Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa Magíster en Matemática

Funciones Zeta Locales de Igusa y Operadores Pseudodiferenciales sobre campos p-ádicos

VICTOR MANUEL BURGOS GUERRERO
CONCEPCIÓN-CHILE
2019

Profesor Guía: José Aguayo Garrido
Profesor Co-Guía: Wilson Zúñiga-Galindo
Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa Magíster en Matemática

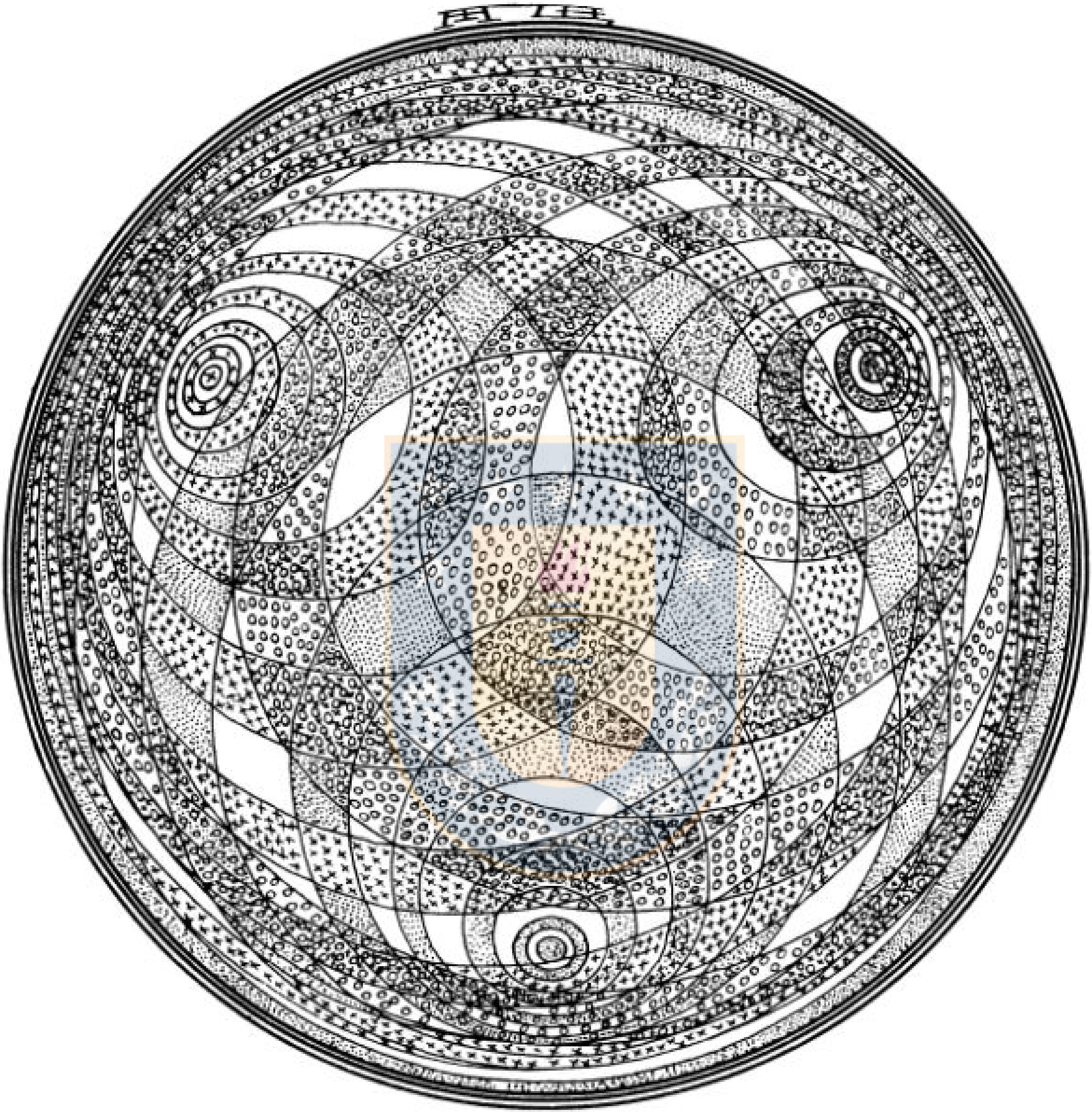
Funciones Zeta Locales de Igusa y Operadores Pseudodiferenciales sobre campos p-ádicos

VICTOR MANUEL BURGOS GUERRERO
CONCEPCIÓN-CHILE
2019

Comision: José Aguayo Garrido
Wilson Zúñiga-Galindo (CINVESTAV, Qro., México)
Elena Olivos Herreros
Jacqueline Ojeda Fuentealba
Vicente Vergara Aguilar
Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Funciones Zeta Locales de Igusa y Operadores Pseudodiferenciales sobre campos p-ádicos

VICTOR MANUEL BURGOS GUERRERO
CONCEPCIÓN-CHILE
2019



Representación artística del disco 3−ádico (ver [7]).

A mi familia y a quienes estuvieron cerca.

Índice general

Introducción

A lo largo de la historia, los procesos físicos siempre han sido interpretados sobre un sistema de coordenadas en números reales, como por ejemplo el espacio euclideano tridimensional $\mathbb{R}^3$. Pero al momento de realizar mediciones ocurre una cierta particularidad: se pueden hacer mediciones tan grandes y tan pequeñas como se deseen, pero para la física, las distancias menores a la longitud de Planck (que es aproximadamente $10^{-33}cm$) no son fiables. Por ello, debemos considerar al espacio euclideano tridimensional $\mathbb{R}^3$ solo como un modelo matemático para la representación del espacio físico real.

Desde un punto de vista geométrico, en la geometría Euclideana existe el llamado axioma de Arquímedes. Este nos dice que cualquier segmento dado sobre una línea recta tan largo como se desee, se puede sobrepasar añadiendo segmentos pequeños sobre la misma recta. De la misma forma, podemos encontrar segmentos tan pequeños como queramos. Pero para distancias menores a la longitud de Planck, se sugiere dejar de lado el axioma de Arquímedes y trabajar con una geometría no-Euclideana. Por esto último, tampoco se sugiere trabajar sobre el campo de los números reales y la pregunta obvia que surge es sobre qué campo numérico tendremos que trabajar.

En la práctica, para mediciones en general solo se tiene uso de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y no de los irracionales (números con decimales infinitos no periódicos). Los irracionales se podrían obtener, pero a partir de un proceso de infinitas mediciones cada vez más y más precisas, por ello, la interpretación de resultados siempre se hace por medio de un número racional. En el contexto matemático, se sabe que el campo de los números reales $\mathbb{R}$ es la completación de $\mathbb{Q}$ como espacio métrico con respecto a la métrica inducida por el valor absoluto usual. De manera análoga, el matemático K. Hensel a fines del siglo XIX, tomó un número primo p fijo, construyó una valuación $p-$ádica y definió el campo $\mathbb{Q}_p$ de los números $p-$ádicos como la completación de $\mathbb{Q}$ como espacio métrico con respecto a esta valuación. Si bien, $\mathbb{Q}_p$ nace en conexión con la teoría de números, posteriormente se propone aplicar un nuevo modelo a la física mediante este campo numérico. La propiedad más importante de $\mathbb{Q}_p$ que lo hace distinto a los números reales, es la condición de arquimedeanidad de este último, razón por la cual, a los números p-ádicos se les suele también llamar campo no-Arquimedeano (o espacio ultramétrico).

La estructura topológica de los p-ádicos, inducida por la métrica p-ádica, tiene ciertas particularidades que hacen posible el estudio de ciertas situaciones físicas. Para empezar, dos bolas en $\mathbb{Q}_p$ son disjuntas o bien una contiene a la otra, es decir, el único tipo de intersección es la contención total. Esto se asemeja al comportamiento de dos gotas de mercurio. Además, $\mathbb{Q}_p$ tiene una estructura jerárquica, es decir, cada bola consiste de la unión finita de bolas más pequeñas. Este modelo, más el hecho de que $\mathbb{Q}_p$ es homeomorfo al conjunto de Cantor sobre la recta real, son favorables al momento de plantear situaciones en física, como por ejemplo, para uno de los problemas más excitantes dentro de la física moderna, el de combinar consistentemente la mecánica cuántica y la gravedad. También se encuentra relación con la física estática, en particular, la conexión con modelos que describen la relajación de cristales, macromoléculas y proteinas, como consecuencia también de la estructura jerárquica del campo $p-$ádico. Además, a mediados de los ochenta, surge la idea de usar espacios no-Arquimedeanos para describir modelos de sistemas biológicos complejos y de física de proteínas (Ver [6],[7],[9],[11] y [12]).

Tanto en $\mathbb{Q}_p$ como en copias $\mathbb{Q}_p^n$ de $\mathbb{Q}_p$, se ha desarrollado todo el análisis, siguiendo la misma ruta del análisis clásico o análisis real. Uno de estos desarrollos es la teoría de operadores pseudo-diferenciales $p-$ádicos. Dados $f(\xi) \in \mathbb{Q}_p[\xi_1, ..., \xi_n]$ un polinomio no constante y $\beta > 0$ un *operador pseudo-diferencial* con símbolo $|f(\xi)|_p^\beta$ es una extensión de un operador de la forma

$$(f(\partial, \beta)\varphi)(x) := \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(|f(\xi)|_p^\beta \mathcal{F}_{x\to\xi}\varphi),$$

para $\varphi \in \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}$ es el espacio Bruhat-Schwartz y $\mathcal{F}$ es la transformada de Fourier. A $f(\partial, \beta)$ le asociamos la ecuación pseudo-diferencial

$$f(\partial, \beta)u = \phi, \quad con \quad \phi \in \mathcal{D} \tag{1}$$

y decimos que $E_\beta \in \mathcal{D}'$ es una *solución fundamental* para (1) si $u = E_\beta * \phi$ es una solución de (1), donde $\mathcal{D}'$ corresponde al espacio de distribuciones en $\mathcal{D}$.
El operador pseudo-diferencial básico en $\mathbb{Q}_p$ es el operador de Vladimirov (o derivada p-ádica fraccionaria):

$$(D^\beta\varphi)(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(|\xi|_p^\beta \mathcal{F}_{x\to\xi}\varphi),$$

con $\varphi \in \mathcal{D}$. La existencia de soluciones fundamentales para D^β fue establecida en [11]. A partir del operador mencionado, se define la ecuación p-ádica del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + D^\beta u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{Q}_p, \quad t \geq 0,$$

que ha sido usada en modelos jerárquicos complejos, como proteínas y cristales (Ver [11], [6] y [15]). También existen conexiones con teoría de números, especialmente con funciones zeta, ver [14], [15] y [6].
Otro ejemplo de un operador pseudo-diferencial p-ádico fue dado por A. Kochubei. Él muestra la existencia de soluciones fundamentales para ecuaciones de la forma (1), con símbolos de la forma $|f(\xi_1, ..., \xi_n)|_p^\beta$, $\beta > 0$, donde $f(\xi_1, ..., \xi_n)$ es una forma cuadrática que satisface $f(\xi_1, ..., \xi_n) \neq 0$ si $|\xi_1|_p + \cdots + |\xi_n|_p \neq 0$ (Ver [8]). La existencia de soluciones fundamentales para operadores con símbolo polinomial arbitrario fue establecido por el Co-tutor de la tesis, W. Zúñiga-Galindo en [12] (Ver también [15]).

Sean $f(x) \in \mathbb{Q}_p[x_1, ..., x_n]$ un polinomio no constante y $\varphi : \mathbb{Q}_p^n \to \mathbb{C}$ una función localmente constante con soporte compacto. La *potencia p-ádica compleja* $|f|_p^s$ asociada a f o *la función zeta local de Igusa* asociada al par (f, φ) es la distribución:

$$\langle |f|_p^s, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}\{0\}} \varphi(x)|f(x)|_p^s d^n x, \quad s \in \mathbb{C}, Re(s) > 0$$

(ver [5]).

Las funciones zeta locales tienen su origen en la relación que surge entre ellas y las series de Poincaré. Estas últimas pretenden estudiar el comportamiento asintótico de sucesiones definidas a partir del número de soluciones de congruencias polinomiales $modp^m$. Borevich y Shafarievich conjeturaron a mediados de los sesenta que la serie de Poincaré, en algunos casos particulares, resulta ser una función racional.

Las funciones zeta locales fueron introducidas por A. Weil en los años sesenta y una teoría general de estas fue desarrollada por J. Igusa en los setenta. Las funciones zeta locales de Igusa estan conectadas con el número de soluciones de congruencias polinomiales $modp^m$ y con sumas exponenciales $modp^m$. Además existen importantes conjeturas que relacionan estas funciones con la teoría de singularidades complejas. Por otro lado las funciones zeta locales pueden definirse sobre cualquier cuerpo local, es decir, sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$ o $\mathbb{F}_p((t))$.

En el contexto Arquimediano, es decir en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, el estudio de las funciones zeta locales fue iniciado por Gel'fand y Shilov a mediados de los cincuenta. La principal motivación fue la construcción de soluciones fundamentales para operadores diferenciales parciales con coeficientes constantes, ya que la continuación meromorfa de las funciones zeta locales implica la existencia de soluciones fundamentales para tales operadores. Esto fue desarrollado simultáneamente por M. Atiyah y S. Bernstein.

En analogía al caso Arquimediano, la idea anterior también funciona en el caso p-ádico. Más exactamente, la racionalidad de las funciones zeta locales de Igusa implica la existencia de soluciones fundamentales para operadores pseudodiferenciales. Este hecho fue probado por W. Zúñiga-Galindo (Ver [12]). La función zeta local de Igusa en principio existe sobre el semiplano $Re(s) > 0$. Sin embargo, ella admite una continuación meromorfa a todo el plano complejo como una función racional de p^{-s}. Esto quiere decir que existe una función de la forma

$$Z_\varphi(s) = \frac{L_\varphi(p^{-s})}{\prod_{i\in T}(1 - p^{v_i - N_i s})}$$

con L_φ un polinomio en p^{-s}, T un conjunto finito, $(v_i, N_i) \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \times \mathbb{N}\setminus\{0\}$ para todo $i \in T$, tal que $Z_\varphi(s) = \langle |f|_p^s, \varphi\rangle$ para $Re(s) > 0$. La racionalidad de las funciones zeta de Igusa, fue probado por J.I.Igusa en los setenta usando el teorema de resolución de singularidades de Hironaka. J. Denef probó este mismo resultado una década después sin usar resolución de sigularidades, sino que por medio de descomposición celular p-ádica. La ausencia de un teorema de resolución de singularidades en característica positiva implica que la racionalidad de las funciones zeta sea aún un problema abierto (ver [5]).

En este trabajo de tesis, se estudiará la solución fundamental para una ecuación pseudo-diferencial p-ádica de la forma (1), donde el polinomio asociado al símbolo $|f(\xi)|_p^\beta$ del operador es un polinomio semi-quasielíptico. Como la racionalidad de las funciones zeta locales de Igusa implica la existencia de soluciones fundamentales para operadores pseudo-diferenciales, el problema se nos reduce a encontrar la expresión racional de la función zeta de Igusa

$$Z_f(s) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} |f(x)|_p^s \, d^n x \quad Re(s) > 0, \; s \in \mathbb{C}$$

donde f es un polinomio semiquasielíptico.

El primer capítulo está enfocado en introducir la construcción del campo de los números p-ádicos, su topología como espacio no-Arquimedeano, la teoría de integración, una introducción al análisis de Fourier en $\mathbb{Q}_p$ y los previos de la teoría de variedades p-ádicas. En el segundo capítulo, estudiaremos las funciones zeta de Igusa, su conexión con las series de Poincaré y se introduce la técnica del Poliedro de Newton para el cálculo explícito de funciones zeta locales. El último capítulo está dedicado a presentar la teoría de operadores pseudo-diferenciales p-ádicos, el problema principal que conlleva la tesis y se presenta otro tipo de operadores pseudodiferenciales, definidos a partir de polinomios elípticos no-degenerado con respecto a su poliedro de Newton, para finalmente encontrar la solución fundamental ayudado por la función zeta de Igusa asociada.

Capítulo 1

Introducción al Análisis p-ádico

En este primer capítulo estudiaremos los preliminares correspondientes al análisis p-ádico y los resultados necesarios para el desarrollo posterior del presente trabajo. En la primera sección, veremos la construcción de la valuación p-ádica, sus propiedades en relación a la no-Arquimedeanidad de esta y, presentaremos al campo numérico p-ádico como completación de $\mathbb{Q}$ con respecto a $|\cdot|_p$. En la sección dos, estudiamos las propiedades topológicas fundamentales de $\mathbb{Q}_p$. En la sección siguiente, desarrollamos parte de la teoría de integración en $\mathbb{Q}_p$, pasando por la existencia de una medida de Haar hasta el teorema del cambio de variables. Enunciaremos en la cuarta sección el teorema de función implícita en su versión p-ádica. En la sección cinco introducimos los previos al análisis de Fourier en $\mathbb{Q}_p$ y en la seis presentamos los conceptos elementales sobre variedades p-ádicas. Trabajaremos usando las referencias [1], [5], [7], [8], [15], [9], [10] y [11].

1.1. El Campo de los Números p-ádicos

Es conocido que para un número primo p fijo, el valor absoluto p-ádico de un $x \in \mathbb{Q}$ se define como

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-ord_p(x)} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

donde

$$ord_p(x) = \text{máx}\{\alpha : \ p^\alpha \text{ divide a } x\}$$

corresponde al orden $p-$ádico. Por convención, se denota $ord_p(0) = +\infty$.
El valor absoluto $p-$ádico $|\cdot|_p$ definido sobre $\mathbb{Q}$ se dice que es no-Arquimedeano en el sentido que

$$|x+y|_p \leq \text{máx}\{|x|_p, |y|_p\}. \tag{1.1}$$

Equivalentemente, se cumple que si $|x|_p \neq |y|_p$, entonces $|x+y|_p = \text{máx}\{|x|_p, |y|_p\}$, y como consecuencia de esto todo triángulo es isósceles. Además, si p y q son dos números primos distintos, los correspondientes valores absolutos son no equivalentes.

Por el teorema de Ostrowski (ver [1] o [7]), cualquier valor absoluto no trivial definido en $\mathbb{Q}$ es equivalente a $|\cdot|_p$ o al valor absoluto estándar $|\cdot|_\infty$.

La métrica d_p definida por el valor absoluto p-ádico satisface la desigualdad triangular fuerte

$$d_p(x,z) \leq \text{máx}\{d_p(x,y), d_p(y,z)\},$$

para cada $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Luego a $(\mathbb{Q}, d_p)$ se le llama espacio **ultramétrico**, pero este no es completo como espacio métrico. La completación se denota por $\mathbb{Q}_p$ y se conoce como el **campo de los números p-ádicos**.

Todo número p-ádico $x \neq 0$ tiene una representación única de la forma

$$x = \sum_{i=-N}^{\infty} x_i p^i = p^{\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} y_j p^j \tag{1.2}$$

donde $x_i, y_j \in \{0, 1, ..., p-1\}$, $y_0 \neq 0$ y $\gamma = \gamma(x) = ord_p(x)$.

En el espacio ultramétrico $(\mathbb{Q}_p, d_p)$, se tiene lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ converge si y solo si } \lim_{k\to\infty} x_k = 0, \tag{1.3}$$

$$\text{y si } \lim_{k\to\infty} x_k = x \neq 0, \text{ entonces } |x_k|_p = |x|_p \text{ desde un } k \text{ suficientemente grande.} \tag{1.4}$$

Como consecuencia de (1.3), la serie (1.2) está bien definida porque $|y_j p^j|_p = \frac{1}{p^j} \to 0$ cuando $j \to \infty$.

Observación 1.1.1.

- *La bola unitaria en $\mathbb{Q}_p$ es lo que se conoce por*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : x = \textstyle\sum_{i \geq i_0} x_i p^i, \quad i_0 \geq 0\}.$$

  $\mathbb{Z}_p$ es un anillo (llamado anillo de los enteros p-ádicos), más precisamente, es un dominio de ideales principales, donde cualquier ideal de $\mathbb{Z}_p$ tiene la forma

$$p^m \mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Z}_p : x = \textstyle\sum_{j \geq m} x_j p^j\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

- *Desde otro punto de vista, los ideales $p^m\mathbb{Z}_p$, con $m \in \mathbb{N}$, constituyen un sistema fundamental de vecindades alrededor del origen en $\mathbb{Q}_p$, i.e., tenemos una cadena de inclusiones $\mathbb{Z}_p \supset p\mathbb{Z}_p \supset p^2\mathbb{Z}_p \supset \cdots \supset p^m\mathbb{Z}_p \supset \cdots \supset \{0\}$.*

- *El **grupo de unidades** de $\mathbb{Z}_p$ se denota*

$$\mathbb{Z}_p^{\times} = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1\}$$

  que también es llamado como la esfera unitaria de $\mathbb{Q}_p$. Es fácil ver que $x = \sum_{i \geq 0} x_i p^i \in \mathbb{Z}_p^{\times}$ si y solo si $x_0 \neq 0$. Además, si $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, se tiene que $x = p^m z$, para $m \in \mathbb{Z}$ y $z \in \mathbb{Z}_p^{\times}$.

- *El **campo residual** de $\mathbb{Q}_p$, se define como el campo finito $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{F}_p$ con p elementos.*

Observación 1.1.2 (Extensión del campo $\mathbb{Q}_p$). *En $\mathbb{Q}_p^{\times}$, $\mathbb{Q}_p^{\times,2}$ corresponde al subgrupo de todas las raíces cuadradas. Para un $\epsilon \notin \mathbb{Q}_p^{\times,2}$, adjuntamos al campo $\mathbb{Q}_p$ el número dado por el símbolo $\sqrt{\epsilon}$ y definimos la extensión cuadrática de $\mathbb{Q}_p$ como el conjunto de elementos $X = x + y\sqrt{\epsilon}$, $x, y \in \mathbb{Q}_p$, y la denotamos por $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\epsilon})$.*

Presentaremos ahora una importante herramienta para hallar soluciones de polinomios módulo p. Una consecuencia directa de este resultado será utilizada más adelante.

Lema 1.1.1 (Lema de Hensel, ver [7]). *Sea f un polinomio en $\mathbb{Z}_p[x]$ y sea $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sea $a \in \mathbb{Z}_p$ tal que*

$$f(a) \equiv 0 \ mod(p^k) \quad y \quad f'(a) \not\equiv 0 \ mod(p).$$

Entonces existe un único $\xi \in \mathbb{Z}_p$ tal que

$$f(\xi) = 0 \quad y \quad \xi \equiv a \ mod(p^k).$$

Como consecuencia del Lema de Hensel tenemos lo siguiente.

Corolario 1.1.1. *Sean $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ y $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si $a \in \mathbb{Z}_p$ es tal que*

$$f(a) \equiv 0 \ mod(p) \quad and \quad f'(a) \not\equiv 0 \ mod(p),$$

se tiene que existe un $\xi \in \mathbb{Z}_p$ tal que

$$\xi + p^k\mathbb{Z}_p = \{x \in a + p\mathbb{Z}_p \mid \ f(x) \equiv 0 \ mod(p^k)\}$$

El próximo corolario es una generalización a más variables del corolario anterior, y será de utilidad más adelante.

Corolario 1.1.2. *Sean $f \in \mathbb{Z}_p[x_1, ..., x_n]$ y $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sea $a \in \mathbb{Z}_p^n$ tal que $f(a) \equiv 0 \ mod(p)$ y $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \not\equiv 0 \ mod(p)$. Sean $\xi_2, .., \xi_n \in \mathbb{Z}_p$ con $\xi_i \equiv a_i \ mod(p)$ para $i = 2, ..., n$. Entonces existe un $\xi_1 := \xi_1(\xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{Z}_p$ tal que para todo $x_2, ..., x_n \in \mathbb{Z}_p$ con*

$$x_i \equiv \xi_i \ mod(p^k) \ para \ i = 2, ..., n \quad se \ tiene \ que \quad \xi_1 + p^k\mathbb{Z}_p = \{x \in a_1 + p\mathbb{Z}_p \mid \ f(x) \equiv 0 \ mod(p^k)\}.$$

Observación 1.1.3. *Esto implica que*

$$\{(x_1, ..., x_n) \in a + (p\mathbb{Z}_p)^n \mid \ f(x_1, ..., x_n) \equiv 0 \ mod(p^k)\} = \bigcup (\xi_1, ..., \xi_n) + (p^k\mathbb{Z}_p)^n$$

donde la unión está tomada sobre todas las $(n-1)$-tuplas $(\xi_2 + p^k\mathbb{Z}_p, ..., \xi_n + p^k\mathbb{Z}_p)$, con $\xi_i \equiv a_i \ mod(p)$ para $i = 2, ..., n$.
Esto también se puede realizar sobre cada componente independientemente tomando las hipótesis adecuadas.

1.2. La Topología de $\mathbb{Q}_p$

Definimos

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq p^{-r}\}, \quad r \in \mathbb{Z}$$

como la **bola con centro a y radio p^{-r}**, y

$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p = p^{-r}\}, \quad r \in \mathbb{Z}$$

como la **esfera con centro a y radio p^{-r}**. Como la aplicación $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \setminus \{0\} \to \{p^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ es a valores discretos, tenemos que

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \leq p^{-r}\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \ < p^{-r+1}\} = B^-_{r-1}(a). \tag{1.5}$$

Esto quiere decir que no es relevante la elección de $<$ o $\leq$ para definir una *bola*. Nos remitiremos a usar la primera notación.
Denotamos e identificamos las bolas y las esferas de la siguente manera:

$$B_r(a) = a + p^r\mathbb{Z}_p \quad \text{y} \quad S_r(a) = a + p^r\mathbb{Z}_p^\times.$$

Estos conjuntos son abiertos y cerrados (conjuntos clopen) en la topología de $\mathbb{Q}_p$. El hecho de que $B_r(a)$ sea abierto viene de (1.5), y cerrado viene de que su complemento es abierto. Que $S_r(a)$ sea abierto viene de

$$\mathbb{Z}_p^\times = \bigsqcup_{i \in \{1,2,\ldots,p-1\}} i + p\mathbb{Z}_p.$$

Por otro lado, para ver que es cerrado tomamos una sucesión de puntos $x_n = a + p^r u_n$ con $u_n \in \mathbb{Z}_p^\times$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también de Cauchy, es decir, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n|_p = p^{-r}|u_m - u_n|_p \to 0, \quad \forall m, n > N.$$

Por la completitud de $\mathbb{Q}_p$, $u_n \to u_0 \neq 0$ y, por (1.4), $|u_n|_p = |u_0|_p$ para n suficientemente grande, luego $u_0 \in \mathbb{Z}_p^\times$. Finalmente, por unicidad del límite, se tiene que $x_n \to x_0 = a + p^r u_0 \in S_r(a)$.
Las bolas $B_r(a)$ forman una base de clopen para la topología de $\mathbb{Q}_p$, es decir, se dice que la topología de $\mathbb{Q}_p$ es cero dimensional.

En la topología de $\mathbb{Q}_p$ es muy importante mencionar que todo punto de una bola $B_r(a)$ es su centro y que, además, cualquier par de bolas en $\mathbb{Q}_p$ son disjuntas, o bien, una contiene a la otra. A partir de esto último, $\mathbb{Q}_p$ es un **espacio topológico totalmente disconexo**.

Otro aspecto topológico de $\mathbb{Q}_p$ es que tiene la propiedad de *Heine-Borel* (Ver [1] o [11]), y como consecuencia de esto tenemos los siguientes:

- $\mathbb{Z}_p$ es compacto.
- $\mathbb{Q}_p$ es un espacio topológico localmente compacto.
- Todo compacto en $\mathbb{Q}_p$ se puede cubrir por un número finito de bolas disjuntas con radio fijo.

1.2.1. El espacio $\mathbb{Q}_p^n$

$\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p \times \cdots \times \mathbb{Q}_p$ es el espacio de los puntos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, donde $x_i \in \mathbb{Q}_p$ para cada $i = 1, ..., n$, con $n \geq 2$. Se define la norma p-ádica en $\mathbb{Q}_p^n$ como

$$||x||_p = \text{máx}_i \, |x_i|_p \quad x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Esta norma es claramente no-Arquimediana, esto es, $|| \cdot ||_p$ satisface que

$$||x + y||_p leq \, \text{máx}\{||x||_p, ||y||_p\}, \text{ para } x, y \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Con esto, $(\mathbb{Q}_p^n, || \cdot ||_p)$ es un espacio ultramétrico completo y, con la topología inducida por tal norma, $\mathbb{Q}_p^n$ es un espacio topológico localmente compacto totalmente disconexo.

Para $r \in \mathbb{Z}$ y $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Q}_p^n$ denotamos por

$$B_r^n(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p^n \mid \ ||x - a||_p \leq p^{-r}\}$$

a la bola n-dimensional de radio p^{-r} y centro a, y por

$$S_r^n(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p^n \mid \ ||x - a||_p = p^{-r}\} = B_r^n(a) \setminus B_{r+1}^n(a)$$

a la esfera n-dimensional de radio p^{-r} y centro a.

Denotamos $B_r^n(0) := B_r^n$ y notemos que

$$B_r^n(a) = B_r(a_1) \times \cdots \times B_r(a_n)$$

donde $B_r(a_i) := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid \ |x - a_i|_p \leq p^{-r}\}$ es la bola 1-dimensional de radio p^{-r} con centro en $a_i \in \mathbb{Q}_p$. La bola B_0^n es igual al producto de n copias de $\mathbb{Z}_p$, esto es,

$$\mathbb{Z}_p^n = \{x \in \mathbb{Q}_p^n \mid ||x||_p \leq 1\}.$$

Por otro lado, denotamos a la esfera centrada en el origen por $S_r^n(0) := S_r^n$ y, como $\mathbb{Z}_p^\times$ es la esfera unidimensional, $(\mathbb{Z}_p^\times)^n$ es el producto n-dimensional de la misma.

Por la condición de no-Arquimedianidad de $\mathbb{Q}_p^n$, se verifica también que las bolas y las esferas son abiertos y cerrados a la vez (clopen), la propiedad de *Heine-Borel* y todas sus consecuencias.

1.3. Integración en $\mathbb{Q}_p$

En esta sección introducimos la teoría de integración sobre $\mathbb{Q}_p$ y el cálculo de algunas integrales dentro del mismo contexto.

1.3.1. $\mathbb{Q}_p$ como grupo topológico localmente compacto

$(\mathbb{Q}_p, +)$, y respectivamente $(\mathbb{Q}_p^\times, \cdot)$, son grupos topológicos localmente compactos. En efecto, sabemos que $\mathbb{Q}_p$ es espacio topológico localmente compacto, y como $\mathbb{Q}_p$, respectivamente $\mathbb{Q}_p^\times$, son espacios métricos, la continuidad de la suma, respectivamente la del producto, están garantizadas.

El siguiente teorema asegura que existe una medida de Haar sobre un grupo topológico localmente compacto.

Teorema 1.3.1 (Ver [4])**.** *Sea $(X, \cdot)$ un grupo topológico localmente compacto. Existe una medida de Borel dx, única salvo multiplicación por una constante positiva, tal que*

$$\int_U dx > 0$$

para todo abierto de Borel U no vacío y

$$\int_{x\cdot E} dx = \int_E dx \tag{1.6}$$

para todo conjunto de Borel E.

Como $(\mathbb{Q}_p, +)$ y $(\mathbb{Q}_p^\times, \cdot)$ son grupos topológicos localmente compactos, tenemos que existe una medida de Haar en $(\mathbb{Q}_p, +)$, denotada por dx, invariante por traslaciones respecto de la adición, esto es, $d(a + x) = dx$. De la misma manera, tenemos que existe una medida de Haar en $(\mathbb{Q}_p^\times, \cdot)$, denotada por $d^*(x)$, invariante por traslación con respecto a la multiplicación, es decir, $d^*(ax) = d^*x$. Estas medidas se relacionan de la siguiente manera:

$$d^*x = |x|_p^{-1} dx \tag{1.7}$$

luego

$$d(xa) = |xa|_p d^*(xa) = |x|_p |a|_p d^*(x) = |x|_p |a|_p |x|_p^{-1} dx = |a|_p dx, a \in \mathbb{Q}_p^\times \tag{1.8}$$

que corresponde a la **fórmula del Cambio de Variables**. Este último resultado mencionado será revisado en profundidad más adelante.

Observación 1.3.1. *Como consecuencia de la relación (1.7), trabajaremos de ahora en adelante solo con la medida de Haar dx definida sobre $(\mathbb{Q}_p, +)$, excepto si se menciona otra situación. Como $\mathbb{Z}_p$ es un abierto compacto y como dx es una medida regular, tenemos que $dx(\mathbb{Z}_p) < \infty$. Así, podemos normalizar esta medida por $dx(\mathbb{Z}_p) = 1$.*

La medida de Haar dx en $\mathbb{Q}_p$ se define sobre la σ-algebra de Borel, Σ_p, generada por todos los subconjuntos abiertos compactos de $\mathbb{Q}_p$ y que tienen la forma $a + p^m\mathbb{Z}_p$. En suma

$$dx : \Sigma_p \longrightarrow \mathbb{R}, \quad dx(U) = \int_U dx$$

y se satisface

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i} dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{U_i} dx$$

para toda colección $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *de abiertos compactos disjuntos dos a dos, tales que* $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ *sea también un compacto. Además,*

$$\int_{x_0+U} dx = \int_U dx.$$

Observación 1.3.2. *Para cualquier compacto* K *en* $\mathbb{Q}_p$ *la medida* dx *define una función*

$$\mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad f \longmapsto \int_K f(x)dx$$

la cual es lineal, continua y donde $\mathcal{C}(K)$ *es el espacio de funciones continuas sobre* K *provisto de la norma*

$$||f||_{\mathcal{C}(K)} = \max_{x\in K} |f(x)|$$

1.3.2. Cambio de Variables

Proposición 1.3.1. *Sea* $d(xa)$ *definida por* $d(xa)(U) = dx(aU)$*, se tiene que* $d(xa)$ *es una medida de Haar y*

$$d(xa) = |a|_p dx, \; a \in \mathbb{Q}_p^{\times},$$

lo que significa que

$$\int_{aU} dx = |a|_p \int_U dx,$$

para todo conjunto de Borel U*.*

Demostración. Sea a un número en $\mathbb{Q}_p^{\times}$ fijo y, consideremos

$$T_a : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p; \quad x \longmapsto ax.$$

T_a es un isomorfismo algebraico y, como T_a es la restricción a $\{a\} \times \mathbb{Q}_p$ de la operación de multiplicación, se tiene que T_a es continua. T_a^{-1} es también continua porque es la operación multiplicativa inversa. Luego T_a es un homeomorfismo. Además, para cada $y \in \mathbb{Q}_p$ y para todo conjunto de Borel U

$$d(xa)(y+U) = dx(a(y+U)) = dx(ay+aU) = dx(aU) = d(xa)(U)$$

i.e., $d(xa)$ es invariante por traslaciones. Así, por el Teorema 1.3.1, $d(xa)$ es una medida de Haar para $(\mathbb{Q}_p, +)$ y por la unicidad de esta medida, existe una constante positiva $C(a)$ tal que $\int_{aU} dx = C(a) \int_U dx$. Para calcular $C(a)$ basta probar que

$$\int_{a\mathbb{Z}_p} dx = C(a) \int_{\mathbb{Z}_p} dx = |a|_p.$$

Esto resulta de considerar

$$\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{b=0}^{p^l-1} b + p^l\mathbb{Z}_p$$

un $a = p^l u \in \mathbb{Z}_p$, con $u \in \mathbb{Z}_p^{\times}$, y

$$1=\int_{\mathbb{Z}_p}dx=\sum_{b=0}^{p^l-1}\int_{b+p^l\mathbb{Z}_p}dx=\sum_{b=0}^{p^l-1}\int_{p^l\mathbb{Z}_p}dx=p^l\int_{p^l\mathbb{Z}_p}dx\Rightarrow\int_{p^l\mathbb{Z}_p}dx=p^{-l}=|a|_p.$$

Por tanto,

$$\int_{a\mathbb{Z}_p}dx=|a|_p\quad\text{y}\quad\int_{a\mathbb{Z}_p}dx=C(a)\int_{\mathbb{Z}_p}dx$$

lo que implica que $C(a)=|a|_p$. El caso en que $a\notin\mathbb{Z}_p$ es similar. □

Como consecuencia de lo anterior, tenemos lo siguiente.

Corolario 1.3.1. *Sea $\varphi:U\to\mathbb{C}$, donde U es un conjunto de Borel, es decir, un abierto compacto. Se tiene que*

$$\int_U\varphi(x)dx=|a|_p\int_{a^{-1}U+b}\varphi(ay+b)dy$$

para cualquier $a\in\mathbb{Q}_p^\times$ y $b\in\mathbb{Q}_p$.

Mostraremos ahora algunos ejemplos clásicos e importantes del cálculo de integrales $p-$ádicas usando el cambio de variables mencionado. Algunos de estos resultados serán utilizados posteriormente.

Ejemplo 1.3.1. *Para cualquier $r\in\mathbb{Z}$*

$$\int_{B_r(0)}dx=\int_{p^r\mathbb{Z}_p}dy=p^{-r}\int_{\mathbb{Z}_p}dy=p^{-r}$$

donde el cambio de variables es $x=p^ry$ con $y\in\mathbb{Z}_p$, se tiene que $dx=d(p^ry)=|p^r|_pdy=p^{-r}dy$.

Ejemplo 1.3.2. *Para cualquier $r\in\mathbb{Z}$, como $S_r(0)=B_r(0)\setminus B_{r+1}(0)$, tenemos que*

$$\int_{S_r(0)}dx=\int_{B_r(0)}dx-\int_{B_{r+1}(0)}dx=p^{-r}-p^{-r-1}=p^{-r}(1-p^{-1}).$$

En particular, para $\mathbb{Z}_p^\times=\mathbb{Z}_p\setminus p\mathbb{Z}_p$,

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times}dx=\int_{\mathbb{Z}_p}dx-\int_{p\mathbb{Z}_p}dx=1-p^{-1}.$$

Ejemplo 1.3.3. *Tomemos $U=\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}$. Se afirma que U no es compacto y que*

$$\int_U dx=\int_{\mathbb{Z}_p}dx=1.$$

Para la primera afirmación, consideramos la sucesión $\{p^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en U. Como $\lim\limits_{n\to+\infty}p^n=0$, se tiene que cualquier subsucesión $\{p^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $0\notin U$, luego U no es compacto en $\mathbb{Q}_p$.
Para la segunda afirmación, consideramos

$$\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}=\bigsqcup_{j=0}^{+\infty}S_j(0)$$

y tenemos que (tomando $x=p^jy$, con $y\in\mathbb{Z}_p^\times$)

$$\int_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}}dx=\sum_{j=0}^{+\infty}p^{-j}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}dy=\left(\frac{1}{1-p^{-1}}\int_{\mathbb{Z}_p^\times}dy\right)=\left(\frac{1}{1-p^{-1}}\right)(1-p^{-1})=1.$$

Esto muestra que U tiene medida de Haar 1 y luego, $\{0\}$ tiene medida de Haar 0. Para darle sentido a esto último, se puede ver que U es una unión contable disjunta de abiertos compactos, luego U es también un conjunto de Borel.

1.3.3. Funciones localmente constantes

Definición 1.3.1. *Una función $\varphi : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es* ***localmente constante*** *si para cada $x \in \mathbb{Q}_p$ existe un subconjunto abierto compacto de U, $x \in U$, tal que $\varphi(x) = \varphi(u)$ para todo $u \in U$.*

Observación 1.3.3. *Cualquier función localmente constante $\varphi : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{C}$ se puede expresar como una combinación lineal de funciones características de la forma:*

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n 1_{U_n}(x), \tag{1.9}$$

donde $c_n \in \mathbb{C}$,

$$1_{U_n}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \notin U_n \\ 1 & ; \quad x \in U_n \end{cases},$$

donde los $U_n \subseteq \mathbb{Q}_p$ son abiertos compactos disjuntos dos a dos y que cubren a $\mathbb{Q}_p$.

Sea $\varphi : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{C}$ una función localmente constante como en la Definición 1.3.1 y sea A un abierto compacto. Como cada abierto compacto se puede cubrir por un número finito de bolas disjuntas, podemos asumir que $A = \sqcup_{i=1}^{k} U_i$ donde cada U_i es un abierto compacto. Entonces, de la observación anterior, podemos escribir

$$\varphi|_A(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{U_i}(x)$$

y definimos

$$\int_A \varphi(x)dx = c_1 \int_{U_1} dx + c_2 \int_{U_2} dx + \cdots + c_k \int_{U_k} dx.$$

Definición 1.3.2. *Llamaremos* ***función Bruhat-Schwartz*** *a las funciones localmente constantes con soporte compacto. Estas funciones forman un $\mathbb{C}$-espacio vectorial que denotaremos $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p) := \mathcal{D}$ (espacio Bruhat-Schwartz).*

Las funciones $1_{B_r(a)} \in \mathcal{D}$, con $a \in \mathbb{Q}_p$ y $r \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.3.2. *Si $\varphi : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función localmente constante, entonces esta función es continua.*

Demostración. Sea V un abierto en $\mathbb{C}$. Como φ es localmente constante, para cada $y \in V$ existe un abierto U_y en $\mathbb{Q}_p$ tal que $\varphi|_{U_y} = y$. Entonces, $\varphi^{-1}(V) = \bigcup_{y \in V} U_y$, el cual es un abierto en $\mathbb{Q}_p$. □

El siguiente lema es una consecuencia del Teorema Stone-Weierstrass.

Lema 1.3.1 (Ver [10])**.** *$\mathcal{D}$ es un subespacio denso de $\mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ es el espacio de las funciones continuas con soporte compacto provisto de la norma del supremo.*

A partir del lema anterior tenemos que $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{C}$, lo que nos permite extender el funcional

$$F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)dx$$

a

$$\overline{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)dx$$

de manera única.

Lema 1.3.2. *Sea K un compacto en $\mathbb{Q}_p$. El espacio $\mathcal{D}(K)$ es denso en $\mathcal{C}(K)$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}(K)$ y sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Por la continuidad de f, para cada $a \in K$, existe $\gamma \in \mathbb{Z}$ tal que si $x \in B_\gamma(a) \cap K$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Como K es compacto, se puede cubrir por una número finito de bolas disjuntas $B_{\gamma_j}(a_j)$, con $a_j \in K$. Como cada $1_{B_{\gamma_j}(a_j)}(x) \in \mathcal{D}$, construimos una sucesión de funciones en $\mathcal{D}$ donde sus elementos son de la forma

$$f_{\gamma_j}(x) = \sum_j f(a_j) 1_{B_{\gamma_j}(a_j)}(x).$$

Además, como

$$\sum_j 1_{B_{\gamma_j}(a_j)}(x) = 1 \quad x \in K,$$

tenemos

$$\begin{aligned} ||f - f_{\gamma_j}||_{\mathcal{C}(K)} &= \max_{x \in K} |f(x) - f_{\gamma_j}(x)| \\ &\leq \max_{x \in K} \left| \sum_j (f(x) - f_{\gamma_j}(a_j)) 1_{B_{\gamma_j}(a_j)}(x) \right| \\ &< \epsilon \sum_j 1_{B_{\gamma_j}(a_j)}(x) = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Definición 1.3.3. *Un función $\varphi : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es **localmente integrable** si*

$$\int_K \varphi(x)dx$$

existe para todo K compacto. El espacio de las funciones localmente integrables se denota por $\varphi \in L^1_{loc}$.

Definición 1.3.4. *(Integral impropia) Una función $\varphi \in L^1_{loc}$ se dice **integrable en** $\mathbb{Q}_p$, si*

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{B_N(0)} \varphi(x)dx = \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=-\infty}^{N} \int_{S_j(0)} \varphi(x)dx$$

existe. Si el límite existe, se denota como $\displaystyle\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)dx$, y decimos que la integral impropia existe.

Observación 1.3.4. *Notar que como $\mathbb{Q}_p \setminus \{0\} = \displaystyle\bigsqcup_{j=-\infty}^{+\infty} S_j(0)$,*

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x)dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{S_j(0)} \varphi(x)dx.$$

Ejemplo 1.3.4. *Mostraremos que la función $|x|_p$ es localmente integrable pero no integrable.*
Para mostrar el primer hecho, sea K un compacto en $\mathbb{Q}_p$. $\{x+p^{m_x}\mathbb{Z}_p \mid x \in K\}$ es un cubrimiento abierto de K y como K es compacto, existen $x_1, ..., x_n \in K$ tales que

$$K \subset \bigsqcup_{i=1}^{n} x_i + p^{m_{x_i}}\mathbb{Z}_p,$$

luego por monotonía de la integral y aplicando un cambio de variables, tenemos que

$$\int_K |x|_p dx \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i+p^{m_{x_i}}\mathbb{Z}_p} |x|_p \; dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{p^{m_{x_i}}\mathbb{Z}_p} |x|_p \; dx = \sum_{i=1}^{n} p^{-m_{x_i}} \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p dx \leq \sum_{i=1}^{n} p^{-m_{x_i}} \int_{\mathbb{Z}_p} dx < \infty$$

donde la última desigualdad es cierta porque $|x|_p \leq 1$ para $x \in \mathbb{Z}_p$.
Por otro lado, considerando $\varphi(x) = |x|_p$ como en la observación previa,

$$\int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p \; dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{S_j(0)} |x|_p \; dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} p^{-j} \int_{S_j(0)} dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (1-p^{-1})$$

donde se tiene que la última suma no tiene sentido (diverge). Por ello $|x|_p$ no es integrable.

Ejemplo 1.3.5. *Asumimos que $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(p^j)p^j < +\infty$ donde $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ y a $f(|\cdot|_p) : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{C}$ se le llama función radial. Usando la Observación 1.3.4, tenemos que*

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(|x|_p)dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{S_j(0)} f(|x|_p)dx = (1-p^{-1}) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(p^j)p^j.$$

Ejemplo 1.3.6. *Considerando $\sum_{j=0}^{+\infty} jp^{-j} = \dfrac{p}{(p-1)^2}$, mostraremos que $\int_{\mathbb{Z}_p} \ln(|x|_p)dx = -\dfrac{\ln(p)}{p-1}$.*
En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}_p} \ln(|x|_p)dx &= \int_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} \ln(|x|_p)dx = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{S_j(0)} \ln(|x|_p)dx \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \ln(p^{-j}) \int_{S_j(0)} dx = \sum_{j=0}^{+\infty} -j\ln(p)p^{-j}(1-p^{-1}) \\
&= -\ln(p)(1-p^{-1}) \sum_{j=0}^{+\infty} jp^{-j} \\
&= -\ln(p)\left(\frac{p-1}{p}\right) \frac{p}{(p-1)^2} = -\frac{\ln(p)}{p-1}.
\end{aligned}$$

1.3.4. Cambio de Variables (Caso General)

Introduciremos el caso general del cambio de variables, como consecuencia del teorema de la función inversa en su versión analítica en el caso p-ádico.

Definición 1.3.5. *Una función $h : U \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ se dice **analítica** sobre un abierto U de $\mathbb{Q}_p$, si existe una serie de potencias convergente $\sum_i a_i x^i$ para $x \in \tilde{U} \subset U$, con $\tilde{U}$ abierto, tal que $h(x) = \sum_i a_i x^i$ para $x \in \tilde{U}$.*

En este caso, $h'(x) = \sum_i ia_i x^{i-1}$ es una serie de potencias convergente. Una función f se dice **bianalítica** si f y f^{-1} son analíticas.

Teorema 1.3.2 (Cambio de variables, caso general)**.** *Sean $K, K_1 \subset \mathbb{Q}_p$ dos abiertos compactos. Sea $\sigma : K_1 \longrightarrow K$ una función bianalítica tal que $\sigma'(y) \neq 0$, $y \in K_1$. Entonces, si f es una función continua sobre K, se tiene que*

$$\int_K f(x)dx = \int_{K_1} f(\sigma(y))|\sigma'(y)|_p dy, \quad x = \sigma(y).$$

Demostración. Como $f \mapsto \int_K f(x)dx$ es un funcional lineal continuo sobre $C(K)$ (Observación 1.3.2) tenemos que f es integrable y, como $\mathcal{D}(K)$ es denso en $\mathcal{C}(K)$ (Lema 1.3.2), es suficiente probar la fórmula sobre $\mathcal{D}(K)$. Sin pérdida de generalidad, se puede probar para $f(x) \equiv 1$, $x \in K$, es decir, probaremos que

$$\int_K dx = \int_{K_1} |\sigma'(y)|_p dy.$$

Como K_1 es compacto se puede cubrir por un número finito de bolas disjuntas de la forma $B_l(y_i)$ de radio p^l suficientemente pequeño tal que

$$|\sigma'(y)|_p = |\sigma'(y_i)|_p = p^{r_i}, \quad y \in B_l(y_i),$$

y por el Corolario 1.4.1, para el caso $n = 1$ aplicado a σ, tenemos que $B_l(y_i) = y_i + p^l\mathbb{Z}_p$ es mapeada sobre $B_{l+r_i}(x_i) = x_i + p^{l+r_i}\mathbb{Z}_p$, con $x_i = \sigma(y_i)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_K dx &= \sum_i \int_{B_{l+r_i}(x_i)} dx = \sum_i p^l p^{r_i} \\
&= \sum_i \int_{B_l(y_i)} p^{r_i} dy = \sum_i \int_{B_l(y_i)} |\sigma'(y_i)|_p dy \\
&= \sum_i \int_{B_l(y_i)} |\sigma'(y)|_p dy = \int_{K_1} |\sigma'(y)|_p dy
\end{aligned}$$

□

1.3.5. Integración en $\mathbb{Q}_p^n$

Ya sabemos que $(\mathbb{Q}_p^n, +)$ es un grupo topológico localmente compacto. Luego, existe una medida de Haar $d^n x$ en $\mathbb{Q}_p^n$, que, en este caso, es justamente la **medida producto** de $dx_1, ..., dx_n$, donde cada dx_i es la medida de Haar de $(\mathbb{Q}_p, +)$ normalizada. En particular, si $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, donde cada A_i es medible con respecto a dx_i, se tiene

$$\int_A d^n x = \prod_{i=1}^n \int_{A_i} dx_i.$$

De esta forma, como $\mathbb{Z}_p^n = \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$, se tiene

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} d^n x = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{Z}_p} dx_i = 1.$$

Teorema 1.3.3 (Teorema de Fubini)**.** *Si $f : \mathbb{Q}_p^{n+m} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función tal que la integral iterada*

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^m} f(x,y)\ d^m y\right)\ d^n x$$

existe, entonces f es integrable en $\mathbb{Q}_p^{n+m}$ y se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^m} f(x,y)\ d^m y\right)\ d^n x = \int_{\mathbb{Q}_p^{n+m}} f(x,y)\ d^{n+m}(x,y) = \int_{\mathbb{Q}_p^m}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^n} f(x,y)\ d^n x\right)\ d^m y.$$

El siguiente teorema es el análogo n-dimensional para el Teorema 1.3.2 del Cambio de variables (caso general).

Teorema 1.3.4 (Cambio de variables (caso general n-dimensional))**.** *Sean $K, K_1 \subset \mathbb{Q}_p^n$ dos abiertos compactos. Sea $\sigma : K_1 \longrightarrow K$, $\sigma(y) = \sigma(y_1, ..., y_n) = (\sigma_1(y), ..., \sigma_n(y)) = x$ una función bianalítica (analítica en cada variable) tal que*

$$det\left[\frac{\partial\sigma(y)}{\partial y}\right] = det\left[\frac{\partial\sigma_i(y)}{\partial y_j}\right]_{1\leq i,j\leq n} \neq 0 \quad y \in K_1$$

. Entonces, si f es una función continua sobre K, se tiene que

$$\int_K f(x)\ d^n x = \int_{K_1} f(\sigma(y))\left|det\left[\frac{\partial\sigma(y)}{\partial y}\right]\right|_p d^n y, \quad x = \sigma(y).$$

Ejemplo 1.3.7. *Para cualquier $r \in \mathbb{Z}$*

$$\int_{B_r^n(0)} d^n x = \int_{p^r\mathbb{Z}_p^n} d^n y = p^{-rn}\int_{\mathbb{Z}_p^n} d^n y = p^{-rn}$$

donde el cambio de variables n-dimensional es $x = p^r y$ con $y \in \mathbb{Z}_p^n$ y por el teorema anterior $d^n x = d^n(p^r y) = |p^r|_p^n d^n y = p^{-rn} d^n y$.

Ejemplo 1.3.8. *Análogo al Ejemplo 1.3.2, para cualquier $r \in \mathbb{Z}$, como $S_r^n(0) = B_r^n(0) \backslash B_{r+1}^n(0)$, tenemos que*

$$\int_{S_r^n(0)} d^n x = \int_{B_r^n(0)} d^n x - \int_{B_{r+1}^n(0)} d^n x = p^{-rn} - p^{-rn-n} = p^{-rn}(1 - p^{-n}).$$

En particular, para la esfera unitaria n-dimensional $S_1^n(0) = \mathbb{Z}_p^n \setminus p\mathbb{Z}_p^n$,

$$\int_{S_1^n(0)} d^n x = \int_{\mathbb{Z}_p} d^n x - \int_{p\mathbb{Z}_p} d^n x = 1 - p^{-n}.$$

Por otro lado, es claro que

$$\int_{(\mathbb{Z}_p^\times)^n} d^n x = (1 - p^{-1})^n$$

Como $d^n x$ es una medida no-negativa, toda la **teoría de la medida** es válida sobre el espacio $\mathbb{Q}_p^n$. Ciertos resultados (como por ejemplo, el teorema de convergencia dominada) los utilizaremos más adelante.

1.4. Teorema de la Función Implícita en $\mathbb{Q}_p$

Denotamos por $\mathbb{Q}_p[[x_1, ..., x_n]]$ al **anillo de las series formales de potencias** con coeficientes en $\mathbb{Q}_p$. Un elemento de este anillo es de la forma

$$\sum c_i x^i = \sum_{(i_1,i_2,...,i_n)\in\mathbb{N}^n} c_{i_1,i_2,...,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

Definición 1.4.1. *Una serie formal* $\sum c_i x^i$ *se dice* ***convergente*** *si existe* $r \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\sum c_i a^i$ *converge para cualquier* $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{Q}_p^n$ *que satisfaga* $||a||_p < p^r$*.*

Las series formales convergentes forman un subanillo de $\mathbb{Q}_p[[x_1, ..., x_n]]$, que se denotará $\mathbb{Q}_p\langle\langle x_1, ..., x_n\rangle\rangle$.

Definición 1.4.2. *Si para* $\sum c_i x^i$ *existe* $\sum c_i^{(0)} x^i \in \mathbb{R}\langle\langle x_1, ..., x_n\rangle\rangle$ *tal que* $|c_i|_p \leq c_i^{(0)}$ *para todo* $i \in \mathbb{N}^n$*, decimos que* $\sum c_i^{(0)} x^i$ *es una* ***serie dominante*** *para* $\sum c_i x^i$ *y escribimos*

$$\sum c_i x^i << \sum c_i^{(0)} x^i.$$

Lema 1.4.1. *Una serie formal de potencias es convergente si y solo si tiene una serie dominante.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $|i| := i_1 + \cdots + i_n$ para $i = (i_1, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n$. Asumimos que $\sum c_i x^i << \sum c_i^{(0)} x^i$, es decir, $|c_i|_p \leq c_i^{(0)}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Con esto tenemos que

$$\lim_{|i|\to+\infty} |c_i|_p \leq \lim_{|i|\to+\infty} c_i^{(0)} = 0$$

y luego $\sum c_i x^i$ es convergente.
($\Rightarrow$) Supongamos que $\sum c_i x^i \in \mathbb{Q}_p\langle\langle x_1, ..., x_n\rangle\rangle$, es decir, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $\sum c_i a^i$ converge para todo $a \in \mathbb{Q}_p$ con $||a||_p < p^r$. Elegimos $r_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $0 < p^{r_0} \leq p^r$. Entonces para todo $a \in \mathbb{Q}_p$ tal que $||a||_p < p^{r_0}$, se tiene que

$$|c_i a^i|_p \leq |c_i|_p p^{|i|r_0}$$

y así

$$\lim_{|i|\to+\infty} |c_i|_p p^{|i|r_0} = 0.$$

Luego $|c_i|_p p^{|i|r_0} \leq M$ para algún $M > 0$. Por lo tanto

$$\sum c_i x^i << \sum \left(\frac{M}{p^{|i|r_0}}\right) x^i.$$

□

Definición 1.4.3. *Decimos que* $f(x) = \sum c_i x^i \in \mathbb{Q}_p[[x_1, ..., x_n]]$ *es una* ***serie de potencias especial restringida*** *(SRP), si* $f(0) = 0$*, es decir,* $c_0 = 0$ *y* $c_i \equiv 0$ *mod*$(p^{|i|-1})$*, para cualquier* $i \in \mathbb{N}^n$*,* $i \neq 0$*.*

Observación 1.4.1. *Supongamos que* $f(x)$ *es una SRP.*

1. *Como* $c_i \equiv 0$ *mod*$(p^{|i|-1})$ *con* $i \neq 0$*, existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $c_i = kp^{|i|-1}$*. Entonces*

$$|c_i|_p = |k|_p |p^{1-|i|}|_p \leq 1.$$

Luego $f(x) \in \mathbb{Z}_p[[x_1, ..., x_n]]$*.*

2. *$f(x)$ es convergente para todo $a \in \mathbb{Z}_p^n$. En efecto, para $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}_p^n$, se tiene que $|c_i a^i|_p = |c_i|_p |a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n}|_p \leq |c_i|_p \leq \frac{1}{p^{|i|-1}}$. Luego $\lim\limits_{|i| \to +\infty} |c_i a^i|_p = 0$ y, por tanto, $\sum c_i a^i$ converge.*

3. *Denotamos $f(a) = \sum c_i a^i$. Por la observaciones 1 y 2, tal serie es una sucesión convergente en $\mathbb{Z}_p$. Como $\mathbb{Z}_p$ es compacto, se tiene que $f(a) \in \mathbb{Z}_p$.*

Teorema 1.4.1 (Teorema de la Función Implícita, primera versión)**.**

1. *Sea $F(x, y) = (F_1(x, y), ..., F_m(x, y))$, con $F_i(x, y) \in \mathbb{Q}_p[[x, y]] := \mathbb{Q}_p[[x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m]]$ tal que $F_i(0, 0) = 0$ y*

$$det \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0, 0) \right]_{1 \leq i,j \leq m} \neq 0.$$

Entonces existe una única función $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ con $f_i(x) \in \mathbb{Q}_p[[x_1, ..., x_n]]$, $f_i(0) = 0$, que satisface $F(x, f(x)) = 0$, es decir, $F_i(x, f(x)) = 0$ para todo i.

2. *Si cada $F_i(x, y)$ es una serie de potencias convergente, se tiene que cada f_i es también una serie de potencias convergente. Más aún, si a es cercano a 0, entonces $f(a)$ será cercano a 0 en $\mathbb{Q}_p^n$ y $F(a, f(a)) = 0$ y, si (a, b) es cercano a $(0, 0)$ en $\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{Q}_p^m$ y $F(a, b) = 0$, entonces $f(a) = b$.*

Corolario 1.4.1.

1. *Si $g_i(x) \in \mathbb{Q}_p[[x_1, ..., x_n]]$, $g_i(0) = 0$ para $1 \leq i \leq n$ y*

$$det \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0) \right] \neq 0$$

entonces existe una única $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ con $f_i(x) \in \mathbb{Q}_p[[x_1, ..., x_n]]$, $f_i(0) = 0$ para todo i, tal que $g(f(x)) = x$.

2. *Si $g_i(x) \in \mathbb{Q}_p\langle\langle x_1, ..., x_n \rangle\rangle$, entonces $f_i(x) \in \mathbb{Q}_p\langle\langle x_1, ..., x_n \rangle\rangle$ para todo i. Además, si b está cerca de 0 en $\mathbb{Q}_p^n$ y $a = g(b)$, se tiene que a está también cercano a 0 en $\mathbb{Q}_p^n$ y $f(a) = b$. Por lo tanto $y = f(x)$ es un homemorfismo entre pequeñas vecindades de 0 en $\mathbb{Q}_p^n$.*

Observación 1.4.2. *Sean $U_1 \subset \mathbb{Q}_p^n$ y $U_2 \subset \mathbb{Q}_p^m$ abiertos que contienen a 0. Asumamos que cada*

$$F_i(x, y) : U_1 \times U_2 \longrightarrow \mathbb{Q}_p$$

es una serie de potencias convergente. Un conjunto de la forma

$$V := \{(x, y) \in U_1 \times U_2 \mid \ F_i(x, y) = 0, \ i = 1, ..., m\}$$

*se llama **conjunto analítico**. En el caso en que todos los $F_i(x, y)$ sean polinomios y $U_1 = \mathbb{Q}_p^n$, $U_2 = \mathbb{Q}_p^m$, V se denomina un **conjunto algebraico**. Si todos los $F_i(x, y) \in \mathbb{Q}_p\langle\langle x, y \rangle\rangle$ satisfacen la hipótesis del teorema de la función implícita, tenemos que V posee una parametrización, que es posible definir después de ajustar los abiertos U_1 y U_2, es decir, existen subconjuntos abiertos que contienen a 0, $\tilde{U}_1 \subset U_1$ y $\tilde{U}_2 \subset U_2$, tales que*

$$V := \{(x,y) \in \tilde{U_1} \times \tilde{U_2} \mid \ F_i(x,y) = 0, \ i = 1,...,m\} = \{(x,y) \in \tilde{U_1} \times \tilde{U_2} \mid \ f(x) = y\}.$$

Observación 1.4.3. *A partir del cambio de coordenadas* $x_1,...,x_n, \ z_1 = y_1 - f_1(x),...,z_m = y_m - f_m(x)$ *se tiene*

$$V := \{(x,z) \in \tilde{U_1} \times \tilde{U_2} \mid \ z_1 = ... = z_m = 0\}.$$

Decimos que V *es una* ***subvariedad analítica cerrada*** *de* $\tilde{U_1} \times \tilde{U_2} \subset \mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{Q}_p^m$ *de* ***codimensión*** m. *La palabra* ***cerrada*** *quiere decir que* V *es cerrado en la topología producto p-ádica.*

En la siguiente versión del teorema de la función implícita podemos controlar el radio de las bolas que comprende el teorema.

Teorema 1.4.2 (Teorema de la Función Implícita, segunda versión)**.**

1. *Supongamos que* $F_i(x,y) \in \mathbb{Z}_p[[x,y]] := \mathbb{Z}_p[[x_1,...,x_n,y_1,...,y_m]]$, $F_i(0,0) = 0$ *para todo* i *y*

$$det\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0,0)\right]_{1\leq i,j\leq m} \not\equiv 0 \ mod(p).$$

   Entonces existe una única solución $f(x) = (f_1(x),...,f_m(x))$, *con* $f_i(x) \in \mathbb{Z}_p[[x_1,...,x_n]]$, $f_i(0) = 0$ *de la ecuación* $F(x, f(x)) = 0$, *es decir,* $F_i(x, f(x)) = 0$ *para todo* i.

2. *Si cada* $F_i(x,y)$ *es una SRP en* $x_1,...,x_n,y_1,...,y_m$, *se tiene que todo* $f_i(x)$ *es también una SRP en* $x_1,...,x_n$. *Más aún, si* $a \in \mathbb{Z}_p^n$, *entonces* $f(a) \in \mathbb{Z}_p^m$ *y* $F(a, f(a)) = 0$ *y, si* $(a,b) \in \mathbb{Z}_p^n \times \mathbb{Z}_p^m$ *satisface que* $F(a,b) = 0$, *entonces* $f(a) = b$.

Corolario 1.4.2.

1. *Si* $g_i(x) \in \mathbb{Z}_p[[x_1,...,x_n]]$, $g_i(0) = 0$ *para todo* i *y si además*

$$det\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0,0)\right]_{1\leq i,j\leq n} \not\equiv 0 \ mod(p),$$

   se tiene que todo $f_j(x)$ *es la única solución de* $g_i(f_1(x),...,f_n(x)) = x$ *que satisface que* $f_j(0) = 0$ *donde cada* $f_j(x) \in \mathbb{Z}_p[[x_1,...,x_n]]$.

2. *Si cada* $g_i(x)$ *es una SRP en* $x_1,...,x_n$, *entonces cada* $f_j(x)$ *es también una SRP en las mismas variables, y* $f(x) = y$ *da lugar a un homeomorfismo de* $\mathbb{Z}_p^n$ *en* $\mathbb{Z}_p^n$.

Observación 1.4.4. *Asumamos que cada* $F_i(x,y)$ *es una SRP en las variables* (x,y). *Sea*

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_p^n \times \mathbb{Z}_p^m \mid \ F_i(x,y) = 0, \ i = 1,...,m\}.$$

Como se cumple las hipótesis de las segunda versión del teorema de la función implícita (punto 2), tenemos

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_p^n \times \mathbb{Z}_p^m \mid \ f(x) = y\}.$$

A partir del sistema de coordenadas $x_1,...,x_n, \ z_1 = y_1 - f_1(x),...,z_m = y_m - f_m(x)$, V *toma la forma*

$$V := \{(x,y) \in \mathbb{Z}_p^n \times \mathbb{Z}_p^m \mid z_1 = ... = z_m = 0\}.$$

Decimos que V *es una subvariedad analítica cerrada de* $\mathbb{Z}_p^n \times \mathbb{Z}_p^m$ *de codimensión* m.

1.5. Análisis de Fourier en $\mathbb{Q}_p$

En esta sección presentamos los preliminares elementales que se usarán más adelante en el desarrollo de la teoría de operadores pseudo-diferenciales $p-$ádicos.

Recordemos que todo número $p-$ádico $x \neq 0$ tiene una representación única de la forma:

$$x = \sum_{i=-N}^{\infty} x_i p^i$$

donde los $x_i \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ y $x_0 \neq 0$. Con esto, se define la parte fraccionaria de $x \in \mathbb{Q}_p$ como el número racional

$$\{x\}_p = x_{-N}p^{-N} + x_{-N+1}p^{-N+1} + \cdots + x_{-1}p^{-1}$$

En el caso que $x \in \mathbb{Z}_p$, se define $\{x\}_p = 0$.

Además, cada número $p-$ádico $x \neq 0$ se puede representar únicamente de la forma

$$x = p^{ord(x)} \sum_{j=0}^{+\infty} y_j p^j = p^{ord(x)} ac(x) \quad \text{con} \quad y_j \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$$

donde $ac(x)$ es la **componente angular** de x, con $|ac(x)|_p = 1$.

1.5.1. Caracteres Aditivos

La función $\chi_p(y) := exp(2\pi i\{y\}_p)$, para $y \in \mathbb{Q}_p$, se llama **caracter aditivo estándar** de $\mathbb{Q}_p$. Notemos que

$$\chi_p : (\mathbb{Q}_p, +) \longrightarrow (S, \cdot)$$

es una aplicación continua del grupo aditivo de $\mathbb{Q}_p$ sobre la circunferencia unitaria en $\mathbb{C}$ considerada como un grupo multiplicativo que satisface

$$\chi_p(x_1 + x_2) = \chi_p(x_1) \cdot \chi_p(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Q}_p.$$

Notar además que el caracter aditivo cumple las siguientes propiedades:

1. $\chi_p(0) = 1$
2. $\chi_p(-x) = \overline{\chi_p(x)} = (\chi_p(x))^{-1}$
3. $\chi_p(nx) = \chi_p^n(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Los caracteres aditivos de $\mathbb{Q}_p$ forman un grupo Abeliano que es isomorfo a $(\mathbb{Q}_p, +)$, dado por el isomorfismo $\xi \to \chi_p(\xi x)$.

Ejemplo 1.5.1. *Veremos que*

$$\int_{B_r(0)} \chi_p(\xi x)\, dx = \begin{cases} p^r & ; \quad |\xi|_p \leq p^{-r} \\ 0 & ; \quad |\xi|_p > p^{-r} \end{cases} \qquad \text{para } r \in \mathbb{Z}.$$

En efecto, si $|\xi|_p \le p^{-r}$*, tenemos que* $|\xi x|_p \le 1$*, luego* $\chi_p(\xi x) = 1$ *y*

$$\int_{B_r(0)} \chi_p(\xi x)\ dx = \int_{B_r(0)} dx = p^r.$$

En un segundo caso, supongamos que $|\xi|_p > p^{-r}$*, es decir,* $|\xi|_p \ge p^{-r+1}$*. Si tomamos un* x_0 *tal que* $|x_0|_p = p^r$*, tenemos que* $|x_0\xi|_p \ge p$ *y luego* $\chi_p(\xi x_0) \ne 1$*. Así*

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} \chi_p(\xi x)\ dx &= \int_{B_r(-x_0)} \chi_p(\xi(x_0+y))\ dy \quad (x = x_0 + y;\ dx = d(x_0+y) = dy) \\ &= \int_{B_r(0)} \chi_p(\xi x_0)\chi_p(\xi y)\ dy \quad (pues |x_0+y|_p = |y|_p) \\ &= \chi_p(\xi x_0)\int_{B_r(0)} \chi_p(\xi y)\ dy \end{aligned}$$

y como $\chi_p(\xi x_0) \ne 1$*, se tiene que*

$$\int_{B_r(0)} \chi_p(\xi x)\ dx = 0.$$

Ejemplo 1.5.2. *Del ejemplo anterior y considerando que* $S_r(0) = B_r(0) \setminus B_{r-1}(0)$*, se tiene que*

$$\int_{S_r(0)} \chi_p(\xi x)\ dx = \begin{cases} p^r - p^{r-1} & ;\ |\xi|_p \le p^{-r} \\ -p^{r-1} & ;\ |\xi|_p = p^{1-r} \\ 0 & ;\ |\xi|_p > p^{1-r} \end{cases} \quad para\ r \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 1.5.3. *Si* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$*,* $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{Q}_p^n$*, definimos*

$$x \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \xi_i.$$

Con lo anterior, se generalizan a $\mathbb{Q}_p^n$ *los ejemplos previos de la forma:*

$$\int_{B_r^n(0)} \chi_p(\xi x)\ d^n x = \begin{cases} p^{rn} & ;\ ||\xi||_p \le p^{-r} \\ 0 & ;\ ||\xi||_p > p^{-r} \end{cases} \quad para\ r \in \mathbb{Z}$$

y

$$\int_{S_r^n(0)} \chi(\xi x)\ d^n x = \begin{cases} p^{rn} - p^{rn-n} & ;\ ||\xi||_p \le p^{-r} \\ -p^{rn-n} & ;\ ||\xi||_p = p^{1-r} \\ 0 & ;\ ||\xi||_p > p^{1-r} \end{cases} \quad para\ r \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 1.5.4. *Si* $\sum_{r=0}^{+\infty} |f(p^{-r})|p^{-r} < \infty$*, entonces para* $\xi \ne 0$

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(|x|_p)\chi_p(\xi x)\ dx = (1-p^{-1})|\xi|_p^{-1}\sum_{r=0}^{+\infty} p^{-r} f(p^{-r}|\xi|_p^{-1}) - |\xi|_p^{-1} f(p|\xi|_p^{-1}),$$

donde $f:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\longrightarrow\mathbb{C}$ *y a* $f(|\cdot|_p):\mathbb{Q}_p\longrightarrow\mathbb{C}$ *se le llama función radial.*
En efecto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Q}_p} f(|x|_p)\chi_p(\xi x)\,dx &= \int_{\mathbb{Q}_p\setminus\{0\}} f(|x|_p)\chi_p(\xi x)\,dx \quad (\{0\}\text{ tiene medida cero})\\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{S_l(0)} f(|x|_p)\chi_p(\xi x)\,dx\\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(p^l)\int_{B_l(0)\setminus B_{l-1}(0)} \chi_p(\xi x)\,dx,\end{aligned}$$

de donde si fijamos $|\xi|_p=p^N$*, para algún* $N\in\mathbb{Z}$*, tenemos por el Ejemplo 1.5.2 que*

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(|x|_p)\chi_p(\xi x)\,dx=\sum_{l\in\mathbb{Z}} f(p^l)\int_{B_l(0)\setminus B_{l-1}(0)}\chi_p(\xi x)\,dx=(1-p^{-1})\sum_{l\le -N} f(p^l)p^l-f(p^{-N+1})p^{-N},$$

luego haciendo el cambio de variable $r=-l-N$ *y considerando la hipótesis, se cumple la afirmación.*

Ejemplo 1.5.5. *El ejemplo anterior se puede extender sobre* $\mathbb{Q}_p^n$ *de la forma:*

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} f(||x||_p)\chi_p(\xi\cdot x)\,d^nx=(1-p^{-1})||\xi||_p^{-N}\sum_{r=0}^{+\infty}p^{-rn}f(p^{-r}||\xi||_p^{-N})-||\xi||_p^{-N}f(p||\xi||_p^{-N}).$$

Observación 1.5.1. *A partir del Ejemplo 1.5.4, con* $f\equiv 1$*, tenemos que*

$$\int_{\mathbb{Q}_p}\chi_p(\xi x)\,dx=\begin{cases}+\infty & ;\quad \xi=0\\ 0 & ;\quad \xi\neq 0\end{cases}=\delta(\xi).$$

Con esto, se tiene que la transformada de Fourier (que se definirá posteriormente) de la función constante $f\equiv 1$ *es la función* ***Delta de Dirac*** δ.

1.5.2. Caracteres Multiplicativos

Un caracter multiplicativo de $(\mathbb{Q}_p^\times,\cdot)$, o simplemente de $\mathbb{Q}_p^\times$, es una aplicación continua

$$\pi:(\mathbb{Q}_p^\times,\cdot)\longrightarrow(\mathbb{C}^\times,\cdot)$$

que satisface $\pi(x_1x_2)=\pi(x_1)\pi(x_2)$, con $x_1,x_2\in\mathbb{Q}_p^\times$. Todo caracter multiplicativo de $\mathbb{Q}_p$ se puede representar como

$$\pi(x):=\pi_s(x)=|x|_p^{s-1}\pi_1(ac(x)),$$

donde $s\in\mathbb{C}$ y π_1 es la restricción de π a $\mathbb{Z}_p^\times$ sobre S.

Ejemplo 1.5.6. *Si* $\pi(x)\not\equiv 1$ *es un caracter multiplicativo normalizado* ($|\pi(x)|_p=1$) *en* $\mathbb{Q}_p^\times$*, se tiene que*

$$\int_{p^r\mathbb{Z}_p^\times}\pi(x)\,dx=0;\ con\ r\in\mathbb{Z}.$$

En efecto, podemos elegir un $a\in\mathbb{Q}_p^\times$ *tal que* $|a|_p=1$ *y* $\pi(a)\neq 1$*. Luego*

$$\begin{aligned}I &= \int_{p^r\mathbb{Z}_p^\times}\pi(x)\,dx\\ &= |a|_p\int_{p^r\mathbb{Z}_p^\times}\pi(ay)\,dy \quad (x=ay;\ dx=d(ay)=|a|_pdy;\ |ay|_p=|y|_p)\\ &= \pi(a)\int_{p^r\mathbb{Z}_p^\times}\pi(y)\,dy=\pi(a)\cdot I\end{aligned}$$

y como $\pi(a)\neq 1$*, se tiene que* $I=0$.

1.5.3. El Espacio Bruhat-Schwartz

Una función $\varphi : \mathbb{Q}_p^n \to \mathbb{C}$ es localmente constante si para cualquier $x \in \mathbb{Q}_p^n$ existe un $l_x \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\varphi(x + x') = \varphi(x) \text{ para } x' \in B_{l_x}^n. \tag{1.10}$$

Las funciones localmente constantes forman un $\mathbb{C}$-espacio vectorial que será denotado por $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n) := \mathcal{E}$. Las funciones localmente constantes φ en las cuales l_x depende solo de φ, forman un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial de $\mathcal{E}$, denotado por $\tilde{\mathcal{E}}$.
Recordemos que el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n) := \mathcal{D}$ corresponde al espacio Bruhat-Schwartz de las funciones localmente constantes con soporte compacto (también se les llama funciones test o funciones de prueba) (ver Capítulo I).
Para una $\varphi \in \mathcal{D}$, el número más grande $l = l_\varphi$ que satisface 1.10 se llama **exponente de constancia local** (o parámetro de constancia) de φ.
La convergencia en el espacio $\mathcal{D}$, se define de la siguiente manera:

$$\varphi_k \to 0 \text{ cuando } k \to \infty \text{ en } \mathcal{D} \text{ si y solo si}$$

1. existe un natural N, y un real l, tales que $supp(\varphi_k) \subset B_N^n$ y $l_{\varphi_k} \geq l$, para todo $k \in \mathbb{N}$,

2. φ_k converge uniformemente a 0 en $\mathbb{Q}_p^n$.

Con esto, $\mathcal{D}$ es un espacio localmente convexo completo y es denso en $\mathcal{C}_0$. Donde $\mathcal{C}_0$ es el $\mathbb{C}-$espacio vectorial de las funciones continuas en $\mathbb{Q}_p^n$ que se anulan en el infinito provisto de la norma $||\cdot||_\infty$ (f se anula en el infinito, quiere decir que, para todo $\epsilon > 0$ existe un compacto $K \subset \mathbb{Q}_p^n$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{Q}_p^n \setminus K$). Si U es un abierto en $\mathbb{Q}_p^n$, $\mathcal{D}(U)$ denota al espacio de las funciones localmente constantes con soporte contenido en U, luego $\mathcal{D}(U)$ es denso en

$$L^\rho := L^\rho(U) = \left\{ \varphi : U \to \mathbb{C};\ ||\varphi||_\rho = \left(\int_U |\varphi(x)|^\rho d^n x \right)^{\frac{1}{\rho}} < \infty \right\}$$

con $1 \leq \rho < \infty$.

1.5.4. Transformada de Fourier

Dados $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{Q}_p^n$, definimos

$$x \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \xi_i.$$

La transformada de Fourier de una función $\varphi \in \mathcal{D}$ se define como

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(\xi \cdot x)\varphi(x) d^n x \quad \text{para } \xi \in \mathbb{Q}_p^n.$$

La transformada de Fourier es un isomorfismo lineal de $\mathcal{D}$ en sí mismo que satisface $(\mathcal{F}(\mathcal{F}\varphi))(\xi) = \varphi(-\xi)$.
También usaremos $\mathcal{F}_{x\to\xi}\varphi$ y $\hat{\varphi}$ para denotar la transformada de Fourier de φ.

La transformada inversa de Fourier de una función $\phi \in \mathcal{D}$ se define como

$$(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(-\xi \cdot x)\phi(\xi)d^n\xi \quad \text{para } x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

También usaremos $\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\phi$ y $\breve{\phi}$ para denotar la transformada inversa de Fourier de ϕ.

Ejemplo 1.5.7. *Ya vimos que la transformada de Fourier de la función constante $f \equiv 1$ es la función delta de Dirac δ. A partir del Ejemplo 1.5.5, podemos obtener transformadas de Fourier de más funciones. Por ejemplo, considerando la función radial $g = f(||\cdot||_p) : \mathbb{Q}_p^n \to \mathbb{C}$, con $f(x) = \ln(x)$, la transformada de Fourier de g es*

$$(\mathcal{F}g)(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \ln(||x||_p)\chi_p(\xi \cdot x)\ d^n x = \frac{p^n \ln(p)}{p^n - 1}||\xi||_p^{-1}.$$

De aquí, la transformada inversa de Fourier de $||\xi||_p^{-1}$ será

$$(\mathcal{F}^{-1}||\xi||_p^{-1})(x) = \frac{1-p^n}{p^n \ln(p)} \ln(||x||_p)$$

.

1.5.5. Distribuciones

Denotamos por $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n) := \mathcal{D}'$ al $\mathbb{C}$-espacio vectorial de todas los funcionales continuos (distribuciones) definidos sobre $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$. La operación binaria natural

$$\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n) \to \mathbb{C}$$

la denotaremos por (T, φ), para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$.

La convergencia en el espacio $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ corresponde a la *convergencia débil*:

$$T_k \to 0 \ \text{ cuando } \ k \to \infty \ \text{ en } \ \mathcal{D}' \ \text{ si } \ (T_k, \varphi) \to 0 \ \text{ cuando } \ k \to \infty$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}$.

El espacio $\mathcal{D}'$ se corresponde con el dual algebraico de $\mathcal{D}$, es decir, todos los funcionales definidos en $\mathcal{D}$ son continuos. Sumado a esto, se tiene que $\mathcal{D}'$ es completo, es decir,

$$\text{si } \ T_k - T_j \to 0 \ \text{ cuando } \ k, j \to \infty, \text{ entonces existe un funcional } \ T \in \mathcal{D}' \ \text{ tal que}$$
$$T_k - T \to 0 \ \text{ cuando } \ k \to \infty \ \text{ en } \mathcal{D}'.$$

Sea U un abierto en $\mathbb{Q}_p^n$. Una distribución $T \in \mathcal{D}'(U)$ se anula en $V \subset U$ si $(T, \varphi) = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(V)$. Sea $U_T \subset U$ el abierto maximal sobre el cual se anula la distribución T. El soporte de T es el complemento de U_T en U y lo denotamos por *supp*(T).

Dadas $\theta \in \mathcal{D}$ fija y $T \in \mathcal{D}'$, se define la distribución θT por la fórmula

$$(\theta T, \varphi) = (T, \theta\varphi) \quad \text{para } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Se dice que una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ tiene soporte compacto si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\Delta_k T = T$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$, donde $\Delta_k(x) := 1_{B_k^n(0)}(x)$.

Toda función $f \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n)$, o más generalmente en L^1_{loc}, define una distribución $f \in \mathcal{D}'$ de la forma

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} f(x)\varphi(x)\, d^n x \quad \text{con } \varphi \in \mathcal{D}$$

y además, esta correspondencia es uno a uno.

Observación 1.5.2. *La distribución **Delta de Dirac** $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ se define*

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n).$$

Es claro que supp$(\delta) = \{0\}$. Recíprocamente, toda distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ con soporte compacto en el punto 0 es proporcional a la función delta de Dirac. En efecto, supongamos que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ es tal que $\varphi(x) = \varphi(0)$ para $x \in B_N^n(0)$ y sea η_N cualquier función en $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ tal que $\eta_N(x) = 1$ para los $x \in B_N^n(0)$. Luego,

$$(T, \varphi) = (T, \eta_N \varphi) = \varphi(0)(T, \eta_N) = C_N(\delta, \varphi)$$

donde $C_N = (T, \eta_N)$ es constante y no depende de N, pues

$$C_N - C_M = (T, \eta_N) - (T, \eta_M) = (T, \eta_N - \eta_M) = 0$$

y porque supp$(T) = \{0\}$.

Observación 1.5.3. *La sucesión de funciones $\delta_k(x) = p^{nk} 1_{B_k^n(0)}(x) = p^{nk}\Delta_k(x)$ converge al delta de Dirac δ, cuando $k \to \infty$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$. En efecto, sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ y sea $N \geq 1$ tal que supp$(\delta_k) \subset B_N^n(0)$ (con N independiente de k). Entonces para $k \geq N$ tenemos que*

$$(\delta_k, \varphi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} p^{nk}\Delta_k(x)\varphi(x) d^x = p^{nk}\int_{B_k^n(0)} \varphi(x) d^n x \longrightarrow \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

1.5.6. Transformada de Fourier de una Distribución

La transformada de Fourier $\mathcal{F}[T]$ de una distribución $T \in \mathcal{D}'$ se define por

$$(\mathcal{F}[T], \varphi) = (T, \mathcal{F}(\varphi))$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}$. La transformada de Fourier de distribuciones $T \to \mathcal{F}[T]$ es un isomorfismo lineal (y continuo) de $\mathcal{D}'$ en $\mathcal{D}'$ y además satisface la fórmula

$$T = \mathcal{F}[\mathcal{F}[T](-\xi)].$$

La transformada inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1}[T]$ de una distribución $T \in \mathcal{D}'$ se define como:

$$(\mathcal{F}^{-1}[T], \varphi) = (T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi))$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}$.

Observación 1.5.4. *Si $T \in \mathcal{D}'$, entonces $supp(T) \subset B_N^n(0)$ si, y solo si, $\mathcal{F}[T] \in \tilde{\mathcal{E}}$, donde el exponente de constancia local de $\mathcal{F}[T]$ es $\geq -N$. Añadiendo a esto,*

$$\mathcal{F}[T](\xi) = (T(y), \Delta_N(y)\chi_p(\xi \cdot y)).$$

Ejemplo 1.5.8. *Como $1 \in \mathcal{E}$, se define una distribución $1 \in \mathcal{D}'$ y, por la Observación 1.5.1, tenemos que $\mathcal{F}[1] = \delta$. Por otro lado tenemos que*

$$(\mathcal{F}[\delta], \varphi) = (\delta, \mathcal{F}[\varphi]) = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \varphi(x) d^n x = (1, \varphi) \quad \text{para } \varphi \in \mathcal{D},$$

es decir, $\mathcal{F}[\delta] = 1$.

Ejemplo 1.5.9. *Se define la distribución $\mathcal{P}||x||_p^{-1} = ||x||_p^{-1} - p^{-1}\delta(x)$ como*

$$(\mathcal{P}||x||_p^{-1}, \varphi) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{||x||_p} d^n x \ + \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus \mathbb{Z}_p^n} \frac{\varphi(x)}{||x||_p} d^n x$$

para $\varphi \in \mathcal{D}$ (Ver [11]). Vemos que

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{P}||\xi||_p^{-1}) = \mathcal{F}^{-1}(||\xi||_p^{-1}) - p^{-1}\mathcal{F}^{-1}(\delta(\xi)) = \frac{1-p}{p\ln(p)} \ln(||x||_p) - p^{-1}.$$

Ejemplo 1.5.10. *Para el caracter multiplicativo π_s (como distribución) tal que $\pi_1 \equiv 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}_p^\times$, se tiene que*

$$(\mathcal{F}\pi_s, \varphi) = (|x|_p^{s-1}, \mathcal{F}\varphi) = \frac{1-p^{s-1}}{1-p^{-s}} (|\xi|_p^{-s}, \varphi),$$

con $s \neq -\frac{2\pi i k}{\ln(p)}$, $k \in \mathbb{Z}$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}$. A la función

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1-p^{\alpha-1}}{1-p^{-\alpha}} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

*se le llama **función Gamma p-ádica**.*
Se define la familia de distribuciones

$$f_\alpha(x) = \frac{|x|_p^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{para } \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Con lo anterior, podemos observar que $(\mathcal{F}f_\alpha)(\xi) = |\xi|_p^{-\alpha}$.

Ejemplo 1.5.11. *Nuevamente, por medio del Ejemplo 1.5.5, para la forma binaria $h(x, y) = x^2 - \tau y^2$ donde τ no es una raíz cuadrada en $\mathbb{Q}_p$ y tal que $|x|_p + |y|_p \neq 0$, se tiene que*

$$(\mathcal{F}|h|_p^{\beta-1})(\xi_1, \xi_2) = \frac{1-p^{2(\beta-1)}}{p^{-2\beta}-1} |h(\xi_1, \xi_2)|_p^{-\beta}.$$

Definición 1.5.1. *(Producto Directo de Distribuciones) Dadas dos distribuciones $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ y $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^m)$, su producto directo $F \times G$ se define como*

$$(F(x) \times G(y), \varphi(x, y)) = (F(x), (G(y), \varphi(x, y))) \quad \text{para } \varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^{n+m}).$$

El producto directo es conmutativo, $F \times G = G \times F$. Además, $F \times G$ es continuo para ambos factores, luego $F \times G$ es una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^{n+m})$.

Definición 1.5.2. *(Convolución de Distribuciones) Dadas $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$, su convolución $F*G$ se define como*

$$(F * G, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (F(y) \times G(x), \Delta_k(x)\varphi(x+y))$$

si el límite existe para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$.
Cabe mencionar que si $F*G$ existe en $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$, se tiene que $G*F$ también es una distribución y $F*G = G*F$.

Observación 1.5.5. *Si $F, G \in \mathcal{D}'$ y $supp(G) \subset B_N^n(0)$, entonces la convolución $F*G$ existe y está dada por la fórmula*

$$(F * G, \varphi) = (F(y) \times G(x), \Delta_N(x)\varphi(x+y)) \quad \textit{para } \varphi \in \mathcal{D}.$$

En el caso que $G = \psi \in \mathcal{D}$, $F * \psi \in \mathcal{E}$ (es función localmente constante) y está definida por

$$(F * \psi)(y) = (F(x), \psi(y-x)) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} F(x)\psi(y-x)\ d^n x.$$

Definición 1.5.3. *(Multiplicación de Distribuciones) Dados $F, G \in \mathcal{D}'$, el producto $F \cdot G$ se define como*

$$(F \cdot G, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (G, (F * \delta_k)\varphi)$$

si el límite existe para todo $\varphi \in \mathcal{D}$.
Si $F \cdot G$ existe, entonces $G \cdot F$ también existe y son iguales.

Observación 1.5.6. *La existencia del producto $F \cdot G$ equivale a la existencia de $\mathcal{F}[F] * \mathcal{F}[G]$ y además se cumplen:*

$$\mathcal{F}[F \cdot G] = \mathcal{F}[F] * \mathcal{F}[G] \quad y \quad \mathcal{F}[F * G] = \mathcal{F}[F] \cdot \mathcal{F}[G]$$

Ejemplo 1.5.12. *Para $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$, se tiene que*

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
(f * \delta, \varphi) &= \lim_{k\to\infty} (f(y) \times \delta(x), \Delta_k(x)\varphi(x+y)) \\
&= \lim_{k\to\infty} (f(y), (\delta(x), \Delta_k(x)\varphi(x+y))) \\
&= (f(y), \varphi(y)) = (f, \varphi)
\end{aligned}$$

para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$.

1.6. Variedades Analíticas $p-$ádicas

Dentro de esta sección, abordaremos los preliminares esenciales sobre variedades analíticas que se usarán en el próximo capítulo.

Definición 1.6.1. *Sea $U \subset \mathbb{Q}_p^n$ un abierto no vacío y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ una función. Si en cada punto $a = (a_1, ..., a_n) \in U$ existe un elemento $f_a(x) \in \mathbb{Q}_p\langle\langle x - a\rangle\rangle = \mathbb{Q}_p\langle\langle x_1 - a_1, ..., x_n - a_n\rangle\rangle$ tal que $f(x) = f_a(x)$ para cualquier x cerca de a, decimos que f es una **función analítica** sobre U.*

De la definición, se tiene que todas las derivadas parciales de f también son funciones analíticas en U.

Definición 1.6.2. *Sea U un abierto no vacío en $\mathbb{Q}_p^n$ y sea $h = (h_1, ..., h_m) : U \longrightarrow \mathbb{Q}_p^m$ una función. Si cada h_i es función analítica sobre U, decimos que h es una **aplicación analítica** sobre U.*

Definición 1.6.3. *Sean X un espacio Hausdorff y n un entero no negativo fijo. Un par (U, ϕ_U), donde U es un abierto no vacío de X y $\phi_U : U \longrightarrow \phi_U(U)$ es un homeomorfismo de U sobre un abierto $\phi_U(U)$ de $\mathbb{Q}_p^n$, se le llama una **carta**. Las imágenes $\phi_U(x) = (x_1, ..., x_n)$, para cada $x \in U$, se denominan **las coordenadas locales** of x. Un conjunto de cartas $\{(U, \phi_U)\}$ se denomina un **atlas** si la unión de todos los U es justamente X y si para todo U, U' tales que $U \cap U' \neq \emptyset$, la aplicación*

$$\phi_U \circ \phi_{U'} : \phi_U(U \cap U') \longrightarrow \phi_{U'}(U \cap U')$$

*es analítica. Dos atlas se consideran equivalentes si su unión es también un atlas. Esta es una relación de equivalencia donde a cualquier clase de equivalencia se le denomina **estructura analítica** $p-$**ádica** n-**dimensional** sobre X. Si $\{(U, \phi_U)\}$ es un atlas en una clase de equivalencia, decimos que X es una **variedad analítica** $p-$ádica $n-$**dimensional** y, $dim(X) = n$.*

Cualquier subconjunto no vacío $U \in \mathbb{Q}_p^n$ es una variedad analítica $p-$ádica $n-$dimensional donde su atlas posee una única carta que es la identidad sobre U.

Definición 1.6.4. *Supongamos que X, Y son variedades analíticas $p-$ádicas definidas respectivamente por $\{(U, \phi_U)\}$, $\{(V, \psi_V)\}$ y sea $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación. Si para todo U, V tal que $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$, la aplicación*

$$\psi_V \circ f \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \mathbb{Q}_p^{dim(Y)}$$

*es analítica, entonces decimos que f es una **aplicación analítica**. Esta noción no depende de la elección de las cartas.*

Observación 1.6.1. *Supongamos que X es una variedad analítica $p-$ádica definida por el atlas $\{(U, \phi_U)\}$ y supongamos que Y es un subconjunto abierto no vacío en X. Si para todo $U' = Y \cap U \neq \emptyset$ denotamos $\phi_{U'} = \phi_U|_{U'}$, entonces $\{(U', \phi_{U'})\}$ define un atlas sobre Y y que hace a Y una **subvariedad analítica abierta** $p-$ádica de X, donde $dim(X) = dim(Y)$.*

Observación 1.6.2. *Supongamos que Y es un subconjunto cerrado no vacío de X, donde X es variedad analítica $p-$ádica $n-$dimensional y sea $0 < m \leq n$ tal que elegimos un atlas $\{(U, \phi_U)\}$ que define X con la siguiente propiedad:*
Si $\phi_U(x) = (x_1, ..., x_n)$ y $U' := U'_U = Y \cap U \neq \emptyset$, entonces existen funciones analíticas $p-$ádicas $F_1, ..., F_m$ en U tales que en primer lugar

$$U' = \{x \in U \mid \ F_1(x) = \cdots = F_m(x) = 0\}$$

y en segundo

$$det \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right]_{i,j}(a) \neq 0 \quad con \ \ 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n \quad para\ cada\ a \in U'.$$

Por el Corolario 1.4.1 del Teorema de la Función Implícita (Primera versión), la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \tilde{F} : \tilde{U} & \longrightarrow & \tilde{F}(\tilde{U}) \\ x & \longmapsto & (F_1(x), ..., F_m(x), x_{m+1}, ..., x_n) \end{array}$$

es analítica donde $\tilde{U}$ es una vecindad de a en U.
Ahora, si denotamos por $V = Y \cap \tilde{U}$ y $\psi_V(x) = (x_{m+1}, ..., x_n)$ para cada $x \in V$, tenemos que $\{(V, \psi_V)\}$ define un atlas sobre Y. Luego, se dice que Y es en una variedad analítica $p-$ádica con $dim(Y) = n - m$. Llamamos a Y una ***subvariedad cerrada de** X **de codimensión*** *m.*

Introduciremos ahora el concepto de **forma diferencial** sobre una variedad analítica p-ádica.

Definición 1.6.5. *Si U, V son vecindades de un punto $a \in X$ arbitrario y si f, g son funciones analíticas $p-$ádica respectivamente sobre U, V tal que $f|_W = g|_W$ para alguna vecindad $W \subset U \cap V$ de a, decimos que f, g son* ***equivalentes*** *en a. La anterior es una relación de equivalencia, donde una clase de equivalencia se denomina como un* ***germen de funciones analíticas*** *en a.*

El conjunto de gérmenes de funciones analíticas en a forman un **anillo local** denotado por $\mathcal{O}_{X,a}$, o simplemente $\mathcal{O}_a$.

Definición 1.6.6. *Si X es una variedad analítica p-ádica, el espacio tangente en $a \in X$, denotado por $T_a(X)$, es el $\mathbb{Q}_p$-espacio vectorial de las aplicaciones lineales (derivaciones) $\partial : \mathcal{O}_a \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ que satisfacen*

$$\partial(fg) = (\partial f)g(a) + f(a)(\partial g) \quad para\ todo\ f, g \in \mathcal{O}_a,$$

y su espacio dual lo denotamos por $\Omega_a(X)$ (el espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales de $T_a(X)$ en $\mathbb{Q}_p$).

Observación 1.6.3. *Si (U, ϕ_U) es una carta local alrededor de a con $\phi_U(x) = (x_1, ..., x_n)$, los elementos en $\Omega_a(X)$ son de la forma*

$$(df)_a = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)(dx_i)_a$$

donde $(dx_1)_a, ..., (dx_n)_a$ forman una base para $\Omega_a(X)$. De aquí observamos que $f \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ define a un elemento en $T_a(X)$ denotado por $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a$, por lo que todo elemento del espacio tangente $T_a(X)$ se puede escribir como

$$\partial = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a \partial x_i.$$

Además, si $f_1, ..., f_n \in \mathcal{O}_a$ son linealmente independientes, por el Corolario 1.4.1 del Teorema de la Función Implícita (primera versión), para $(df_1)_a, ..., (df_n)_a$, existe una vecindad V de a contenida en U tal que $\psi_V = (f_1, ..., f_n)$ define una aplicación analítica p-ádica de V en $\mathbb{Q}_p^n$. Añadiendo la carta (ψ_V, V) a un atlas dado $\{(U, \phi_U)\}$ de X, se producirá un atlas equivalente. A $(f_1, ..., f_n)$ las llamaremos coordenadas locales de X alrededor de a.

Observación 1.6.4. *Si E y E' son espacios vectoriales sobre $\mathbb{Q}_p$, $E \wedge E'$ es el $\mathbb{Q}_p$-espacio vectorial generado por las imágenes de la aplicación bilineal*

$$(v, v') \mapsto v \wedge v' \quad v \in E,\ v' \in E',$$

que satisface

$$v \wedge v = 0 \quad y \quad v \wedge v' + v' \wedge v = 0.$$

Si elegimos bases para E y E', el conjunto del producto de sus miembros forman una base para $E \wedge E'$ y $dim(E \wedge E') = dim(E)dim(E')$.
De la misma manera, si $v_1, v_2, ..., v_r \in E$, podemos definir un producto

$$(v_1, v_2, ..., v_r) \mapsto v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r$$

y el $\mathbb{Q}_p$-espacio generado por estos elementos lo denotaremos por $\wedge^r E$, donde $0 \leq r \leq n$, si $dim(E) = n$.

Si tomamos a $\Omega_a(X)$ de la Definición 1.6.6 como el espacio E de la observación previa y, si $\phi_U(x) = (x_1, ..., x_n)$ con $a \in U$, tenemos que $\wedge^r(\Omega_a(X))$ es el espacio donde sus elementos son de la forma

$$\sum_{i_1,\ldots,i_r} z(dx_{i_1})_a \wedge \cdots \wedge (dx_{i_r})_a, \quad z \in \mathbb{Q}_p,$$

para $0 \leq r \leq n$.

Definición 1.6.7. *Sean X y $\{(U, \phi_U)\}$ como antes y denotemos μ_n a la medida de Haar normalizada en $\mathbb{Q}_p^n$. Decimos que α es una forma diferencial de grado r sobre X si $\alpha(a) \in \wedge^r(\Omega_a(X))$ para todo $a \in X$. Si reemplazamos a por una variable $x \in U$, escribiremos dx_i en vez de $(dx_i)_x$. Luego, una forma diferencial α de grado r tiene una representación local de la forma*

$$\alpha(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_r} f_{U,i_1,\ldots,i_r}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$$

*donde las funciones $f_{U,i_1,\ldots,i_r}$ van de U en $\mathbb{Q}_p$. Si estas funciones son todas analíticas, se dice que α **es una forma diferencial analítica p-ádica** de grado r. Como caso particular, si α es una forma diferencial de grado n sobre X, $\alpha|_U$ tiene una representación local de la forma*

$$\alpha|_U(x) = f_U(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

donde f_U es una función analítica sobre U. Si A es un abierto compacto de X contenido en U, se define la medida de A como

$$\mu_\alpha(A) = \int_A |f_U(x)|_p \mu_n(\phi_U(x)) \qquad (\phi_U(x) = (x_1, ..., x_n)) \tag{1.11}$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{Z}} p^{-l} \mu_n \left(\phi_U \left(f_U^{-1}(p^l \mathbb{Z}_p^\times) \cap A \right) \right). \tag{1.12}$$

Notamos que la serie en (1.12) converge porque $f_U(A)$ *es un compacto y se puede escribir como una unión finita de conjuntos de la forma* $p^l\mathbb{Z}_p^\times$*. Las preimágenes de las coordenadas locales* $\phi_U(x) = (x_1, ..., x_n)$ *que definen la integral (1.11) deben ser tomadas sobre* $f_U^{-1}(p^l\mathbb{Z}_p^\times) \cap A$*, para finitos* $l \in \mathbb{Z}$*.*

Observación 1.6.5. *(Cambio de coordenadas locales) Si* $(U', \phi_{U'})$ *es otra carta y* $A \subset U'$*, entonces tendremos la misma medida* $\mu_\alpha(A)$ *relativa a esa carta. De hecho, si* $\phi_{U'}(x) = (x'_1, ..., x'_n) = x'$ *y* $\phi_U(x) = (\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) = \overline{x}$*, entonces* $\phi_{U'} \circ \phi_U^{-1}(\overline{x}) = \phi_{U'}(x) = x'$ *y*

$$\begin{aligned} \alpha|_{U'}(x') = f_{U'}(x')dx'_1 \wedge \cdots \wedge dx'_n &= f_{U'}(\phi_{U'}(x))det\left[\frac{\partial x'_i}{\partial x_i}\right] dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= f_U(\overline{x})dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \alpha|_U(\overline{x}). \end{aligned}$$

Esto se puede entender como

$$f_U(\overline{x}) = f_{U'}(\phi_{U'}(x))det\left[\tfrac{\partial x'_i}{\partial x_i}\right]$$

y

$$\mu_n(\phi_U(x)) = \left|det\left[\tfrac{\partial x'_i}{\partial x_i}\right]\right|_p \mu_n(\phi_{U'}(x)).$$

lo cual se corresponde con la regla del cambio de variables para (1.11):

$$\int_A |f_U(x)|_p \mu_n(\phi_U(x)) = \int_A |f_{U'}(\phi_{U'}(x))|_p \left|det\left[\frac{\partial x'_i}{\partial x_i}\right]\right|_p \mu_n(\phi_{U'}(x)).$$

Notamos que si $X = U \subset \mathbb{Q}_p^n$ *y* $\alpha = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$*, entonces* μ_α *es la medida de Haar normalizada de* $\mathbb{Q}_p^n$*.*

Capítulo 2

Introducción a las Funciones Zeta Locales de Igusa

Dentro del presente capítulo introduciremos algunos resultados esenciales acerca de las funciones zeta locales de Igusa. Para ello, en la primera sección comenzamos presentando sus principales características, enunciando el teorema de Igusa sobre la racionalidad de las funciones zeta y daremos un bosquejo de la prueba del teorema de Igusa a partir de la resolución de singularidades de Hironaka. En la segunda sección mostramos la relación que existe entre las Series de Poincaré y las Funciones Zeta Locales de Igusa, y en la tercera sección, introducimos la técnica del Poliedro de Newton para calcular funciones zeta de manera específica. Utilizaremos las referencias [3], [5] y [15].

2.1. Funciones Zeta Locales de Igusa

Definición 2.1.1. *Sea $f(x) \in \mathbb{Q}_p[x_1, ..., x_n] \setminus \mathbb{Q}_p$ y sea $\varphi : \mathbb{Q}_p^n \longrightarrow \mathbb{C}$ una función localmente constante con soporte compacto, es decir, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$. La **función zeta local** (también llamada **función zeta local de Igusa**) asociada al par (f, φ) es*

$$Z_\varphi(s, f) := \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)} \varphi(x)|f(x)|_p^s d^n x, \quad s \in \mathbb{C},\ Re(s) > 0.$$

Observación 2.1.1. *La función $Z_\varphi(s, f)$ está bien definida sobre el semi-plano $Re(s) > 0$, puesto que*

$$\begin{aligned} |Z_\varphi(s, f)| = \left| \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)} \varphi(x)|f(x)|_p^s d^n x \right| &\leq \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)} |\varphi(x)| \left| |f(x)|_p^s \right| d^n x \\ &= \int_{supp(\varphi)} |\varphi(x)||f(x)|_p^{Re(s)} d^n x. \end{aligned}$$

Como $supp(\varphi)$ es compacto y, $|\varphi(x)|$ y $|f(x)|_p^{Re(s)}$ son funciones continuas, existe un $K_s > 0$ tal que $|\varphi(x)||f(x)|_p^{Re(s)} \leq K_s$ para todo $x \in supp(\varphi)$. Luego

$$\begin{aligned} |Z_\varphi(s, f)| = \left| \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)} \varphi(x)|f(x)|_p^s d^n x \right| &\leq \int_{supp(\varphi)} |\varphi(x)||f(x)|_p^{Re(s)} d^n x \\ &\leq K_s \int_{supp(\varphi)} d^n x < +\infty. \end{aligned}$$

Para estudiar la analiticidad de la función $Z_\varphi(s,f)$, presentamos el siguiente lema necesario.

Lema 2.1.1. *Sean D un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $h:\mathbb{Q}_p^n\times D\longrightarrow\mathbb{C}$ una función continua y medible tal que:*

1. *Si E es cualquier compacto en D, existe una función integrable no negativa ψ_E definida sobre $\mathbb{Q}_p^n$ que satisface*
$$|h(x,s)|\leq\psi_E(x)\qquad\forall(x,s)\in\mathbb{Q}_p^n\times E;$$
2. *Para cada $x\in\mathbb{Q}_p^n$ fijo, $h(x,\cdot)$ es analítica para todo $s\in D$.*

Entonces la función
$$g:D\longrightarrow\mathbb{C};\quad g(s)=\int_{\mathbb{Q}_p^n}h(x,s)d^nx$$
es analítica en D.

Demostración. Solo debemos probar que la restricción de g a cada disco abierto en D es analítica. Asumiendo que D es conexo y simple conexo, tenemos que g es una función continua en D. En efecto, dado $s_0\in D$ arbitrario,
$$\lim_{s\to s_0}g(s)=\lim_{s\to s_0}\int_{\mathbb{Q}_p^n}h(x,s)d^nx=\int_{\mathbb{Q}_p^n}\left(\lim_{s\to s_0}h(x,s)\right)d^nx=\int_{\mathbb{Q}_p^n}h(x,s_0)d^nx=g(s_0)$$
como consecuencia del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue. Ahora, si C es cualquier curva cerrada en D, por Teorema de Fubini y por Teorema de Cauchy se tiene que
$$\int_C g(s)ds=\int_C\left(\int_{\mathbb{Q}_p^n}h(x,s)d^nx\right)ds=\int_{\mathbb{Q}_p^n}\left(\int_C h(x,s)ds\right)d^nx=0.$$
Luego por el Teorema de Morera, se puede concluir que g es una función analítica en D. □

Proposición 2.1.1.

$Z_\varphi(s,f)$ es una función analítica sobre el semi-plano $Re(s)>0$.

Demostración. Sean f y φ fijos. Definimos la función $1_f:\mathbb{Q}_p^n\to\mathbb{C}$ que toma el valor 1 para $x\in\mathbb{Q}_p^n\backslash f^{-1}(0)$ y vale 0 en cualquier otro caso. Tomamos $X=\mathbb{Q}_p^n$, $h(x,s)=1_f(x)\varphi(x)|f(x)|_p^s$ y $D=\{s\in\mathbb{C}\mid Re(s)>0\}$. La función h es continua y medible. Sea E un compacto en D, llamamos $A=supp(\varphi)$, $m_0=\max_{s\in E}(Re(s))$, $M=\max\{1,\sup_{x\in A}|f(x)|_p\}$ y definimos
$$\psi_E:\mathbb{Q}_p^n\longrightarrow\mathbb{R}^+,\quad\psi_E(x)=||\varphi||_{L^\infty}M^{m_0}1_A(x)$$
que es una función integrable y que satisface
$$|h(x,s)|\leq\psi_E(x)\quad\text{para todo }x\in\mathbb{Q}_p^n\setminus f^{-1}(\{0\})\text{ y }s\in E.$$
Además, para cualquier $x\in\mathbb{Q}_p^n$ fijo, $h(x,s)=1_f(x)\varphi(x)e^{s\ln(|f(x)|_p)}$ es una función analítica de $s\in D$, porque e^z, $z\in\mathbb{C}$, es una función analítica. Luego aplicando el Lema 2.1.1 se concluye que $Z_\varphi(s,f)$ es una función analítica para $Re(s)>0$.

□

El teorema de Igusa es uno de los más importantes e influyentes en el presente trabajo. La prueba fue dada por **J.I. Igusa** y depende de un resultado profundo en geometría algebraica conocido como **Teorema de Resolución de Singularidades de Hironaka** que enunciamos a continuación.

Teorema 2.1.1 (Hironaka, Ver [5])**.** *Tomemos* $f(x) \in \mathbb{Q}_p[x_1, ..., x_n] \setminus \mathbb{Q}_p$ *y fijemos* $X = \mathbb{Q}_p^n$*. Se tiene que existen una variedad analítica* $p-$*ádica* $n-$*dimensional* Y*, un conjunto finito* $\mathcal{T} = \{E\}$ *de subvariedades cerradas de* Y *de codimensión* 1 *con un par de enteros positivos* (N_E, ν_E) *asociados a cada* E *y una aplicación analítica* $p-$*ádica propia* $h : Y \longrightarrow X$ *que satisface las siguientes condiciones:*

1. *h es la composición de un número finito de transformaciones monoidales, cada una con un centro suave,*

2. $(f \circ h)^{-1}(0) = \bigcup_{E \in \mathcal{T}} E$ *y* h *induce una aplicación bianalítica* $p-$*ádica*

$$Y \setminus h^{-1}(Sing_f(\mathbb{Q}_p)) \longrightarrow X \setminus Sing_f(\mathbb{Q}_p),$$

3. *En cada punto* b *de la variedad* Y*, si* $E_1, ..., E_m$ *son todas las subvariedades cerradas en* $\mathcal{T}$ *que contienen a* b *con ecuaciones locales* $y_1, ..., y_m$ *alrededor de* b *y* $(N_j, \nu_j) = (N_E, \nu_E)$ *para los* $E = E_j$*, entonces existen coordenadas locales de* Y *alrededor de* b *de la forma* $(y_1, ..., y_m, y_{m+1}, ..., y_n)$ *tales que*

$$(f \circ h)(y) = \epsilon(y) \prod_{j=1}^{m} y_j^{N_j} \quad y \quad h^* \left(\bigwedge_{i=1}^{n} dx_i \right) = \eta(y) \left(\prod_{j=1}^{m} y_j^{\nu_j - 1} \right) \bigwedge_{i=1}^{n} dy_i$$

sobre una vecindad de b*, donde* $\epsilon(y)$ *y* $\eta(y)$ *son las unidades del anillo local* $\mathcal{O}_b$ *de* Y *en* b*. En particular,* $\cup_{E \in \mathcal{T}} E$ *tiene cruzamientos normales.*

Teorema 2.1.2 (Igusa, Ver [5])**.** *Sean* f *un polinomio no constante en* $\mathbb{Q}_p[x_1, ..., x_n]$ *y* φ *una función localmente constante con soporte compacto* ($\varphi \in \mathcal{D}$)*. Existe un número finito de pares* $(N_E, \nu_E) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$*,* $E \in \mathcal{T}$*, donde* $\mathcal{T}$ *es un conjunto finito de índices, tal que*

$$Z_\varphi(s, f) = \frac{L(p^{-s})}{\prod_{E \in \mathcal{T}} (1 - p^{\nu_E - sN_E})}$$

donde $L(p^{-s})$ *es un polinomio en la variable* p^{-s} *con coeficientes racionales.*

Demostración. Por la Proposición 2.1.1, $Z_\varphi(s, f)$ está bien definida y, por la Proposición 2.1.1, $Z_\varphi(s, f)$ es una función analítica sobre $Re(s) > 0$.

Denotemos por $\left| \bigwedge_{i=1}^{n} dx_i \right|$ la medida inducida por la forma diferencial $\bigwedge_{i=1}^{n} dx_i$ sobre $\mathbb{Q}_p^n$, la cual coincide con la medida de Haar $d^n x$ en $\mathbb{Q}_p^n$ (ver Definición 1.6.7 y Observación 1.6.5). Entonces, reescribimos

$$Z_\varphi(s, f) = \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)} \varphi(x) |f(x)|_p^s \left| \bigwedge_{i=1}^{n} dx_i \right|.$$

Por el Teorema 2.1.1, existe una variedad analítica p-ádica n-dimensional Y, un conjunto finito $\mathcal{T}$ de subvariedades cerradas de Y de codimensión 1 y, una aplicación analítica p-ádica propia $h : Y \longrightarrow \mathbb{Q}_p^n$. Por el Teorema de Hironaka tenemos que

$$Y \setminus h^{-1}(f^{-1}(0)) \longrightarrow \mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)$$

es una aplicación bianalítica $p-$ádica propia, es decir, es como un cambio de coordenadas analítico propio:

$$Z_\varphi(s,f) = \int_{Y\setminus h^{-1}(f^{-1}(0))} \varphi(h(y))|f(h(y))|_p^s \left| h^*\left(\bigwedge_{i=1}^n dx_i\right)(y)\right|.$$

En cada punto $b \in Y \setminus h^{-1}(f^{-1}(0))$ podemos escoger una carta (U, ϕ_U) tal que $b \in U$, $\phi_U(y) = (y_1, ..., y_n)$ y

$$(f\circ h)(y) = \epsilon(y)\prod_{j=1}^m y_j^{N_j} \quad y \quad h^*\left(\bigwedge_{i=1}^n dx_i\right) = \eta(y)\left(\prod_{j=1}^m y_j^{\nu_j-1}\right)\bigwedge_{i=1}^n dy_i \tag{2.1}$$

en la cual $(N_j, \nu_j) = (N_E, \nu_E)$ donde j corresponde a la subvariedad cerrada E que contiene b y, ϵ, η son las unidades del anillo local $\mathcal{O}_b$ de Y en b.
Llamamos $A = supp(\varphi)$. Como h es una aplicación propia y A es compacto, vemos que $h^{-1}(A) := B$ es un compacto en $Y \setminus h^{-1}(f^{-1}(0))$. Así, para finitos α tenemos que

$$B = \bigsqcup_\alpha B_\alpha \quad \text{tales que} \quad B_\alpha \subset U,$$

para algún U como antes, donde B_α son bolas abiertas y compactas. Como φ, $|\epsilon(\cdot)|_p$ y $|\eta(\cdot)|_p$ son localmente constantes, podemos asumir que $\varphi\circ h|_{B_\alpha} = \varphi(h(b))$, $|\epsilon(y)|_p|_{B_\alpha} = |\epsilon(b)|_p$ y $|\eta(y)|_p|_{B_\alpha} = |\eta(b)|_p$ y, además que, $\phi_U(B_\alpha) = c + (p^e\mathbb{Z}_p)^n$ para algún $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{Q}_p^n$ y $e \in \mathbb{N}$ ya que ϕ_U es un homeomorfismo. Luego

$$\begin{aligned}
Z_\varphi(s,f) &= \int_{Y\setminus h^{-1}(f^{-1}(0))} \varphi(h(y))|f(h(y))|_p^s \left| h^*\left(\bigwedge_{i=1}^n dx_i\right)(y)\right| \\
&= \int_B \varphi(h(y))|f(h(y))|_p^s \left| h^*\left(\bigwedge_{i=1}^n dx_i\right)(y)\right| \\
&= \sum_\alpha \int_{\phi_U(B_\alpha)} \varphi(h(b))|\epsilon(b)|_p^s \left|\prod_{j=1}^m y_j^{N_j}\right|_p^s |\eta(b)|_p \left|\prod_{j=1}^m y_j^{\nu_j-1}\right|_p \bigwedge_{i=1}^n dy_i \quad \text{(por (1.12) y (2.1))} \\
&= \sum_\alpha \varphi(h(b))|\epsilon(b)|_p^s|\eta(b)|_p \int_{c+(p^e\mathbb{Z}_p)^n} \prod_{j=1}^m |y_j|_p^{N_js+\nu_j-1} \bigwedge_{i=1}^n dy_i \\
&= \sum_\alpha \varphi(h(b))|\epsilon(b)|_p^s|\eta(b)|_p \prod_{i=1}^n \int_{c_i+p^e\mathbb{Z}_p} |y_i|_p^{N_is+\nu_i-1} dy_i
\end{aligned}$$

donde se entiende que $N_i = 0$ y $\nu_i = 1$ para $m < i \leq n$.
Finalmente, para la última integral, donde $1 \leq i \leq m$, tenemos dos casos:

- Si $c_i \in p^e\mathbb{Z}_p$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{c_i+p^e\mathbb{Z}_p} |y_i|_p^{N_is+\nu_i-1}dy_i &= \int_{p^e\mathbb{Z}_p} |y_i|_p^{N_is+\nu_i-1}dy_i \\
&= p^{-e(N_is+\nu_i-1)}p^{-e}\int_{\mathbb{Z}_p} |u_i|_p^{N_is+\nu_i-1}du_i \quad (y_i = p^eu_i,\ u_i \in \mathbb{Z}_p,\ dy_i = p^{-e}du_i) \\
&= p^{-e(N_is+\nu_i)}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{|u_i|_p=p^{-m}} |u_i|_p^{N_is+\nu_i-1}du_i \\
&= p^{-e(N_is+\nu_i)}\sum_{m=0}^{\infty} p^{-m(N_is+\nu_i-1)}\int_{|u_i|_p=p^{-m}} du_i \\
&= p^{-e(N_is+\nu_i)}\sum_{m=0}^{\infty} p^{-m(N_is+\nu_i-1)}p^{-m}\left(1-p^{-1}\right) \\
&= p^{-e(N_is+\nu_i)}\left(1-p^{-1}\right)\sum_{m=0}^{\infty} p^{-m(N_is+\nu_i)} \\
&= \left(p^{-e(N_is+\nu_i)}\right)\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-N_is-\nu_i}}
\end{aligned}$$

- Por otro lado, si $c \notin p^e\mathbb{Z}_p$, entonces $|c_i|_p > |p^ey_i|$, para $y_i \in \mathbb{Z}_p$ y, por la condición de no-Arquimedeanidad en 1.1

$$|c_i + p^ey_i|_p = |c_i|_p,$$

así,

$$\begin{aligned}
\int_{c_i+p^e\mathbb{Z}_p} |y_i|_p^{N_is+\nu_i-1}dy_i &= p^{-e}\int_{\mathbb{Z}_p} |c_i + p^eu_i|_p^{N_is+\nu_i-1}du_i \quad (y_i = p^eu_i,\ u_i \in \mathbb{Z}_p,\ dy_i = p^{-e}du_i) \\
&= p^{-e}\int_{\mathbb{Z}_p} |c_i|_p^{N_is+\nu_i-1}du_i \\
&= p^{-e}|c_i|_p^{N_is+\nu_i-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que

$$Z_\varphi(s,f) = \frac{L(p^{-s})}{\prod_{j=1}^{m}\left(1-p^{\nu_j-sN_j}\right)}$$

donde $L(p^{-s})$ es un polinomio en la variable p^{-s} con coeficientes racionales. □

Observación 2.1.2. *Del Teorema 2.1.2, los polos de $Z(s,f)$ son de la forma*

$$-\frac{\nu_j}{N_j} + \frac{2\pi il}{N_j\ln p} \quad l \in \mathbb{Z}$$

donde (ν_j, N_j) corresponden a los datos numéricos asociados con la resolución de singularidades de la hipersuperficie definida por el polinomio f (los j's se corresponden biyectivamente con los E's).

El siguiente, es un primer ejemplo del cálculo de una función zeta de Igusa usando solo métodos de integración vistos en el capítulo anterior.

Ejemplo 2.1.1. *Se define*

$$Z(s) := \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx, \quad s \in \mathbb{C} \ \ con \ \ Re(s) > -1.$$

Probaremos que $Z(s)$ tiene una continuación meromorfa sobre todo el plano complejo como una función racional de p^{-s}. En efecto,

$$\begin{aligned} Z(s) &= \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s dx = \int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x|_p^s dx = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{S_j(0)} |x|_p^s dx \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} p^{-js} \int_{S_j(0)} dx = (1-p^{-1}) \sum_{j=0}^{+\infty} p^{-j(s+1)} = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-1-s}} \end{aligned}$$

donde en la última serie usamos la hipótesis $Re(s) > -1$ para la convergencia. La última expresión es una continuación meromorfa de $Z(s)$ sobre todo el plano complejo.

2.2. Series de Poincaré y Funciones Zeta Locales de Igusa

Sea p un número primo fijo. Definimos a

$$A_m := \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, \ m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

como **el anillo de los enteros módulo** p^m. Recordemos que cualquier entero se puede escribir de manera única como $a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k, \ \ a_i \in \{0, 1, ..., p-1\}$. Luego podemos identificar A_m con el conjunto

$$\{a_0 + a_1 p + \cdots + a_{m-1} p^{m-1} \mid \ a_i \in \{0, 1, ..., p-1\}\}.$$

Dado $f(x) \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n] \setminus \mathbb{Z}$, definimos

$$N_m = \begin{cases} \#(\{x \in (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^n \mid \ f(x) \equiv 0 \ mod(p^m)\}) & para \quad m \geq 1 \\ 1 & para \quad m = 0 \end{cases}$$

Un problema elemental es estudiar el comportamiento de las sucesión N_m cuando $m \to +\infty$. De forma más general, podemos tomar $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, ..., x_n] \setminus \mathbb{Z}_p$ (recordar que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ y que $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_p/p^m\mathbb{Z}_p$), luego la sucesión se define como

$$N_m = \begin{cases} \#(\{x \in (\mathbb{Z}_p/p^m\mathbb{Z}_p)^n \mid \ f(x) \equiv 0 \ mod(p^m)\}) & para \quad m \geq 1 \\ 1 & para \quad m = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Definición 2.2.1. *La **serie de Poincaré** asociada a (2.2) se define como:*

$$P(t, f) = \sum_{m=0}^{+\infty} N_m (p^{-n} t)^m, \ \ t \in \mathbb{C} \ con \ |t| < 1.$$

Observación 2.2.1. *Para todo $m \in \mathbb{N}$ tenemos que $N_m \leq p^{nm}$, esto implica que*

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |N_m (p^{-n} t)^m| \leq \sum_{m=0}^{+\infty} p^{mn} p^{-nm} |t|^m = \sum_{m=0}^{+\infty} |t|^m.$$

Luego $P(t, f)$ es absolutamente convergente en $|t| < 1$.

Se espera que las propiedades analíticas de la serie de Poincaré $P(t)$ nos den información acerca del comportamiento asintótico de la sucesión $\{N_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Ahora, la pregunta clave a responder es si la serie de Poincaré $P(t, f)$ es una función racional en t.
La siguiente proposición es la que relaciona directamente la serie de Poincaré con la función zeta local de Igusa.

Dada $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, ..., x_n] \setminus \mathbb{Z}_p$, denotamos

$$Z(s, f) := Z(s) = \int_{\mathbb{Z}_p^n \setminus f^{-1}(0)} |f(x)|_p^s d^n x, \ \ s \in \mathbb{C}, \ \ Re(s) > 0.$$

Proposición 2.2.1. *Con la notación anterior*

$$P(t, f) = \frac{1 - tZ(s)}{1 - t}, \quad t = p^{-s}, \ \ \textit{para } Re(s) > 0,$$

donde $P(t, f)$ es la serie de Poincaré asociada a f.

Demostración. Primero notamos que

$$Z(s) = \int_{\mathbb{Z}_p^n \setminus f^{-1}(0)} |f(x)|_p^s d^n x = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{S_j} |f(x)|_p^s d^n x = \sum_{j=0}^{+\infty} p^{-js} \int_{C_f} d^n x$$

donde

$$\begin{aligned} C_f \ \ &:= \ \ \{x \in \mathbb{Z}_p^n \mid \ |f(x)|_p = p^{-j}\} = \{x \in \mathbb{Z}_p^n \mid \ ord(f(x)) = j\} \\ &= \ \ \{x \in \mathbb{Z}_p^n \mid \ f(x) \equiv 0 \ mod \ p^j\} \setminus \{x \in \mathbb{Z}_p^n \mid \ f(x) \equiv 0 \ mod \ p^{j+1}\} \\ &= \ \ \bigsqcup_{x \in A_j} x + p^j \mathbb{Z}_p^n \setminus \bigsqcup_{x \in A_{j+1}} x + p^{j+1} \mathbb{Z}_p^n \end{aligned}$$

y

$$A_j = \{x \in (\mathbb{Z}_p / p^j \mathbb{Z}_p)^n \mid \ f(x) \equiv 0 \ mod \ p^j\}.$$

Vemos que

$$\begin{aligned} \int_{C_f} d^n x \ \ &= \ \ \sum_{x \in A_j} \int_{x + p^j \mathbb{Z}_p^n} d^n x - \sum_{x \in A_{j+1}} \int_{x + p^{j+1} \mathbb{Z}_p^n} d^n x \\ &= \ \ \sum_{x \in A_j} \int_{\mathbb{Z}_p^n} p^{-jn} d^n y - \sum_{x \in A_{j+1}} \int_{\mathbb{Z}_p^n} p^{-(j+1)n} d^n y \\ &= \ \ N_j p^{-jn} - N_{j+1} p^{-(j+1)n}, \quad \text{para todo entero } \ j \geq 0. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} Z(s) \ \ &= \ \ \sum_{j=0}^{+\infty} p^{-js} \int_{C_f} d^n x \\ &= \ \ \sum_{j=0}^{+\infty} p^{-js} \left(N_j p^{-jn} - N_{j+1} p^{-(j+1)n} \right) \quad (t = p^{-s}) \\ &= \ \ \sum_{j=0}^{+\infty} N_j (p^{-n} t)^j - t^{-1} \sum_{j=1}^{+\infty} N_j (p^{-n} t)^j \\ &= \ \ P(t, f) - t^{-1} \left(P(t, f) - 1 \right) \end{aligned}$$

lo que implica

$$Z(s) - t^{-1} = P(t,f)(1-t^{-1})$$

y por lo tanto

$$P(t,f) = \frac{1-tZ(s)}{1-t}.$$

□

Como consecuencia directa de la proposición anterior y del teorema de Igusa, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.2.1. *La serie de Poincaré $P(t,f)$ es una función racional en t.*

La racionalidad de la serie de Poincaré fue conjeturada en los sesenta por Borevich y Shafarevich (ver [2]). La Proposición 2.2.1 establece la relación entre la serie de Poincaré y las funciones zeta locales de Igusa. A mediados de los setenta, Igusa establece el Teorema 2.1.2 y con ello prueba la racionalidad de la serie de Poincaré. A partir de la racionalidad de la función zeta local de Igusa podemos identificar explícitamente sus posibles polos. Ahora, usando la Proposición 2.2.1 podemos hallar cotas para los N_m's, como se muestra en la próxima proposición.

Proposición 2.2.2. *Dada la sucesión $\{N_m\}_m$ definida en 2.2, se tiene que*

$$\limsup_{m\to\infty} (N_m)^{1/m} \leq p^{n+\alpha}$$

donde $\alpha = \max\{Re(s) :\ s \text{ es polo de } Z(s,f)\}$.

Demostración. A partir del Teorema de Igusa y la Proposición 2.2.1, tenemos

$$P(p^{-s},f) = \sum_{m=0}^{\infty} N_m p^{-nm}(p^{-s})^m = \frac{L(p^{-s})}{(1-p^{-s})\prod_{j=1}^{m}\left(1-p^{\nu_j - sN_j}\right)} \tag{2.3}$$

donde $L(p^{-s})$ es un polinomio en la variable p^{-s} con coeficientes racionales. Cada factor de la forma

$$\frac{1}{1-p^{\nu_j - sN_j}}$$

puede ser identificado como una serie geométrica que converge uniforme y absolutamente cuando

$$p^{-Re(s)} < p^{\frac{\nu_j}{N_j}},$$

de modo que la serie que se obtiene a la derecha de la igualdad en (2.3) converge uniforme y absolutamente si

$$p^{-Re(s)} < p^{\min\{\nu_j/N_j :\ j=1,\ldots,m\}} = p^{-\max\{-\nu_j/N_j :\ j=1,\ldots,m\}} = p^{-\alpha}.$$

Por otro lado, para la serie en (2.3), el criterio de la raíz nos dice que el radio de convergencia es

$$R = \frac{1}{\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{N_m p^{-mn}(p^{-s})^m}} \geq p^{-n-\alpha},$$

por lo que

$$\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{N_m} \leq p^{n+\alpha}.$$

□

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos que si m es un número natural suficientemente grande, entonces $N_m \leq p^{m(n+\alpha)}$.

Como ya se mencionó, la función zeta local de Igusa es una función racional. Se han desarrollado varias técnicas para calcular funciones zeta locales de Igusa para polinomios explícitos. Una de ellas es la Fórmula Fase Estacionaria introducida por J.I. Igusa en [5]. El conjeturó que aplicando recursivamente la Fórmula Fase Estacionaria es posible establecer la racionalidad de integrales del tipo $\int_{\mathbb{R}_K^n} |f(x)|_p^s d^n x$, en el caso en que el polinomio f tiene coeficientes en el anillo de enteros R_K^n de un campo local K no-arquimediano de característica arbitraria (ver Observación 3.3.2).

2.3. Poliedro de Newton

En esta sección presentaremos una técnica que fue desarrollada en este contexto por J. Denef y K. Hoolnaert (ver [3]), e independientemente por W.A. Zúñiga-Galindo (ver [13]), para calcular funciones zeta locales de Igusa de manera específica bajo ciertas condiciones.

2.3.1. Poliedro de Newton

Antes de dar la primera definición, recordemos que la envolvente (cápsula) convexa de un conjunto X es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a X. De aquí en adelante denotaremos $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \; x \geq 0\}$.

Definición 2.3.1. *Sea* $f(x) = \sum_{\omega\in\mathbb{N}^n} a_\omega x^\omega$ *un polinomio con coeficientes en* $\mathbb{Z}_p$ *tal que* $f(0) = 0$*. Definimos el soporte de* f *al conjunto*

$$sop(f) = \{\omega \in \mathbb{N}^n \mid \; a_\omega \neq 0\}.$$

El poliedro de Newton global de f*,* $\Gamma_{gl}(f)$*, se define como la envolvente convexa en* $(\mathbb{R}^+)^n$ *de* $sop(f)$*. El poliedro de Newton de* f*,* $\Gamma(f)$*, se define como la envolvente convexa en* $(\mathbb{R}^+)^n$ *del conjunto*

$$\bigcup_{\omega\in sop(f)} \omega + (\mathbb{R}^+)^n.$$

Se puede ver que $\Gamma(f) = \Gamma_{gl}(f) + (\mathbb{R}^+)^n$.

Observación 2.3.1. *Dados* $a = (a_1, .., a_n)$*,* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$*,* $a \cdot x$ *denota al producto interno usual en* $\mathbb{R}^n$*. El hiperplano* $a \cdot x = b$ *divide a* $\mathbb{R}^n$ *en dos semi-espacios abiertos disjuntos. Un hiperplano* H *es un hiperplano soporte de* $\Gamma(f)$ *si* $H \cap \Gamma(f) \neq \emptyset$ *y* $\Gamma(f)$ *está completamente contenido en uno de los semi-espacios determinados por* H*.*

Definición 2.3.2. *A* $H \cap \Gamma(f)$ *se le llama una cara propia de* $\Gamma(f)$ *donde* H *es hiperplano soporte. Una cara de codimensión 1 se denomina faceta de* $\Gamma(f)$*.*

La *cara impropia* de $\Gamma(f)$ es justamente el poliedro $\Gamma(f)$. Entendemos como *caras* del poliedro $\Gamma(f)$ a todas las caras propias y al poliedro total.

Definición 2.3.3. *Sea f un polinomio como en la Definición 2.3.1. Para toda cara τ del poliedro de Newton $\Gamma(f)$ de f, definimos*

$$f_\tau(x) = \sum_{\omega\in\tau} a_\omega x^\omega, \tag{2.4}$$

y denotamos por $\overline{f_\tau}(x)$ la reducción en módulo p de f_τ.

Definición 2.3.4. *Se dice que un polinomio f es no-degenerado sobre $\mathbb{F}_p$ con respecto a todas las caras de su poliedro de Newton $\Gamma(f)$, si para toda cara τ de $\Gamma(f)$ el polinomio f_τ tiene la propiedad de que no hay solución en $(\mathbb{Z}_p^\times)^n$ para el sistema de congruencias*

$$f_\tau(x) \equiv \frac{\partial f_\tau}{\partial x_1}(x) \equiv \cdots \equiv \frac{\partial f_\tau}{\partial x_n}(x) \equiv 0 \quad mod\ p. \tag{2.5}$$

Definición 2.3.5. *Sea f un polinomio como en la Definición 2.3.1. Para $a \in \mathbb{R}_+^n$, definimos*

$$m(a) = \text{ínf}_{x\in\Gamma(f)}\{a\cdot x\}$$

Observación 2.3.2. *Veamos que el ínfimo de la definición anterior se alcanza. En efecto, la función $x \mapsto a\cdot x$ (con $a \neq 0$) es continua y alcanza un mínimo sobre $\Gamma_{gl}(f)$ (que es un compacto en $\mathbb{R}^n$). Como todo elemento del poliedro $\Gamma(f)$ se puede escribir de la forma*

$$y + \eta, \quad donde \quad y \in \Gamma_{gl}(f),\ \eta \in (\mathbb{R}^+)^n$$

tenemos también un mínimo sobre todo el poliedro $\Gamma(f)$ y se tiene

$$a\cdot(y+\eta) = a\cdot y + a\cdot\eta \geq a\cdot y.$$

para $a \in (\mathbb{R}^+)^n$. De este modo, considerando a $m(a)$ como el mínimo, se concluye que la ecuación $a\cdot x = m(a)$ define al hiperplano soporte y, donde $\Gamma(f)$ está contenido en $\{a\cdot x \geq m(a)\}$, esto es

$$m(a) = \min_{x\in\Gamma(f)}\{a\cdot x\} = \min_{\omega\in sop(f)}\{a\cdot\omega\}.$$

Definición 2.3.6. *Sea f un polinomio como en la Definición 2.3.1. Definimos el primer lugar de encuentro de a como*

$$F(a) = \{x\in\Gamma(f) \mid \ a\cdot x = m(a)\}.$$

Se observa que $F(a)$ es una cara propia de $\Gamma(f)$ si $a \neq 0$ y $F(0) = \Gamma(f)$. Notar además que cada $F(a)$ es compacta si $a \neq 0$.

Un vector $a \in (\mathbb{R}^+)^n$ se llama *primitivo* si todas las componentes de a son todos enteros tales que su máximo común divisor es 1.

Definición 2.3.7. *En la colección de los vectores $a \in (\mathbb{R}^+)^n$, definimos la siguiente relación de equivalencia en $(\mathbb{R}^+)^n$ por*

$$a \sim a' \Leftrightarrow F(a) = F(a').$$

Si τ es una cara de $\Gamma(f)$, definimos el cono asociado a τ como

$$\Delta_\tau = \{a \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \ F(a) = \tau\}.$$

Como $F(0) = \Gamma(f)$, $\Delta_{\Gamma(f)} = \{0\}$.
Toda cara propia τ de $\Gamma(f)$ está contenida en una faceta γ de $\Gamma(f)$. Cada cara propia τ de $\Gamma(f)$ es una intersección finita de facetas de $\Gamma(f)$ que contienen a τ. Para cada faceta de $\Gamma(f)$, existe un único vector primitivo en $\mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ (salvo clases de equivalencias) que es perpendicular a tal faceta.

Lema 2.3.1 (ver Lema 2.6, [3])**.** *Sea f un polinomio como en la Definición 2.3.1. Sean τ una cara propia de $\Gamma(f)$ y $\gamma_1, ..., \gamma_l$ las facetas de $\Gamma(f)$ que contienen a τ. Sean $a_1, ..., a_l \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ los únicos vectores primitivos perpendiculares a cada faceta $\gamma_1, ..., \gamma_l$, respectivamente. Se tiene que*

$$\Delta_\tau = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_l a_l \mid \ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i > 0\}$$

es el cono convexo asociado a τ y su dimensión es igual a $n - dim(\tau)$.

Observemos que,

$$\overline{\Delta_\tau} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid \ \tau \subset F(a)\} = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_l a_l \mid \ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i \geq 0\}.$$

Definición 2.3.8. *Sean $a_1, ..., a_l \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, el conjunto*

$$\Delta = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_l a_l \mid \ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i > 0\}$$

lo llamaremos cono estrictamente positivamente generado por los vectores $a_1, ..., a_l$.
Si $a_1, ..., a_l$ son linealmente independientes, Δ se llama cono simplicial. Si $a_1, ..., a_l \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, decimos que Δ es un cono simplicial racional. Si $\{a_1, ..., a_l\}$ es un subconjunto de una base de $\mathbb{Z}^n$ como un $\mathbb{Z}-$módulo, llamamos a Δ un cono simple.

Lema 2.3.2 (ver Lema 2.8, [3])**.** *Sea Δ un cono estrictamente positivamente generado por los vectores $a_1, ..., a_l \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Existe una partición finita de Δ en conos Δ_i, tales que cada Δ_i es estrictamente positivamente generado por algunos vectores del conjunto $\{a_1, ..., a_l\}$, los cuales son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Además, si Δ un cono simplicial racional, entonces existe una partición finita en conos simples.*

Sea τ una cara propia de $\Gamma(f)$ y sea $a_1, ..., a_l$ como en el Lema 2.3.1. De este lema y del Lema 2.3.2, podemos particionar el cono Δ_τ en un número finito de conos simpliciales racionales tales que cada Δ_i es generado por vectores del conjunto $\{a_1, ..., a_l\}$. A esto lo llamaremos una *descomposición simplicial racional de Δ_τ sin introducir nuevos rayos*. Según el siguiente lema, se puede a menudo encontrar una partición de Δ_τ en conos simples, pero en general es necesario agregar nuevos generadores.

Definición 2.3.9. *Sean $a_1, ..., a_r$ vectores en $\mathbb{Z}^n$ linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Definimos la multiplicidad de $a_1, ..., a_r$ como el índice del retículo $\mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_r$*

De manera más clara, la multiplicidad de $a_1, ..., a_r$ es igual al número de puntos contenidos en el conjunto

$$J = \mathbb{Z}^n \cap \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i \mid \ 0 \le \lambda_i < 1 \ for \ i = 1, ..., r \right\}$$

Si $a_1, ..., a_r$ vectores en $\mathbb{Z}^n$ linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, entonces la multiplicidad de $a_1, ..., a_r$ es igual al máximo común divisor de los determinantes de todas las $r \times r-$matrices obtenidas omitiendo columnas de la matriz con filas $a_1, ..., a_r$. Además, la multiplicidad de $a_1, ..., a_r$ es 1 si y solo si $\{a_1, ..., a_r\}$ es un subconjunto de una base de $\mathbb{Z}^n$, visto como un $\mathbb{Z}$-módulo.

2.3.2. Función Zeta Local de Igusa de un Polinomio no-degenerado por su Poliedro de Newton

Proposición 2.3.1. *Sean $f \in \mathbb{Z}_p[x_1, ..., x_n]$ y $a \in \mathbb{Z}_p^n$. Supongamos que*

$$f(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \equiv \cdots \equiv \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \equiv 0 \ \ mod \ p$$

no tiene soluciones en $a + p\mathbb{Z}_p^n$. Entonces para $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > 0$

$$\int_{a+(p\mathbb{Z}_p)^n} |f(x)|_p^s d^n x = \begin{cases} p^{-n} & si \quad f(a) \not\equiv 0 \ mod(p) \\ p^{-n}(p-1)\dfrac{p^{-(s+1)}}{1-p^{s+1}} & si \quad f(a) \equiv 0 \ mod(p) \end{cases}$$

Demostración.

- *Caso 1:* Supongamos que $f(a) \not\equiv 0 \ mod(p)$. Para cada $x \in a + (p\mathbb{Z}_p)^n$ se tiene que $f(x) \equiv f(a) \not\equiv 0 \ mod(p)$, luego $ord_p(f(x)) = 0$, es decir, $|f(x)|_p^s = 1 \ \ \forall x \in a + (p\mathbb{Z}_p)^n$. Por lo tanto

$$\int_{a+(p\mathbb{Z}_p)^n} |f(x)|_p^s d^n x = \int_{a+(p\mathbb{Z}_p)^n} d^n x = p^{-n}.$$

- *Caso 2:* Por otro lado, supongamos ahora que $f(a) \equiv 0 \ mod(p)$. Para cada $x \in a + (p\mathbb{Z}_p)^n$, se tiene que $f(x) \equiv f(a) \equiv 0 \ mod(p)$. Luego $ord_p(f(x)) \ge 1 \ \ \forall x \in a + (p\mathbb{Z}_p)^n$. Si denotamos

$$C_x := \{x \in a + (p\mathbb{Z}_p)^n \mid ord_p(f(x)) = k\}$$

tenemos

$$\int_{a+(p\mathbb{Z}_p)^n} |f(x)|_p^s d^n x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{C_x} |f(x)|_p^s d^n x = \sum_{k=1}^{\infty} p^{-ks} \int_{C_x} d^n x$$

donde afirmamos que

$$\int_{C_x} d^n x = p^{-k-n+1} - p^{-k-n}.$$

Con esto,

$$\begin{aligned} \int_{a+(p\mathbb{Z}_p)^n} |f(x)|_p^s d^n x &= \sum_{k=1}^{\infty} p^{-ks} \left(p^{-k-n+1} - p^{-k-n}\right) \\ &= p^{-n}(p-1) \sum_{k=1}^{\infty} p^{-(s+1)k} \\ &= p^{-n}(p-1) \frac{p^{-(s+1)}}{1 - p^{-(s+1)}}; \quad Re(s) > 0. \end{aligned}$$

Probamos ahora la afirmación del *Caso 2.* Primero vemos que

$$\begin{aligned} C_x &= \{x \in a + (p\mathbb{Z}_p)^n \mid \ ord(f(x)) \geq k\} \setminus \{x \in a + (p\mathbb{Z}_p)^n \mid \ ord(f(x)) \geq k+1\} \\ &= \{x \in a + (p\mathbb{Z}_p)^n \mid \ f(x) \equiv 0 \ mod(p^k)\} \setminus \{x + a \in (p\mathbb{Z}_p)^n \mid \ f(x) \equiv 0 \ mod(p^{k+1})\}, \end{aligned}$$

por lo que es suficiente hallar la medida del primer conjunto de esta última igualdad.
Por la hipótesis de no-degeneración y porque $f(a) \equiv 0 \ mod(p)$, se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \not\equiv 0 \ mod(p)$ para algún $i \in \{1, ..., n\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \not\equiv 0 \ mod(p)$ y aplicando el Corolario 1.1.2 tenemos que

$$\{x \in a + (p\mathbb{Z}_p)^n \mid \ f(x) \equiv 0 \ mod(p^k)\} = \bigsqcup (\xi_1, ..., \xi_n) + (p^k\mathbb{Z}_p)^n$$

donde la unión está tomada sobre todas las $(n-1)$-tuplas $(\xi_2 + p^k\mathbb{Z}_p, ..., \xi_n + p^k\mathbb{Z}_p)$, con $\xi_i \equiv a_i \ mod(p)$ para $i = 2, ..., n$. Luego, como la medida de cada $\xi + (p^k\mathbb{Z}_p)^n$ es p^{-kn}, se tiene

$$\int_{\{x \in a + (p\mathbb{Z}_p)^n \mid \ f(x) \equiv 0 \ mod(p^k)\}} d^n x = p^{(k-1)(n-1)} p^{-kn} = p^{-k-n+1}.$$

□

Corolario 2.3.1. *Sea $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x_1, ..., x_n]$ y sea $\overline{f}$ el polinomio con coeficientes en $\mathbb{F}_p$ que es reducción $mod(p)$ de f. Denotamos $N = \#\left(\{a \in (\mathbb{F}_p^\times)^n \mid \overline{f}(a) = 0\}\right)$. Supongamos que*

$$f(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \equiv \cdots \equiv \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \equiv 0 \quad mod(p)$$

no tiene soluciones en $(\mathbb{Z}_p^\times)^n$. Entonces para $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > 0$

$$\int_{(\mathbb{Z}_p^\times)^n} |f(x)|_p^s d^n x = p^{-n} \left((p-1)^n - pN \frac{p^s - 1}{p^{s+1} - 1} \right).$$

Ahora estamos en condiciones de calcular la continuación meromorfa de la función zeta local de Igusa asociada a un polinomio no-degenerado con respecto a las caras de su poliedro de Newton.

Para $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $\sigma(k) = \displaystyle\sum_{i=1}^n k_i$.

Teorema 2.3.1 (ver Teorema 4.2, [3]). *Sea f un polinomio como en la Definición 2.3.1. Supongamos que f es no-degenerado sobre $\mathbb{F}_p$ con respecto a las caras de su poliedro de Newton $\Gamma(f)$. Denotemos*

$$N_\tau = \#\left(\{a \in (\mathbb{F}_p^\times)^n \mid \ \overline{f}_\tau(a) = 0\}\right)$$

para cada cara τ de $\Gamma(f)$. Sea además $s \in \mathbb{C}$ con $Re(s) > 0$. Entonces

$$Z(s, f) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s d^n x = L_{\Gamma(f)} + \sum_{\tau \text{ cara propia de } \Gamma(f)} L_\tau \cdot S_{\Delta_\tau},$$

con

$$L_\tau = p^{-n} \left((p-1)^n - pN_\tau \frac{(p^s - 1)}{p^{s+1} - 1} \right) \quad y \quad S_{\Delta_\tau} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n \cap \Delta_\tau} p^{-\sigma(k) - m(k)s}$$

para cada cara τ de $\Gamma(f)$ (incluyendo $\tau = \Gamma(f)$).

Observación 2.3.3. *La expresión S_{Δ_τ} se puede calcular de la siguiente manera. Tomamos una partición del cono Δ_τ, asociado a la cara propia τ, en conos simpliciales racionales Δ_i, $i \in I$, donde cada $i \in I$ identifica a cada cono de la descomposición. Entonces*

$$S_{\Delta_\tau} = \sum_{i \in I} S_{\Delta_i} \quad y \quad S_{\Delta_i} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n \cap \Delta_i} p^{-\sigma(k) - m(k)s}.$$

Sea Δ_i el cono estrictamente positivamente generado por vectores linealmente independientes $a_1, ..., a_l \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$, luego

$$S_{\Delta_i} = \frac{\displaystyle\sum_{k \in J} p^{\sigma(k)+m(k)s}}{\displaystyle\prod_{j=1}^{l} p^{\sigma(a_j)+m(a_j)s} - 1}$$

donde $J = \mathbb{Z}^n \cap \left\{ \sum_{j=1}^{l} \lambda_j a_j \mid \ 0 \leq \lambda_j < 1, \ j = 1, ..., l \right\}$.

Demostración. Como los conos asociados a las caras de $\Gamma(f)$ forman una partición de $(\mathbb{R}^+)^n$, podemos escribir

$$(\mathbb{R}^+)^n = \{0\} \cup \bigsqcup_{\tau} \Delta_\tau$$

donde τ recorre las caras propias de $\Gamma(f)$ y cada Δ_τ corresponde al cono asociado a τ como en la Definición 2.3.7.
Por otro lado, si denotamos $ord(x) = k$ donde componente a componente $ord(x_j) = k_j$ para todo $j = 1, ..., n$, podemos escribir

$$\mathbb{Z}_p^n = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^n} \{x \in \mathbb{Z}_p^n \mid \ ord(x) = k\} = \{0\} \cup (\mathbb{Z}_p^\times)^n \cup \left(\bigcup_{\tau} \bigcup_{k \in \mathbb{N}^n \cap \Delta_\tau} \{x \in \mathbb{Z}_p^n \mid \ ord(x) = k\} \right)$$

y, como $\{0\}$ tiene medida de Haar cero, se tiene que

$$Z(s,f) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s d^n x = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \int_{\{x \in \mathbb{Z}_p^n, ord(x) = k\}} |f(x)|_p^s d^n x \tag{2.6}$$

$$= \int_{(\mathbb{Z}_p^\times)^n} |f(x)|_p^s d^n x + \sum_{\tau} \sum_{k \in \mathbb{N}^n \cap \Delta_\tau} \int_{\{x \in \mathbb{Z}_p^n, ord(x) = k\}} |f(x)|_p^s d^n x. \tag{2.7}$$

donde τ recorre las caras propias de $\Gamma(f)$.

Supongamos que τ es una cara propia de $\Gamma(f)$ y $k \in \mathbb{N}^n \cap \Delta_\tau$. Como $x_j = p^{k_j} u_j$, con $u_j \in \mathbb{Z}_p^\times$, tenemos

$$d^n x = p^{-\sigma(k)} d^n u \quad \text{y} \quad x^\omega = x_1^{\omega_1} \cdots x_n^{\omega_n} = p^{k \cdot \omega} u^\omega$$

donde $k \cdot \omega = m(k)$ para cada $\omega \in sop(f) \cap \tau$ y $k \cdot \omega > m(k)$ para cada $\omega \in sop(f) \setminus \tau$, porque $F(k) = \tau$. Se sigue que

$$f(x) = p^{m(k)} \left(f_\tau(u) + p \tilde{f}_{\tau,k}(u) \right)$$

donde $\tilde{f}_{\tau,k} \in \mathbb{Z}_p[u_1, ..., u_n]$ (la que depende de τ, k y f). Luego de (2.7), tenemos que

$$Z(s,f) = \int_{(\mathbb{Z}_p^\times)^n} |f(x)|_p^s d^n x + \sum_{\tau} \sum_{k \in \mathbb{N}^n \cap \Delta_\tau} p^{-\sigma(k)-m(k)s} \int_{(\mathbb{Z}_p^\times)^n} |f_\tau(u) + p\tilde{f}_{\tau,k}(u)|_p^s d^n u. \tag{2.8}$$

Llamemos

$$L_{\Gamma(f)} = \int_{(\mathbb{Z}_p^\times)^n} |f(x)|_p^s d^n x \quad \text{y} \quad L_\tau = \int_{(\mathbb{Z}_p^\times)^n} |f_\tau(u) + p\tilde{f}_{\tau,k}(u)|_p^s d^n u.$$

Por hipótesis sabemos que

$$f(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \equiv \cdots \equiv \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \equiv 0 \;\; mod(p)$$

no tiene soluciones en $(\mathbb{Z}_p^\times)^n$. Entonces

$$f_\tau(u) + p\tilde{f}_{\tau,k}(u) \equiv \frac{\partial(f_\tau(u) + p\tilde{f}_{\tau,k}(u))}{\partial u_1}(x) \equiv \cdots \equiv \frac{\partial(f_\tau(u) + p\tilde{f}_{\tau,k}(u))}{\partial u_n}(x) \equiv 0 \;\; mod(p)$$

no tiene soluciones en $(\mathbb{Z}_p^\times)^n$ y por el Corolario 2.3.1 se tiene que

$$L_{\Gamma(f)} = p^{-n}\left((p-1)^n - pN_{\Gamma(f)}\frac{(p^s-1)}{p^{s+1}-1}\right) \quad \text{y} \quad L_\tau = p^{-n}\left((p-1)^n - pN_\tau \frac{(p^s-1)}{p^{s+1}-1}\right)$$

para cada cara propia τ de $\Gamma(f)$. Observar que en (2.8), L_τ no depende de k. Así, podemos escribir

$$Z(s,f) = L_{\Gamma(f)} + \sum_{\tau} L_\tau \cdot S_{\Delta_\tau} \tag{2.9}$$

donde τ recorre las caras propias de $\Gamma(f)$, con

$$S_{\Delta_\tau} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n \cap \Delta_\tau} p^{-\sigma(k)-m(k)s}.$$

Ahora debemos dar una fórmula para S_{Δ_τ}, donde τ es una cara propia fija. Por los Lemas 2.3.1 y 2.3.2, sabemos que existe una partición finita de Δ_τ en conos simpliciales racionales Δ_i. Entonces

$$S_{\Delta_\tau} = \sum_{i \in I} S_{\Delta_i} \quad \text{y} \quad S_{\Delta_i} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n \cap \Delta_i} p^{-\sigma(k)-m(k)s}.$$

Sea Δ_i el cono estrictamente positivamente generado por los vectores linealmente independientes $a_1, ..., a_l \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$. Si fijamos un elemento $x_\tau \in \tau$, se tiene que $m(k) = k \cdot x_\tau$ para cada $k \in \Delta_\tau$. Luego

$$S_{\Delta_i} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n \cap \Delta_i} p^{-\sigma(k)-k \cdot x_\tau s}.$$

Hasta aquí, reconocemos dos formas de calcular S_{Δ_i}:

- Si Δ_i es un cono simple, i.e., $\mathbb{N}^n \cap \Delta_i = \mathbb{N}\setminus\{0\}a_1 + \cdots + \mathbb{N}\setminus\{0\}a_l$, donde $a_1, ..., a_l$ son linealmente independientes, tenemos

$$\begin{aligned} S_{\Delta_i} &= \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_l \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} p^{-\sigma(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_l a_l) - (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_l a_l) x_\tau s} \\ &= \sum_{\lambda_1=1}^{\infty} \left(p^{-\sigma(a_1) - a_1 x_\tau s}\right)^{\lambda_1} \cdots \sum_{\lambda_l=1}^{\infty} \left(p^{-\sigma(a_l) - a_1 x_\tau s}\right)^{\lambda_l}. \end{aligned}$$

  Como $Re(s) > 0$, $|p^{-\sigma(a_j) - a_j x_\tau s}| < 1$ para todo $j = 1, ..., l$, tenemos que

$$S_{\Delta_i} = \prod_{j=1}^{l} \frac{p^{-\sigma(a_j)-a_j x_\tau s}}{1-p^{-\sigma(a_j)-a_j x_\tau s}} = \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{p^{\sigma(a_j)+a_j x_\tau s}-1} = \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{p^{\sigma(a_j)+m(a_j)s}-1}$$

donde la última igualdad resulta de que $a_j \cdot x_\tau = m(a_j)$ para cada $j = 1, ..., l$, porque $a_j \in \overline{\Delta_\tau} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid \tau \subset F(a)\}$.

- Vemos que

$$\Delta_i \cap \mathbb{N}^n = \bigsqcup_{g} g + \mathbb{N}a_1 + \cdots + \mathbb{N}a_l$$

donde g recorre $J = \mathbb{Z}^n \cap \left\{ \sum_{j=1}^{l} \mu_j a_j \mid 0 < \mu_j \leq 1,\ j = 1, ..., l \right\}$. Así

$$\begin{aligned} S_{\Delta_i} &= \sum_{g\in J} p^{-\sigma(g)-g\cdot x_\tau s} \cdot \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_l\in\mathbb{N}} p^{-\sigma(\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_l a_l)-(\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_l a_l)\cdot x_\tau s} \\ &= \left(\sum_{g\in J} p^{-\sigma(g)-g\cdot x_\tau s}\right) \cdot \prod_{j=1}^{l} \frac{p^{\sigma(a_j)+a_j\cdot x_\tau s}}{p^{\sigma(a_j)+a_j\cdot x_\tau s}-1} \qquad (Re(s) > 0) \\ &= \frac{\sum_{g\in J} p^{\sigma(a_1+\cdots a_l-g)+(a_1+\cdots a_l-g)\cdot x_\tau s}}{\prod_{j=1}^{l} (p^{\sigma(a_j)+a_j\cdot x_\tau s}-1)} \\ &= \frac{\sum_{h\in J'} p^{\sigma(h)+m(h)s}}{\prod_{j=1}^{l} (p^{\sigma(a_j)+m(a_j)s}-1)} \end{aligned}$$

donde la última igualdad resulta de que $a_j \cdot x_\tau = m(a_j)$ para cada $j = 1, ..., l$ y $(a_1+\cdots+a_l-g)\cdot x_\tau = m(a_1+\cdots+a_l-g)$, porque $a_j, (a_1+\cdots+a_l-g) \in \overline{\Delta_\tau} = \{a \in \mathbb{R}_+^n \mid \tau \subset F(a)\}$, y donde

$$J' = \mathbb{Z}^n \cap \left\{ \sum_{j=1}^{l} \mu_j a_j \mid 0 \leq \mu_j < 1,\ j = 1, ..., l \right\}$$

□

Ejemplo 2.3.1. *Consideremos el polinomio* $f(x, y) = P(x, y) - \mu x^3 y^3$ *en* $\mathbb{Z}_p[x, y]$ *tal que* $P(x, y) = x^2+y^2$ *es un polinomio quasielíptico de grado* $d = 2$ *con respecto a* $\omega = (1, 1)$*, y* μ *es una unidad.*
Para el polinomio f*, tenemos que* $sop(f) = \{(2, 0), (0, 2), (3, 3)\}$*.*

- *La cara* τ_1 *es la faceta descrita por el hiperplano* $\{(0, y) \mid y \geq 2\}$ *y el vector generador del cono asociado* Δ_{τ_1} *es* $\{(1, 0)\}$*.*

- *La cara* τ_2 *corresponde al punto* $\{(0, 2)\}$ *que es intersección de la faceta que describe a* τ_1 *con el hiperplano* $\{(x, y) \mid x+y = 2\}$*. Los vectores generadores del cono asociado* Δ_{τ_2} *son* $\{(1, 0), (1, 1)\}$*.*

- *La cara τ_3 está contenida en el hiperplano soporte $\{(x,y) \mid \; x+y=2\}$ y el vector generador del cono asociado Δ_{τ_3} es $\{(1,1)\}$.*

- *La cara τ_4 del poliedro es el punto $\{(2,0)\}$ que es intersección de la faceta que describe a τ_5 con el hiperplano $\{(x,y) \mid \; x+y=2\}$. Los vectores generadores del cono asociado Δ_{τ_4} son $\{(0,1),(1,1)\}$.*

- *La cara τ_5 es la faceta descrita por el hiperplano $\{(x,0) \mid \; x \geq 2\}$ y el vector generador del cono asociado Δ_{τ_5} es $\{(0,1)\}$*

- *Identificaremos a la cara $\tau_6 = \Gamma(f)$, donde el vector que genera a Δ_{τ_6} es $\{(0,0)\}$.*

Los polinomios asociados a cada cara del poliedro son

$$f_{\tau_1} = y^2,\; f_{\tau_2} = y^2,\; f_{\tau_3} = x^2+y^2,\; f_{\tau_4} = x^2,\; f_{\tau_5} = x^2 \text{ y } f_{\tau_6} = f(x,y),$$

donde para cada polinomio, el conjunto de ceros bajo reducción en módulo en $(\mathbb{F}_p^{\times})^2$ es vacío, es decir, $N_{\tau_i} = 0$ $i = 1,...,6$ (luego $L_{\tau_i} = p^{-2}(p-1)^2, \;\; i = 1,...,6$).

Por el teorema anterior, ya sabemos que la función zeta de Igusa asociada al polinomio $f(x,y) = x^2+y^2-\mu x^3y^3$ tiene la forma:

$$Z(s,f) = p^{-2}(p-1)^2 \left(1 + \sum_{\tau \, cara \; propia \;\; de \Gamma(f)} S_{\Delta_\tau} \right).$$

Para calcular los S_{Δ_τ}, recordemos que $\sigma((x_1,x_2)) = x_1+x_2$ y que

$$m((x_1,x_2)) = \min_{k \in supp(f)} \{(x_1,x_2)\cdot k\}.$$

Con esto

- *Δ_{τ_1} está generado por $\{(1,0)\}$, luego $J_1' = \mathbb{Z}^2 \cap \{\mu(1,0) \mid \; 0 \leq \mu < 1\} = \{(0,0)\}$, así*
$$S_{\Delta_{\tau_1}} = \frac{1}{p-1}.$$

- *Δ_{τ_2} está generado por $\{(1,0),(2,3)\}$, luego $J_2' = \mathbb{Z}^2 \cap \{\mu_1(1,0)+\mu_2(1,1) \mid \; 0 \leq \mu_1,\mu_2 < 1\} = \{(0,0)\}$, así*
$$S_{\Delta_{\tau_2}} = \frac{1}{(p-1)(p^{2+2s}-1)}.$$

- *Δ_{τ_3} está generado por $\{(1,1)\}$, luego $J_3' = \mathbb{Z}^2 \cap \{\mu(1,1) \mid \; 0 \leq \mu < 1\} = \{(0,0)\}$, así*
$$S_{\Delta_{\tau_3}} = \frac{1}{p^{2+2s}-1}.$$

- *Δ_{τ_4} está generado por $\{(2,3),(0,1)\}$, luego $J_4' = \mathbb{Z}^2 \cap \{\mu_1(1,1)+\mu_2(0,1) \mid \; 0 \leq \mu_1,\mu_2 < 1\} = \{(0,0)\}$, así*
$$S_{\Delta_{\tau_4}} = \frac{1}{(p^{2+2s}-1)(p-1)}.$$

- Δ_{τ_5} *está generado por* $\{(0,1)\}$, *luego* $J_5' = \mathbb{Z}^2 \cap \{\mu(0,1) \mid \; 0 \leq \mu < 1\} = \{(0,0)\}$, *así*

$$S_{\Delta_{\tau_5}} = \frac{1}{p-1}.$$

- Δ_{τ_6} *está generado por* $\{(0,0)\}$, *luego* $J_6' = \{(0,0)\}$, *y* $S_{\Delta_{\tau_6}} = 1$.

Con toda esta información, la continuación meromorfa de la función zeta local de Igusa asociada al polinomio f *está dada por:*

$$\begin{aligned} Z(s,f) &= p^{-2}(p-1)^2 + \left(1 + \sum_{i=1}^{5} S_{\Delta_{\tau_i}}\right) \\ &= \frac{L_f(p^{-s})}{p^{2+2s}-1} \end{aligned}$$

donde L_f *es un polinomio con coeficientes racionales en la variable* p^{-s}.

Capítulo 3

Operadores Pseudo-diferenciales sobre Campos p-ádicos

El principal problema de este trabajo es encontrar soluciones fundamentales de operadores pseudodiferenciales p-ádicos a partir de la racionalidad de la función zeta local de Igusa. En este capítulo revisaremos algunos elementos de la teoría de operadores pseudodiferenciales p-ádicos necesarios para entender tal problema y mostraremos los respectivos resultados. A lo largo del capítulo, utilizaremos principalmente las referencias [1], [6], [8], [15], [10] y [11].

3.1. Operadores Pseudodiferenciales

El principal objetivo de esta sección es mostrar una técnica para obtener soluciones fundamentales asociadas a operadores respectivos con símbolos de tipo polinomial, usando la continuación meromorfa de funciones zeta locales de Igusa.

3.1.1. Método de Continuación Analítica de Gel'fald-Shilov

Revisaremos el método de continuación analítica de Gel'fand-Shilov para distribuciones en $\mathcal{D}'$. Ver [15].
Sea U un abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Asumimos que

$$\begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathcal{D}' \\ s & \longmapsto & T_s \end{array}$$

es una función $\mathcal{D}'$-valuada sobre U. Decimos que T_s es continua, respectivamente holomorfa, sobre U si (T_s, φ) es continua, respectivamente holomorfa, sobre U para cada φ en $\mathcal{D}$. Sea X una curva continua de longitud finita en $\mathbb{C}$ (la curva X contenida en U), entonces

$$(R, \varphi) := \int_X (T_s, \varphi)\ ds$$

se define para cada $\varphi \in \mathcal{D}$ y define un elemento de $\mathcal{D}'$. Esta distribución la denotamos como

$$R = \int_X T_s\ ds.$$

Supongamos que T_s es holomorfa en U y, que el disco punteado $\{s \in \mathbb{C} \mid \; 0 < |s - s_0| \leq r\}$ está contenido en U para algún $s_0 \in \mathbb{C}$ (no necesariamente en U) y algún $r > 0$. Entonces (T_s, φ) se puede expandir en serie de Laurent:

$$(T_s, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_k, \varphi) \; (s - s_0)^k,$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-s_0|=r} \frac{T_s}{(s - s_0)^{k+1}} ds$$

pertenece $\mathcal{D}'$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Ahora, como $\mathcal{D}'$ es completo,

$$T_s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (s - s_0)^k$$

está bien definida y es un elemento en $\mathcal{D}'$, que es la serie de Laurent de T_s en s_0. Decimos que s_0 es un polo de T_s si $a_k \neq 0$ solo para un número finito de $k < 0$.

3.1.2. Soluciones Fundamentales para Operadores Pseudodiferenciales

Definición 3.1.1. *Sea $f \in \mathbb{Z}_p[\xi_1, ..., \xi_n]$ un polinomio no constante. Para $\beta > 0$, un operador pseudodiferencial con símbolo $|f(\xi)|_p^\beta$ es una extensión de un operador*

$$(\boldsymbol{f}(\partial, \beta)\phi)(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} \left(|f(\xi)|_p^\beta \mathcal{F}_{x \to \xi} \phi \right)$$

para $\phi \in \mathcal{D}$.

Definición 3.1.2. *Se dice que $E_\beta \in \mathcal{D}'$ es una solución fundamental para la ecuación pseudodiferencial*

$$\boldsymbol{f}(\partial, \beta) u = \phi, \quad \textit{con} \quad \phi \in \mathcal{D}, \tag{3.1}$$

si $u = E_\beta * \phi$ es una solución de (3.1) en $\mathcal{D}'$ para cualquier $\phi \in \mathcal{D}$.

Es importante mencionar aquí que no podemos usar la definición estándar de una solución fundamental (en general, hallar una solución para (3.1) corresponde a encontrar una solución fundamental), es decir, $\boldsymbol{f}(\partial, \beta) u = \delta$, porque $\mathcal{D}$ no es invariante bajo la acción de $\boldsymbol{f}(\partial, \beta)$. Ver la Observación 1.5.5.

Daremos ahora una detallada técnica para obtener soluciones fundamentales de ecuaciones pseudodiferenciales de la forma (3.1). Esta se basa en [Teorema 1.1,[12]] y en [Teorema 134,[15], pag.130].

Teorema 3.1.1 (W.A. Zúñiga-Galindo, ver [12], [14] o [15]). *Existe una solución fundamental para la ecuación $\boldsymbol{f}(\partial, \beta) u = \phi$ con $\phi \in \mathcal{D}$*

Demostración. Primero debemos notar que la existencia de una solución fundamental para $\boldsymbol{f}(\partial, \beta) u = \phi$, con $\phi \in \mathcal{D}$, es equivalente a la existencia de una distribución $T_\beta = \mathcal{F} E_\beta$ que satisface

$$|f(\xi)|_p^s T_\beta = 1 \;\; \textit{en} \;\; \mathcal{D}'. \tag{3.2}$$

En efecto, como $\boldsymbol{f}(\partial, \beta) u = \phi$ y $u = E_\beta * \phi$, tomando transformadas de Fourier se obtiene,

$$\left(|f(\xi)|_p^s T_\beta - 1\right)\mathcal{F}\phi = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'.$$

Recíprocamente, asumimos que (3.2) es válido. Entonces, para cualquier $\mathcal{F}\phi \in \mathcal{D}$, $|f(\xi)|_p^s T_\beta \mathcal{F}\phi = \mathcal{F}\phi$ en $\mathcal{D}'$. El producto $|f(\xi)|_p^s T_\beta \mathcal{F}\phi$ está bien definido como producto conmutativo y asociativo, luego

$$|f(\xi)|_p^s T_\beta \mathcal{F}\phi = |f(\xi)|_p^s \left(T_\beta \mathcal{F}\phi\right) = |f(\xi)|_p^s \mathcal{F}(E_\beta * \phi) = |f(\xi)|_p^s \mathcal{F}u = \mathcal{F}\phi \ \text{ en } \mathcal{D}'$$

i.e., $\boldsymbol{f}(\partial, \beta)u = \phi$ en $\mathcal{D}'$.

Afirmación 1:

$$|f|_p^{s+\beta} = |f|_p^s |f|_p^\beta \tag{3.3}$$

en $\mathcal{D}'$, para cualquier $s \in \mathbb{C}$.

Probamos ahora la existencia de soluciones para el problema de división (3.2). Por el Teorema 2.1.2 (de Igusa) $|f|_p^s$ tiene una continuación meromorfa sobre todo el plano complejo. Luego,

$$|f|_p^s = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k (s+\beta)^k$$

es la expansión de Laurent de $|f|_p^s$ en $-\beta$, con $a_k \in \mathcal{D}'$. Como las partes reales de los polos de $|f|_p^s$ son números racionales negativos, tenemos que $|f|_p^{s+\beta} = |f|_p^s |f|_p^\beta$ es una distribución holomorfa en $s = -\beta$. Por ello $|f|_p^\beta a_k = 0$ para todo $k < 0$ (notar que $|f|_p^\beta a_k \in \mathcal{D}'$) y

$$|f|_p^{s+\beta} = |f|_p^{s+\beta} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |f|_p^\beta a_k (s+\beta)^k. \tag{3.4}$$

Aplicando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue en (3.4),

$$\lim_{s\to-\beta} \langle |f|_p^{s+\beta}, \phi\rangle = \langle 1, \phi\rangle = |f|_p^\beta a_0,$$

luego $T_\beta = a_0$ y $E_\beta = \mathcal{F}^{-1} a_0$.

Notar que si $-\beta$ no es un polo de $|f|_p^s$, entonces $T_\beta = |f|_p^{-\beta}$ y $E_\beta = \mathcal{F}^{-1} T_\beta$.

Prueba de la Afirmación 1: El producto de distribuciones $|f|_p^s |f|_p^\beta$ en $\mathcal{D}'$ se define como:

$$\left(|f|_p^s |f|_p^\beta, \varphi\right) = \lim_{k\to\infty} \left(|f|_p^s, \left(|f|_p^\beta * \delta_k\right)\varphi\right) \quad \text{ para } Re(s) > 0$$

si el límite existe para todo $\varphi \in \mathcal{D}$. Considerando los $x \in \mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(|f|_p^s |f|_p^\beta, \varphi\right) &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)} \varphi(x)|f(x)|_p^s \left(\int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)} |f(y)|_p^\beta \delta_k(x-y) d^n y\right) d^n x \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)} \varphi(x)|f(x)|_p^s \left(p^{nk} \int_{||y-x||_p \le p^{-k}} |f(y)|_p^\beta d^n y\right) d^n x \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)} \varphi(x)|f(x)|_p^s \left(\int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x+p^k z)|_p^\beta d^n z\right) d^n x \quad (y - x = p^k z,\ z \in \mathbb{Z}_p^n) \\
&= \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus f^{-1}(0)} \varphi(x)|f(x)|_p^{s+\beta}\, d^n x \quad Re(s) > 0
\end{aligned}$$

pues $|f(x+p^k z)|_p = |f(x)|_p$ para un k suficientemente grande. La existencia de la última integral se verifica a partir de la continuación meromorfa de $|f(x)|_p^{s+\beta}$ a todo el plano complejo. $\square$

3.2. Funciones Zeta Locales de Igusa y Soluciones Fundamentales

En la presente sección presentaremos algunos resultados originales sobre soluciones fundamentales asociadas a ciertos operadores pseudo-diferenciales.

Definición 3.2.1. *Sea $f \in \mathbb{Z}[\xi_1, ..., \xi_n]$ un polinomio no constante. Decimos que f es* ***elíptico*** *si $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$.*

A partir del Teorema de Igusa 2.1.2, sabemos que

$$Z_\varphi(s,f) := \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(\xi)|_p^s d^n\xi = \frac{L(p^{-s})}{\prod_{j=1}^{m} \left(1 - p^{\nu_j - sN_j}\right)} \tag{3.5}$$

donde L es un polinomio a coeficientes racionales en la variable p^{-s} y donde (N_j, ν_j) son como en el Teorema 2.1.2.

Lema 3.2.1. *Sea f un polinomio elíptico. La distribución $\varphi \mapsto (|f|_p^s, \varphi)$, con $Re(s) > 0$, admite una continuación meromorfa a todo el plano complejo de la forma*

$$\left(|f|_p^s, \varphi\right) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} (\varphi(\xi) - \varphi(0))|f(\xi)|_p^s d^n\xi + \varphi(0)\frac{L(p^{-s})}{\prod_{j=1}^{m} \left(1 - p^{\nu_j - sN_j}\right)} + \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus \mathbb{Z}_p^n} \varphi(\xi)|f(\xi)|_p^s d^n\xi, \tag{3.6}$$

$\varphi \in \mathcal{D}$, donde $L(p^{-s})$ es el polinomio con coeficientes racionales definido en (3.5).

Demostración. La distribución $|f|_p^s$, la podemos escribir de la forma

$$\left(|f|_p^s, \varphi\right) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} (\varphi(\xi) - \varphi(0))|f(\xi)|_p^s d^n\xi + \varphi(0)\int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(\xi)|_p^s d^n\xi + \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus \mathbb{Z}_p^n} \varphi(\xi)|f(\xi)|_p^s d^n\xi.$$

Por el Lema 2.1.1 las integrales

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} (\varphi(\xi) - \varphi(0))|f(\xi)|_p^s d^n\xi \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus \mathbb{Z}_p^n} \varphi(\xi)|f(\xi)|_p^s d^n\xi$$

son funciones analíticas en la variable s. Luego, el resultado se obtiene de 3.5. □

Observación 3.2.1. *Los posibles polos de la continuación meromorfa de $|f|_p^s$ son de la forma*

$$s_j = -\frac{\nu_j}{N_j} + \frac{2\pi i l}{N_j \ln p}, \quad l \in \mathbb{Z}$$

para cada $j = 1, ..., m$.

Teorema 3.2.1. *Sea f un polinomio elíptico. Una solución fundamental para la ecuación pseudo-diferencial*

$$\boldsymbol{f}(\partial, \beta)u = \phi, \quad \textit{con} \quad \phi \in \mathcal{D}$$

está dada por:

1. *Si* $\beta \neq \frac{\nu_j}{N_j}$,

$$(E_\beta,\phi)=\int_{\mathbb{Z}_p^n}\frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x)-(\mathcal{F}^{-1}\phi)(0)}{|f(x)|_p^\beta}\,d^nx+(\mathcal{F}^{-1}\phi)(0)\frac{L(p^\beta)}{\prod_{j=1}^m\left(1-p^{\nu_j+\beta N_j}\right)}+\int_{\mathbb{Q}_p^n\setminus\mathbb{Z}_p^n}\frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x)}{|f(x)|_p^\beta}\,d^nx.$$

para $\phi\in\mathcal{D}$.

2. *Si* $\beta=\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}$, *para algún* j_0,

$$\left(E_{\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}},\phi\right)=\int_{\mathbb{Z}_p^n}\frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x)-(\mathcal{F}^{-1}\phi)(0)}{|f(x)|_p^{\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}}}\,d^nx+(\mathcal{F}^{-1}\phi)(0)\cdot\{a_{0,j_0}\}+\int_{\mathbb{Q}_p^n\setminus\mathbb{Z}_p^n}\frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x)}{|f(x)|_p^{\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}}}\,d^nx.$$

para $\phi\in\mathcal{D}$, *donde* a_{0,j_0} *es el término constante de la expansión de Laurent de la función zeta de Igusa* $Z(s,f)$ *alrededor de un polo* s_0 *tal que* $Re(s_0)=-\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}$.

Demostración.

1. Si $\beta\neq\frac{\nu_j}{N_j}$, como consecuencia del resultado anterior y de la técnica desarrollada en el Teorema 3.1.1, tenemos que

$$T_\beta=|f|_p^{-\beta}\quad y\quad E_\beta=\mathcal{F}^{-1}T_\beta$$

en $\mathcal{D}'$.

2. Si $\beta=\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}$ es un polo de orden e_{j_0}, para algún $j_0\in\{1,...,m\}$, sabemos que T_β es el término constante de la expansión de Laurent de la continuación meromorfa de $|f|_p^s$ en $s=-\beta=-\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}$. Primero vemos que la expansión de Laurent de la función zeta de Igusa alrededor de $s=-\beta=-\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}$ es

$$Z(s,f)=\sum_{k=-e_{j_0}}^{\infty}a_{k,j_0}\left(s+\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}\right)^k,\quad \text{con } a_{k,j_0}\in\mathbb{C}\ \text{ para todo } k,\quad a_{-e_{j_0},j_0}\neq 0.$$

Luego $T_{\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}}=a_{0,j_0}$ y a partir de la Proposición 3.2.1 se tiene que

$$\left(T_{\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}},\phi\right)=\int_{\mathbb{Z}_p^n}\frac{(\phi(x)-\phi(0))}{|f(x)|_p^{\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}}}\,d^nx+\phi(0)\cdot\{a_{0,j_0}\}+\int_{\mathbb{Q}_p^n\setminus\mathbb{Z}_p^n}\frac{\phi(x)}{|f(x)|_p^{\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}}}\,d^nx$$

y $\quad E_{\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}}=\mathcal{F}^{-1}T_{\frac{\nu_{j_0}}{N_{j_0}}}$.

$\square$

3.2.1. Funciones Zeta Locales para Polinomios Semi-quasielípticos

Aquí el objetivo principal es encontrar la continuación meromorfa de la función zeta local de Igusa asociada a un polinomio semi-quasielíptico (que definiremos posteriormente) con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$. Este es el resultado más relevante del presente trabajo y que nos permite encontrar la solución fundamental para un operador con este tipo de polinomios como símbolos.

Definición 3.2.2. *Sea f un polinomio elíptico y sea $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$. Se dice que f es un polinomio quasielíptico de grado d con respecto a ω si*

$$f(\lambda^{\omega_1}\xi_1, ..., \lambda^{\omega_n}\xi_n) = \lambda^d f(x),$$

para cualquier $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$

Para $\omega := (\omega_1, ..., \omega_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$, denotamos $|\omega| := \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$.

Definición 3.2.3. *Un polinomio $h \in \mathbb{Z}_p[\xi_1, ..., \xi_n]$ se dice que es **semi-quasielíptico con respecto a ω** si tiene la forma*

$$h(\xi) = f(\xi) + \sum c_i \xi^i,$$

donde f es un polinomio quasielíptico de grado d con respecto a ω y cada $\xi^i = \xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\cdots\xi_n^{i_n}$ satisface que $\sum_{j=1}^n i_j\omega_j > d$. Adicionalmente $h(\xi) = 0$ si y solo si $\xi = 0$.

Llamaremos a f la parte quasielíptica del polinomio h. Todo polinomio quasielíptico es también un polinomio semi-quasielíptico, donde los coeficientes c_i son todos cero.

Observación 3.2.2. *De la Definición 3.2.3, para $i, \omega \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$, denotamos*

$$\langle i, \omega \rangle = \textstyle\sum_{j=1}^n i_j\omega_j = d + r \geq d + 1, \quad \textit{i.e.}, \ r \geq 1.$$

El siguiente resultado será usado más adelante.

Lema 3.2.2 (ver [15])**.** *Sea f un polinomio elíptico. Sea $K \subset \mathbb{Q}_p^n$ un compacto tal que $0 \notin K$. Se tiene que*

1. *Existe $M = M(K, f) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $|f(\xi)|_p \geq p^{-M}$ para cualquier $\xi \in K$.*

2. *Existe una constante $R \in \mathbb{N}$ y un número finito de puntos $\tilde{\xi}_i \in K$ con $B^n_{M+1+R}(\tilde{\xi}_i) := \tilde{\xi}_i + (p^{M+1+R}\mathbb{Z}_p)^n$, tales que*

$$K = \bigsqcup_i B^n_{M+1+R}(\tilde{\xi}_i) \quad y \quad \left| f|_{B^n_{M+1+R}(\tilde{\xi}_i)} \right|_p = |f(\tilde{\xi}_i)|_p \quad \textit{para cada } i.$$

Demostración.

1. Usando un argumento de contradicción, suponemos la existencia de una sucesión de puntos $\{\xi_n\}_n$ en K tal que $|f(\xi_n)|_p \leq p^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K es compacto, existe una subsucesión $\xi_{\varphi(n)}$ que converge a un $\xi_\varphi \in K$, con $\xi_\varphi \neq 0$. Pero por continuidad de f, se tiene que $f(\xi) = 0$, lo que es una contradicción.

2. Sea $\tilde{\xi}_i \in K$ dado. Por el punto anterior se tiene que

$$f(\tilde{\xi}_i + p^{M+1}\eta) = f(\tilde{\xi}_i) + p^{M+1}g_i(\eta),$$

donde $g_i \in \mathbb{Q}_p[\eta_1, ..., \eta_n]$ satisface que $g_i(0) = 0$. Como g es continua, existe $R_i \in \mathbb{N}$ tal que si $\eta \in (p^{R_i}\mathbb{Z}_p)^n$, entonces $|g_i(\eta)|_p \leq 1$. Luego, para cualquier número natural $R \geq R_i$ por la desigualdad ultramétrica tenemos que

$$|f(\tilde{\xi}_i + p^{M+1}\eta)|_p = |f(\tilde{\xi}_i) + p^{M+1}g_i(\eta)|_p = |f(\tilde{\xi}_i)|_p$$

para cualquier $\eta \in (p^R\mathbb{Z}_p)^n \subset (p^{R_i}\mathbb{Z}_p)^n$. Como K es compacto, existen finitos $\tilde{\xi}_i \in K$ tales que las bolas $B^n_{M+1+R}(\tilde{\xi}_i) = \tilde{\xi}_i + (p^{M+1+R}\mathbb{Z}_p)^n$ con $i = 1, ..., k$ forman un cubrimiento de K. Podemos tomar

$$R := \text{máx}\{R_i \mid \ i = 1, ..., k\}$$

y se completa la demostración.

□

Observación 3.2.3. *Para un $\omega \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$, definimos*

$$A_\omega = \{x \in \mathbb{Z}_p^n \mid \ ord_p(x_j) \geq \omega_j, \ j = 1, ..., n\}$$

y A^c_ω como su complemento en $\mathbb{Z}_p^n$. Podemos escribir $\mathbb{Z}_p^n = A_\omega \sqcup A^c_\omega$.

Como consecuencia del lema anterior, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.1. *Sea f un polinomio elíptico, entonces*

$$\int_{A^c_\omega} |f(\xi)|_p^s d^n\xi = L_f(p^{-s})$$

donde $L_f(p^{-s})$ es un polinomio en p^{-s} con coeficientes racionales.

Demostración. Primero hacemos una descomposición del subconjunto A^c_ω. Para esto, sea I un subconjunto propio de $\{1, ..., n\}$ y fijemos $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tal que $0 \leq \alpha_i \leq \omega_i - 1 \Leftrightarrow i \notin I$. Definimos

$$A(I, \alpha) := \{(\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{Z}_p^n \mid \ ord_p(\xi_i) \geq \omega_i \Leftrightarrow i \in I \ \ and \ \ ord_p(\xi_i) = \alpha_i \Leftrightarrow i \notin I\}.$$

De aquí, cada $A(I, \alpha)$ es abierto compacto en $\mathbb{Z}_p^n$ y como

$$A^c_\omega = \bigsqcup_{(I,\alpha)} A(I, \alpha)$$

es unión finita, tenemos que A^c_ω es también un abierto compacto en $\mathbb{Z}_p^n$. Con esto, vemos que

$$\int_{A^c_\omega} |f(\xi)|_p^s d^n\xi = \sum_{(I,\alpha)} \int_{A(I,\alpha)} |f(\xi)|_p^s d^n\xi.$$

Más aún, como 0 no pertenece a $A(I, \alpha)$, por el lema anterior se tiene que existe un cubrimiento finito por bolas del tipo $B^n_M(\tilde{\xi}_l) := \tilde{\xi}_l + (p^M\mathbb{Z}_p)^n$ con $M := M(I, \alpha)$ y $\tilde{\xi}_l \in A(I, \alpha)$ tal que

$$\left| f|_{B_M(\tilde{\xi}_l)} \right|_p^s = |f(\tilde{\xi}_l)|_p^s \quad \text{para cada } l := l(I, \alpha)$$

y esto, sobre cada abierto compacto $A(I,\alpha)$. Así,

$$\int_{A_\omega^c} |f(\xi)|_p^s d^n\xi = \sum_{(I,\alpha)} \int_{A(I,\alpha)} |f(\xi)|_p^s d^n\xi = \sum_{(I,\alpha)} \left[\sum_l \int_{B_M(\tilde{\xi}_l)} |f(\xi)|_p^s d^n\xi \right]$$

$$= \sum_{(I,\alpha)} \left[\sum_l |f(\tilde{\xi}_l)|_p^s \int_{B_M(\tilde{\xi}_l)} d^n\xi \right] = \sum_{(I,\alpha)} \left[\sum_l p^{-M\cdot n} |f(\tilde{\xi}_l)|_p^s \right] = L_f(p^{-s}).$$

□

Teorema 3.2.2. *Sea $h \in \mathbb{Z}_p[\xi_1, ..., \xi_n]$ un polinomo semiquasielíptico con respecto a ω. Entonces la función zeta local de Igusa*

$$Z(s,h) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |h(\xi)|_p^s d^n\xi, \quad Re(s) > 0$$

tiene una continuación meromorfa a todo el plano complejo de la forma:

$$\frac{L_h(p^{-s})}{1 - p^{-|\omega| - ds}},$$

donde L_h es un polinomio en la variable p^{-s} con coeficientes racionales y tal que $L_h(p^{\frac{|\omega|}{d}}) \neq 0$.

Demostración. Usando la descomposición $\mathbb{Z}_p^n = A_\omega \sqcup A_\omega^c$ obtenemos que

$$Z(s,h) = \int_{A_\omega} |h(\xi)|_p^s d^n\xi + \int_{A_\omega^c} |h(\xi)|_p^s d^n\xi. \tag{3.7}$$

Para la primera integral a la derecha de la igualdad, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{A_\omega} |h(\xi)|_p^s d^n\xi &= \int_{A_\omega} \left| f(\xi) + \sum c_i \xi^i \right|_p^s d^n\xi \\
&= p^{-|\omega|} \int_{\mathbb{Z}_p^n} \left| p^d f(\tilde{\xi}) + \sum c_i p^{\langle i,\omega\rangle} \tilde{\xi}^i \right|_p^s d^n\tilde{\xi} \qquad (\xi_j = p^{\omega_j}\tilde{\xi}_j \quad j = 1,..,n) \\
&= p^{-|\omega|} \int_{\mathbb{Z}_p^n} \left| p^d f(\tilde{\xi}) + p^{d+r_1} \sum c_{i,1} \tilde{\xi}^i \right|_p^s d^n\tilde{\xi} \\
&= p^{-|\omega| - ds} \int_{\mathbb{Z}_p^n} \left| f(\tilde{\xi}) + p^{r_1} \sum c_{i,1} \tilde{\xi}^i \right|_p^s d^n\tilde{\xi}
\end{aligned}$$

y llamamos $h_1(\xi) = f(\xi) + p^{r_1} \sum c_{i,1}\xi^i$, con $r_1 \geq 1$ y $F_1(\xi) = \sum c_{i,1}\xi^i \in \mathbb{Z}_p[\xi]$.

Ahora, la ecuación (3.7) se puede escribir como

$$Z(s,h) = p^{-|\omega|-ds} \int_{\mathbb{Z}_p^n \setminus \{0\}} |h_1(\xi)|_p^s d^n\xi + \int_{A_\omega^c} |h(\xi)|_p^s d^n\xi \tag{3.8}$$

y luego iterando el proceso anterior en (3.8), tenemos

$$Z(s,h) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k(-|\omega|-ds)} \int_{A_\omega^c} |h_k(\xi)|_p^s d^n\xi + \int_{A_\omega^c} |h(\xi)|_p^s d^n\xi \tag{3.9}$$

donde $h_k(\xi) = f(\xi) + p^{r_k} F_k(\xi)$ y $F_k(\xi) = \sum c_{i,k}\xi^i \in \mathbb{Z}_p[\xi]$, con $r_k \longrightarrow \infty$ cuando $k \longrightarrow \infty$.
Como f es un polinomio quasielíptico, por el Lema 3.2.2 existe $M_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $|f(\xi)|_p \geq p^{-M_0}$ para todo $\xi \in A_\omega^c$. Además, como $r_k \longrightarrow \infty$ cuando $k \longrightarrow \infty$, se tiene que existe un $k_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que para todo $k \geq k_0$ $|p^{r_k} F_k(\xi)|_p \longrightarrow 0$. Luego, por la desigualdad ultramétrica,

$$|h_k(\xi)|_p = |f(\xi) + p^{r_k} F_k(\xi)|_p = |f(\xi)|_p \quad \text{para todo} \quad k \geq k_0$$

y

$$\int_{A_\omega^c} |h_k(\xi)|_p^s d^n\xi = \int_{A_\omega^c} |f(\xi)|_p^s d^n\xi \quad \textit{para todo } k \geq k_0. \tag{3.10}$$

Si llamamos $h(\xi) = h_0(\xi)$, simplificamos la ecuación (3.9) a la expresión:

$$Z(s,h) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{k(-|\omega|-ds)} \int_{A_\omega^c} |h_k(\xi)|_p^s d^n\xi.$$

La serie anterior es absolutamente convergente porque $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p^{k(-|\omega|-ds)}$ converge para $Re(s) > -\frac{|\omega|}{d}$ y porque las integrales $\displaystyle\int_{A_\omega^c} |h_k(\xi)|_p^s d^n\xi$ son acotadas para todo $k \geq k_0$ y para todo $k < k_0$, respectivamente, por la continuidad de los h_k y la compacidad de A_ω^c. Ahora, $Z(s)$ se puede escribir como

$$Z(s,h) = \sum_{k=0}^{k_0-1} p^{k(-|\omega|-ds)} \int_{A_\omega^c} |h_k(\xi)|_p^s d^n\xi + \sum_{k=k_0}^{\infty} p^{k(-|\omega|-ds)} \int_{A_\omega^c} |h_k(\xi)|_p^s d^n\xi, \tag{3.11}$$

de (3.10) y (3.11) tenemos

$$Z(s,h) = \sum_{k=0}^{k_0-1} p^{k(-|\omega|-ds)} \int_{A_\omega^c} |h_k(\xi)|_p^s d^n\xi + \left(\int_{A_\omega^c} |f(\xi)|_p^s d^n\xi\right) \sum_{k=k_0}^{\infty} p^{k(-|\omega|-ds)}$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0-1} p^{k(-|\omega|-ds)} \int_{A_\omega^c} |h_k(\xi)|_p^s d^n\xi + \left(\int_{A_\omega^c} |f(\xi)|_p^s d^n\xi\right) \left(\frac{p^{k_0(-|\omega|-ds)}}{1 - p^{-|\omega|-ds}}\right). \tag{3.12}$$

Observemos que $h_k \in \mathbb{Z}_p[\xi_1, ..., \xi_n]$ satisface la condición $h_k(\xi) = 0$ si y solo si $\xi = 0$, para cada $1 \leq k \leq k_0 - 1$. En efecto, supongamos por el contrario que existe $\eta \in \mathbb{Z}_p^n$, $\eta \neq 0$, tal que $h_k(\eta) = 0$. Esto quiere decir que

$$f(\eta) = -p^{r_k} \sum c_{i,k} \eta^i$$

y para $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$ tenemos

$$f(\lambda^{\omega_1}\eta_1, ..., \lambda^{\omega_n}\eta_n) = -p^{r_k} \sum c_{i,k} \lambda^{\langle i,\omega\rangle} \eta^i = -\lambda^d \left(\lambda^r p^{r_k}\right) \sum c_{i,k} \eta^i = \lambda^d \lambda^r f(\eta)$$

lo que es una contradicción porque f es un polinomio quasielíptico de grado d con respecto a $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$.

Ahora, aplicando la Observación 3.2.1 a f y a cada polinomio h_k, con $k \in \{0, ..., k_0 - 1\}$, tenemos que

$$\int_{A_\omega^c} |f(\xi)|_p^s d^n\xi = L_f(p^{-s}) \quad \text{y} \quad \int_{A_\omega^c} |h_k(\xi)|_p^s d^n\xi = L_k(p^{-s})$$

donde L_f y L_k para $0 \leq k \leq k_0 - 1$ son polinomios en la variable p^{-s} con coeficientes racionales. Así, para (3.12), se tiene que

$$Z(s,h) = \sum_{k=0}^{k_0-1} p^{k(-|\omega|-ds)} L_k(p^{-s}) + L_f(p^{-s}) \cdot \left(\frac{p^{k_0(-|\omega|-ds)}}{1 - p^{-|\omega|-ds}}\right) = \frac{L_h(p^{-s})}{1 - p^{-|\omega|-ds}}$$

donde L_h es un polinomio en la variable p^{-s} con coeficientes racionales tales que $L_h(p^{\frac{|\omega|}{d}}) \neq 0$ y $s = -\frac{|\omega|}{d}$ es un polo de $Z(s,h)$. □

Observación 3.2.4. *Los posibles polos de la continuación meromorfa de $|h|_p^s$ tienen la forma*

$$s_l = -\frac{|\omega|}{d} - \frac{2\pi i l'}{d \ln p}, \quad \textit{para} \;\; l \in \mathbb{Z}.$$

3.2.2. Operadores Pseudodiferenciales Semiquasielípticos

Encontraremos aquí la solución fundamental para la ecuación pseudodiferencial asociada al operador pseudodiferencial con símbolo $|h(\xi)|_p^\beta$, para un $\beta > 0$, donde h es un polinomio semiquasielíptico definido en la sección anterior. Este resultado corresponde a una situación particular de lo planteado en el Teorema 3.2.1.

Definición 3.2.4. *Sea $h \in \mathbb{Z}_p[\xi_1, ..., \xi_n]$ un polinomio semiquasielíptico de grado d con respecto a ω. Para $\beta > 0$, un **operador pseudodiferencial semiquasielíptico** es una extensión de un operador*

$$(\boldsymbol{h}(\partial,\beta)\phi)(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(|h(\xi)|_p^\beta \mathcal{F}_{x\to\xi}\phi\right)$$

para $\phi \in \mathcal{D}$.

La solución fundamental para este tipo de operadores se define de igual manera a la dada anteriormente. Calcularemos ahora la solución fundamental para el operador pseudodiferencial semiquasielíptico como un caso particular de lo dado en el Teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.3. *Sea $\boldsymbol{h}(\partial,\beta)$ un operador pseudodiferencial semiquasielíptico y sea E_β una solución fundamental para la ecuación $\boldsymbol{h}(\partial,\beta)u = \phi$, con $\phi \in \mathcal{D}$.*

1. *Si $\beta \neq \frac{|\omega|}{d}$,*

$$(E_\beta, \phi) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} \frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x) - (\mathcal{F}^{-1}\phi)(0)}{|h(x)|_p^\beta}\, d^n x + (\mathcal{F}^{-1}\phi)(0)\frac{L_h(p^\beta)}{1 - p^{-|\omega|+d\beta}} + \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus \mathbb{Z}_p^n} \frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x)}{|h(x)|_p^\beta}\, d^n x.$$

   para $\phi \in \mathcal{D}$ y L_h es un polinomio en la variable p^{-s} definido como en el Teorema 3.2.2.

2. *Si $\beta = \frac{|\omega|}{d}$,*

$$(E_{\frac{|\omega|}{d}}, \phi) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} \frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x) - (\mathcal{F}^{-1}\phi)(0)}{|h(x)|_p^{\frac{|\omega|}{d}}}\, d^n x + (\mathcal{F}^{-1}\phi)(0)\cdot\left\{\frac{1}{d\ln(p)}\cdot L_h'(p^{\frac{|\omega|}{d}}) + \frac{1}{2}\cdot L_h(p^{\frac{|\omega|}{d}})\right\} + \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus \mathbb{Z}_p^n} \frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x)}{|h(x)|_p^{\frac{|\omega|}{d}}}\, d^n x.$$

   para $\phi \in \mathcal{D}$, donde L_h es un polinomio en la variable p^{-s} definido como en el Teorema 3.2.2, y donde L_h' es su derivada.

Demostración.

1. Si $\beta \neq \frac{|\omega|}{d}$, tenemos que $T_\beta = |h|_p^{-\beta}$, luego $E_\beta = \mathcal{F}^{-1}T_\beta$.

2. Si $\beta = \frac{|\omega|}{d}$, se sabe que T_β es el término constante de la expansión de Laurent de la continuación meromorfa de $|h|_p^s$ en $s = -\beta = -\frac{|\omega|}{d}$. Notamos que

$$\frac{L_h(p^{-s})}{1-p^{-|\omega|-ds}} = \left(L_h(p^{\frac{|\omega|}{d}}) + L_h'(p^{\frac{|\omega|}{d}})(s+\tfrac{|\omega|}{d}) + \mathcal{P}\left((s+\tfrac{|\omega|}{d})^2\right)\right) \times \left(\frac{a_{-1}}{(s+\frac{|\omega|}{d})} + a_0 + \mathcal{Q}\left((s+\tfrac{|\omega|}{d})\right)\right)$$

donde los coeficientes a_{-1} y a_0 son los primeros términos de la expansión de Laurent de $\frac{1}{1-p^{-|\omega|-ds}}$ en $s = -\frac{|\omega|}{d}$ y, $\mathcal{P}\left((s+\frac{|\omega|}{d})^2\right)$ y $\mathcal{Q}\left((s+\frac{|\omega|}{d})\right)$ denotan funciones holomorfas. Luego, el término constante de la expansión de Laurent de $\frac{L_h(p^{-s})}{1-p^{-|\omega|-ds}}$ está dado por

$$\left\{L_h'(p^{\frac{|\omega|}{d}})\cdot a_{-1} + L_h(p^{\frac{|\omega|}{d}})\cdot a_0\right\}.$$

Calculamos los coeficientes a_{-1} y a_0:

$$a_{-1} = Res\left(\tfrac{1}{1-p^{-|\omega|-ds}}, -\tfrac{|\omega|}{d}\right) := \lim_{s\to-\frac{|\omega|}{d}} \left(s+\frac{|\omega|}{d}\right)\frac{1}{1-p^{-|\omega|-ds}} \qquad (z = p^{|\omega|+ds})$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{\ln(z)}{d\ln(p)}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{d\ln(p)}$$

y por otro lado,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|s+\frac{|\omega|}{d}|=r}\frac{1}{(s+\frac{|\omega|}{d})(1-p^{-|\omega|-ds})}ds = \frac{1}{2}.$$

Así, tenemos que

$$\left(T_{\frac{|\omega|}{d}},\phi\right) = \int_{\mathbb{Z}_p^n}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{|h(x)|_p^{\frac{|\omega|}{d}}}\,d^nx + \phi(0)\cdot\left\{\frac{1}{d\ln(p)}\cdot L_h'(p^{\frac{|\omega|}{d}}) + \frac{1}{2}\cdot L_h(p^{\frac{|\omega|}{d}})\right\} + \int_{\mathbb{Q}_p^n\setminus\mathbb{Z}_p^n}\frac{\phi(x)}{|h(x)|_p^{\frac{|\omega|}{d}}}\,d^nx$$

y $\quad E_{\frac{|\omega|}{d}} = \mathcal{F}^{-1}T_{\frac{|\omega|}{d}}$. □

3.3. Una nueva clase de Operadores Pseudodiferenciales

En la presente sección definiremos una nueva clase de operadores pseudodiferenciales con símbolo un polinomio elíptico no-degenerado con respecto a su poliedro de Newton y posteriormente hallaremos la solución fundamental asociada.

3.3.1. Polinomios Elípticos no-degenerados por su Poliedro de Newton

Definición 3.3.1. *Sea $f \in \mathbb{Z}_p[x_1,...,x_n] \setminus p\mathbb{Z}_p[x_1,...,x_n]$ un polinomio elíptico. Decimos que f es un polinomio elíptico no degenerado sobre $\mathbb{F}_p$ con respecto a $\Gamma(f)$, si para toda cara τ de $\Gamma(f)$ el polinomio f_τ satisface que*

$$\{a \in (\mathbb{F}_p^\times)^n : \ \overline{f_\tau}(a) = 0\} = \emptyset.$$

Al polinomio f recién definido también lo llamaremos *elíptico no-degenerado con respecto a su poliedro de Newton.*

Teorema 3.3.1. *Sea $f \in \mathbb{Z}_p[x_1,...,x_n] \setminus p\mathbb{Z}_p[x_1,...,x_n]$ un polinomio elíptico no-degenerado con respecto a su poliedro de Newton. La función zeta de Igusa asociada a f,*

$$Z(s,f) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s d^n x, \quad Re(s) > 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

tiene una continuación meromorfa dada por

$$Z(s,f) = p^{-n}(p-1)^n \left(1 + \sum_\tau S_{\Delta_\tau}\right)$$

donde τ recorre las caras propias de $\Gamma(f)$ y donde S_{Δ_τ} es tal como se describió en la Observación 2.3.3.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, fijemos un polinomio $f(x) = P(x)^r - \mu x^{mr}$, donde $P(x) = \sum_i b_i x^i$ es un polinomio quasielíptico de grado d con respecto a $\omega \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$ y, donde $\mu \in \mathbb{Z}_p^\times$, $m \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ y $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Queremos calcular la función zeta de Igusa asociada a f a partir del método visto previamente.

Primero, ya sabemos que

$$\begin{aligned} Z(s,f) &= \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s d^n x && (3.13)\\ &= \int_{(\mathbb{Z}_p^\times)^n} |f(x)|_p^s d^n x + \sum_\tau \sum_{k \in \mathbb{N}^n \cap \Delta_\tau} \int_{\{x \in \mathbb{Z}_p^n, ord(x) = k\}} |f(x)|_p^s d^n x && (3.14)\end{aligned}$$

donde τ recorre las caras propias de $\Gamma(f)$.
Supongamos ahora que τ es una cara propia fija de $\Gamma(f)$ y $k \in \mathbb{N}^n \cap \Delta_\tau$ es también fijo. Como $x_j = p^{k_j} u_j$, con $u_j \in \mathbb{Z}_p^\times$, tenemos que

$$d^n x = p^{-\sigma(k)} d^n u \quad \text{y} \quad x^i = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} = p^{\langle k,i \rangle} u^i$$

donde $\langle k,i \rangle = m(k)$ para cada $i \in sop(f) \cap \tau$, $m(\omega) = \langle \omega, i \rangle = d$ para cada $i \in sop(P) \cap \tau$ y $\langle k,i \rangle > m(k)$ para cada $i \in sop(f) \setminus \tau$, porque $F(k) = \tau$. Se sigue que

$$f(p^{k_1} u_1, ..., p^{k_n} u_n) = p^{m(k)r} \left[P_{\tau,k}(u)^r - \mu p^r u^{mr}\right]$$

donde $P_{\tau,k} \in \mathbb{Z}_p[u_1, ..., u_n]$ (la que depende de τ, k y f, más aún, $P_{\tau,k}(u) = f_\tau(u)$ para estos τ, k).
Luego de (3.14) tenemos que

$$Z(s,f) = \int_{(\mathbb{Z}_p^\times)^n} |f(x)|_p^s d^n x + \sum_\tau \sum_{k\in\mathbb{N}^n\cap\Delta_\tau} p^{-\sigma(k)-m(k)rs} \int_{(\mathbb{Z}_p^\times)^n} |P_{\tau,k}(u)^r - \mu p^r u^{mr}|_p^s d^n u \tag{3.15}$$

donde τ recorre las caras propias de $\Gamma(f)$.
Por hipótesis, $f(x) \equiv 0 \ mod(p)$ no tiene soluciones en $(\mathbb{Z}_p^\times)^n$ (i.e., $N_{\Gamma(f)} = 0$), entonces

$$P_{\tau,k}(u)^r - \mu p^r u^{mr} \equiv 0 \ \ mod(p)$$

tampoco tiene soluciones en $(\mathbb{Z}_p^\times)^n$ (i.e., $N_\tau = 0$ para toda cara propia τ de $\Gamma(f)$). Con esto, tenemos

$$\int_{(\mathbb{Z}_p^\times)^n} |f(x)|_p^s d^n x = p^{-n}(p-1)^n \quad \text{y} \quad \int_{(\mathbb{Z}_p^\times)^n} |P_{\tau,k}(u)^r - \mu p^r u^{mr}|_p^s d^n u = p^{-n}(p-1)^n.$$

Luego, para (3.15) se tiene

$$Z(s,f) = p^{-n}(p-1)^n \left(1 + \sum_\tau \sum_{k\in\mathbb{N}^n\cap\Delta_\tau} p^{-\sigma(k)-m(k)rs}\right). \tag{3.16}$$

Vemos que ocurre con

$$S_{\Delta_\tau} = \sum_{k\in\mathbb{N}^n\cap\Delta_\tau} p^{-\sigma(k)-m(k)rs}.$$

Por los Lemas 2.3.1 y 2.3.2, sabemos que existe una partición finita de Δ_τ en conos simpliciales racionales Δ_i. Sea Δ_i el cono estrictamente positivamente generado por los vectores linealmente independientes $a_1, ..., a_l \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$. Como $k \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ tenemos que

$$\mathbb{N}^n \setminus \{0\} \cap \Delta_\tau = a_1(\mathbb{N} \setminus \{0\}) + \cdots + a_l(\mathbb{N} \setminus \{0\})$$

luego cada Δ_i es un cono simple. Si fijamos un elemento $i_\tau \in \tau$, entonces $m(k) = d = \langle i_\tau, k\rangle$ para cada $k \in \Delta_\tau$. Luego, siguiendo la misma técnica de la demostración anterior, tenemos que

$$S_{\Delta_\tau} = \sum_{i\in I} S_{\Delta_i}$$

donde I representa la descomposición de Δ_τ, entonces

$$S_{\Delta_i} \quad = \quad \sum_{k\in\mathbb{N}^n\setminus\{0\}\cap\Delta_i} p^{-\sigma(k)-m(k)rs} = \frac{\sum_{h\in J'} p^{\sigma(h)+m(h)rs}}{\prod_{j=1}^{l}\left(p^{\sigma(a_j)+m(a_j)rs} - 1\right)}$$

donde

$$J' = \mathbb{Z}^n \cap \left\{\sum_{j=1}^{l} \mu_j a_j \mid \ 0 \le \mu_j < 1, \ j = 1, ..., l\right\}.$$

Finalmente, de (3.16) se tiene que

$$Z(s,f) = p^{-n}(p-1)^n \left(1 + \sum_\tau \sum_{i\in I} \frac{\sum_{h\in J'} p^{\sigma(h)+m(h)rs}}{\prod_{j=1}^{l}\left(p^{\sigma(a_j)+m(a_j)rs} - 1\right)}\right)$$

donde τ recorre las caras propias de $\Gamma(f)$. □

3.3.2. Operador Pseudodiferencial Elípticos no-degenerado

En esta parte definiremos la nueva clase de operadores pseudodiferenciales elípticos no-degenerados con respecto a su poliedro de Newton y encontraremos la solución fundamental para tales operadores. Este resultado corresponde a una situación particular de lo planteado en el Teorema 3.2.3.

Definición 3.3.2. *Sea $f \in \mathbb{Z}_p[\xi_1, ..., \xi_n] \setminus p\mathbb{Z}_p[\xi_1, ..., \xi_n]$ un polinomio elíptico no-degenerado con respecto a su poliedro de Newton. Para $\beta > 0$, un **operador pseudodiferencial elíptico no-degenerado** será una extensión de un operador*

$$(\boldsymbol{f}(\partial, \beta)\phi)(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\left(|f(\xi)|_p^{\beta} \mathcal{F}_{x\to\xi}\phi\right)$$

para $\phi \in \mathcal{D}$.

Recordemos que la función zeta local de Igusa para un polinomio semiquasielíptico no-degenerado por su poliedro de Newton tiene la siguiente expresión:

$$Z(s,f) = p^{-n}(p-1)^n \left(1 + \sum_{\tau \text{ cara propia de } \Gamma(f)} \sum_{i\in I} \frac{\displaystyle\sum_{h\in J'} p^{\sigma(h)+m(h)rs}}{\displaystyle\prod_{j=1}^{l}\left(p^{\sigma(a_j)+m(a_j)rs} - 1\right)}\right)$$

y que la podemos reducir a

$$Z(s,f) = \frac{L_f(p^{-s})}{\displaystyle\prod_{j=1}^{l}\left(p^{\sigma(a_j)+m(a_j)rs} - 1\right)}, \quad s \in \mathbb{C}, \ Re(s) > 0,$$

donde los $j's$ dependen de τ y de i (los vectores linealmente independientes a_j, con $j = 1, ..., l$, generan esctrictamente positivamente al cono Δ_i, para algún $i \in I$, de la descomposición del cono Δ_τ asociado a la respectiva cara τ del poliedro de Newton), $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y L_f es un polinomio en la variable p^{-s} con coeficientes racionales.

Observación 3.3.1. *Los polos de la continuación meromorfa de $Z(s,f)$ son de la forma*

$$s_j = -\frac{\sigma(a_j)}{r\cdot m(a_j)} + \frac{2\pi i k}{r \cdot m(a_j)\ln p}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

para cada $j = j(\tau, i)$ como se detalló en el parrafo anterior.

Calcularemos ahora la solución fundamental para el operador pseudodiferencial elíptico no-degenerado usando la misma técnica del Teorema 3.2.1.

Teorema 3.3.2. *Sea $\boldsymbol{f}(\partial, \beta)$ un operador pseudodiferencial elíptico no-degenerado y sea E_β una solución fundamental para la ecuación $\boldsymbol{f}(\partial, \beta)u = \phi$, con $\phi \in \mathcal{D}$.*

1. *Si $\beta \neq \frac{\sigma(a_j)}{r\cdot m(a_j)}$, con $j := j(\tau, i)$, se tiene*

$$(E_\beta,\phi)=\int_{\mathbb{Z}_p^n}\frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x)-(\mathcal{F}^{-1}\phi)(0)}{|f(x)|_p^\beta}\,d^nx+(\mathcal{F}^{-1}\phi)(0)\frac{L_f(p^\beta)}{\prod_{j=1}^{l}\left(p^{\sigma(a_j)-m(a_j)r\beta}-1\right)}$$
$$+\int_{\mathbb{Q}_p^n\setminus\mathbb{Z}_p^n}\frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x)}{|f(x)|_p^\beta}\,d^nx.$$

para $\phi\in\mathcal{D}$ y L_f es un polinomio en la variable p^{-s}.

2. *Si $\beta=\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}$, para algún $j_0:=j_0(\tau_0,i_0)$ como los detallados anteriormente, se tiene*

$$(E_{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}},\phi)=$$
$$\int_{\mathbb{Z}_p^n}\frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x)-(\mathcal{F}^{-1}\phi)(0)}{|f(x)|_p^{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}}}\,d^nx+(\mathcal{F}^{-1}\phi)(0)\cdot\left\{\frac{1}{d\ln(p)}\cdot\tilde{f}'(p^{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}})+\frac{1}{2}\cdot\tilde{f}(p^{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}})\right\}$$
$$+\int_{\mathbb{Q}_p^n\setminus\mathbb{Z}_p^n}\frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x)}{|f(x)|_p^{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}}}\,d^nx.$$

para $\phi\in\mathcal{D}$, donde $\tilde{f}$ es una función holomorfa en un disco suficientemente pequeño en la variable p^{-s} y donde $\tilde{f}'$ es su derivada.

Demostración.

1. Si $\beta\neq\frac{\sigma(a_j)}{r\cdot m(a_j)}$, para todo $j:=j(\tau,i)$, tenemos que $T_\beta=|f|_p^{-\beta}$, luego $E_\beta=\mathcal{F}^{-1}T_\beta$.

2. Si $\beta=\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}$, para algún $j_0:=j_0(\tau_0,i_0)$, se sabe que T_β es el término constante de la expansión de Laurent de la continuación meromorfa de $|f|_p^s$ en $s=-\beta=-\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}$. Notamos que

$$\frac{L_f(p^{-s})}{\prod_{j=1,\ j\neq j_0}^{l}\left(p^{\sigma(a_j)+m(a_j)rs}-1\right)}\cdot\frac{1}{p^{\sigma(a_{j_0})+m(a_{j_0})rs}-1}=\frac{\tilde{f}(p^{-s})}{p^{\sigma(a_{j_0})+m(a_{j_0})rs}-1}$$
$$=\left(\tilde{f}\left(p^{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}}\right)+\tilde{f}'\left(p^{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}}\right)\left(s+\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}\right)+\mathcal{P}\left((s+\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})})^2\right)\right)\times$$
$$\left(\frac{a_{-1}}{(s+\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})})}+a_0+\mathcal{Q}\left((s+\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})})\right)\right)$$

donde $\tilde{f}$, $\mathcal{P}\left((s+\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})})^2\right)$ y $\mathcal{Q}\left((s+\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})})\right)$ son funciones holomorfas sobre un disco suficientemente pequeño centrado en $s=-\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}$ y, los coeficientes a_{-1} y a_0 son los primeros términos de la expansión de Laurent de $\frac{1}{p^{\sigma(a_{j_0})+m(a_{j_0})rs}-1}$ en $s=-\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}$. Luego, el término constante de la expansión de Laurent de $\frac{\tilde{f}(p^{-s})}{p^{\sigma(a_{j_0})+m(a_{j_0})rs}-1}$ está dado por

$$\left\{\tilde{f}'(p^{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}})\cdot a_{-1}+\tilde{f}(p^{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}})\cdot a_0\right\}.$$

Los coeficientes $a_{-1}=\frac{1}{d\ln(p)}$ y $a_0=\frac{1}{2}$ se calculan de igual forma que en el Teorema 3.2.3. Así, se tiene

$$\left(T_{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}}, \phi\right) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} \frac{(\phi(x)-\phi(0))}{|f(x)|_p^{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}}}\, d^n x + \phi(0)\cdot\left\{\frac{1}{d\ln(p)}\cdot \tilde{f}'(p^{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}}) + \frac{1}{2}\cdot \tilde{f}(p^{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}})\right\}$$
$$+ \int_{\mathbb{Q}_p^n\setminus\mathbb{Z}_p^n} \frac{\phi(x)}{|f(x)|_p^{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}}}\, d^n x$$

y $E_{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}} = \mathcal{F}^{-1} T_{\frac{\sigma(a_{j_0})}{r\cdot m(a_{j_0})}}$.

□

En [8], A. Kochubei muestra mediante otro método que si $h \in \mathbb{Q}_p[\xi_1, ..., \xi_n]$ es una forma cuadrática con $p \neq 2$ tal que $h(\xi_1, ..., \xi_n) \neq 0$ cuando $|\xi_1|_p + \cdots + |\xi_n|_p \neq 0$, se tiene que existe una solución fundamental $E_\beta \in \mathcal{D}'$ para $\boldsymbol{h}(\partial, \beta)u = \varphi$; $\varphi \in \mathcal{D}$. Las posibles formas cuadráticas que satisfacen la condición dada, se reducen a tres. Trabajaremos con una de ellas, la forma binaria $h(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 - \tau\xi_2^2$, donde $\tau \in \mathbb{Q}_p$ no es una raíz cuadrada en $\mathbb{Q}_p$ y $|\tau|_p = 1$. Consideramos el campo $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\tau})$, donde para cada $X = x + y\sqrt{\tau} \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{\tau})$, se tiene que $||X|| = |x^2 - \tau y^2|_p$ (ver Observación 1.1.2).

Corolario 3.3.1. *Sea $\boldsymbol{h}(\partial, \beta)$ el operador pseudodiferencial con símbolo h una forma binaria como se describió anteriormente. La solución fundamental para la ecuación pseudodiferencial asociada está dada por*

$$E_\beta = \begin{cases} \dfrac{1-p^{-2\beta}}{1-p^{2(\beta-1)}}||X||^{\beta-1} & para \quad \beta \neq 1 \\ \dfrac{1-p^2}{2p^2\ln(p)}\ln(||X||) & para \quad \beta = 1 \end{cases}$$

Demostración. Primero vemos que la continuación meromorfa de la función zeta de Igusa asociada a la función h es:

$$Z_h(s) = \left(\frac{(p-2)^2(p+1)}{p^2(p-1)}\right)\frac{1}{1-p^{-2-2s}}, \quad s \neq -1 \quad (|\omega| = d = 2),$$

y donde $a_0 = \frac{1}{2}$ y $a_{-1} = \frac{1}{2\ln(p)}$ (coeficientes de la serie de Laurent alrededor de $s = -1$).
Encontremos ahora la solución fundamental. Para $\beta \neq 1$, del teorema previo tenemos que

$$E_\beta = \mathcal{F}^{-1}(|h(\xi_1, \xi_2)|_p^{-\beta}) = \frac{1-p^{-2\beta}}{1-p^{2(\beta-1)}}|h|_p^{\beta-1},$$

(ver Ejemplo 1.5.11).
Para el caso $\beta = 1$, la solución fundamental está dada por:

$$(E_1, \phi) = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(X) - (\mathcal{F}^{-1}\phi)(0)}{|x^2 - \tau y^2|_p}\, d(x,y) + \int_{\mathbb{Q}_p^2\setminus\mathbb{Z}_p^2} \frac{(\mathcal{F}^{-1}\phi)(X)}{|x^2 - \tau y^2|_p}\, d(x,y) + \frac{(p-2)^2(p+1)}{2p^2(p-1)}(\mathcal{F}^{-1}\phi)(0).$$

Por el Ejemplo 1.5.7, tenemos que

$$(\mathcal{F}\ln(||X||)(\xi_1, \xi_2) = \frac{2p^2\ln(p)}{p^2-1}|\xi_1^2 - \tau\xi_2^2|_p^{-1}.$$

Escribimos

$$(||X||^{-1}, \phi) = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \frac{\phi(X) - \phi(0)}{|x^2 - \tau y^2|_p}\, d(x,y) + \int_{\mathbb{Q}_p^2\setminus\mathbb{Z}_p^2} \frac{\phi(X)}{|x^2 - \tau y^2|_p}\, d(x,y),$$

donde usando lo anterior, tenemos

$$\mathcal{F}^{-1}(||X||^{-1}) = \frac{1-p^2}{2p^2\ln(p)}\ln(||X||).$$

Como $(\mathcal{F}^{-1}\phi)(0) = (\delta, \mathcal{F}^{-1}\phi) = (\mathcal{F}^{-1}\delta, \phi) = (1, \phi)$, luego

$$E_1 = \frac{1-p^2}{2p^2\ln(p)}\ln(||X||) + \frac{(p-2)^2(p+1)}{2p^2(p-1)}.$$

Además, si E_β es solución de $\boldsymbol{h}(\partial, \beta)$, $E_\beta + c$ para algún $c \in \mathbb{Q}_p$ también es solución para $\boldsymbol{h}(\partial, \beta)$. Así, el segundo caso se completa para $c = -\frac{(p-2)^2(p+1)}{2p^2(p-1)}$. □

Observación 3.3.2. *Si un campo no-arquimedeano K es completo con respecto a su valor absoluto $|\cdot|_K$ y su campo residual finito, se dice que K es un* ***campo local no-Arquimedeano****. El anillo de los enteros de K es $R_K = \{x \in K : \ |x|_K \leq 1\}$, su único ideal maximal es $P_K = \{x \in K : \ |x|_K \leq 1\}$, su único ideal maximal es $P_K = \{x \in K : \ |x|_K < 1\} = \pi R_K$, donde π es el generador de P_K llamado parámetro de uniformización. $R_K^\times = \{x \in K : \ |x|_K = 1\}$ denota al grupo de unidades de R_K y el campo residual $R_K/P_K \cong \mathbb{F}_q$ corresponde al campo finito de q elementos, donde q es una potencia de un número primo p.*

Como observación final, debemos mencionar que toda la teoría desarrollada durante el presente trabajo es válida directamente sobre un campo local K no-Arquimedeano de característica cero. Esto es posible ya que todo campo local no-Arquimedeano de característica cero es isomorfo (como un campo topológico) a una extensión finita del campo de los número $p-$ ádicos.

Además, todo campo local no-Arquimedeano de característica positiva p es isomorfo (como un campo topológico) a el campo de las series formales de Laurent $\mathbb{F}_q((T))$ sobre un campo finito $\mathbb{F}_q$, donde q es una potencia de un número primo p. En este último caso, debido a la ausencia de un teorema de resolución de singularidades en característica positiva, la racionalidad de funciones zeta locales es un problema abierto.

Bibliografía

[1] S. Albeverio, A. Khrennikov, V.Shelkovich, *Theory of p-adic Distributions: Linear and Nonlinear Models*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[2] Z.I.Borevich, I.R.Shafarevich, Number Theory. Academic, London, 1986.

[3] J. Denef, K. Hoolnaert, *Newton Polyhedra and Igusa's Local Zeta Functions*, Journal of Number Theory 89, 31-64 (2001).

[4] P. Halmos, *Measure Theory*, Van der Nostrand Reinhold Company, 1950.

[5] J. Igusa, *An Introduction to the Theory of Local Zeta Functions*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 2000.

[6] A. Khrennikov, S. Kozyrev and W. Zúñiga-Galindo, *Ultrametric Pseudodifferential Equations and Its Applications*, Encyclopedia of Mathematics (161), Cambridge University Press, 2018.

[7] N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta Functions*, Second edition, Springer-Verlag, 1984.

[8] A. Kochubei, *Pseudo-Differential Equations and Stochastics over non-Arquimedian Fields*, Pure Appl. Math. 244 (Marcel Dekker, New York, 2001).

[9] W.H. Schikhof, *Ultrametric Calculus. An Introduction to p-adic Analysis*, Cambridge University Press, 1984.

[10] M. Taibleson, *Fourier Analysis on Local Fields*, Princeton University Press, 1975.

[11] V. Vladimirov, I. Volovich y E. Zelenov, *P-adic Analysis and Mathematical Physics*, Series on Soviet and East European Mathematics 1, World Scientific, River Edge, NJ, 1994.

[12] W.A. Zúñiga-Galindo, *Fundamental Solutions of Pseudo-differential operators over p-adic fields*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 109, 241-245, 2003.

[13] W.A. Zúñiga-Galindo, *Local zeta functions and Newton polyhedra*, Nagoya Math. J. 172, 3158, 2003.

[14] W.A. Zúñiga-Galindo, *Local Zeta Functions, Pseudo-differential Operators and Sobolev-type Spaces over non-Arquimedean Local Fields*, p-adic Numbers, Ultrametric Analysis and applications, Vol.9, No, 4, 314-335, 2017.

[15] W.A. Zúñiga-Galindo, *Pseudo-differential Equations Over non-Arquimedian Spaces*, Springer, 2016.