuas de parámetro  $l$ .

**Observación A.1.4.** Al igual que para el espacio de funciones continuas, es común que se denote por  $\mathcal{H}^l(X)$  al espacio  $\mathcal{H}^l(X, \mathbb{R})$ , con  $X \subset \mathbb{R}^n$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

Ahora, para caracterizar un espacio de funciones Hölder continuas de gran importancia, permita definir para cada  $k \in \mathbb{N}_0$ , y  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{N}_0^n$ , los operadores diferenciales:

$$\partial_t^k = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^k; \tag{A.2}$$

$$\partial_x^{(s)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{s_i}, \tag{A.3}$$

donde se denota por  $|s| = \sum_{k=1}^n s_k$  y además

$$\partial_t^0 = \partial_x^{(0)} = I, \tag{A.4}$$

con  $I$  el operador identidad.

De esta forma, para cada  $l \geq 0$  se denota por  $\mathcal{H}_T^{(l)}(X, Y)$  al espacio de todas las funciones  $f : [0, T] \times (X \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^m$ , cuyas derivadas  $\partial_t^r \partial_x^{(s)}$  son Hölder continuas de parámetro  $l - \lceil l \rceil$  en la variable espacial  $x$ , y son Hölder continuas de parámetro  $(l - 2r - |s|)$  en la variable temporal  $t$ , para todo par de índices  $2r + |s| \leq \lceil l \rceil$ .

Es importante notar que a pesar que la condición de Hölder continuidad (A.1) está bien definida para funciones complejas, el espacio  $\mathcal{H}_T^{(l)}$  considera sólo funciones reales. Esto debido a que en su definición se involucra el concepto derivada con lo cual, la funciones complejas pierden la noción generada por el cuerpo real. Sin embargo como se vió en la sección 2.2 el

Cálculo de Wirtinger brinda las herramientas para tratar la derivada de una función compleja con la misma noción real. De esta forma se puede generalizar la condición de Hölder continuidad al caso de funciones complejas. Para ello, al igual que en el caso real se necesita introducir para cada  $k, \in \mathbb{N}_0$ , y  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{N}_0^n$ , los siguientes operadores:

$$\partial_z^{(s)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{d}{dz_i} \right)^{s_i}, \quad (\text{A.5})$$

$$\partial_{z^*}^{(s)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{d}{dz_i^*} \right)^{s_i}, \quad (\text{A.6})$$

donde las derivadas  $\frac{d}{dz_i}$  y  $\frac{d}{dz_i^*}$  vienen dadas por (2.55) y (2.56). Además

$$\partial_z^{(0)} = \partial_{z^*}^{(0)} = I, \quad (\text{A.7})$$

con  $I$  el operador identidad.

De esta forma, para cada  $l \geq 0$  se denota por  $\mathcal{H}_T^{(l+k)}(X, Y)$  al espacio de todas las funciones  $f : [0, T] \times (X \subset \mathbb{C}) \rightarrow Y \subset \mathbb{C}$ , cuyas derivadas  $\partial_t^r \partial_z^{(s)} \partial_{z^*}^{(u)}$  cumplen la condición de Hölder continuidad (A.1) con parámetro  $l - \lceil l \rceil$  en sus variables espaciales  $z$  y  $z^*$ , y cumplen la condición de Hölder continuidad (A.1) con parámetro  $(l - 2r - |s|)$  en la variable temporal  $t$ , para toda tripleta de índices  $2r + |s| + |u| \leq k$ .

## A.2. Espacios de medida compleja

**Definición A.2.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible. Una *medida compleja* es una función de conjuntos  $\lambda$  sobre  $\mathcal{F}$ , con valores en el cuerpo de los complejos  $\mathbb{C}$ , que satisface:

i)  $\lambda(\emptyset) = 0$

ii) Si  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  tal que  $A_i \cap A_j = \emptyset \implies \lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n)$ .

Al trío  $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$  se le llama espacio de medida compleja, y si  $Im(\lambda) = 0$ ,  $\mu$  se denomina real y por consiguiente a  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  se le llama espacio de medida real. Además, observemos que las medidas reales son un subconjunto de las medidas complejas. Donde es fácil ver que cada medida compleja puede escribirse de forma única como

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son medidas reales.

**Definición A.2.2.** Sea  $\lambda$  una medida compleja en un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Llamaremos *variación* de  $\lambda$  a la medida

$$|\lambda|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\lambda(A_i)| : A_i \text{ particionan } A\right\}$$

y a  $|\lambda|(\Omega)$  *variación total* de  $\lambda$ .

**Lema A.2.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible y  $\mathbb{M}(\Omega, \mathcal{F})$  o, simplemente  $\mathbb{M}(\Omega)$  cuando no hay confusión, el conjunto de todas las medidas complejas sobre  $\mathcal{F}$ , con las operaciones

$$\begin{aligned} (\mu + \lambda)(A) &:= \mu(A) + \lambda(A); \\ (\alpha\mu)(A) &:= \alpha \cdot \mu(A), \end{aligned}$$

para todo  $A \in \mathcal{F}$ ;  $\mu, \lambda \in \mathbb{M}(\Omega)$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Entonces  $\mathbb{M}(\Omega)$  es un campo vectorial complejo, y la aplicación:

$$\forall \mu \in \mathbb{M}(\Omega), \|\mu\| := |\mu|(X),$$

lo convierte en un espacio normado.



**Definición A.2.3.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida positiva y  $\lambda \in \mathbb{M}(\Omega)$ . Diremos que  $\lambda$  es absolutamente continua respecto de  $\mu$ , y lo denotaremos  $\lambda \ll \mu$ , si para cada  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$\mu(A) = 0 \implies \lambda(A) = 0.$$

El siguiente resultado explica por que la palabra continuidad se utiliza en esta definición,

**Proposición A.2.1.** Sea  $\lambda$  una medida compleja en el espacio de medida positiva  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ . Entonces son equivalentes:

- i)  $\lambda \ll \mu$
- ii)  $|\lambda| \ll \mu$
- iii) Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $\mu(A) < \varepsilon$ , entonces  $|\lambda(A)| < \varepsilon$ .

**Proposición A.2.2.** Sean  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida positiva y  $f \in L^1(\Omega, \mu)$ , entonces

$$A \in \mathcal{F} \mapsto \lambda(A) = \int_A f d\mu$$

es una medida compleja sobre  $\mathcal{F}$ , tal que  $\lambda \ll \mu$ . Además, si  $g \in L^1(|\mu|)$ , se tiene

$$\int_{\Omega} g d\lambda = \int_{\Omega} g f d\mu.$$

A la función  $f$  se le llama *derivada de Radon Nikodym* de  $\lambda$  con respecto a  $\mu$  y se denota  $f := \frac{d\lambda}{d\mu}$ . Además, si  $\mu$  es la medida de Lebesgue, entonces  $f$  se llama *función de densidad* de  $\lambda$ .

A continuación, presentamos uno de los teoremas fundamentales de la teoría de la medida, que corresponde a un análogo de la proposición anterior.

**Teorema A.2.1. (Radon-Nidodym)**

Sean  $\lambda$  una medida compleja y  $\mu$  una medida positiva  $\sigma$ -finita, definidas sobre un espacio de medible  $(\Omega, \mathcal{F})$ , tales que  $\lambda \ll \mu$ . Entonces existe una función  $f \in L^1(\Omega, \mu)$ , única como clase, tal que para cada  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu.$$

### A.3. Resultados adicionales

**Teorema A.3.1. (Teorema de Luzin)** Sean  $E$  un conjunto medible y acotado de  $\mathbb{R}^n$  y una función medible  $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces para cada  $\varepsilon \geq 0$  existe un cerrado  $E_\varepsilon \subset E$  tal que

- i) la medida  $|E \setminus E_\varepsilon| \leq \varepsilon$ ;
- ii) la función restringida  $F|_{E_\varepsilon}$  es continua.

**Teorema A.3.2. (Desigualdad de Hölder)** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida positiva y  $p, q \in ]1, +\infty[$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces para todo par de funciones medibles  $f, g \in M(\Omega, \overline{\mathbb{R}}_+)$ , se tiene

$$\int_{\Omega} fg d\mu \leq \left( \int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (\text{A.8})$$

**Teorema A.3.3.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $p > 1$ . Entonces para todo acotado  $K$  de  $\mathbb{R}$  se tiene

$$\left( \sup_{x \in K} f(x) \right)^p = \sup_{x \in K} (f(x)^p). \quad (\text{A.9})$$

---

# Bibliografía

- [1] L. C. EVANS, *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. American Mathematical Society, 2014.
- [2] N. FREEMAN, *Itô Calculus and Complex Brownian Motion*. Lecture notes at the University Of Sheffield, 2015.
- [3] S. Kanagawa. *On the rate of convergence for Maruyama's approximate solutions of stochastic differential equations*. Yokohama Mathematical Journal. Vol. 36, 1988.
- [4] P. E. KLOEDEN, E. PLATEN, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [5] K. KREUTZ-DELGADO, *The Complex Gradient Operator and the CR-Calculus*. ArXiv, 2009.
- [6] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.
- [7] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991.
- [8] S. Brady. *Construction and Properties of Brownian Motion*. 2006.
- [9] M. Reiß. *Stochastic Differential Equations*. Lecture notes for courses given at Humboldt University Berlin and University of Heidelberg.
- [10] A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Dover Publications, 2013.