



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
MAGÍSTER EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

---

# SKYRMIONES GRAVITANTES VESTIDOS CON UNA NUBE DE MESONES RHO

Tesis para optar al grado de  
Magíster en Ciencias con mención en Física

por

Matías Ignacio Torres Sandoval

---

Director de Tesis : Dr. Fabrizio Canfora Tartaglia

Comisión : Dr. Julio Oliva Zapata  
Dr. Alex Giacomini Baumhoegger

CONCEPCIÓN • CHILE  
Marzo 2020



Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

*El desierto avanza; ¡ay del que en su alma alberga desiertos!.*

FRIEDRICH W. NIETZSCHE (1844-1900)



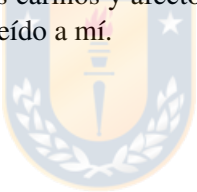
# AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a los profesores Fabrizio Canfora y Julio Oliva, quienes me ayudaron y guiaron durante mis estudios de pregrado y postgrado. Gracias por su compromiso, apoyo y consejos.

Agradezco también a los profesores Juan Crisóstomo, Guillermo Rubilar y Fernando Izaurieta, por enseñarme diversos aspectos de la física teórica. También a todos los funcionarios del departamento de Física de la Universidad de Concepción por tener siempre buena disposición, en particular a Soledad Daroch.

Agradezco también a todos mis amigos y futuros colegas de la facultad, todo este proceso no hubiese sido tan llevadero sin su compañía. En particular quiero dar gracias a mis compañeros de generación, con quienes pase varias sesiones de estudio y de compartir.

Esta tesis está dedicada a mi familia, ellos siempre han sido mi pilar de apoyo en los momentos difíciles, gracias por sus cariños y afectos. Quiero agradecer en especial a mi madre, quien desde siempre ha creído a mí.



# Tabla de contenido

<b>Índice de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Solitones topológicos</b>	<b>3</b>
2.1. Carga topológica . . . . .	3
2.2. Teorema de Derrick . . . . .	3
2.3. Kink . . . . .	4
2.4. Modelo de Higgs abeliano . . . . .	5
<b>3. Modelo de Skyrme</b>	<b>8</b>
3.1. Interacción fuerte . . . . .	8
3.2. Acción . . . . .	9
3.3. Ecuaciones de campo . . . . .	10
3.4. Energía y bound BPS . . . . .	10
3.5. Ansatz . . . . .	11
3.5.1. Ansatz del erizo, $B=1$ . . . . .	12
3.6. Modelo Einstein-Skyrme . . . . .	13
3.6.1. Ansatz del erizo generalizado . . . . .	13
<b>4. Skyrme-mesones Rho</b>	<b>15</b>
4.1. Acción y ecuaciones del movimiento . . . . .	15
4.2. Ansatz . . . . .	17
4.3. Soluciones analíticas . . . . .	18
4.3.1. Condición de energía dominante . . . . .	20
4.3.2. El límite massless . . . . .	20
4.3.3. Soluciones numéricas . . . . .	21
<b>5. Conclusiones</b>	<b>23</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>24</b>

# Índice de figuras

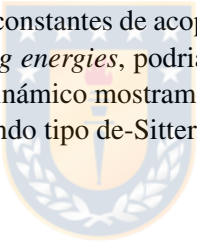
2.1. La solución $\phi_{\text{Kink}}$ y su respectiva densidad de energía $\rho_{\text{Kink}}$ . Los parámetros son fijados a $\lambda = 1$ , $m = 1$ y $a = 0$ . La constante $a$ es interpretada como la posición del Kink. . . . .	5
3.1. Perfil de $f(r)$ con las condiciones de borde $f(0) = \pi$ y $f(\infty) = 0$ , que corresponde a un barión. . . . .	13
4.1. Datos experimentales sobre la masa por nucleón, junto con los datos teóricos. La masa está normalizada por la masa del protón. Fuente [28] .	16
4.2. Región de existencia y realidad de las raíces de $P(\lambda)$ que llevan a un factor de escala positivo, cuando el conjunto de parámetros se fija según (4.24) en el espacio de parámetros $c_3$ y $c_4$ , para cada una de las 4 soluciones $\lambda_1$ , $\lambda_2$ , $\lambda_3$ y $\lambda_4$ (azul, naranja, verde y rojo, respectivamente). El punto azul corresponde a $(c_3, c_4) = (0,153, 0,05)$ , reportado en [28]. Por ende el Skyrmion gravitante [34] sobrevive en una vecindad de solo una de las posibles soluciones (verde) con las constantes fijadas según [28]. Esto significa que la inclusión de los mesones Rho puede tener efectos dramáticos sobre los Skyrmiones gravitantes. . . . .	19
4.3. En las zonas claras existen soluciones reales de $P(\lambda)$ que llevan a un factor de escala positivo, mientras que en las más opacas, se cumple la condición de energía dominante. Nuevamente la solución donde se cumplen estas condiciones es la verde. Las constantes son fijadas según [28]. . . . .	20
4.4. Perfil del merón $\lambda(t)$ y comportamiento asintótico del factor de escala $A(t)$ , hemos fijado $\Lambda = 1$ y las constantes según (4.24). . . . .	21
4.5. Comportamiento numérico de $\varepsilon = T^t_t$ y $\gamma = \varepsilon/T^\phi_\phi$ . Las componentes vienen dadas por las ecuaciones (4.15) y (4.17), hemos evaluado las constantes de acoplamiento según 4.24 y utilizado las soluciones numéricas de $\lambda(t)$ y $A(t)$ según (4.24). . . . .	22
4.6. Comportamiento numérico de la constante cosmológica efectiva $\Lambda_{\text{eff}}$ . Se aprecia claramente que no varía demasiado, con respecto a su original ( $\Lambda = 1$ ). Esto ocurre debido a que el perfil mesónico $\lambda(t)$ decae rápidamente, mientras que el factor de escala $A(t)$ crece exponencialmente. . .	22

1. Región de existencia y realidad de las raíces de  $P(\lambda)$  que llevan a un factor de escala positivo para el conjunto de parámetros (25) y diferentes valores de  $c_3$  and  $c_4$ , y para cada rama  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  (azul, naranja, verde y rojo respectivamente). El punto azul corresponde a  $(c_3, c_4) = (0,153, 0,05)$  reportado en [29]. . . . . 33



# Resumen

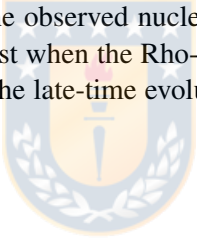
Se construyen soluciones gravitantes analíticas y numéricas del sistema Einstein-Skyrme-mesones Rho con grupo de simetría  $SU(2)$ , con carga bariónica igual a uno. El espacio tiempo es descrito por una métrica Friedman-Lemaître-Robertson-Walker cerrada, junto con el ansatz del erizo generalizado para el Skymion, con uno tipo meron para el campo de los mesones Rho. Bajo esta elección el sistema de 21 ecuaciones acopladas, se reduce a solo 2 ecuaciones acopladas de segundo orden para el perfil del meron  $\lambda(t)$  y para el factor de escala  $a(t)$  de la métrica, sin destruir la carga topológica. En el caso estático, la métrica se reduce a universo de Einstein, mientras que las ecuaciones pueden ser integradas analíticamente, llevando a una restricción de las constantes de acoplamiento de la teoría, lo cual puede ser relevante para los físicos experimentales. Para el caso general es necesario integrar las ecuaciones numericamente. Esto permite determinar los efectos de los mesones Rho sobre el Skymion gravitante. Por ejemplo, mostramos que los valores de las constantes de acoplamiento, que se usan en la literatura para reproducir los *nuclei binding energies*, podrían afectar la existencia del Skymion gravitante estático. Para el caso dinámico mostramos que para grandes tiempos el factor de escala lleva a un comportamiento tipo de-Sitter.





# Abstract

We construct gravitating, analytical and numerical solutions of the Einstein-Skyrme-Rho-mesons system with internal group  $SU(2)$  with unit baryonic charge. The space-time is described by a closed Friedman-Lemaître-Robertson-Walker metric. Remarkably, by combining the Generalized Hedgehog Ansatz for the Skyrme with a meron-type ansatz for the Rho-mesons, we consistently reduce the fifteen coupled field equations to just two coupled ordinary differential equations for the Rho-mesons profile  $\lambda(t)$  and for the scale factor  $a(t)$  of the metric keeping alive the topological charge. In the static case, the metric reduces to the Einstein Universe and the equations can be integrated analytically leading to a restriction of the couplings of the theory which can be important for experimental physicists. Generically, the aforementioned equations must be integrated numerically. This allows to determine the effects of the Rho-mesons on the gravitating Skyrme. For instance we show that for the values of the couplings which have been used in the literature to reproduce the observed nuclei binding energies, the static gravitating Skyrme could cease to exist when the Rho-mesons have a non-trivial profile. For the dynamic case we show that the late-time evolution of the scale factor leads to a de-Sitter-like behavior.



# Capítulo 1

## Introducción

En 1834, en la ciudad de Glasgow, Escocia, el ingeniero J. Scott Rusell observada la ola de proa producida por un bote que viajaba a lo largo de un angosto canal de la ciudad, cuando repentinamente el bote se detuvo producto de un choque con un objeto submarino, sin embargo, contra la intuición de Rusell, la ola de proa continuo viajando a través del canal por kilómetros, sin cambiar su velocidad y forma. Este hermoso fenómeno fue llamado ola de traslación y pertenece a una familia de objetos llamados solitones, ellos se caracterizan por su: estabilidad, localización espacial y propiedades no-dispersivas.

En este trabajo estaremos enfocados en caso especial de solitones, los llamados solitones topológicos, aquellos que deben su estabilidad debido a ligaduras topológicas. Para hacernos una idea podemos imaginar una cuerda, donde el estado de mínima energía correspondería a una cuerda sin nudos y una configuración con un soliton correspondería a la cuerda con un nudo, claramente una cuerda con un nudo no puede ser deformada a una que si lo tenga, si los extremos de la cuerda están fijos. En este sentido los solitones topológicos se comportan como partículas estables, donde las partículas corresponden a nudos enrollados en algún espacio abstracto.

Por lo tanto el estudio de solitones topológicos clásicos permite el estudio de física de partículas o procesos de scattering sin entrar en teorías más elaboradas como teorías cuánticas de campos, y por lo tanto son en principio más simples de tratar (no hay necesidad de cuantizar, renormalizar, etc). Aún así encontrar solitones topológicos no es trabajo fácil, tener que resolver EDP no-lineales y a la vez mantener una carga topológica no nula se vuelve una tarea casi imposible, así que a menudo no queda otra opción que recurrir a métodos numéricos. Frente a esto se han desarrollado técnicas que permiten simplificar el problema, como el bound Bogomol'nyi–Prasad–Sommerfield [11], que permite reducir el orden de la EDP cuando la energía del sistema se satura al llamado bound BPS.

Sin embargo existen teorías para las cuales este bound no puede ser saturado, por ende encontrar soluciones que describan solitones se vuelve bastante complicado. El modelo de Skyrme [2] es uno de ellos y por años ha sido imposible construir soluciones analíticas con carga topológica no-trivial.

El modelo de Skyrme es una teoría de campo efectiva para la interacción fuerte, tiene como campo fundamental un elemento del grupo  $SU(2)$  cuyas excitaciones alrededor del vacío describen piones, mientras que los bariones de la teoría surgen como solitones topológicos, es decir, excitaciones colectivas del campo piónico. Las aplicaciones de esta modelo van desde la física nuclear a la astrofísica, materiales multi-ferromagnéticos, líquidos nemáticos entre otros (para mayor información ver [1] y [12]). También las predicciones de la teoría están en acuerdo con los valores experimentales, (ver [3], [17],

[8], [9], [12]). 't Hooft [5] y Witten [4] probaron que esta teoría puede ser obtenida como un límite de bajas energía de la cromodinámica cuántica, la cual es la teoría cuántica de campos para la interacción fuerte, cuando el número de colores es grande.

Las primera solución analítica con carga topológica no-trivial en la cual se pueden apreciar los efectos del término de Skyrme junto con la carga topológica fue encontrada en [20], usando el llamado ansatz del erizo generalizado en un espacio-tiempo estático. Los autores solo notaron que permitía satisfacer idénticamente las ecuaciones de Skyrme, pero no estudiaron la reacción del espacio-tiempo frente a este campo de materia. El acoplamiento minimal del modelo de Skyrme con Relatividad General (RG) ha sido ampliamente estudiado no solo debido a las características gravitacionales que tiene QCD a bajas energía, sino también a la importancia intrínseca de RG [13]. Por ejemplo, los primeros agujeros negros con pelo fueron encontrados numéricamente en [16], [18], [19], proporcionando así el primer contraejemplo de la conocida conjetura de no-pelo. El efecto del término de Skyrme en configuraciones cosmológicas también ha sido ampliamente explorado en las referencias [21], [22], [23], [24].

Pese a todo esto, el modelo de Skyrme predice nucleí binding energies más grande que los datos medidos experimentalmente. Este problema puede ser resuelto si se incluyen la interacción con el siguiente grupo de mesones de isospín 1 llamados mesones Rho (ver [26], [27], [28] y [29]). Este modelo solo ha sido estudiado en espacio plano, en este trabajo acoplaremos este modelo a RG y estudiaremos sus consecuencias.

La organización de esta tesis será:

En el capítulo 1 esta dedicado a los solitones topológicos y algunos conceptos importantes como la carga topológica, el teorema de Derrick y el bound BPS. También mostraremos las teorías más sencillas que aceptan solitones topológicos como: el Kink y el modelo de Higgs abeliano, en el cual mostraremos sus respectivas cargas topológicas y encontraremos soluciones con energía finita.

En el capítulo 2, nos centraremos el modelo de Skyrme y sus extensiones en RG, calcularemos sus ecuaciones de movimiento, su carga topológica y mostraremos algunos ansätze que serán relevantes al momento de construir las soluciones de esta tesis. También haremos incapie en la relación de esta teoría con la cromodinámica cuántica en el regimen de bajas energías.

Finalmente en el capítulo 3 estudiaremos el modelo Einstein-Skyrme-mesones Rho, calcularemos sus ecuaciones de movimiento, analizaremos los efectos que tienen los mesones Rho sobre Skyrmons gravitantes estáticos. Terminaremos con la conclusión y comentarios finales.

En esta tesis usaremos las siguientes convenciones: los índices griegos corren sobre las coordenadas espacio-tiempo cuya asignatura es  $(-+++)$ . Consideraremos además unidades naturales  $\hbar = c = \mu_0 = 1$ .

## Capítulo 2

# Solitones topológicos

Los solitones topológicos son soluciones a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP) no-lineales, que poseen una energía finita y suavemente localizada. Ellos no pueden decaer al vacío trivial de la teoría debido a la existencia de una carga conservada llamada carga topológica, que clasifica y determina el número de solitones que posee una configuración, dado que se trata de una carga conservada, dos configuraciones que posean cargas topológicas distintas no podrán deformarse continuamente una en la otra. Los solitones topológicos son encontrados tanto en física teórica como experimental y sus aplicaciones van desde la física de partículas a la cosmología, pasando a través de la materia condensada y la física nuclear [1]. Algunos de ellos son: vórtices en superconductores [6], monopolos e instantones en teorías de Yang-Mills [7].

### 2.1. Carga topológica

Las cargas conservadas juegan un papel muy importante tanto en física teórica como aplicada, en algunos casos especiales nos permiten integrar la dinámica del sistema completamente o al menos simplificar el sistema de ecuaciones de interés. Por otro lado, leyes de conservación como la carga eléctrica, isospín, número leptónico, etc, permiten restringir o incluso predecir los posibles procesos de desintegración en física de partículas, este último hecho puede ser considerado como uno de los logros más importantes de la física teórica.

Gracias al teorema de Noether tenemos un método eficiente para construir cargas conservadas a partir de una simetría continua de nuestra teoría, sin embargo estas no son las únicas cargas que puede tener una teoría. Existen otras llamadas cargas topológicas las cuales son cargas conservadas que no están asociadas a simetrías continuas y que se conservan sin importar si se cumplen las ecuaciones de movimiento.

En la mayoría de los casos las cargas topológicas corresponden a invariantes topológicos, cantidades que dependen solamente de las condiciones de borde y que por ende no pueden cambiar bajo transformaciones continuas.

### 2.2. Teorema de Derrick

Existe un teorema importante acerca de la no-existencia de solitones en teorías sobre espacio plano. En [10] Derrick notó que para algunas teorías, el funcional de energía para configuraciones estáticas no posee mínimos bajo reescalamiento espacial, a excepción

del vacío.

El teorema establece que para  $D > 1$  dimensiones espaciales, no existe, soluciones con energía finita para las ecuaciones de Euler-Lagrange de teorías de la forma  $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - U(\phi)$ .

En el Apéndice A 5 haremos una demostración de este teorema. Las formas de evadirlo son claras: trabajar en una dimensión espacial, considerar configuraciones dependientes del tiempo, o bien incluir términos con derivadas superiores en el lagrangiano. Esta última opción lleva al modelo de Skyrme.

### 2.3. Kink

Para ilustrar los conceptos previamente mencionados, usaremos el modelo de juguete más simple que posee solitones topológicos en  $1 + 1$  dimensiones, el Kink. Su densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - U(\phi), \quad (2.1)$$

donde  $\phi$  es un campo escalar real y  $U(\phi)$  es un potencial no negativo, que al menos posee dos mínimos (vacíos), tales que  $U(\phi^{\min}) = 0$ .

Las ecuaciones de Euler-Lagrange de (2.1) corresponde a

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi - \frac{dU}{d\phi} = 0, \quad (2.2)$$

mientras que la energía de  $\phi$  corresponde a

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}\phi^2 + U(\phi) \right). \quad (2.3)$$

Los Kinks son soluciones de las ecuaciones de campo con energía finita, que no pueden ser deformadas continuamente al vacío. Con tal que se cumplan estas propiedades,  $\phi$  debe aproximarse a una constante a medida que  $x$  tiende a infinito, donde esta constante corresponde a los ceros del potencial. Pero necesariamente el Kink debe aproximarse a diferentes constantes en  $x = \pm\infty$ , o de otra forma puede ser deformado continuamente al vacío. El potencial de la teoría es

$$U(\phi) = \lambda(m^2 - \phi^2)^2. \quad (2.4)$$

donde  $\lambda$  y  $m$  son reales. Aquí tenemos 2 mínimos  $\phi = \pm m$ , por lo tanto el Kink será una solución que interpole los mínimos  $m$  y  $-m$ . La carga topológica de esta teoría es dada por

$$N = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi' dx = \frac{\phi(+\infty) - \phi(-\infty)}{2m}, \quad (2.5)$$

que corresponde a un término de borde. Entonces  $N = \pm 1$  si  $\phi(\pm\infty) = \pm m$ , la solución con  $N = 1$  es llamada Kink mientras que la con  $N = -1$  corresponde a Antikink.

El bound BPS puede ser encontrado de la siguiente manera. Consideremos configuraciones estáticas, si reemplazamos (2.4) en (2.3) obtenemos

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{2}\phi'^2 + \lambda(m^2 - \phi^2)^2 \right), \quad (2.6)$$

completando un cuadrado dentro de la integral, el funcional de energía puede ser reescrito como

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \phi' \pm \sqrt{\lambda} (m^2 - \phi^2) \right)^2 \mp \sqrt{2\lambda} (m^2 - \phi^2) \phi' \right), \quad (2.7)$$

luego encontramos encontramos que la energía de campo estático  $\phi$  es acotado por

$$E[\phi] \geq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sqrt{2\lambda} (m^2 - \phi^2) \phi' \right| = \left| \int_{\phi(-\infty)=-m}^{\phi(+\infty)=m} d\phi \sqrt{2\lambda} (m^2 - \phi^2) \right|. \quad (2.8)$$

Evaluando esta integral encontramos el bound BPS

$$E[\phi] \geq \frac{4}{3} m^3 \sqrt{2\lambda} |N|. \quad (2.9)$$

Es importante notar que cuando se alcanza la igualdad, la masa del Kink, es una función no analítica en la constante de acoplamiento  $\lambda$ , una característica muy común en los solitones, además de esto el sistema de ecuaciones se reduce a uno de primer orden

$$\phi' = \pm \sqrt{2\lambda} (m^2 - \phi^2) \quad (2.10)$$

cuya solución es

$$\phi_{\text{Kink}}(x) = m \tanh(\sqrt{2\lambda} mx - a), \quad (2.11)$$

donde  $a$  es una constante de integración. La respectiva densidad de energía del Kink viene dada por

$$\rho_{\text{Kink}}(x) = 2m^4 \lambda \operatorname{sech}^2(\sqrt{2\lambda} mx - a). \quad (2.12)$$

Los gráficos de estas cantidades son mostrados en 2.1

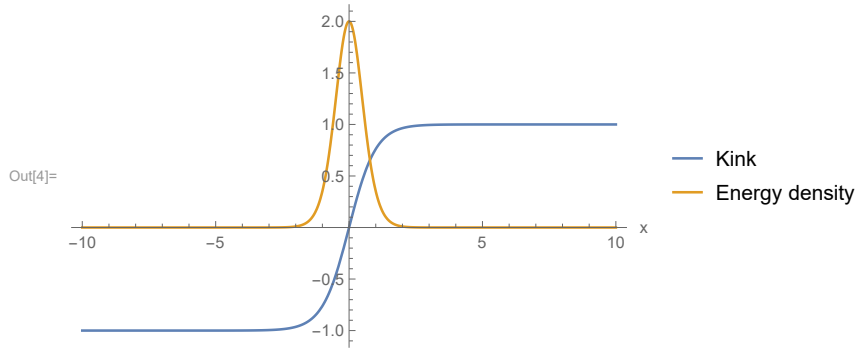


Figura 2.1: La solución  $\phi_{\text{Kink}}$  y su respectiva densidad de energía  $\rho_{\text{Kink}}$ . Los parámetros son fijados a  $\lambda = 1$ ,  $m = 1$  y  $a = 0$ . La constante  $a$  es interpretada como la posición del Kink.

## 2.4. Modelo de Higgs abeliano

Un ejemplo más sofisticado, es el modelo de Higgs abeliano o modelo de Ginzburg-Landau, que permite estudiar con precisión fenómenos como la superconductividad, vórtices, o bien proporciona un modelo de juguete para el mecanismo de Higgs.

El modelo consiste de un campo escalar complejo autointeractuante acoplado minimalmente a un campo de gauge con simetría interna  $U(1)$  (el campo electromagnético). Estudiaremos este modelo en  $2+1$  dimensiones. El lagrangiano de la teoría corresponde a

$$\mathcal{L} = -(D_\mu \phi)(D^\mu \phi)^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\phi), \quad (2.13)$$

donde  $\phi$  es el campo escalar complejo (de carga eléctrica  $g$ ), el cual en el contexto de superconductividad corresponde a una pseudo función de onda de los pares de Cooper,  $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$  es la derivada covariante y  $V(\phi)$  es el potencial de Higgs dado por

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - a^2)^2 \quad (2.14)$$

donde  $\lambda$  y  $a$  son números reales y positivos. La variación con respecto al campo de materia lleva a la ecuación

$$D^\mu D_\mu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 \quad (2.15)$$

mientras que la variación con respecto al campo de gauge lleva a

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad j_\nu = ig(\phi^* \partial_\nu \phi - \phi \partial_\nu \phi^*) - 2g^2 |\phi|^2 A_\nu \quad (2.16)$$

Debido a la simetría interna, tanto los campos de materia como de gauge, poseen redundancias. Bajo la transformación de gauge los campos cambian como

$$\phi \rightarrow e^{ig\alpha(x)} \phi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha \quad (2.17)$$

Para calcular la densidad hamiltoniana, debemos fijar el gauge tal que  $A_0 = 0$ , este es llamado gauge de Weyl. Los respectivos momenta conjugados son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_i)} = E^i, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \pi. \quad (2.18)$$

A través de una transformación de Legendre podemos calcular la densidad hamiltoniana de la teoría

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + \pi^* \pi + \delta_{ij} (D^i \phi)^* D^j \phi + V(\phi). \quad (2.19)$$

Por lo tanto la configuración de mínima energía corresponde a una donde tanto los campos eléctrico como magnético se anulen

$$E^i = 0, \quad B^i = 0, \quad (2.20)$$

además que el campo de materia sea estático  $\pi = 0$ . El campo de Higgs que minimiza la energía corresponde a

$$\phi(x) = ae^{i\beta}. \quad (2.21)$$

Podemos ver que estamos en presencia de degeneración, nuestro vacío no es único, y está parametrizado por un parámetro continuo  $\beta$  que pertenece a  $S^1$ , ya que los puntos  $\beta$  y  $\beta + 2n\pi$  están indistinguibles.

Con tal de obtener configuraciones que posean energía finita, los términos de (2.19) deben tender a cero en infinito, por tanto en  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$

$$\phi \rightarrow ae^{i\theta(\vec{x})}, \quad (2.22)$$

$$B^i \rightarrow 0, \quad (2.23)$$

$$D_i\phi(x) = (\partial_i - igA_i)\phi(\vec{x}) \rightarrow 0. \quad (2.24)$$

De acuerdo a la última ecuación, en infinito, la fase del campo de materia debe estar relacionado con el campo de gauge, esto es

$$A_i(x) = \frac{1}{ie} \partial_i \ln \phi(\vec{x}) = \frac{1}{e} \partial_i \theta(\vec{x}), \quad (2.25)$$

por lo tanto en infinito el potencial vector es puro gauge. Si calculamos el flujo magnético a lo largo de todo el espacio encontramos que

$$\Phi_B = \int_S d^2x B = \oint_C d\vec{l} \cdot \vec{A} = \frac{1}{e} \oint_C d\vec{l} \cdot \nabla \theta = \frac{2\pi n}{e} \quad (2.26)$$

Por tanto el flujo magnético está cuantizado. Es interesante notar que esta propiedad es netamente topológica y no surge debido a la simetría de gauge. Para campos estáticos y campo eléctrico nulo, podemos escribir la energía del sistema como

$$E = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + |(\nabla - ig\vec{A})\phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - a^2)^2 \right] \quad (2.27)$$

si reescalamos las coordenadas y los campos por

$$x \rightarrow \frac{1}{ea} x, \quad \vec{A} \rightarrow \frac{1}{a} \vec{A}, \quad \phi \rightarrow \frac{1}{a} \phi, \quad \beta = \frac{\lambda}{2e^2}, \quad (2.28)$$

encontramos que la densidad de energía es

$$\frac{E}{a^2} = \int d^2x \left[ |(\nabla - i\vec{A})\phi|^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + \frac{\beta}{2} (\phi\phi^* - 1)^2 \right]. \quad (2.29)$$

Completando cuadrado dentro de la integral, esta expresión puede ser reescrita como

$$\frac{E}{a^2} = \int d^2x \left[ |[D_1 \pm iD_2]\phi|^2 + \frac{1}{2} (B \pm (\phi\phi^* - 1))^2 \pm B + \frac{(\beta - 1)}{2} (|\phi|^2 - 1)^2 \right], \quad (2.30)$$

para el punto crítico  $\beta = 1$  podemos encontrar el bound BPS de la teoría

$$E \geq 2\pi|n|. \quad (2.31)$$

Cuando el bound es saturado, los campos satisfacen las ecuaciones de primer orden

$$[(\partial_x - iA_x) \pm i(\partial_y - iA_y)]\phi = 0, \quad B = \pm(|\phi|^2 - 1). \quad (2.32)$$



## Capítulo 3

# Modelo de Skyrme

El modelo de Skyrme fue introducido por Tony Skyrme en [2] como una teoría no-lineal para la dinámica piones, que posee la simetría de isospín, que corresponde a la simetría de la física nuclear donde los piones son indistinguibles entre sí (en ausencia de electromagnetismo). Es una modificación de modelo sigma no-lineal, el cual describe la interacción entre piones en un régimen de bajas energías, sin embargo en espacio plano, no admite la existencia de solitones topológicos estáticos [10]. Para solucionar esto Skyrme añadió el término covariante más simple que mantiene las ecuaciones de movimiento de segundo orden, evadiendo así el teorema de Derrick. Este término permite la existencia de solitones topológicos llamados Skyrmites, los cuales son objetos extendidos estables que representan grados de libertad fermiónicos <sup>1</sup>.

Las principales motivaciones que tuvo Skyrme para formular este modelo fueron [14]: Unificación, poder describir tanto bosones como fermiones desde la misma acción bosónica, donde los piones nacen excitaciones como fundamentales del vacío mientras que los bariones surgen como estados coherentes de piones. Evitar el uso de variables de Grassmann para describir fermiones, pues Skyrme se sentía incómodo con la idea de usar conceptos que no tuvieran análogo clásico. Finalmente motivado por las ideas del físico Lord Kelvin quien propuso que los átomos eran cuerdas, y que diferentes tipos de nudos llevaban a diferentes elementos atómicos. él introduce la carga topológica (identificada con el número bariónico [4]) cuyo origen reside en propiedades estructurales, más que en un principio de simetría.

Por lo tanto, el modelo de Skyrme es una teoría topológica de los nucleones en un régimen de bajas energías, sin embargo las propiedades de la interacción nucleón-nucleón pueden ser derivadas desde principios más profundos.

### 3.1. Interacción fuerte

La interacción fuerte es una de las 4 fuerzas fundamentales y como su nombre lo indica, dentro de ellas es la más fuerte. Es la interacción encargada de confinar quarks y gluones en protones y neutrones, y a su vez estos últimos dentro del núcleo atómico, por ende el estudio de esta interacción es de vital importancia para sentar los fundamentos de la mayor parte de la materia que conocemos. Las partículas que están hechas de quarks y gluones son llamadas hadrones, dentro de los hadrones podemos encontrar dos conjuntos de partículas, los bariones, los cuales están formados por tres quarks y los mesones que están formados por dos.

---

<sup>1</sup>El comportamiento fermiónico surge cuando se cuantiza nivel semiclásico el soliton.

La primera teoría para describir esta interacción fue propuesta por Yukawa. Para entender la estabilidad del núcleo atómico, él construyó un modelo donde los nucleones (protones y neutrones) son objetos fundamentales, y en analogía con electromagnetismo, interactúan a través del intercambio de partículas, pero con la diferencia que el mediador llamado pion (el cual es un mesón) es masivo. Esta teoría fue fructífera en su tiempo, siendo capaz de predecir con cierta precisión la masa de los piones.

Hoy en día la interacción fuerte se entiende en el contexto de teorías cuánticas de campo, la teoría que describe esta interacción es llamada cromodinámica cuántica, la cual es una teoría de gauge no abeliana con grupo de simetría interno  $SU(3)$ .

QCD se caracteriza por:

- El confinamiento de color, la incapacidad de aislar partículas que tengan carga de color.
- La libertad asintótica, implica que en el sector de altas energías los quarks se comportan como partículas libres, así mismo, a medida que la distancia entre las partículas crece, la interacción se va haciendo mayor.

Debido a esto a largas distancias la constante de acoplamiento entre los quarks crece, por ende no es posible usar teoría de perturbaciones en el régimen de bajas energías. En este punto el modelo de Skyrme se vuelve relevante, pues como ya hemos dicho este modelo es una teoría efectiva de QCD en el sector de bajas energías. Para concluir esto t'Hooft [5] generalizó QCD para que fuera invariante bajo el grupo de gauge  $SU(N_c)$ . Él notó que si  $N_c$  es considerado como un parámetro más de la teoría, el tratamiento cuántico de QCD se simplifica considerablemente en el régimen de bajas energías cuando  $N_c$  es un número grande. Witten [4] asumiendo confinamiento, encontró que en la expansión  $1/N$  de QCD, la teoría de quarks y gluones se vuelve una teoría de mesones que interactúa débilmente, con un factor  $1/N$ , mientras que los bariones de la teoría poseen un masa proporcional a  $N$ . Esto llevó a pensar que en esta expansión los bariones surgen como solitones de la teoría.

## 3.2. Acción

La acción del modelo de Skyrme es descrita por un escalar  $U(x^\mu)$  evaluado en el grupo  $SU(2)$ . Su dinámica es descrita por la acción

$$S[U] = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{K}{2} \text{Tr} \left( \frac{1}{2} R^\mu R_\mu + \frac{\lambda}{16} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (3.1)$$

donde  $R_\mu$  y  $F_{\mu\nu}$  están dados por

$$R_\mu = U^{-1} \nabla_\mu U, \quad F_{\mu\nu} = [R_\mu, R_\nu]. \quad (3.2)$$

aquí  $\nabla_\mu$  corresponde a la derivada covariante en espacio curvo, o bien derivada parcial en espacio plano. El primer término corresponde al modelo sigma no-lineal, mientras que el segundo corresponde al término añadido por Skyrme, para permitir la existencia de solitones topológicos con energía finita.

Esta acción posee la simetría de isospín que se manifiesta a través de la transformación global:

$$U \rightarrow AUB \quad A, B \in SU(2). \quad (3.3)$$

### 3.3. Ecuaciones de campo

La variación de la acción (3.1) con respecto al campo  $U$  lleva a

$$\nabla_\mu R^\mu + \frac{\lambda}{4} \nabla_\mu [R_\nu, F^{\mu\nu}] = 0. \quad (3.4)$$

Debido a que  $R_\mu$  pertenece a  $SU(2)$ , (3.4) corresponde a 3 EDP no-lineales y acopladas. Estas ecuaciones son bastante difíciles de resolver, y si le sumamos a esto encontrar configuraciones que tengan carga bariónica no-nula el problema se vuelve aún peor. Hace no muchos años la mayoría de las soluciones que se conocían eran numéricas, la primera solución analítica fue encontrada en [20], donde se construyó un Skyrmeon gravitante sobre una 3, esfera estática.

### 3.4. Energía y bound BPS

El tensor energía-momentum canónico de una teoría es obtenido a través de la fórmula

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \Big|_{g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}}, \quad (3.5)$$

donde  $\mathcal{L}$  es la densidad lagrangiana. Para el modelo de Skyrme tenemos que

$$T_{\mu\nu} = -\frac{K}{2} \text{Tr} \left[ \left( R_\mu R_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R_\alpha R^\alpha \right) + \frac{\lambda}{4} \left( \eta^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \right], \quad (3.6)$$

y el respectivo funcional de energía para un campo general  $U$  es

$$E[U] = \int d^3x T_{00}, \quad (3.7)$$

donde  $T_{00}$  corresponde a la densidad de energía. Explícitamente

$$E[U] = -\frac{K}{2} \int d^3x \text{Tr} \left( \frac{1}{2} R_i R^i + \frac{\lambda}{16} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} R_0 R_0 + \frac{\lambda}{8} \delta^{ij} F_{0i} F_{0j} \right), \quad (3.8)$$

$$= E[U]_{\text{sta}} + E[U]_{\text{rot}}, \quad (3.9)$$

donde la energía estática y de rotación resultan ser

$$E[U]_{\text{sta}} = -\frac{K}{2} \int d^3x \text{Tr} \left( \frac{1}{2} R_i R^i + \frac{\lambda}{16} F_{ij} F^{ij} \right), \quad (3.10)$$

$$E[U]_{\text{rot}} = -\frac{K}{2} \int d^3x \text{Tr} \left( \frac{1}{2} R_0 R_0 + \frac{\lambda}{8} \delta^{ij} F_{0i} F_{0j} \right). \quad (3.11)$$

Para configuraciones estáticas la energía puede reescribirse como

$$E[U] = -\frac{K}{4} \int d^3x \text{Tr} \left( R_i \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{4} \varepsilon_{ijk} [R^j, R^k] \right)^2 \pm \frac{K\sqrt{\lambda}}{4} \int d^3x \varepsilon_{ijk} \text{Tr} (R^i R^j R^k), \quad (3.12)$$

pero para un elemento arbitrario  $X \in su(2)$  se cumple que  $-\text{Tr} X^2 \geq 0$ . Por lo tanto, la energía esta acotada por

$$E[U] \geq 6\pi^2 K \sqrt{\lambda} |B|, \quad (3.13)$$

donde  $B$  se define como

$$B[U] = -\frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \varepsilon^{ijk} \text{Tr}(R_i R_j R_k), \quad (3.14)$$

y corresponde a la carga topológica del modelo de Skyrme la cual es llamada carga bariónica debido a que toma valores enteros, que son interpretados como el número de bariones de la configuración, también (3.14) es un invariante topológico (los matemáticos la conocen como tercera clase de homología), y depende netamente de las condiciones de borde de  $U$ . Al menos en espacio plano el bound BPS (3.13) puede ser alcanzado solamente cuando  $U$  corresponde al vacío trivial.

### 3.5. Ansatz

En (3.4) hemos escrito de manera muy compacta el sistema de ecuaciones, conviene reescribir estas ecuaciones para poder formular un posible ansatz, que simplifique al máximo posible las ecuaciones, sin perder la carga bariónica. Esto se hace caracterizando  $U$  en término de sus campos fundamentales y reemplazando en las ecuaciones de movimiento; otro forma es reemplazar en la acción y desde ahí encontrar las ecuaciones. La parametrización estandar de un elemento de  $SU(2)$  es

$$U(x^\mu) = Y^0 \mathbb{I} + Y^i t_i, \quad (Y^0)^2 + Y^i Y^i = 1, \quad (3.15)$$

donde  $\mathbb{I}$  es la matrix identidad de  $2 \times 2$  y  $t_i = i\sigma_i$  corresponden a los generadores del álgebra de  $su(2)$ , donde  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli. El vector unitario  $Y^A = (Y^0, Y^i)$  es naturalmente expresado como

$$\begin{aligned} Y^0 &= \cos \alpha, & Y^i &= \hat{n}^i \sin \alpha, \\ \hat{n}^1 &= \cos \Theta \sin \Phi, & \hat{n}^2 &= \sin \Theta \sin \Phi, & \hat{n}^3 &= \cos \Phi, \end{aligned} \quad (3.16)$$

aquí  $\alpha$ ,  $\Theta$  y  $\Phi$  son funciones arbitrarias de las coordenadas. Reemplazando en la acción (3.1), usando las propiedades de las matrices y aplicando la traza obtenemos la nueva acción equivalente

$$S[\alpha, \Phi, \Theta] = K \int d^4x \sqrt{-g} \left( \begin{aligned} &\frac{1}{2} (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \alpha + \sin^2 \alpha \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi + \sin^2 \alpha \sin^2 \Phi \nabla_\mu \Theta \nabla^\mu \Theta) \\ &\sin^2 \alpha \left( (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \alpha) (\nabla_\nu \Phi \nabla^\nu \Phi) - (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \Phi)^2 \right) \\ &+ \sin^2 \alpha \sin^2 \Phi \left( (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \alpha) (\nabla_\nu \Theta \nabla^\nu \Theta) - (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \Theta)^2 \right) \\ &+ \sin^4 \alpha \sin^2 \Phi \left( (\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi) (\nabla_\nu \Theta \nabla^\nu \Theta) - (\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Theta)^2 \right) \end{aligned} \right). \quad (3.17)$$

Las ecuaciones de movimiento son obtenidas variando (3.17) con respecto a  $\alpha$ ,  $\Theta$  y  $\Phi$ . Estas son

$$+\lambda \left( \begin{aligned} &(-\square \alpha + \sin(\alpha) \cos(\alpha) (\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi + \sin^2 \Phi \nabla_\mu \Theta \nabla^\mu \Theta)) \\ &\sin(\alpha) \cos(\alpha) \left( (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \alpha) (\nabla_\nu \Phi \nabla^\nu \Phi) - (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \Phi)^2 \right) \\ &+ \sin(\alpha) \cos(\alpha) \sin^2(\Phi) \left( (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \alpha) (\nabla_\nu \Theta \nabla^\nu \Theta) - (\nabla_\mu \alpha \nabla^\mu \Theta)^2 \right) \\ &+ 2 \sin^3(\alpha) \cos(\alpha) \sin^2(\Phi) \left( (\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi) (\nabla_\nu \Theta \nabla^\nu \Theta) - (\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Theta)^2 \right) \\ &-\nabla_\mu (\sin^2(\alpha) (\nabla_\nu \Phi \nabla^\nu \Phi) \nabla^\mu \alpha) + \nabla_\mu (\sin^2(\alpha) (\nabla_\nu \alpha \nabla^\nu \Phi) \nabla^\mu \Phi) \end{aligned} \right) = 0, \quad (3.18)$$

$$+ \lambda \left( \begin{aligned} & (-\sin^2(\alpha)\square\Phi - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\nabla_\mu\alpha\nabla^\mu\Phi + \sin^2(\alpha)\sin(\Phi)\cos(\Phi)\nabla_\mu\Theta\nabla^\mu\Theta) \\ & \sin^2(\alpha)\sin(\Phi)\cos(\Phi)\left((\nabla_\mu\alpha\nabla^\mu\alpha)(\nabla_\nu\Theta\nabla^\nu\Theta) - (\nabla_\mu\alpha\nabla^\mu\Theta)^2\right) \\ & + \sin^4(\alpha)\sin(\Phi)\cos(\Phi)\left((\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Phi)(\nabla_\nu\Theta\nabla^\nu\Theta) - (\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Theta)^2\right) \\ & - \nabla_\mu(\sin^2(\alpha)(\nabla_\nu\alpha\nabla^\nu\alpha)\nabla^\mu\Phi) + \nabla_\mu(\sin^2(\alpha)(\nabla_\nu\alpha\nabla^\nu\Phi)\nabla^\mu\alpha) \\ & - \nabla_\mu(\sin^4(\alpha)\sin^2(\Phi)(\nabla_\nu\Theta\nabla^\nu\Theta)\nabla^\mu\Phi) + \nabla_\mu(\sin^4(\alpha)\sin^2(\Phi)(\nabla_\nu\Phi\nabla^\nu\Theta)\nabla^\mu\Theta) \end{aligned} \right) = 0, \quad (3.19)$$

$$\left( \begin{aligned} & (-\sin^2(\alpha)\sin^2(\Phi)\square\Theta - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin^2(\Phi)\nabla_\mu\alpha\nabla^\mu\Theta - 2\sin^2(\alpha)\sin(\Phi)\cos(\Phi)\nabla_\mu\Phi\nabla^\mu\Theta) \\ & - \nabla_\mu(\sin^2(\alpha)\sin^2(\Phi)(\nabla_\nu\alpha\nabla^\nu\alpha)\nabla^\mu\Theta) + \nabla_\mu(\sin^2(\alpha)\sin^2(\Phi)(\nabla_\nu\alpha\nabla^\nu\Theta)\nabla^\mu\alpha) \\ & - \nabla_\mu(\sin^4(\alpha)\sin^2(\Phi)(\nabla_\nu\Phi\nabla^\nu\Phi)\nabla^\mu\Theta) + \nabla_\mu(\sin^4(\alpha)\sin^2(\Phi)(\nabla_\nu\Phi\nabla^\nu\Theta)\nabla^\mu\Phi) \end{aligned} \right) = 0. \quad (3.20)$$

Ahora podemos sospechar que ansätze donde los gradientes de los campos  $\alpha$ ,  $\Phi$  y  $\Theta$  fueran ortogonales y/o sus gradientes fueran nulos, simplificaría notablemente las ecuaciones de movimiento.

Por otro lado bajo la parametrización (3.16) toma la forma

$$\rho_B = 12 (\sin^2(\alpha)\sin(\Phi)) d\alpha \wedge d\Phi \wedge d\Theta, \quad (3.21)$$

a partir de esta expresión concluimos que los campos  $\alpha$ ,  $\Phi$  y  $\Theta$  al menos deben ser independientes, con tal de obtener una carga bariónica no nula.

### 3.5.1. Ansatz del erizo, $B=1$

Este ansatz fue propuesto por primera vez por Skyrme en (3.4). El llamado ansatz del erizo para el campo estático  $U$  es

$$Y^0 = \cos f(r), \quad Y^i = \frac{x^i}{r} \sin f(r), \quad (3.22)$$

donde  $r$  corresponde a la coordenada radial. Si consideramos un espacio plano  $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_2^2$ , las ecuaciones de movimiento se reducen a solo una EDO no-lineal consistente para el perfil  $f(r)$

$$(r^2 + 2\lambda \sin^2 f) f'' + 2r f' - \sin 2f \left( 1 - \lambda f'^2 + \frac{\lambda}{r^2} \sin^2 f \right) = 0, \quad (3.23)$$

reescalando la coordenada radial por un factor  $1/\sqrt{\lambda}$  reescribimos (3.24) como

$$(r^2 + 2 \sin^2 f) f'' + 2r f' - \sin 2f \left( 1 - f'^2 + \frac{1}{r^2} \sin^2 f \right) = 0. \quad (3.24)$$

Por otro lado bajo este ansatz la carga topológica toma la forma

$$B = -\frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \text{Tr}(R_i R_j R_k), \quad (3.25)$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dr f' \sin^2 f = -\frac{1}{\pi} \left( f(r) - \frac{\sin 2f(r)}{2} \right) \Big|_0^\infty. \quad (3.26)$$

Imponiendo las condiciones de borde  $f(0) = \pi$  y  $f(\infty) = 0$ , obtenemos  $B = 1$ . Es importante notar que pese a que en este ansatz  $U$  no es esféricamente simétrico, su tensor energía momento si lo es. Por lo tanto esta configuración describe un barion con "simetría esférica", en espacio plano.

La solución numérica para (3.24) es mostrada en 3.1

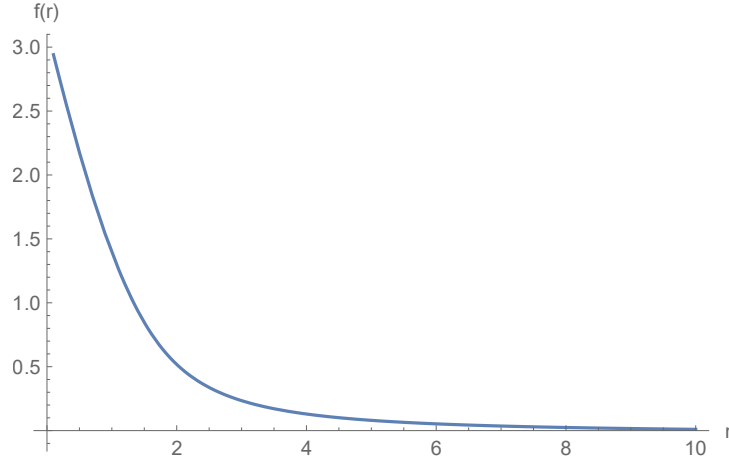


Figura 3.1: Perfil de  $f(r)$  con las condiciones de borde  $f(0) = \pi$  y  $f(\infty) = 0$ , que corresponde a un barión.

### 3.6. Modelo Einstein-Skyrme

Además del interés fenomenológico que tiene esta teoría para poder entender como gravitan estrellas de neutrones, plasma de protones, entre otros fenómenos astrofísicos, permite dar un marco teórico para el estudio de fermiones acoplados a gravedad, sin hacer uso de variables de Grassmann (el cual es un problema altamente no trivial). También la experiencia ha indicado (ver [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38]) que incluir la dinámica del espacio tiempo ayuda a resolver las ecuaciones del movimiento analíticamente sin destruir la carga topológica. La acción del sistema corresponde a la suma de la acción del modelo de Skyrme más el de Einstein-Hilbert

$$S[g, U]_{E+S} = S[g, U]_S + S[g]_{E-H}, \quad (3.27)$$

donde

$$S[g]_{E-H} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\mathcal{R} - 2\Lambda}{2\kappa}, \quad (3.28)$$

aquí  $\mathcal{R}$  es el escalar de Ricci,  $\Lambda$  es la constante cosmológica y  $\kappa$  es la constante de gravitación. Obtenemos las ecuaciones del movimiento variando (3.27) con respecto a  $U$  y el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , estas son:

$$\nabla_\mu R^\mu + \frac{\lambda}{4} \nabla_\mu [R_\nu, F^{\mu\nu}] = 0, \quad G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

donde  $G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_\mu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R}$  es el tensor de Einstein.

#### 3.6.1. Ansatz del erizo generalizado

Este ansatz fue propuesto por Manton y Ruback en [20], ellos propusieron para el campo de materia  $U$  la siguiente elección

$$\Phi = \frac{\gamma + \varphi}{2}, \quad \tan \Theta = \frac{\cot(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\gamma - \varphi}{2})}, \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \Theta}}{\tan(\frac{\gamma - \varphi}{2})}. \quad (3.30)$$

mientras que el ansatz para el espacio-tiempo corresponde a una métrica FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{A_0}{4}((d\gamma + \cos\theta d\varphi)^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.31)$$

donde  $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  corresponde a las coordenadas en la 3 esfera y  $A_0$  es su radio. Manton y Ruback notaron que bajo esta elección las ecuaciones de Skyrme se satisfacen idénticamente, además que la carga bariónica de sistema es igual a uno. Por lo tanto, esta configuración describe un Skyrmion gravitante sobre una 3 esfera estática. Sin embargo, ellos no estudiaron la reacción del espacio-tiempo producido por el Skyrmion. Las componentes no nulas del tensor energía momentum corresponde a

$$T^t_t = -\frac{3K(\lambda + A_0)}{2A_0^2}, \quad T^\gamma_\gamma = T^\theta_\theta = T^\varphi_\varphi = \frac{K(\lambda - A_0)}{2A_0^2}. \quad (3.32)$$

Pese a que el campo  $U$  depende explícitamente de los ángulos  $\gamma$ ,  $\theta$  y  $\varphi$ , su tensor energía momentum es homogéneo y espacialmente isotrópico. Por otro lado las ecuaciones de Einstein llevan a

$$A_0^2 = \frac{3(2 - \kappa K)}{4\Lambda}, \quad \lambda = \frac{3(2 - \kappa K)^2}{8\Lambda\kappa K}. \quad (3.33)$$

Los autores no vieron el potencial de este ansatz que puede ser generalizado consistentemente para incluir la dinámica del espacio tiempo [34]. Además de esto, será uno de los pilares de este trabajo.



## Capítulo 4

# Skyrme-mesones Rho

Como dijimos en la expansión  $1/N$  de QCD, la teoría se reduce a un modelo de mesones que interactúa débilmente (con una inetracción de orden  $1/N$ ), mientras que los bariones surgen como solitones pues su masa es proporcional a  $N$ . Como hemos dicho el modelo de Skyrme solo considera los mesones mas livianos (piones) como campos fundamentales, por lo que se espera que incluir la interacción con mesones más pesados permita mejorar las predicciones de la teoría.

En particular en las referencias [28], [29], los autores proponen incluir la interacción con el siguiente grupo de mesones de isospín 1, los mesones Rho. Esto permite mejorar considerablemente las predicciones teóricas del *binding energy* del núcleo (energía necesaria para romper el núcleo atómico).

El gráfico 4.1 muestra como son las predicciones de los modelos con y sin mesones rho.

### 4.1. Acción y ecuaciones del movimiento

La acción de Einstein-Skyrme-mesones Rho, es dada por

$$S[g, U, A_\mu] = \int \sqrt{-g} d^4x \left( \mathcal{L}_{\text{E-H}} + \mathcal{L}_{\text{Skyrme}} + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_{\text{int}} \right), \quad (4.1)$$

donde  $\mathcal{L}_{\text{E-H}}$  y  $\mathcal{L}_{\text{Skyrme}}$  corresponde a la densidad lagrangiana del modelo de Einstein-Hilbert y Skyrme definidos en (3.28) y (3.1) respectivamente. Mientras que los dos términos restantes describen la dinámica de los mesones Rho y su interacción con los piones (ver [28] y [29])

$$\mathcal{L}_\rho = \text{Tr} \{ a_1 S_{\mu\nu}^2 + a_2 A_\mu^2 + c_3 S_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + c_4 G_{\mu\nu}^2 \}, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \text{Tr} \{ c_5 L_{\mu\nu}^2 - c_6 F_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - c_7 F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + a_8 F_{\mu\nu} L^{\mu\nu} + a_9 L_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + a_{10} L_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \}, \quad (4.3)$$

aquí los tensores  $G_{\mu\nu}$ ,  $L_{\mu\nu}$  y  $S_{\mu\nu}$  corresponden a

$$G_{\mu\nu} = [A_\mu, A_\nu], \quad L_{\mu\nu} = [R_\mu, A_\nu] - [R_\nu, A_\mu], \quad S_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu,$$

siendo  $A_\mu$  el campo fundamental de los mesones Rho, que corresponde a una uno-forma evaluada en el álgebra de  $su(2)$

$$A_\mu = (A_\mu)^j \tau_j.$$



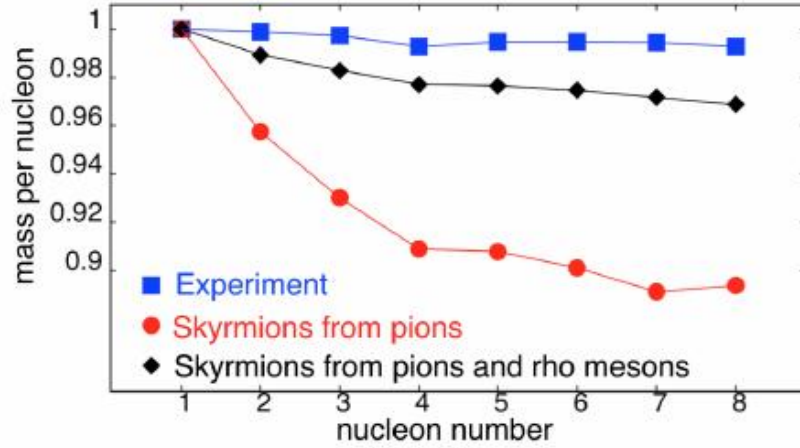


Figura 4.1: Datos experimentales sobre la masa por nucleón, junto con los datos teóricos. La masa está normalizada por la masa del protón. Fuente [28]

La acción (4.1) es aún más general que la definida en [28], [29], pues en ella consideramos todas las constantes de acoplamiento de la teoría como arbitrarios. Ambas acciones coinciden cuando los parámetros  $a$ 's se ajustan a

$$a_1 = \frac{1}{8}c_8, \quad a_2 = \frac{1}{4}m_\rho^2, \quad a_8 = \frac{1}{2}c_6, \quad a_9 = -\frac{1}{8}c_8, \quad a_{10} = -\frac{1}{2}c_3. \quad (4.4)$$

Por lo tanto, derivaremos resultados para valores de constantes de acoplamiento aún más generales. Las quince ecuaciones del sistema Skyrme-mesones Rho vienen dadas por

$$\nabla_\mu \left( c_1 R^\mu + \frac{c_2}{4} [R_\nu, F^{\mu\nu}] - E_1^\mu \right) - [R_\mu, E_1^\mu] = 0, \quad (4.5)$$

$$\nabla_\nu O_1^{\mu\nu} + 2a_2 A^\mu - E_2^\mu = 0, \quad (4.6)$$

(ver Apéndice C 5 para una derivación explícita de las ecuaciones) donde hemos definido los tensores

$$E_1^\mu = [S^{\mu\nu}, 2a_9 A_\nu - 2c_6 R_\nu] + [G^{\mu\nu}, 2a_{10} A_\nu - 2c_7 R_\nu] + 2a_8 [F^{\mu\nu}, A_\nu] + [L^{\mu\nu}, 4c_5 A_\nu + 2a_8 R_\nu], \quad (4.7)$$

$$E_2^\mu = [S^{\mu\nu}, 2c_3 A_\nu + 2a_9 R_\nu] + [G^{\mu\nu}, 4c_4 A_\nu + 2a_{10} R_\nu] - [F^{\mu\nu}, 2c_7 A_\nu - 2a_8 R_\nu] + [L^{\mu\nu}, 2a_{10} A_\nu + 4c_5 R_\nu], \quad (4.8)$$

$$O_1^{\mu\nu} = 4a_1 S^{\mu\nu} + 2c_3 G^{\mu\nu} - 2c_6 F^{\mu\nu} + 2a_9 L^{\mu\nu},$$

mientras que las seis ecuaciones de Einstein son ( $\kappa = 1$ )

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{Sk}} + T_{\mu\nu}^\rho + T_{\mu\nu}^{\text{int}}. \quad (4.9)$$

donde el respectivo tensor energía-momentum es mostrado en (22).

Este conjunto de ecuaciones solo ha sido estudiado en espacio plano, y las únicas ecuaciones que se conocen son numéricas. Nuestra tarea es resolver este conjunto de 21 EDP no-lineales acopladas sin destruir la carga bariónica, para esto necesitamos un ansatz que simplifique considerablemente el sistema de ecuaciones.

## 4.2. Ansatz

Para resolver este sistema de ecuaciones usaremos una versión modificada del ansatz del erizo generalizado (3.6.1), con un factor de escala dependiente del tiempo, el ansatz para el espacio-tiempo es

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{A(t)}{4} [(d\gamma + \cos\theta d\phi)^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2] , \quad (4.10)$$

que corresponde a una métrica tipo FLRW con un factor de escala dinámico, aquí  $0 \leq \gamma < 4\pi$ ,  $0 \leq \theta < \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$  corresponden a las coordenadas sobre la 3 esfera. Para el campo de materia  $U$  usaremos (3.30) [34]. Por otro lado, para el campo vectorial mesónico consideramos un ansatz tipo meron <sup>1</sup> (ver [46], [47], [48]), que tiene la forma

$$A_\mu = \lambda(t)R_\mu .$$

Bajo esta elección las ecuaciones de Skyrme se satisfacen idénticamente, mientras que el sistema de 12 ecuaciones de los mesones Rho (4.5) - (4.6) se reduce a solo una ecuación para el perfil  $\lambda(t)$  (en el apéndice 5 mostramos como las ecuaciones se reducen para un perfil de merón mas general  $\lambda = \lambda(x^\mu)$ ). Por otro lado, de las 6 ecuaciones de Einstein solo sobreviven 2

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\rho &= 2a_1A\lambda'' + a_1A'\lambda' + 16c_4\lambda^3 + 12(2a_{10} - c_3)\lambda^2 \\ &\quad + [8(a_1 - 2a_9 + 4c_5 - c_7) + a_2A]\lambda + 4(c_6 + 2a_8) , \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= 4AA'' + 16a_1A\lambda'^2 - A'^2 + 4[c_2 - \Lambda A^2 - A(c_1 - 1 + 2a_2\lambda^2)] \\ &\quad + 64\lambda[2a_8 + c_6 + \lambda(a_1 - 2a_9 + 4c_5 - c_7 + \lambda(2a_{10} - c_3 + c_4\lambda))] , \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= 48a_1A\lambda'^2 - 3A'^2 + 4[3c_2 + \Lambda A^2 + 3A(c_1 - 1 + 2a_2\lambda^2)] \\ &\quad + 192\lambda[2a_8 + c_6 + \lambda(a_1 - 2a_9 + 4c_5 - c_7 + \lambda(2a_{10} - c_3 + c_4\lambda))] . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Se debe notar la dramática reducción de las ecuaciones, ya que en un sector no trivial, hemos sido capaces de reducir el sistema de 21 EDP no lineales a solo 2 ODE acopladas (una de Einstein y otra de los mesones Rho) más una de primer orden que fija una de las constantes de integración de las ecuaciones restantes. Bajo este ansatz el tensor energía-momentum isotrópico viene dado por

$$T^t_t = -\frac{3}{A(t)^2} \left( c_2 + 16(2a_8 + c_6)\lambda(t) + 16(a_1 - 2a_9 + 4c_5 - c_7)\lambda(t)^2 + 16(2a_{10} - c_3)\lambda(t)^3 + 16c_4\lambda(t)^4 \right. \quad (4.14)$$

$$\left. + A(t)(c_1 + 2a_2\lambda(t)^2 + 4a_1\lambda'(t)^2) \right) , \quad (4.15)$$

$$T^\gamma_\gamma = \frac{1}{A(t)^2} \left( c_2 + 16(2a_8 + c_6)\lambda(t) + 16(a_1 - 2a_9 + 4c_5 - c_7)\lambda(t)^2 + 16(2a_{10} - c_3)\lambda(t)^3 + 16c_4\lambda(t)^4 \right. \quad (4.16)$$

$$\left. - A(t)(c_1 + 2a_2\lambda(t)^2 - 4a_1\lambda'(t)^2) \right) = T^\theta_\theta = T^\phi_\phi . \quad (4.17)$$

<sup>1</sup>Es importante enfatizar que pese esta teoría no posee simetría de gauge, es muy notable que el ansatz siga siendo efectivo

### 4.3. Soluciones analíticas

Aquí mostramos algunos casos donde las soluciones pueden ser encontradas analíticamente. Uno de los resultados más importantes es que el Skyrmion gravitante estático en [34] puede ser "destruido" por la presencia de los mesones Rho, para cierto valores de las constantes de acoplamiento en [28], [29]. Sin embargo, encontramos que existen valores de las constantes muy cercanos a los medidos experimentalmente [28], [29], que permiten la existencia de Skyrmiones gravitantes estáticos vestidos con mesones Rho.

#### Caso estático

Primero, consideraremos el caso estático donde la dinámica de nuestros campos es constante  $\lambda(t) = \lambda_0$ ,  $A(t) = A_0$ . Con esto, las ecuaciones de campo (4.11) - (4.13) se reducen a

$$16c_4\lambda_0^3 + 12(2a_{10} - c_3)\lambda_0^2 + [8(a_1 - 2a_9 + 4c_5 - c_7) + a_2A_0]\lambda_0 + 4(c_6 + 2a_8) = 0, \quad (4.18)$$

$$4a_2\lambda_0^2 + \frac{4\Lambda}{3}A_0 + 2(c_1 - 1) = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\Lambda}{3}A_0^2 - c_2 + 16(2a_8 + c_6)\lambda_0 + 16(a_1 - 2a_9 + 4c_5 - c_7)\lambda_0^2 + 16(2a_{10} - c_3)\lambda_0^3 + 16c_4\lambda_0^4 = 0. \quad (4.20)$$

Si se cumple que

$$A_0 = -\frac{3(2a_2\lambda_0^2 + c_1 - 1)}{2\Lambda}, \quad (4.21)$$

$$\frac{4}{3}\Lambda = \frac{(2a_2\lambda_0^2 + c_1 - 1)^2}{c_2 + 16(2a_8 + c_6)\lambda_0 + 16(a_1 - 2a_9 + 4c_5 - c_7)\lambda_0^2 + 16(2a_{10} - c_3)\lambda_0^3 + 16c_4\lambda_0^4}, \quad (4.22)$$

entonces las ecuaciones se reducen a una ecuación cuartica algebraica para  $\lambda_0$ , esta es

$$P(\lambda) := p_0 + p_1\lambda_0 + p_2\lambda_0^2 + p_3\lambda_0^3 + p_4\lambda_0^4 = 0, \quad (4.23)$$

donde los coeficientes  $p_i$  son coeficientes que depende de las constantes  $a$ 's y  $c$ 's, estos son

$$\begin{aligned} p_0 &= (2c_6 + 4c_8)(c_1 - 1), \\ p_1 &= (4a_1 - 8a_9 + 16c_5 - 4c_7)(c_1 - 1) - a_2c_2, \\ p_2 &= (12a_{10} - 6c_3)(c_1 - 1) - 12a_2(c_6 + 2a_8), \\ p_3 &= 8(c_1 - 1)c_4 - 8a_2(a_1 - 2a_9 + 4c_5 - c_7), \\ p_4 &= 4a_2(c_3 - 2a_{10}). \end{aligned}$$

Analizando el discriminante del polinomio (4.23),  $\Delta(P(\lambda))$ , podemos encontrar en que regiones del espacio de los parámetros existe solución real, sin embargo, realizar un estudio general de este problema es muy complicado debido a que tenemos muchas constantes. Con tal de revelar los efectos de los mesones evaluaremos las constantes de acoplamiento usando la primera tabla de valores en [28], [29] donde dos conjuntos de valores fueron propuestos para ajustar el *binding energy* para diferentes números

de núcleos. Fijaremos todas las constantes a excepción de  $c_3$  y  $c_4$  pues de todos las constantes ellas son las que más varían. Consecuentemente escogemos

$$c_1 \rightarrow \frac{1}{4\sqrt{\pi}}, c_2 \rightarrow 0,198, c_5 \rightarrow 0,038, c_6 \rightarrow \frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{12\sqrt{2}}, c_7 \rightarrow 0,049, c_8 \rightarrow 1, \quad (4.24)$$

como en la referencia [28], mientras variamos las restantes  $(c_3, c_4)$ . Nuestro objetivo es explorar como las propiedades de las soluciones [34] cuando  $c_3 \in [0,065, 0,265]$  y  $c_4 \in [0, 0, 1]$ , imponiendo que  $\lambda$  sea real y  $A_0 > 0$ . En la figura (4.2), se muestra la región de realidad de las raíces de (4.23), junto con la intersección de las ligaduras. Un resultado

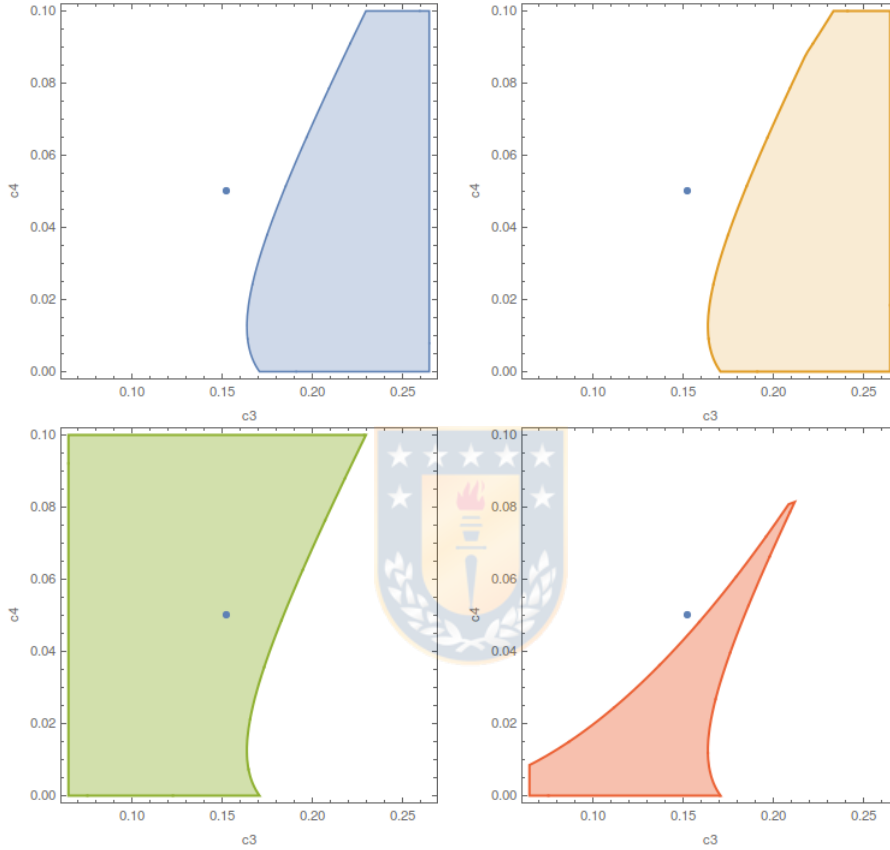


Figura 4.2: Región de existencia y realidad de las raíces de  $P(\lambda)$  que llevan a un factor de escala positivo, cuando el conjunto de parámetros se fija según (4.24) en el espacio de parámetros  $c_3$  y  $c_4$ , para cada una de las 4 soluciones  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  (azul, naranja, verde y rojo, respectivamente). El punto azul corresponde a  $(c_3, c_4) = (0,153, 0,05)$ , reportado en [28]. Por ende el Skyrmion gravitante [34] sobrevive en una vecindad de solo una de las posibles soluciones (verde) con las constantes fijadas según [28]. Esto significa que la inclusión de los mesones Rho puede tener efectos dramáticos sobre los Skyrmones gravitantes.

importantes es que la rama verde, contiene el valor  $(c_3, c_4) = (0,153, 0,050)$  (punto azul), predicho experimentalmente en [28]. Es decir, los valores medidos experimentalmente, no impiden la existencia de Skyrmones gravitantes estáticos.

### 4.3.1. Condición de energía dominante

La condición de energía dominante garantiza que la proyección del tensor energía-momentum con cualquier vector causal, genera otro vector causal. Físicamente no dice que las distribuciones de energía y momentum de la materia, no pueden moverse más rapido que la velocidad de la luz.

La condiciones vienen dadas por

$$\rho \geq 0, \quad |p_i| \leq \rho. \quad (4.25)$$

Donde  $\rho = T^{\hat{0}\hat{0}}$  y  $p_i = T^{\hat{i}\hat{i}}$  son las componentes de tensor energía momentum escritas en la base ortonormal, para nuestro caso

$$e^{\hat{0}} = dt, \quad e^{\hat{1}} = \frac{\sqrt{A(t)}}{2} \cos \theta (d\gamma + d\phi), \quad e^{\hat{2}} = \frac{\sqrt{A(t)}}{2} d\theta, \quad e^{\hat{3}} = \frac{\sqrt{A(t)}}{2} \sin \theta (d\gamma - d\phi).$$

Para ver en que región se cumplen estas condiciones proceremos como en 4.3. Las regiones se muestran en 4.3

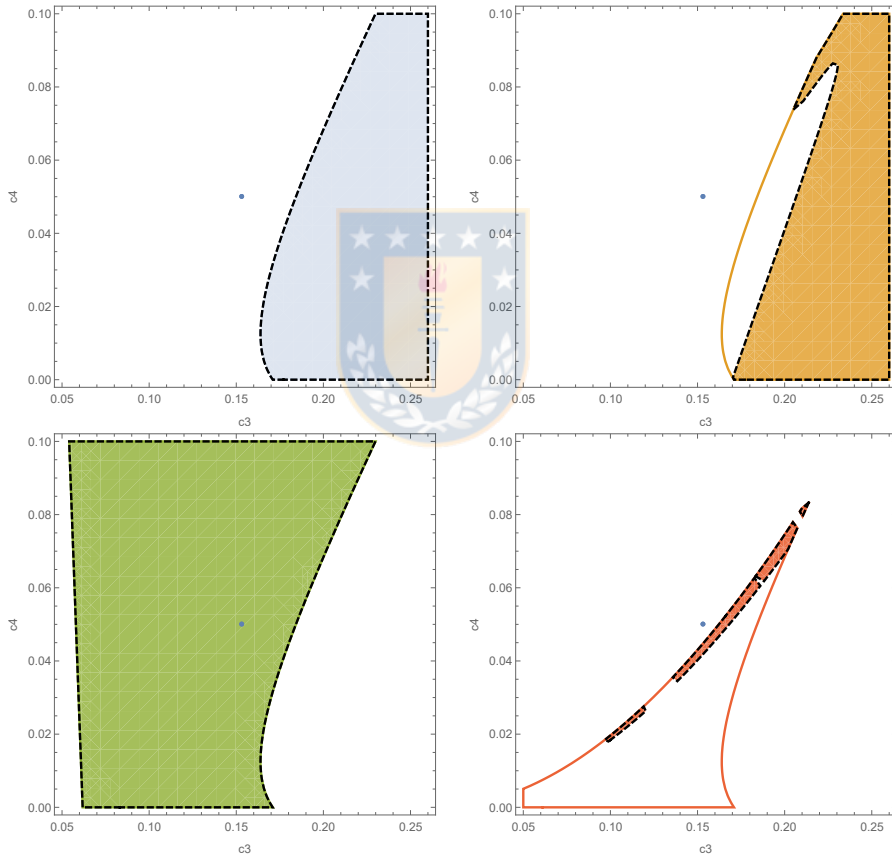


Figura 4.3: En las zonas claras existen soluciones reales de  $P(\lambda)$  que llevan a un factor de escala positivo, mientras que en las más opacas, se cumple la condición de energía dominante. Nuevamente la solución donde se cumplen estas condiciones es la verde. Las constantes son fijadas según [28].

### 4.3.2. El límite massless

En el régimen de altas energías podemos despreciar los efectos de la masa de los mesones Rho, esto es  $a_2 \rightarrow 0$ . Adicionalmente y por simplicidad, consideraremos una

constante cosmológica nula. Es directo notar que bajo esta condición el conjunto de ecuaciones Eqs. (4.11) - (4.13) implica que  $A(t) = l_1 t + l_0$  ( $l_1$  y  $l_0$  son constantes de integración). Por lo tanto, el perfil de los mesones Rho  $\lambda(t)$  satisface una EDO no lineal

$$0 = 16a_1(l_0 + l_1 t)\lambda'^2 + 64c_4\lambda^4 + (128a_{10} - 64c_3)\lambda^3 + (64a_1 - 128a_9 + 25c_5 - 64c_7)\lambda^2 + (128a_8 + 64c_6)\lambda + 4c_2 - l_1^2. \quad (4.26)$$

Para un espacio tiempo estático, es decir, cuando  $l_1 = 0$ , la ecuación (4.26) puede ser reescrita como un problema Newtoniano con un potencial cuártico

$$(\lambda')^2 + P(\lambda) = E_0, \quad E_0 = -\frac{c_2}{4a_1 l_0}, \quad (4.27)$$

$$P(\lambda) = \frac{4\lambda}{a_1 l_0} \left( c_4 \lambda^3 + (2a_{10} - c_3)\lambda^2 + (a_1 - 2a_9 + 4c_5 - c_7)\lambda + (2a_8 + c_6) \right), \quad (4.28)$$

que puede ser resuelta en términos de funciones elípticas inversas

### 4.3.3. Soluciones numéricas

El sistema de ecuaciones (4.11)-(4.13) puede ser integrado numericamente para determinar la evolución tanto del factor de escala  $A(t)$  como del perfil del meron  $\lambda(t)$ . Las ecuaciones (4.11) y (4.12) son de segundo orden y por lo tanto, determinan la evolución de las funciones, mientras que (4.13) es una ligadura de primer orden que fija las condiciones iniciales de  $A(t_0)$  con las de  $\lambda(t_0)$ . Fijamos los valores de las constantes de acoplamiento en la acción de acuerdo a (4.4) y (4.24). Escogemos como valores iniciales

$$\lambda(t_i) = 1, \quad \lambda'(t_i) = 0, \quad A(t_i) = 0,1, \quad (4.29)$$

con  $t_i$  el tiempo inicial de integración, cuyo valor es  $t_i = 10^{-2}$ . Haremos la integración hasta  $t_f = 10^4$ . Esta se realiza de la siguiente manera

- Reemplazamos las condiciones iniciales (4.29), en la ecuación de primer orden (4.12).
- A partir de esa expresión encontramos la condición inicial  $A'(t_i)$ .
- Ya con cuatro condiciones iniciales se puede resolver el sistema (4.11)- (4.13)

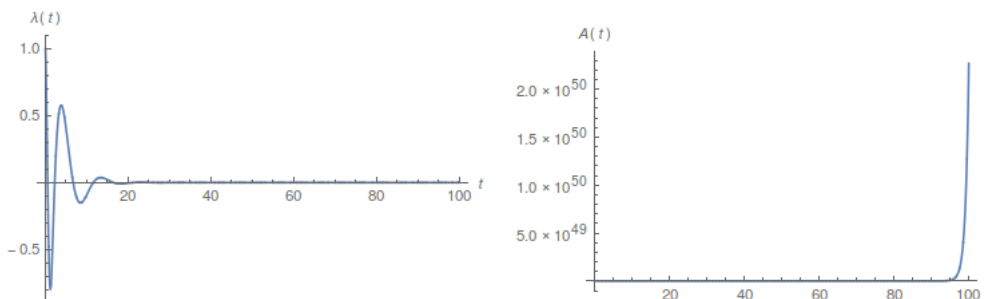


Figura 4.4: Perfil del merón  $\lambda(t)$  y comportamiento asintótico del factor de escala  $A(t)$ , hemos fijado  $\Lambda = 1$  y las constantes según (4.24).

La figura 4.6 muestra el factor de escala scale factor  $A(t)$  y su comportamiento de-Sitter a través de una constante cosmológica efectiva  $\Lambda_{\text{eff}}$ . Esto lo deducimos a partir

del comportamiento numérico de las componentes del tensor energía momentum, pues ocurre que asintóticamente  $T^\mu{}_\nu$  evoluciona hacia una constante  $\varepsilon_0 \delta^\mu{}_\nu$ , por ende las ecuaciones de Einstein en infinito se pueden reescribir como

$$G_{\mu\nu} + \Lambda_{\text{eff}} g_{\mu\nu} = 0 \quad (4.30)$$

donde  $\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda - \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0$  corresponde al valor asintótico de  $\varepsilon(t)$ . De esta manera  $A(t)$ ,

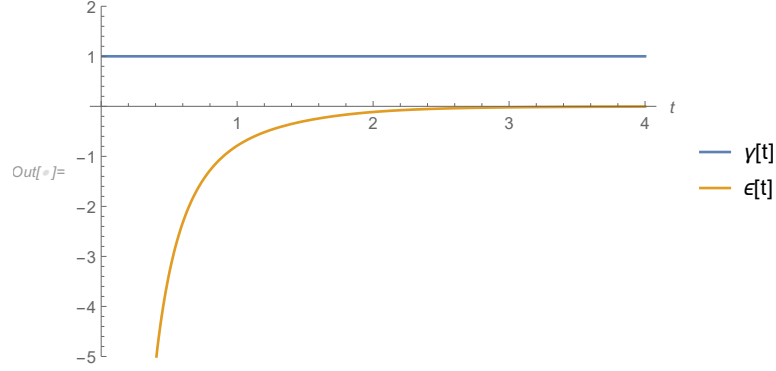


Figura 4.5: Comportamiento numérico de  $\varepsilon = T^t{}_t$  y  $\gamma = \varepsilon/T^\phi{}_\phi$ . Las componentes vienen dadas por las ecuaciones (4.15) y (4.17), hemos evaluado las constantes de acoplamiento según 4.24 y utilizado las soluciones numéricas de  $\lambda(t)$  y  $A(t)$  según (4.24).

satisface asintóticamente las ecuaciones de Einstein en vacío con constante cosmológica positiva. Como la sección espacial corresponde a una 3 esfera, las ecuaciones de Einstein llevan a que la constante cosmológica efectiva cumpla asintóticamente

$$\Lambda_{\text{eff}} = \frac{3(4A(t) + A'(t)^2)}{A(t)^2}. \quad (4.31)$$

. El gráfico viene dado por

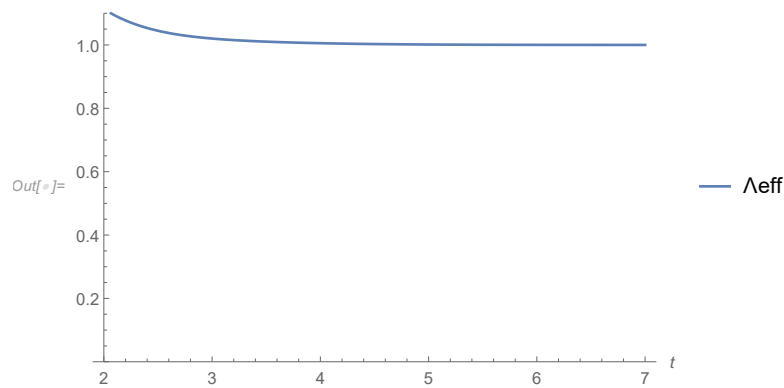


Figura 4.6: Comportamiento numérico de la constante cosmológica efectiva  $\Lambda_{\text{eff}}$ . Se aprecia claramente que no varía demasiado, con respecto a su original ( $\Lambda = 1$ ). Esto ocurre debido a que el perfil mesónico  $\lambda(t)$  decae rápidamente, mientras que el factor de escala  $A(t)$  crece exponencialmente.

## Capítulo 5

# Conclusiones

En esta tesis se han construido nuevas soluciones exactas de Skyrmiones gravitantes estáticos vestidos por mesones Rho con carga bariónica igual a uno. Estas soluciones fueron encontradas en cuatro dimensiones espacio temporales y el espacio-tiempo corresponde a una métrica Friedman-Lemaître-Robertson-Walker cerrada. Junto con esto se analizó tanto el comportamiento analítico como numérico de las soluciones. De esta forma, a partir de los resultados encontrados en esta tesis podemos concluir lo siguiente:

- El gran potencial que posee el ansatz del erizo generalizado [34], pues permite satisfacer idénticamente las ecuaciones de Skyrme, sin destruir la carga bariónica, cuando el espacio-tiempo viene dado por  $\mathbb{R} \times S^3$ . Por otro lado se usó un ansatz tipo meron para el perfil del campo mesones Rho, que funcionó perfectamente, a pesar que la teoría en que estamos trabajando no posee simetría de gauge. Con estos ingredientes pudimos reducir el sistema de 21 EDP no-lineales y acopladas a solo 3 ecuaciones, dos de segundo orden, junto a una de primer orden que relaciona las constantes de integración del sistema.
- Encontramos que existen valores de las constantes de acoplamiento que destruyen al Skyrmion gravitante, lo cual es un resultado dramático e inesperado, pese a eso existen valores, cercanos a los medidos experimentalmente que permiten la existencia de solitones gravitantes estáticos vestidos de mesones Rho, junto a esto encontramos que las regiones de existencia se solapan, con las regiones donde se cumple la condición de energía dominante. Describiendo así distribuciones de energía y momentum que no pueden viajar más rápido que la luz.
- El método que hemos usado para la construcción de soluciones de Skyrmiones puede ser fácilmente extendido a otro tipo de soluciones ya encontradas, como cristales de Skyrmiones, o cristales de solitones acoplados a Maxwell.



# Bibliografía

- [1] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [2] T. H. R. Skyrme, Proc. R. Soc. London **A 260**, 127 (1961); Proc. R. Soc. London **A 262**, 237 (1961); *A Unified Field Theory of Mesons and Baryons*, Nucl. Phys. **31**, 556 (1962).
- [3] G. S. Adkins, C. R. Nappi, E. Witten, *Static Properties of Nucleons in the Skyrme Model*, Nucl. Phys. **B 228**, 552 (1983).
- [4] E. Witten, Nucl. Phys. **B 223**, 422 (1983); Nucl. Phys. **B 223**, 433 (1983).
- [5] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B 72**, 461 (1974).
- [6] A.A. Abrikosov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **32**, 1442 (1957) (Sov.Phys.JETP 5, 1174 (1957)).
- [7] A. P. Balachandran, V. P. Nair, N. Panchapakesan, S. G. Rajeev, Phys. Rev. **D 28**, 2830 (1983).
- [8] A.P. Balachandran, A. Barducci, F. Lizzi, C.G.J. Rodgers, A. Stern, Phys. Rev. Lett. **52** (1984), 887.
- [9] R. Battye, P. Sutcliffe, Phys. Rev. Lett. **79**, 363 (1997); Phys. Rev. Lett. **86**, 3989 (2001); Rev. Math. Phys. **14**, 29 (2002).
- [10] G. H. Derrick, *J. Math. Phys.* **5**, 1252 (1964).
- [11] E. B. Bogomolny, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24** (1976), 449 .
- [12] A.P. Balachandran, G. Marmo, B. S. Skagerstam, A. Stern, “*Classical Topology and Quantum States*” World Scientific, (1991).
- [13] C. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, *Gravitation*, Princeton University Press (1973).
- [14] Aitchison, Ian. (2019). Tony Skyrme and the Origins of Skyrmions.
- [15] R. M. Wald, Phys. Rev. D **28**, 2118 (1983).
- [16] S. Droz, M. Heusler, N. Straumann,
- [17] E. Guadagnini, Nucl. Phys. B **236** (1984), 35-47. Phys. Lett. **B 268**, 371 (1991).
- [18] S. Droz, M. Heusler, N. Straumann, Phys. Lett. **B 271**, 61 (1991).
- [19] P. Bizon, Acta Phys. Polon. B **25**, 877 (1994) [gr-qc/9402016].

- [20] N.S. Manton, P.J. Ruback, *Phys. Lett. B* **181** (1986) 137.
- [21] A. Paliathanasis, T. Taves, P.G.L. Leach, *Eur.Phys.J. C* **77** (2017) no.12, 909.
- [22] F. Canfora, A. Paliathanasis, T. Taves and J. Zanelli, *Phys. Rev. D* **95**, no. 6, 065032 (2017).
- [23] S. A. Pavluchenko, *Phys.Rev. D* **94** (2016) no.4, 044046.
- [24] L. Parisi, N. Radicella, G. Vilasi, *Phys.Rev. D* **91** (2015) no.6, 063533.
- [25] M. Freer, H. Horiuchi, Y. Kanada-En'yo, D. Lee, U-G. Meißner, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 035004 (2018).
- [26] P.M. Sutcliffe, *JHEP* **1008**, 019 (2010).
- [27] P.M. Sutcliffe, *JHEP* **1104**, 045 (2011).
- [28] C. Naya and P. Sutcliffe, *JHEP* **1805**, 174 (2018)
- [29] C. Naya and P. Sutcliffe, *Phys. Rev. Lett.* **121**, no. 23, 232002 (2018)
- [30] F. Canfora, *Phys. Rev. D* **88**, (2013), 065028.
- [31] F. Canfora, H. Maeda, *Phys. Rev. D* **87**, 084049 (2013).
- [32] S. Chen, Y. Li, Y. Yang, *Phys. Rev. D* **89**, 025007 (2014).
- [33] F. Canfora, F. Correa, J. Zanelli, *Phys.Rev. D* **90** (2014) 085002.
- [34] E. Ayon-Beato, F. Canfora, J. Zanelli, *Phys. Lett. B* **752**, (2016) 201-205.
- [35] F. Canfora, N. Dimakis, A. Giacomini, A. Paliathanasis, *Phys.Rev. D* **99** (2019) no.4, 044035.
- [36] P. D. Alvarez, F. Canfora, N. Dimakis and A. Paliathanasis, *Phys. Lett. B* **773**, (2017) 401-407.
- [37] L. Aviles, F. Canfora, N. Dimakis, D. Hidalgo, *Phys. Rev. D* **96** (2017), 125005.
- [38] F. Canfora, M. Lagos, S. H. Oh, J. Oliva and A. Vera, *Phys. Rev. D* **98**, no. 8, 085003 (2018).
- [39] F. Canfora, *Eur. Phys. J. C* **78**, no. 11, 929 (2018).
- [40] F. Canfora, S. H. Oh and A. Vera, *Eur. Phys. J. C* **79**, no. 6, 485 (2019).
- [41] L. Brey, H. A. Fertig, R. Cote, A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2562 (1995).
- [42] I. Klebanov, *Nucl. Phys. B* **262** (1985) 133.
- [43] A. Giacomini, M. Lagos, J. Oliva and A. Vera, *Phys. Lett. B* **783**, 193 (2018).
- [44] M. Astorino, F. Canfora, M. Lagos and A. Vera, *Phys. Rev. D* **97**, no. 12, 124032 (2018).
- [45] M. Astorino, F. Canfora, A. Giacomini and M. Ortaggio, *Phys. Lett. B* **776**, 236 (2018).
- [46] F. Canfora, F. Correa, A. Giacomini, J. Oliva, *Phys.Lett. B* **722** (2013) 364-371.

- [47] F. Canfora, S.-H. Oh, P. Salgado-Rebolledo, Phys. Rev. D **96** (2017) no.8, 084038.
- [48] F. Canfora, A. Gomberoff, S.-H. Oh, F. Rojas, P. Salgado-Rebolledo, arXiv:1812.11231, accepted for publication on *JHEP*.
- [49] G. S. Adkins, Phys. Rev. D **33**, 193 (1986).
- [50] U. G. Meissner and I. Zahed, Phys. Rev. Lett. **56**, 1035 (1986).
- [51] M. Bando, T. Kugo, S. Uehara, K. Yamawaki and T. Yanagida, Phys. Rev. Lett. **54**, 1215 (1985).
- [52] M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki, Phys. Rept. **164**, 217 (1988).
- [53] M. Harada and K. Yamawaki, Phys. Rept. **381**, 1 (2003)
- [54] G. W. Gibbons, Phys. Lett. B **566**, 171 (2003)



# Apéndice A: Teorema de Derrick

Por simplicidad consideraremos una teoría cuyo término cinético es lineal en 1 + 1 dimensiones, bajo un potencial  $V$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi). \quad (1)$$

Las ecuaciones del movimiento para una configuración estática son

$$\square\phi = \frac{\partial V}{\partial\phi}. \quad (2)$$

Ahora probaremos que una configuración estática que satisface las ecuaciones del movimiento, también puede ser derivada si minimiza la energía. Para configuraciones estáticas tenemos que

$$\phi'' = -\frac{\partial V}{\partial\phi}, \quad (3)$$

donde  $\phi' = \partial\phi/\partial x$ . Multiplicando esta expresión por  $\phi'$  y usando la regla de la cadena encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right) = 0. \quad (4)$$

Pero la expresión dentro del paréntesis corresponde a la energía del sistema. Por lo tanto, concluimos que la configuración estática que minimiza la energía, es solución de las ecuaciones del movimiento.

Ahora haremos una demostración esquemática del teorema de Derrick. Consideremos un conjunto de campos escalares en  $D + 1$  dimensiones con una densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}G_{ab}(\phi)\partial_\mu\phi^a\partial^\mu\phi^b - V(\phi), \quad (5)$$

donde  $G_{ab}$  es una matriz definida positiva y  $V(\phi)$  es un potencial que posee mínimos. La energía de una configuración estática es

$$E[\phi] = \int d^Dx \left( \frac{1}{2}G_{ab}(\phi)\partial_i\phi^a\partial_j\phi^b + V(\phi) \right), \quad (6)$$

$$= E[\phi]_{\text{kin}} + E[\phi]_{\text{pot}} \quad (7)$$

donde  $E_{\text{kin}}$  y  $E_{\text{pot}}$  son ambos positivos. Supongamos que existe una solución estática  $\bar{\phi}(\vec{x})$  con energía finita, definimos  $f_\lambda$  como

$$f_\lambda = \bar{\phi}(\lambda\vec{x}), \quad (8)$$

que es una función uniparamétrica que reescala el argumento de  $\bar{\phi}$  por un factor  $\lambda$ . La energía de  $\phi(\bar{\lambda}x)$  puede ser expresada en términos de la energía cinética y potencial de  $\bar{\phi}(x)$

$$E(\lambda) = \lambda^{2-D}E[\bar{\phi}]_{\text{kin}} + \lambda^{-D}E[\bar{\phi}]_{\text{pot}}. \quad (9)$$

Como vimos, una solución estática de las ecuaciones de movimiento es un punto estacionario de la energía, por lo tanto  $\lambda = 1$  corresponde a un mínimo de la función, lo que implica que

$$\left. \frac{dE(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = (2-D)E[\bar{\phi}]_{\text{kin}} - DE[\bar{\phi}]_{\text{pot}} = 0. \quad (10)$$

Para  $D = 1$  tenemos que  $E[\bar{\phi}]_{\text{kin}} = E[\bar{\phi}]_{\text{pot}}$ , por lo tanto solitones estáticos pueden existir para teorías en una dimensión espacial, en  $D = 2$  tenemos que  $E[\bar{\phi}]_{\text{pot}} = 0$ , por lo tanto  $\bar{\phi}$  corresponden a los mínimos del potencial y para  $D \geq 3$  necesariamente tenemos que  $E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} = 0$ , con tal que (10) se cumpla.



## Apéndice B: Ecuaciones de Skyrme

Las ecuaciones de Skyrme son obtenidas extremizando la densidad lagrangiana con respecto a  $U$ , esto es

$$\delta\mathcal{L} = \delta \text{Tr} \left( \frac{1}{2} R_\mu R^\mu + \frac{\lambda}{16} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (11)$$

$$= \text{Tr} \left( \delta R_\mu R^\mu + \frac{\lambda}{8} \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (12)$$

donde en la última ecuación hemos usado la ciclicidad de la traza. Notemos que

$$\text{Tr}(\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \text{Tr}(2\delta(R_\mu R_\nu) F^{\mu\nu}) = \text{Tr}(2\delta R_\mu [R_\nu, F^{\mu\nu}]). \quad (13)$$

Por lo tanto podemos reescribir el lagrangiano como

$$\delta\mathcal{L} = \text{Tr} \left[ \delta R_\mu \left( R^\mu + \frac{\lambda}{4} [R_\nu, F^{\mu\nu}] \right) \right]. \quad (14)$$

Ahora probaremos una fórmula que nos será de utilidad, expresemos el vector  $R_\mu = U^{-1} \nabla_\mu U$  y consideremos un vector arbitrario  $C^\mu$ . Encontramos que

$$\text{Tr}(\delta R_\mu C^\mu) = \text{Tr}(\delta(U^{-1} \nabla_\mu U) C^\mu), \quad (15)$$

$$= \text{Tr}(\delta U^{-1} \nabla_\mu U C^\mu + U^{-1} \nabla_\mu \delta U C^\mu), \quad (16)$$

$$= \text{Tr}(-U^{-1} \delta U R_\mu C^\mu + R_\mu U^{-1} \delta U C^\mu - U^{-1} \delta U \nabla_\mu C^\mu) + \text{B.T.}, \quad (17)$$

$$= \text{Tr}(U^{-1} \delta U ([C^\mu, R_\mu] - \nabla_\mu C^\mu)). \quad (18)$$

Usando (18) en la ecuación (14) y tomando en cuenta que  $[R_\mu, R^\mu] = [R_\mu, [R_\nu, F^{\mu\nu}]] = 0$  llegamos a

$$\delta L = \text{Tr} \left( U^{-1} \delta U \left( \nabla_\mu R^\mu + \frac{\lambda}{4} \nabla_\mu [R_\nu, F^{\mu\nu}] \right) \right). \quad (19)$$

Finalmente encontramos que las ecuaciones de Skyrme son

$$\nabla_\mu R^\mu + \frac{\lambda}{4} \nabla_\mu [R_\nu, F^{\mu\nu}] = 0. \quad (20)$$

# Apéndice C: Ecuaciones de Skyrme-mesones Rho

La variación del lagrangiano definido en, con respecto a los campos fundamentales  $U$  y  $A_\mu$  lleva a

$$\delta\mathcal{L} = \text{Tr} \left\{ c_1 \delta R_\mu R^\mu + \frac{c_2}{8} \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \\ + \text{Tr} \left\{ 2a_2 \delta A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\delta S_{\mu\nu} O_1^{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu} O_2^{\mu\nu} + \delta L_{\mu\nu} O_3^{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu} O_4^{\mu\nu}) \right\},$$

donde hemos definido los tensores antisimétricos  $O_i^{\mu\nu}$  como:

$$\frac{1}{2} O_1^{\mu\nu} = 2a_1 S^{\mu\nu} + c_3 G^{\mu\nu} - c_6 F^{\mu\nu} + a_9 L^{\mu\nu}, \\ \frac{1}{2} O_2^{\mu\nu} = c_3 S^{\mu\nu} + 2c_4 G^{\mu\nu} - c_7 F^{\mu\nu} + a_{10} L^{\mu\nu}, \\ \frac{1}{2} O_3^{\mu\nu} = a_9 S^{\mu\nu} + a_{10} G^{\mu\nu} + a_8 F^{\mu\nu} + 2c_5 L^{\mu\nu}, \\ \frac{1}{2} O_4^{\mu\nu} = -c_6 S^{\mu\nu} - c_7 G^{\mu\nu} + a_8 L^{\mu\nu}.$$

Es directo verificar que

$$\text{Tr}(\delta S_{\mu\nu} O_1^{\mu\nu}) = 2\text{Tr}(\delta A_\mu \nabla_\nu O_1^{\mu\nu}), \\ \text{Tr}(\delta G_{\mu\nu} O_2^{\mu\nu}) = 2\text{Tr}(\delta A_\mu [A_\nu, O_2^{\mu\nu}]), \\ \text{Tr}(\delta L_{\mu\nu} O_3^{\mu\nu}) = 2\text{Tr}(\delta R_\mu [A_\nu, O_3^{\mu\nu}] - \delta A_\mu [O_3^{\mu\nu}, R_\nu]), \\ \text{Tr}(\delta F_{\mu\nu} O_4^{\mu\nu}) = 2\text{Tr}(\delta R_\mu [R_\nu, O_4^{\mu\nu}]).$$

Ahora, reemplazando esto en la variación anterior y reagrupando términos, encontramos que

$$\delta\mathcal{L} = \text{Tr} \left\{ \delta R_\mu \left( c_1 R^\mu + \frac{c_2}{4} [R_\nu, F^{\mu\nu}] - [O_3^{\mu\nu}, A_\nu] - [O_4^{\mu\nu}, R_\nu] \right) \right\} \\ + \text{Tr} \left\{ \delta A_\mu \left( \nabla_\nu O_1^{\mu\nu} + 2a_2 A^\mu - [O_2^{\mu\nu}, A_\nu] - [O_3^{\mu\nu}, R_\nu] \right) \right\}.$$

Usando la fórmula encontrada anteriormente

$$\text{Tr}(\delta R_\mu C^\mu) = \text{Tr}(U^{-1} \delta U ([C^\mu, R_\mu] - \nabla_\mu C^\mu)),$$

encontramos que

$$\delta\mathcal{L} = \text{Tr} \left\{ U^{-1} \delta U \left( -c_1 \nabla_\mu R^\mu - \frac{c_2}{4} \nabla_\mu [R_\nu, F^{\mu\nu}] + \nabla_\mu E_1^\mu - [E_1^\mu, R_\mu] \right) \right\} \\ + \text{Tr} \left\{ \delta A_\mu \left( \nabla_\nu O_1^{\mu\nu} + 2a_2 A^\mu - E_2^\mu \right) \right\},$$

Donde las cantidades dentro de los paréntesis corresponden a las ecuaciones del movimiento (4.5) and (4.6) y los tensores  $E_i^\mu$  son definidos como

$$\begin{aligned} E_1^\mu &= [O_3^{\mu\nu}, A_\mu] + [O_4^{\mu\nu}, R_\nu] \\ &= [S^{\mu\nu}, 2a_9 A_\nu - 2c_6 R_\nu] + [G^{\mu\nu}, 2a_{10} A_\nu - 2c_7 R_\nu] + 2a_8 [F^{\mu\nu}, A_\nu] + [L^{\mu\nu}, 4c_5 A_\nu + 2a_8 R_\nu], \\ E_2^\mu &= [O_2^{\mu\nu}, A_\nu] + [O_3^{\mu\nu}, R_\nu] \\ &= [S^{\mu\nu}, 2c_3 A_\nu + 2a_9 R_\nu] + [G^{\mu\nu}, 4c_4 A_\nu + 2a_{10} R_\nu] + [F^{\mu\nu}, -2c_7 A_\nu + 2a_8 R_\nu] + [L^{\mu\nu}, 2a_{10} A_\nu + 4c_5 R_\nu]. \end{aligned}$$

También, el tensor energía momentum de la teoría es

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{Sk}} + T_{\mu\nu}^{\rho} + T_{\mu\nu}^{\text{int}}, \quad (21)$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{\text{Sk}} = \text{Tr} \left[ -c_1 \left( R_\mu R_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_\alpha R^\alpha \right) - \frac{c_2}{4} \left( F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \right], \quad (22)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\rho} &= \text{Tr} \left[ -4a_1 \left( S_\mu^\alpha S_{\nu\alpha} - \frac{g_{\mu\nu}}{4} S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \right) - 2a_2 \left( A_\mu A_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A_\alpha A^\alpha \right) \right. \\ &\quad \left. - 2c_3 \left( S_\mu^\alpha G_{\nu\alpha} + S_\nu^\sigma G_{\mu\sigma} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} S_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} \right) - 4c_4 \left( G_\mu^\sigma G_{\nu\sigma} - \frac{g_{\mu\nu}}{4} G_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} \right) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\text{int}} &= \text{Tr} \left[ -2 \left( L_\mu^\sigma M_{\nu\sigma} + L_\nu^\sigma M_{\mu\sigma} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} L_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} \right) + 2c_6 \left( F_\mu^\sigma S_{\nu\sigma} + F_\nu^\sigma S_{\mu\sigma} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} F_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2c_7 \left( F_\mu^\sigma G_{\nu\sigma} + F_\nu^\sigma G_{\mu\sigma} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} F_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} \right) \right], \end{aligned} \quad (24)$$

y

$$M_{\mu\nu} = c_5 L_{\mu\nu} + a_8 F_{\mu\nu} + a_9 S_{\mu\nu} + a_{10} G_{\mu\nu}.$$

## Ecuaciones de campo para el ansatz tipo meron genérico

Para nuestro ansatz  $A_\mu = \lambda(x)R_\mu$  los tensores  $S_{\mu\nu}$ ,  $G_{\mu\nu}$ ,  $L_{\mu\nu}$  se reducen a

$$S_{\mu\nu} = \lambda F_{\nu\mu} + \nabla_\mu \lambda R_\nu - \nabla_\nu \lambda R_\mu, \quad G_{\mu\nu} = \lambda^2 F_{\mu\nu}, \quad L_{\mu\nu} = 2\lambda F_{\mu\nu}.$$

Mientras que los tensores  $O_1$  y  $E_i$  se reducen a

$$\begin{aligned} O_1^{\mu\nu} &= P_1(\lambda) F^{\mu\nu} + 4a_1 (\nabla^\mu \lambda R^\nu - \nabla^\nu \lambda R^\mu), \\ E_1^\mu &= 2 \left[ \lambda \frac{O_3^{\mu\nu}}{2} + \frac{O_4^{\mu\nu}}{2}, R_\nu \right], \\ &= -(P_2(\lambda) - c_2/4) [R_\nu, F^{\mu\nu}] - 2(a_9 \lambda - c_6) \nabla_\nu \lambda F^{\mu\nu}, \\ E_2^\mu &= 2 \left[ \lambda \frac{O_2^{\mu\nu}}{2} + \frac{O_3^{\mu\nu}}{2}, R_\nu \right], \\ &= -P_3(\lambda) [R_\nu, F^{\mu\nu}] - 2(c_3 \lambda + a_9) \nabla_\nu \lambda F^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

donde los polinomios  $P_i(\lambda)$  son dados por

$$\begin{aligned} P_1(\lambda) &= 2c_3 \lambda^2 + 4(a_9 - a_1) \lambda - 2c_6, \\ P_2(\lambda) &= 2a_{10} \lambda^3 + 2(4c_5 - a_9 - c_7) \lambda^2 + 2(c_6 + a_8 + 2a_{10}) \lambda + \frac{c_2}{4}, \\ P_3(\lambda) &= 4c_4 \lambda^3 + 2(3a_{10} - c_3) \lambda^2 + 2(a_9 - c_7 + 2c_5) \lambda + 2a_8. \end{aligned}$$



Finalmente, las ecuaciones para  $A_\mu$  y  $U$  son dados por

$$\begin{aligned}
 & P_1(\lambda)\nabla_\nu F^{\mu\nu} + 2a_2\lambda R^\mu + P_3(\lambda)[R_\nu, F^{\mu\nu}] + (P'_1 + 2c_3\lambda + 2a_9)\nabla_\nu\lambda F^{\mu\nu} \\
 & \quad + 4a_1(\nabla_\nu\nabla^\mu\lambda R^\nu + \nabla^\mu\lambda\nabla_\nu R^\nu - \square\lambda R^\mu - \nabla^\nu\lambda\nabla_\nu R^\mu) = 0, \\
 & \quad c_1\nabla_\mu R^\mu + P_2(\lambda)\nabla_\mu[R_\nu, F^{\mu\nu}] \\
 & + (P'_2 - 2(a_9\lambda - c_6))\nabla_\mu\lambda[R_\nu, F^{\mu\nu}] + 2(a_9\lambda - c_6)(\nabla_\mu\nabla_\nu\lambda F^{\mu\nu} + \nabla_\nu\lambda\nabla_\mu F^{\mu\nu}) = 0.
 \end{aligned}$$



# Apéndice D: Caso estático para el segundo caso

Fijando los coeficientes como

$$c_1 \rightarrow \frac{1}{6}, c_2 \rightarrow \frac{1}{6}, c_5 \rightarrow \frac{3}{80}, c_6 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{24}, c_7 \rightarrow \frac{1}{20}, c_8 \rightarrow 1, m \rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad (25)$$

obtenemos las regiones de realidad de las raíces de  $P(\lambda)$ , en la figura 1.

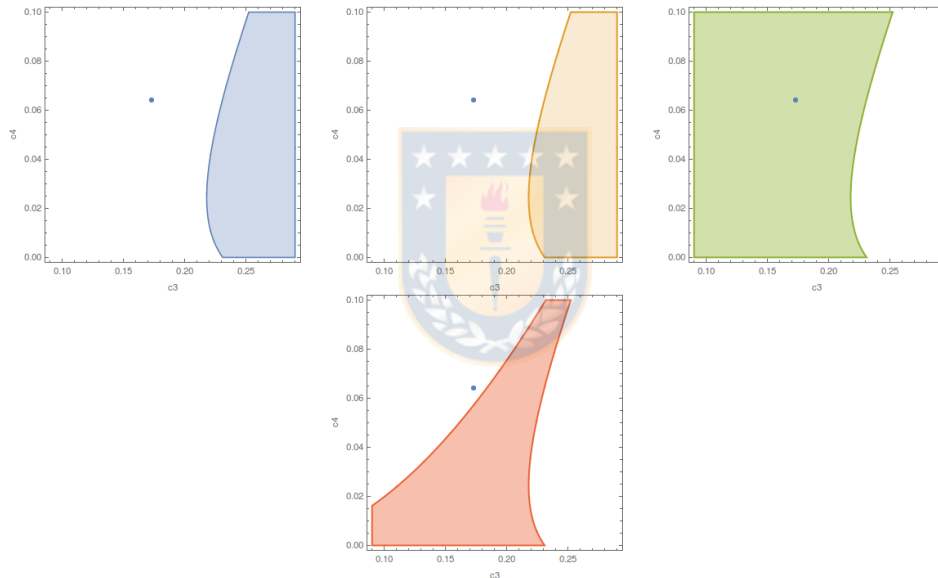


Figura 1: Región de existencia y realidad de las raíces de  $P(\lambda)$  que llevan a un factor de escala positivo para el conjunto de parámetros (25) y diferentes valores de  $c_3$  and  $c_4$ , y para cada rama  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  (azul, naranja, verde y rojo respectivamente). El punto azul corresponde a  $(c_3, c_4) = (0,153,0,05)$  reportado en [29].