



Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Programa de Doctorado en Ciencias Aplicadas
con Mención en Ingeniería Matemática

**MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS Y AFINES PARA
PROBLEMAS NO-LINEALES Y DE TRANSMISIÓN EN MECÁNICA
DE MEDIOS CONTINUOS**

**(MIXED FINITE ELEMENT AND RELATED METHODS FOR NONLINEAR
AND TRANSMISSION PROBLEMS IN CONTINUUM MECHANICS)**

Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias
Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática

FILÁNDER DE LOS ÁNGELES SEQUEIRA CHAVARRÍA
CONCEPCIÓN-CHILE

2015

Profesor Guía: Gabriel N. Gatica Pérez
CI²MA y Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción, Chile

Cotutor: Johnny Guzmán
Division of Applied Mathematics
Brown University, USA

Esta disertación aborda diversos aspectos matemáticos y numéricos acerca de nuevos métodos de elementos finitos mixtos y esquemas de Galerkin discontinuo hibridizado, basados en la introducción de variables auxiliares conocidas como pseudo-esfuerzos. Estas con el fin de analizar problemas no lineales y de transmisión, que se rigen por sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, los cuales surgen en mecánica de medios continuos.

En primer lugar, se presenta el análisis de error *a priori* y *a posteriori* de un método de elementos finitos mixtos no estándar para el problema de elasticidad lineal con condiciones de contorno de Dirichlet no homogéneas, el cual no requiere espacios tensoriales simétricos en la discretización de elementos finitos. Además, cantidades de interés físico como el esfuerzo, el tensor de pequeñas deformaciones y la rotación, son calculadas a través de simples post-procesamientos en términos del pseudo-esfuerzo. Más aún, se introduce una segunda técnica de post-procesamiento para el esfuerzo, la cual proporciona una aproximación con convergencia óptima para esta incógnita, con respecto a la norma $\mathbb{H}(\mathbf{div})$ por tramos. Adicionalmente, se provee de un estimador de error *a posteriori* residual para este problema, el cual es confiable y eficiente.

A continuación, se introduce y se analiza un método de elementos mixtos aumentado para el modelo no lineal de Brinkman en dos dimensiones, referente a un flujo de medios porosos con condiciones de contorno mixtas. Se emplea una formulación dual-mixta en la cual las incógnitas principales corresponden al gradiente de la velocidad y al pseudo-esfuerzo. En este sentido, la velocidad y presión original son fácilmente recuperadas a través de simples post-procesamientos. Aquí se aplican resultados conocidos de análisis funcional no lineal para probar que los esquemas continuo y discreto correspondiente están bien puestos. Adicionalmente, se deriva un estimador de error *a posteriori* residual para este sistema no lineal, y se verifica que el mismo es confiable y eficiente.

Por otro lado, se aplica el método de Galerkin discontinuo hibridizado (HDG, por sus siglas en inglés) para resolver numéricamente una clase de modelos de Stokes no lineales que surgen en fluidos cuasi-Newtonianos. Se hace uso de la condición de incompresibilidad para eliminar la presión, y se introduce el gradiente de la velocidad como una incógnita auxiliar. Luego, se enriquece la formulación HDG con dos ecuaciones aumentadas adecuadas, las cuales permiten aplicar una versión no lineal de la teoría de Babuška-Brezzi y el teorema clásico del punto fijo de Banach, para probar que el esquema discreto está bien puesto. Más aún, se derivan las estimaciones de error *a priori* correspondientes. Adicionalmente, se considera un segundo enfoque para este problema, en la cual se mantienen las características principales de la formulación aumentada previamente mencionada, pero introduciendo ahora ligeras modificaciones en los subespacios de elementos finitos para el pseudo-esfuerzo y la velocidad, con el fin de mejorar significativamente nuestros análisis y resultados anteriores. Más precisamente, por un lado omitimos la utilización de cualquier argumento de punto fijo (y los parámetros relacionados) para establecer que el esquema discreto está bien puesto, y por el otro lado, ahora demostramos que las aproximaciones

convergen de manera óptima en todas las incógnitas. Además, se deriva un estimador de error *a posteriori* residual, confiable y eficiente, para este problema.

Posteriormente, se presenta un método HDG para la resolución numérica del acoplamiento de un fluido en un medio poroso. El modelo acoplado está determinado por las ecuaciones de Stokes y Darcy, respectivamente, y las condiciones de transmisión correspondientes están dadas por la conservación de masa, el balance de fuerzas normales y la ley de Beavers-Joseph-Saffman. Se considera una formulación completamente mixta, en la cual las incógnitas principales corresponden al esfuerzo, la vorticidad, la velocidad y la traza de la velocidad, todas ellas en el fluido; junto con la velocidad, la presión y la traza de la presión en el medio poroso. Además, se enriquece el subespacio de elementos finitos del esfuerzo, con el fin de obtener aproximaciones con convergencia óptima en todas las incógnitas, junto con superconvergencias para las variables de las trazas. Para hacer esto, de manera similar a artículos previos relacionados con el desarrollo de estimaciones de error *a priori* para métodos HDG, se utiliza un análisis de error basado en proyecciones, el cual simplifica el estudio correspondiente.

Finalmente, se cierra esta tesis con el desarrollo de métodos conformes en $H(\text{div})$ y de Galerkin discontinuos (DG, por sus siglas en inglés), para la ecuación incompresible de Euler en dos y tres dimensiones. Más precisamente, se consideran formulaciones de velocidad-presión que tienen como objetivo principal probar la estabilidad en L^2 de cada esquema, junto con las propiedades conservativas locales en el caso de los métodos DG. Una vez desarrollados los métodos conformes en $H(\text{div})$, esto nos guía en el diseño de aproximaciones DG usando un post-procesamiento introducido en artículos previos. Adicionalmente, se muestran estimaciones de error *a priori* para ambos métodos: parcialmente discreto y completamente discreto, usando el método de Euler regresivo. En todos los casos, se consideran flujos centrales y *upwind*.

Para todas las situaciones descritas previamente, se reportan varios experimentos numéricos, los cuales ilustran el correcto rendimiento de los métodos, y confirman además los resultados teóricos.