



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

**A BANACH SPACES-BASED ANALYSIS
OF A NEW FULLY-MIXED
FINITE ELEMENT METHOD FOR THE
BOUSSINESQ PROBLEM**

POR

Sebastián Alfonso Moraga Scheuermann

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al título profesional de
Ingeniero Civil Matemático

Profesores Guía: Gabriel N. Gatica, Eligio Colmenares

Marzo de 2019
Concepción, Chile

Resumen

En este trabajo proponemos y analizamos, utilizando principalmente herramientas y resultados abstractos sobre espacios de Banach en lugar de aquellos sobre Hilbert, un nuevo método de elementos finitos completamente mixto para el problema estacionario de Boussinesq con viscosidad dependiente de la temperatura. Más precisamente, siguiendo una idea que ya ha sido aplicada a las ecuaciones de Navier-Stokes y a las ecuaciones del fluido solamente de nuestro modelo de interés, incorporamos primero el gradiente de la velocidad y el tensor de Bernoulli asociado como incógnitas auxiliares del fluido. Adicionalmente, y de manera diferente a lo hecho en trabajos anteriores en los cuales la formulación primal o la mixta dual clásica es utilizada para la ecuación del calor, consideramos aquí un análogo del enfoque para el fluido, el cual consiste en introducir como variables adicionales el gradiente de temperatura y una versión vectorial del tensor de Bernoulli. La formulación mixta resultante, la cual involucra las cuatro incógnitas ya mencionadas junto con las variables originales dadas por la velocidad y la temperatura del fluido, es reformulada luego como una ecuación de punto fijo. Después, utilizamos los conocidos teoremas de Banach y Brower, combinados con la aplicación de la teoría de Babuška-Brezzi a cada ecuación independiente, para analizar la solubilidad de los esquemas continuos y discretos. En particular, los espacios de Raviart-Thomas de orden $k \geq n - 1$ para el tensor de Bernoulli y su versión vectorial para la ecuación del calor, y polinomios a trozos de grado $\leq k$ para la velocidad, la temperatura y ambos gradientes, constituyen elecciones factibles. Finalmente, obtenemos estimaciones óptimas de error a priori y presentamos varios resultados numéricos que ilustran el desempeño del esquema completamente mixto y que confirman las razones de convergencia teóricas.