



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
CIENCIAS FÍSICAS

**CRECIMIENTO OSCILATORIO EN PLASMAS
ELECTROSTÁTICOS NO MAGNETIZADOS CON
MÚLTIPLES CORRIENTES CONTRAPROPAGANTES**

Tesis presentada para optar al título profesional de Físico

Por: Jorge Abraham Gidi Chomalí
Profesor Guía: Dr. Roberto Elías Navarro Maldonado

14 de abril de 2020
Concepción, Chile

Agradecimientos

Habría sido impensable siquiera ingresar a esta carrera si no fuera por el constante apoyo de mi familia. Gracias Mamá por motivarme desde pequeño y enseñarme el valor del estudio y el esfuerzo, y gracias Papá por enseñarme que “todas las cosas funcionan por algo”. Gracias Vicky y Leyla, por mostrarme mediante el ejemplo que la constancia te puede llevar a donde quieras (¡y gracias por enseñarme los grados Calbon!). Gracias Catita y Nachito porque me hacen querer ser un ejemplo para ustedes.

Cada año de estudio en la Universidad de Concepción me ha permitido aprender de grandes personajes. El primero de ellos fue el profesor Joaquín, a quien considero un ejemplo como persona y como profesional. Luego, con el paso de los años, pude conocer al profesor César y al profesor Félix, a quienes puedo acudir tanto para pedir consejo académico como para compartir alguna anéctoda.

Agradezco haber conocido a quienes hoy son mis tutores: El profesor Roberto, a quien nunca le falta motivación para participar de mis ideas, por mas descabe-lladas que estas sean, y al profesor Jaime, que con su basta experiencia vislumbra rápidamente lo que parece estar oculto para el resto de nosotros.

Quiero agradecer a los todos amigos que hoy en día me acompañan, pero si uno merece mención especial por el apoyo que me ha brindado a lo largo de la carrera, es Hugo. También quiero dar gracias a todas las personas que, aunque quizás ya no formen parte de mi día a día, me enseñaron algo en el camino.

No menos importante, quiero agradecer a cada una de las personas que trabaja

en esta universidad, porque siempre me han tratado con respeto y han hecho mas de lo necesario por ayudarme cuando lo he necesitado.

Gracias Alexandra por permitir que personas de todo el mundo puedan aprender, y formar parte de la noble causa que constituye expandir y divulgar el conocimiento humano.

Finalmente, agradezco a la Universidad de Concepción por el gran apoyo económico concedido mediante la Beca Enrique Molina Garmendia, así como al Ministerio de Educación de Chile por la Beca Puntaje PSU.



*A mi familia, porque esta carrera fue un esfuerzo compartido,
a mi equipo de trabajo, por su calidad humana y apoyo incondicional,
y a todos quienes intentan hacer de la información un bien de uso público.*



Índice general

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema	1
1.2. Hipótesis	2
1.3. Objetivos	2
1.3.1. Objetivo general	2
1.3.2. Objetivos específicos	2
1.4. Metodología y organización	3
2. Marco Teórico Conceptual	5
2.1. Sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson	5
2.2. Ondas en un plasma no magnetizado	7
2.2.1. Teoría Lineal	7
2.2.2. Formación de ondas estacionarias	12
2.2.3. Efectos no-lineales	13
2.3. Simulaciones de Vlasov-Poisson	14
2.3.1. Sistema de ecuaciones adimensionalizado	15
2.3.2. Integradores simplécticos	16
2.3.3. Solución de las ecuaciones de advección	19
2.3.4. Cálculo de la fuerza electrostática	21
2.3.5. Control de validez de las simulaciones	21

3. Resultados	23
3.1. Casos simulados	23
3.1.1. Parámetros de las simulaciones	23
3.1.2. Confirmación del fenómeno de crecimiento oscilatorio	24
3.1.3. Modos dominantes en el espacio	24
3.1.4. Caracterización de la inestabilidad	25
3.2. Predicciones de la teoría lineal	25
3.3. Comparación entre predicción lineal y simulaciones	28
3.4. Observación del mecanismo físico	29
4. Conclusiones	36
Apéndices	37
A. Convenciones	37
A.1. Cantidades útiles	37
A.2. Gradiente con respecto a un vector	38
A.3. Transformada de Fourier	39
B. Validez de simulaciones realizadas	40
Bibliografía	41



Índice de tablas

3.1. Caracterización del crecimiento de la energía electrostática.	28
3.2. Modos más excitados según ecuación (2.10).	28
3.3. Comparación de los modos inestables predichos por teoría lineal y la inestabilidad observada en la energía electrostática en simulaciones. Se resume información de las Tablas 3.1 y 3.2.	29



Índice de figuras

2.1. Parte real (a) e imaginaria (b) de la frecuencia, ω , en función del número de onda, k , de perturbaciones permitidas en un plasma de electrones Maxwelliano, según relación de dispersión (2.11). Líneas negras representan modos de Langmuir y líneas grises representan modos pseudo-acústicos.	9
2.2. Parte real (a) e imaginaria (b) de la frecuencia, ω , en función del número de onda, k , de perturbaciones permitidas en una distribución de electrones tipo <i>bump-on-tail</i> según relación de dispersión (2.12).	11
3.1. Energías electrostáticas obtenidas para cada caso simulado. Dado que se excita inestabilidades con diferentes tasas de crecimiento, cada imagen se muestra con su propia escala temporal.	26
3.2. Descomposición espectral del campo eléctrico en función del tiempo. Se muestran los primeros 5 modos espaciales. Cada imagen tiene su propia escala temporal.	27
3.3. Soluciones de la relación de dispersión lineal para la simulación (i). Rombos rojos denotan la configuración de la onda más excitada.	31
3.4. Soluciones de la relación de dispersión lineal para la simulación (ii). Rombos rojos denotan la configuración de la onda más excitada.	32
3.5. Soluciones de la relación de dispersión lineal para la simulación (iii). Rombos rojos denotan la configuración de la onda más excitada.	33

3.6. Comparación de las energías electrostáticas simuladas y las predichas mediante la ecuación (2.14). En cada caso se muestra el rango temporal correspondiente a su propia fase de crecimiento exponencial. Además, se ajustó la amplitud inicial, E_0 , además de añadir una fase constante.	34
3.7. Función de distribución en instantes cercanos a máximos locales, (a), (c), y (e), y mínimos locales (b), (d) y (e), de energía electrostática. Rango de tiempo posterior a la fase de crecimiento exponencial de la simulación (i).	35
B.1. Variación relativa de la energía total (a) y el número de partículas (b) en la simulación (i).	40
B.2. Variación relativa de la energía total (a) y el número de partículas (b) en la simulación (ii).	41
B.3. Variación relativa de la energía total (a) y el número de partículas (b) en la simulación (iii).	41



Resumen

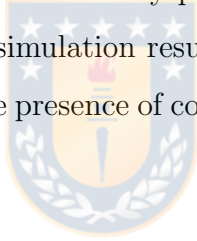
Se utilizan simulaciones unidimensionales del sistema de Vlasov-Poisson para estudiar el crecimiento oscilatorio de la energía eléctrica en plasmas electrostáticos no magnetizados compuestos por corrientes contrapropagantes de electrones. Una explicación para esta modulación es propuesta en base a la formación de ondas estacionarias, debido a la excitación de modos simétricos en el espacio de fases.

Mediante teoría cinética se describe la dinámica de la inestabilidad en el régimen lineal y, por comparación con los resultados obtenidos de las simulaciones, se concluye que el crecimiento oscilatorio puede, en efecto, ser explicado por la existencia de ondas estacionarias de frecuencia cero o distinta de cero.

Abstract

One-dimensional simulations of the Vlasov-Poisson system of equations are used to study the oscillatory growth behavior of the electric energy in electrostatic and unmagnetized counter-streaming plasmas. An explanation for this modulation is proposed based on the formation of standing waves, because of the excitation of symmetric modes on the phase-space.

By using kinetic theory, the instability process is described in the linear regime and, by comparison with the simulation results, it is concluded that the oscillatory growth can be explained by the presence of counterpropagating waves with frequency zero or different from zero.



Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento del problema

Las inestabilidades por múltiples corrientes son un fenómeno de gran relevancia en la física de plasmas. Estas, por ejemplo, constituyen el mecanismo de formación de estructuras coherentes detectadas en la ionosfera auroral [1], y son utilizadas para generar *shocks* electrostáticos a partir de plasmas producidos por láser en laboratorios [2]. Así, es claro que resulta crucial conocer los mecanismos que forman parte de esta inestabilidad.

En un reciente reporte de Hou *et. al.* [3], se utilizó simulaciones de Vlasov-Poisson con condiciones de borde periódicas para estudiar casos con 3, 4 y 5 corrientes contrapropagantes, respectivamente. A partir de los estudios mencionados, se concluyó que las inestabilidades pasaban por un periodo de crecimiento exponencial, y luego llegaban a un estado de saturación no lineal. Mas aún, se reportó que el crecimiento de la energía total de la onda, además de ser exponencial, es oscilatorio cuando la función de distribución inicial tiene un número impar de corrientes. Es importante mencionar que en su trabajo no se da explicación al fenómeno de crecimiento oscilatorio. En vista de lo anterior, el propósito de este trabajo es el de responder la

pregunta: ¿Cuál es el mecanismo que origina la modulación de la energía eléctrica en la inestabilidad producida por plasmas electrostáticos consistentes en múltiples corrientes contrapropagantes?

1.2. Hipótesis

El comportamiento oscilatorio durante la evolución electrostática de plasmas no magnetizados en presencia de múltiples corrientes se debe a la formación de ondas estacionarias.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Comprobar que el comportamiento oscilatorio durante el crecimiento electrostático en plasmas no magnetizados consistentes de un número impar de corrientes contrapropagantes, puede ser explicado mediante la formación de ondas estacionarias predichas por la teoría cinética lineal.

1.3.2. Objetivos específicos

- Escribir un código de Vlasov-Poisson que permita realizar simulaciones de plasmas electrostáticos no magnetizados.
- Reproducir casos de crecimiento oscilatorio de la energía en plasmas de múltiples corrientes.
- Caracterizar el crecimiento oscilatorio en cada uno de los casos.
- Proponer qué mecanismo físico origina el crecimiento oscilatorio de la energía electrostática.

- Emplear el mecanismo propuesto en conjunto con la teoría cinética lineal para predecir el comportamiento de los casos presentados.
- Contrastar las predicciones teóricas con los datos obtenidos de las simulaciones.

1.4. Metodología y organización

Se escribirá una librería de código computacional que permita resolver directamente el sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson utilizando condiciones de borde periódicas, esquemas de integración simpléctica e interpolación por métodos espectrales.

Este código estará escrito en el lenguaje de programación Julia [4], debido a que está registrado bajo licencia MIT (abierta), utiliza instrucciones de alto nivel, es interactivo, rápido, y posee un ecosistema lo suficientemente amplio para realizar las simulaciones propuestas y analizar sus resultados con relativa facilidad.

El código mencionado correrá en una computadora portátil de marca DELL, modelo Latitude e7470 de 8 Gb de memoria RAM, procesador Intel i7-6600U de 3,4 GHz y 4 hilos, y sistema operativo Linux de 64 bits con versión de kernel 5.5.13-arch1-1. Adicionalmente, la librería será ejecutada utilizando los binarios de la versión 1.3.1 del lenguaje de programación.

Se reproducirá los casos reportados por Hou *et. al.* [3] de plasmas con corrientes contrapropagantes en que existe crecimiento oscilatorio de la energía electrostática.

Se propondrá un mecanismo físico que explique la ocurrencia del crecimiento oscilatorio, y se utilizará elementos básicos de la teoría cinética lineal para predecir el comportamiento de las simulaciones realizadas. Finalmente, se contrastarán las predicciones de la teoría lineal con los resultados de las simulaciones, y se mostrará

evidencia de la formación de ondas estacionarias.

Debido al modelo que se utiliza, el estudio realizado en este trabajo sólo será válido para plasmas no colisionales. Adicionalmente, estos se restringirán a aquellos en donde la dinámica producida por la presencia de campos magnéticos sea despreciable, como lo que ocurre a lo largo de las líneas de campo magnético en plasmas electrostáticos. Ejemplos concretos pueden ser plasmas ionosféricos [1], o algunos plasmas inducidos por láser de alta energía [2].

El documento se organiza de la siguiente manera: En el Capítulo 2 se introducirá el modelo de estudio, se repasarán conceptos básicos de teoría lineal hasta llegar al concepto de inestabilidad *bump-on-tail* y se propondrá un mecanismo que explique el crecimiento oscilatorio en plasmas electrostáticos consistentes en múltiples corrientes de electrones contrapropagantes. Además, se mostrará la construcción de los métodos utilizados para realizar simulaciones de Vlasov-Poisson. En el Capítulo 3 se presentarán los resultados de las simulaciones realizadas, se caracterizará la inestabilidad observada y se comparará con las predicciones teóricas. Finalmente, en el Capítulo 4 se resumirá los hallazgos y cómo estos responden a la hipótesis planteada.

Capítulo 2

Marco Teórico Conceptual

En este capítulo se dará la información necesaria para comprender la hipótesis de trabajo, y los métodos utilizados para estudiarla. Primero, se especificará el modelo analítico utilizado para estudiar plasmas no-magnetizados. Luego, se mostrará como utilizar el modelo descrito para estudiar las ondas que pueden propagarse en el plasma. Así mismo, se mencionará efectos importantes, como el de crecimiento oscilatorio de la energía electrostática, el cual es medular en este trabajo, y se introducirá un posible mecanismo que lo explique. Por último, se expondrá el algoritmo utilizado para poder resolver el modelo numéricamente.

2.1. Sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson

La ecuación de Vlasov es una ecuación de conservación que nace de la teoría cinética, dando la descripción estadística de una colección de partículas en donde no existe interacción directa entre ellas; cada partícula es afectada sólo por los campos producidos colectivamente por el sistema.

Esta ecuación, propuesta por Anatoli Vlasov en un pionero estudio de las propiedades vibracionales de un gas de electrones en 1937[5], es a veces también llamada ecuación de Boltzmann no colisional, y viene dada para cada especie de partículas

como

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \vec{x}} + \vec{F}_j \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (2.1)$$

donde f_j es la función de distribución de especie j , sujeta a la fuerza conservativa \vec{F}_j .

Para modelar la evolución electrostática de plasmas no magnetizados, en este trabajo se utilizará el sistema de Vlasov-Poisson, lo que significa que el término de forzamiento, \vec{F}_j , corresponderá a la fuerza de Lorentz sin campo magnético,

$$\vec{F}_j = \frac{q_j}{m_j} \vec{E}, \quad (2.2)$$

donde el campo eléctrico es fijado autoconsistentemente de acuerdo a la ecuación de Faraday (2.3) sin inducción magnética y la ley de Gauss (2.4), respectivamente,

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (2.4)$$

con la densidad de carga total, ρ , dada por

$$\rho = \sum_j q_j \int f_j d^3v. \quad (2.5)$$

Vale la pena mencionar otros acoples famosos de la ecuación de Vlasov, cómo el sistema de Vlasov-Maxwell, utilizado para modelar plasmas no colisionales cuando existe inducción magnética, cuyo término de forzamiento es calculado mediante solución del set completo de las ecuaciones de Maxwell [6], o el sistema de Vlasov-Einstein, que modela sistemas gravitantes con efectos relativistas, y obtiene su término de forzamiento a partir de las ecuaciones de Einstein de la relatividad general [7].

2.2. Ondas en un plasma no magnetizado

2.2.1. Teoría Lineal

Si se asume que el plasma se encuentra en torno a un estado homogéneo de equilibrio, y sólo se permiten desviaciones lineales

$$f_j(\vec{x}, \vec{v}, t) = f_j^0(\vec{v}) + \delta f_j(\vec{x}, \vec{v}, t), \quad (2.6)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \delta \vec{E}(\vec{x}, t), \quad (2.7)$$

donde las funciones de distribución en equilibrio, f_j^0 , satisfacen *cuasineutralidad*,

$$\rho^0 = \sum_j q_j \int f_j^0 d^3v = 0, \quad (2.8)$$

el sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson (2.1– 2.5), puede ser linealizado para obtener la relación de dispersión electrostática lineal [8],

$$1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{k^2} \int \frac{\vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} f_j^0}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}} d^3v = 0. \quad (2.9)$$

En este punto es interesante mencionar que la última integral es singular cuando $\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}$, y por tanto no está bien definida si se exige que tanto la frecuencia, ω , como el número de onda, \vec{k} , de la perturbación tengan valores reales. Esto trajo problemas a Vlasov [5], y fue posteriormente resuelto por Landau [9] al considerar esta derivación como un problema de valor inicial.

En la práctica, usualmente se considera el número de onda, \vec{k} , como un vector real y la frecuencia, ω , como un escalar complejo,

$$\omega = \omega_r + i\gamma,$$

donde ω_r corresponde a la frecuencia de la oscilación y γ corresponde a la tasa de crecimiento de la onda.

Es bastante común considerar funciones de distribución de forma Maxwelliana,

$$f_j(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}^3 v_{tj}^3} \exp\left(-\frac{(\vec{v} - \vec{V}_{dj})^2}{v_{tj}^2}\right),$$

con las cuales es posible reescribir la relación de dispersión como

$$\sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{k^2 v_{tj}^2} Z' \left(\frac{\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_{dj}}{k v_{tj}} \right) = 1, \quad (2.10)$$

donde \vec{V}_{dj} , v_{tj} y ω_{pj} son la velocidad de *drift*, velocidad térmica, y frecuencia de plasmas de la especie j , respectivamente.

A $\xi_j = (\omega - \vec{k} \cdot \vec{V}_{dj}) / k v_{tj}$ se le llama *factor de resonancia* de la especie j , y $Z(\xi)$ es la llamada *función de dispersión de plasmas*, o *función Zeta de Fried y Conte* [10],

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - \xi} dt.$$

Puede ser notado que la relación de dispersión lineal (2.9) sólo considera la contribución de las partículas paralelas a la perturbación del sistema. Esto es, que la dinámica de las perturbaciones electrostáticas en el régimen lineal es inherentemente unidimensional. En vista de lo anterior, y por simplicidad, todos los casos desarrollados a continuación serán unidimensionales.

Equilibrio Maxwelliano

Para un plasma electrón-protón se puede utilizar la aproximación de protones masivos, es decir, que dada la diferencia de masas entre los protones y electrones, en ocasiones es posible despreciar la dinámica de los protones. Haciendo esta aproximación, al introducir la función de distribución Maxwelliana sin *drift* para los electrones,

$$f_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}^3 v_{te}^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_{te}^2}\right),$$

en la relación de dispersión (2.10), se obtiene

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{te}^2} Z' \left(\frac{\omega}{k v_{te}} \right) = 1, \quad (2.11)$$

donde v_{te} es la velocidad térmica de los electrones y ω_{pe} es la frecuencia de plasma electrónico.

Si se considera k como la variable independiente real, entonces la Ecuación (2.11) presenta soluciones complejas $\omega = \omega(k)$. Algunas de estas soluciones son mostradas en la Figura 2.1.

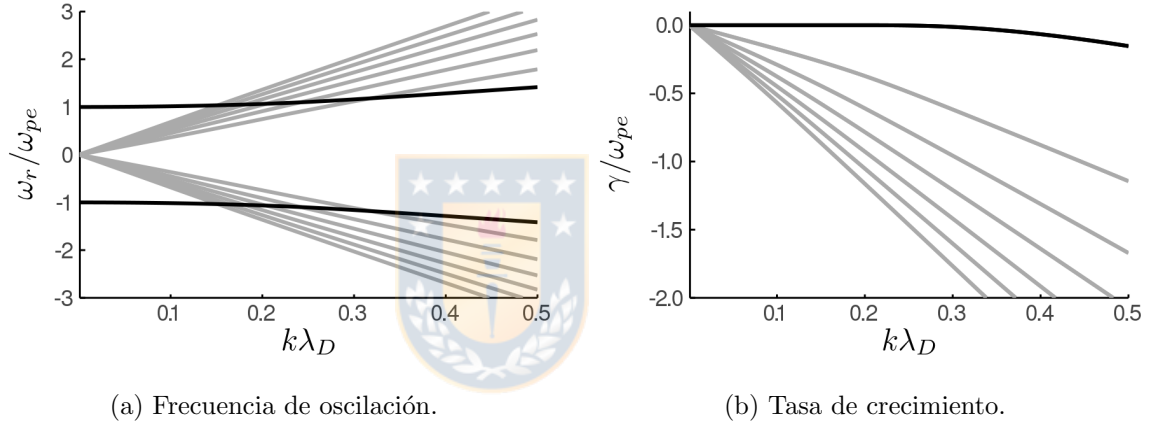


Figura 2.1: Parte real (a) e imaginaria (b) de la frecuencia, ω , en función del número de onda, k , de perturbaciones permitidas en un plasma de electrones Maxwelliano, según relación de dispersión (2.11). Líneas negras representan modos de Langmuir y líneas grises representan modos pseudo-acústicos.

De la figura 2.1a, donde ω_{pe} es la frecuencia de plasma electrónico, y λ_{De} es la longitud de Debye electrónica, se destaca la existencia de dos tipos de soluciones:

- (i) Ramas que cruzan el origen y tienen velocidad de fase aproximadamente constante. Estas frecuencias son ondas llamadas pseudo-acústicas, debido a la similitud de sus formas con las soluciones de la relación de dispersión de ondas

acústicas. De la Figura 2.1b se observa que los modos pseudo-acústicos son altamente amortiguados para todo valor de k .

- (ii) Ramas que cortan el eje de frecuencias en $\pm\omega_{pe}$, cuyas frecuencias corresponden a ondas de Langmuir. Los modos de Langmuir, son aproximadamente estables para $k \ll 1$.

En ningún caso estas soluciones tienen una tasa de crecimiento positiva, $\gamma > 0$, cuando el sistema se encuentra en un equilibrio Maxwelliano sin corrientes.

Este decaimiento de las perturbaciones que se pueden propagar en el plasma es llamado *Landau Damping*, o amortiguamiento de Landau, debido a que fue encontrado analíticamente por Lev Landau en 1946 [9], y tiene un rol muy significativo en la física de plasmas, pues corresponde a un fenómeno de amortiguamiento y permite crear regiones de estabilidad en el espacio de parámetros aún en sistemas conservativos.



Equilibrio *Bump-on-tail*

Es posible añadir al caso anterior un haz (*beam*, también llamado *stream*, o corriente) de electrones con cierta velocidad relativa, V_d ,

$$F_e = \frac{1 - \epsilon}{\sqrt{\pi}^3 v_{te}^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_{te}^2}\right) + \frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}^3 v_{tb}^3} \exp\left(-\frac{(v - V_d)^2}{v_{tb}^2}\right),$$

donde ϵ controla la intensidad del haz, y v_{tb} su ancho térmico.

Introduciendo nuevamente la función de distribución dada en la ecuación (2.10), se obtiene

$$(1 - \epsilon) \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{te}^2} Z' \left(\frac{\omega}{k v_{te}} \right) + \epsilon \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{tb}^2} Z' \left(\frac{\omega - k V_d}{k v_{tb}} \right) = 1. \quad (2.12)$$

Como en el caso anterior, existen soluciones complejas $\omega = \omega(k)$ a la ecuación (2.12), las cuales se muestran en la Figura 2.2 considerando $v_b = v_{te}$ y $V_d = 5v_{te}$.

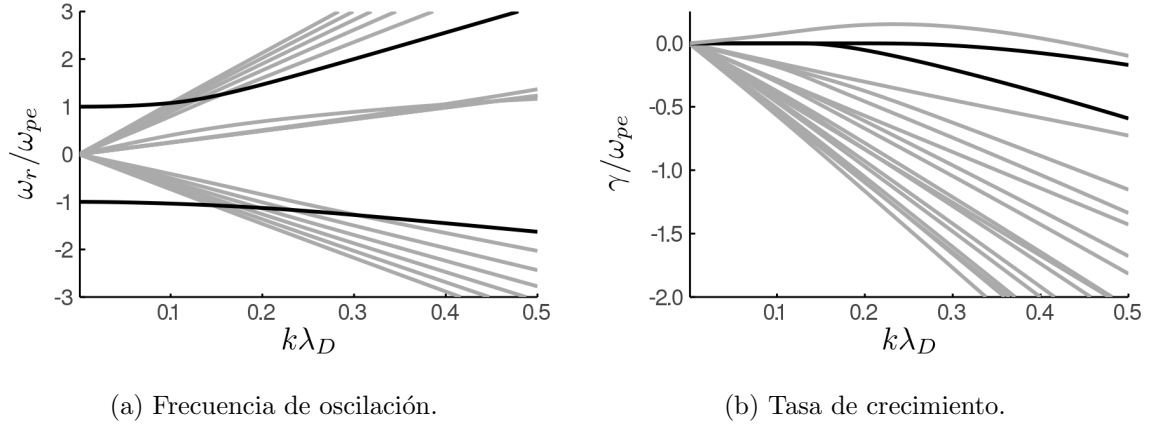


Figura 2.2: Parte real (a) e imaginaria (b) de la frecuencia, ω , en función del número de onda, k , de perturbaciones permitidas en una distribución de electrones tipo *bump-on-tail* según relación de dispersión (2.12).

En la figura 2.2a se observan los mismos tipos de solución que en la figura 2.1a, pero con una clara pérdida de simetría en torno a $\omega_r = 0$ debido a la presencia del haz. Por otro lado, de la figura 2.2b se observa una solución de tipo pseudo-acústico que para cierto rango del número de onda tiene una tasa de crecimiento positivo. Esto significa que la presencia del beam aporta energía libre que puede volver inestables a algunas soluciones. A este crecimiento se le llama inestabilidad *bump-on-tail*, y predice un aumento exponencial de la amplitud de la onda.

De la teoría lineal es sabido que los factores determinantes en cuanto a la estabilidad de una perturbación son su velocidad de fase, $v_\phi = \omega_r/k$, y la pendiente de la función de distribución en ese punto, $\left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{v=\omega_r/k}$. De hecho, haciendo uso de la condición de amortiguación/inestabilidad lenta, $|\gamma/\omega_r| \ll 1$, es posible mostrar que en un plasma de electrones [11]

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \omega_{pe}^2 \left(\frac{\omega_r}{k} \right) \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{v=\omega_r/k}$$

La explicación física es que la interacción entre una partícula de la distribución y

una onda que se propague en el plasma será rápidamente fluctuante, de modo que su esta no será significativa a menos que tengan una velocidad relativa lo suficientemente baja. Cumpliéndose lo anterior, las partículas levemente mas lentas que la onda serán aceleradas, y las partículas levemente mas rápidas que la onda perderán velocidad.

Considerando una onda con velocidad de fase positiva, del argumento anterior se entiende que si hay más partículas rápidas que lentas en la vecindad de la velocidad de la onda, $\frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k} > 0$, entonces la distribución perderá energía cinética y aumentará la amplitud de la onda. Por el contrario, si hay mas partículas lentas que rápidas en la vecindad de la onda, entonces esta perderá energía neta acelerando las partículas.

2.2.2. Formación de ondas estacionarias

Al estudiar una función de distribución simétrica en velocidades, es de esperar que si existen inestabilidades, estas sean excitadas también de manera simétrica.

En base al argumento anterior, considérese la excitación de dos modos idénticos pero con velocidades opuestas, $(\omega, \pm k)$. En el régimen lineal, se tendrá dos ondas planas asociadas a un campo eléctrico de la forma $E_+ = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$ y $E_- = E_0 e^{i(-kx - \omega t)}$, respectivamente, donde E_0 es la amplitud constante de la onda.

Recordando que la frecuencia característica es en general compleja, $\omega = \omega_r + i\gamma$, el campo eléctrico observado será dado por

$$\begin{aligned} E &= \Re \{ E_+ + E_- \} \\ &= 2E_0 e^{\gamma t} \cos(\omega_r t) \cos(kx). \end{aligned} \quad (2.13)$$

De la última expresión es claro que se obtiene una onda estacionaria, modulada en el espacio como $\cos(kx)$ y cuya amplitud, además de crecer o decrecer exponencialmente en el tiempo dependiendo del signo de γ , oscila con la misma frecuencia que los modos inicialmente excitados.

Mas aún, la energía electrostática estará dada por

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{8\pi} \int E^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} E_0^2 e^{2\gamma} \cos^2(\omega_r t) \int \cos^2(kx) dx, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde, en caso de que los modos excitados sean inestables, $\gamma > 0$, el término $e^{2\gamma}$ dará cuenta de un crecimiento exponencial de la energía con el doble de la tasa de crecimiento de los modos originales, y el término $\cos^2(\omega_r t)$ modulará el crecimiento con el doble de la frecuencia de los modos originales.

En caso de que los modos originales no sean simétricos, es de esperarse que uno de ellos tenga mayor tasa de crecimiento y que domine, de forma que la energía electrostática no muestre un crecimiento oscilatorio considerable.

2.2.3. Efectos no-lineales

Hasta ahora todos los fenómenos han sido tratados linealmente, es decir, se ha considerado una distribución con muy pequeñas desviaciones de su equilibrio y ondas con amplitud infinitesimal. Esto ha permitido predecir el inicio de inestabilidades, pero el tratamiento utilizado se vuelve eventualmente inapropiado cuando la amplitud de las ondas electrostáticas aumenta lo suficiente como para afectar el estado de equilibrio e incluso acoplarse a otras ondas. Cuando esto ocurre, normalmente se llega a un estado de saturación debido a efectos no lineales, como la formación de platós en las regiones de resonancia de la distribución con la inestabilidad, lo que permite anular el intercambio energético neto propio del amortiguamiento de Landau [11]. Es posible que la deformación de la distribución en equilibrio origine también la excitación de muchas longitudes de onda, lo cual puede llevar a estocasticidad en el espacio de fases [12].

2.3. Simulaciones de Vlasov-Poisson

El sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson presenta un número de características que hacen de su resolución un problema no trivial. Algunos de estos problemas son, por ejemplo, que la ecuación de Vlasov presenta una propiedad matemática denominada *stiffness*, lo que significa que es inestable ante ciertos esquemas numéricos a menos que el paso temporal con que se resuelva sea lo suficientemente pequeño para cumplir la condición de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) [13].

Más aún, el acople con las ecuaciones de Maxwell hace que el sistema sea no-lineal, además del hecho de que la función de distribución dependa tanto del espacio de posiciones como velocidades hace que la cantidad de recursos computacionales requeridos para estudiar el sistema, crezcan muy rápidamente.

Con estas dificultades en mente, el autor del presente trabajo desarrolló una librería de código abierto para el lenguaje de programación Julia con el objetivo de ofrecer un entorno de trabajo sencillo que permita resolver el sistema de Vlasov-Poisson considerando casos de 1 o 2 dimensiones espaciales, así como casos con múltiples especies cargadas. Otro objetivo principal es el de proveer de herramientas que permitan estudiar los resultados de las simulaciones de forma genérica.

El nombre de esta librería es “Vlasova.jl”, y a la fecha de escritura de este documento cuenta con una página web¹ donde se provee de documentación (en inglés) para su uso.

En esta sección se explicará en términos generales cómo es que la librería puede resolver el sistema de Vlasov-Poisson. Para esto se mostrará como queda el sistema al ser adimensionalizado, se verá que es posible aproximar la solución de este mediante una serie de ecuaciones mas sencillas, y se abordará la forma de resolverlas. Finalmente, se mencionará de forma breve la existencia de cantidades conservadas, y de cómo estas pueden ser utilizadas como un control de la validez de las simulaciones.

¹<https://jgidi.gitlab.io/Vlasova.jl/> (en desarrollo)

2.3.1. Sistema de ecuaciones adimensionalizado

La ecuación de Vlasov para la especie j , (2.1), y las ecuaciones (2.2)-(2.5) son adimensionalizadas en base a las variables

$$t' = t\omega_{pe}, \quad (2.15a)$$

$$\vec{x}' = \vec{x}/\lambda_{De}, \quad (2.15b)$$

$$\vec{E}' = \frac{|q_e|}{m_e v_{te} \omega_{pe}} \vec{E}, \quad (2.15c)$$

$$\vec{v}'_j = \vec{v}/v_{tj}, \quad (2.15d)$$

$$f'_j = f_j/n_j v_{tj}^3, \quad (2.15e)$$

donde m_e es la masa del electrón, q_e la carga del electrón, ω_{pe} la frecuencia de plasma electrónico, λ_{De} la longitud de Debye electrónica, v_{tj} la velocidad térmica de la especie j , y n_j la densidad de la especie j . De esta forma se obtiene el sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson adimensionalizado,

$$\frac{\partial f'_j}{\partial t'} + \nu_j \vec{v}'_j \cdot \frac{\partial f'_j}{\partial \vec{x}'} + \frac{\kappa_j}{\mu_j \nu_j} \vec{E}' \cdot \frac{\partial f'_j}{\partial \vec{v}'_j} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}'} \cdot \vec{E}' = \sum_j \kappa_j \int f'_j d^3 v'_j, \quad (2.17)$$

con,

$$\nu_j = v_{tj}/v_{te} \quad (2.18a)$$

$$\kappa_j = q_j/|q_e| \quad (2.18b)$$

$$\mu_j = m_j/m_e. \quad (2.18c)$$

Si bien en esta página se utilizaron cantidades primadas para denotar variables adimensionalizadas y así evitar ambigüedades, a partir de este punto todas las cantidades del capítulo serán adimensionales, y por tanto, ya no serán primadas.

Plasma de electrones y protones

A modo de ejemplo, un plasma de electrones ($j = e$) y protones ($j = p$), sería representado por el sistema de ecuaciones adimensionalizado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{x}} - \vec{E} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}_e} &= 0 \\ \frac{\partial f_p}{\partial t} + \vec{v}_p \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \vec{x}} + \frac{1}{\mu_p \nu_p} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \vec{v}_p} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{E} &= \int f_p d^3 v_p - \int f_e d^3 v_e, \end{aligned}$$

con $\mu_p = m_p/m_e$ la relación entre las masas del protón y el electrón, y $\nu_p = v_{tp}/v_{te}$ la relación entre las velocidades térmicas de los protones y electrones.

Notar que, a diferencia de lo usualmente encontrado en la literatura, se ha añadido un grado de libertad al adimensionalizar la velocidad para cada especie con respecto a su propia velocidad térmica. Esto sirve para evitar errores numéricos al considerar especies con temperaturas muy diferentes, como es común que ocurra entre electrones y protones.

2.3.2. Integradores simplécticos

Los integradores simplécticos son esquemas de integración numérica diseñados para resolver sistemas Hamiltonianos, de modo que una característica principal de estos esquemas es que son construidos teniendo en consideración que la energía debe conservarse. De hecho, estos acotan el error de la misma en el tiempo[14], lo cual resulta particularmente útil en la integración (sobre todo a intervalos largos) de sistemas conservativos.

A continuación se mostrará el modo de construir esquemas de integración simplécticos para el caso de la ecuación de Vlasov: La ecuación de Vlasov (2.16) puede ser reescrita como

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = (L_j + N_j) f_j, \quad (2.19)$$

donde L_j y N_j son operadores diferenciales dados por

$$\begin{aligned} L_j &= -\nu_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \\ N_j &= -\frac{\kappa_j}{\mu_j \nu_j} \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_j}, \end{aligned}$$

pero dado que la ecuación de Vlasov define las curvas características a lo largo de las cuales se conserva la función de distribución, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d(L_j + N_j)}{dt} &= \frac{dN_j}{dt} \\ &= \frac{\partial N_j}{\partial f} \frac{df}{dt} \\ &= 0, \end{aligned}$$

y al ser $(L_j + N_j)$ una constante, la ecuación (2.19) puede ser integrada directamente para obtener

$$f_j(\vec{x}, \vec{v}_j, t + \Delta t) = e^{\Delta t(L_j + N_j)} f_j(\vec{x}, \vec{v}_j, t). \quad (2.20)$$

Mas aún, es posible utilizar utilizar la formula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) para factorizar y aproximar el propagador $e^{\Delta t(L_j + N_j)}$ como un producto de operadores, donde cada uno cuenta con solución analítica exacta.

Dependiendo de la factorización escogida se generará entonces diferentes esquemas de integración simpléctica.

Integrador de segundo orden

Por ejemplo, aproximando el propagador como

$$e^{\Delta t(L_j + N_j)} + O(\Delta t^3) = e^{\frac{\Delta t}{2} N_j} e^{\Delta t L_j} e^{\frac{\Delta t}{2} N_j}$$

es posible expresar la ecuación (2.20) como

$$f_j(\vec{x}, \vec{v}_j, t + \Delta t) \approx e^{\frac{\Delta t}{2} N_j} e^{\Delta t L_j} e^{\frac{\Delta t}{2} N_j} f_j(\vec{x}, \vec{v}_j, t), \quad (2.21)$$

dónde aplicar un propagador e^{aL_j} con a un escalar constante sobre la función de distribución f_j es equivalente a integrar la ecuación de advección

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} - L_j f_j = 0,$$

por un intervalo de tiempo a , y lo mismo es válido para N_j . De esta forma, la ecuación 2.21 provee un algoritmo para aproximar $f_j(\vec{x}, \vec{v}_j, t + \Delta t)$ mediante la integración por medio paso temporal, $\Delta t/2$, de una ecuación de advección en velocidades

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\kappa_j}{\mu_j \nu_j} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \vec{v}_j} = 0, \quad (2.22)$$

luego integrando por un paso temporal, Δt , una ecuación de advección en posiciones

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \nu_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \vec{x}} = 0, \quad (2.23)$$

y finalmente integrando la ecuación de advección de velocidades, (2.22), por otro medio paso de tiempo, $\Delta t/2$. Notar que esto corresponde al bien conocido esquema de integración de Verlet de velocidad [15].

Este esquema de integración es notable no sólo por su simplicidad, sino también porque fue el primer método de *splitting* propuesto para resolver el sistema de ecuaciones de Vlasov-Poisson en el extraordinario artículo de Cheng y Knorr [16], y aún sigue siendo el esquema mas común para integrar sistemas conservativos, incluyendo la ecuación de Vlasov.

Integradores de más alto orden

Es posible construir aproximaciones de más alto orden [17], pero pueden aparecer pasos de tiempo negativos, lo cual es indeseable pues moverse hacia atrás y adelante en el tiempo introduce mayores errores numéricos y aumenta la entropía artificialmente.

De todos modos, es posible evitar la integración de pasos de tiempo negativos al retener el conmutador

$$[N_j, [L_j, N_j]] = -\frac{\kappa_j^2}{\mu_j^2 \nu_j} \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}_j}$$

en la expansión del propagador exponencial de la ecuación (2.20).

Adicionalmente, dado que el conmutador de este ultimo operador con N_j es nulo,

$$[N_j, [N_j, [L_j, N_j]]] = 0,$$

entonces es posible incorporarlo como una simple corrección al término forzante al realizar advección de velocidad.

Un ejemplo de integrador construido con el método indicado es el denominado Chin A [18], que consiste en la resolución de 5 ecuaciones de advección: Primero una advección de velocidad por un sexto de paso temporal, $\Delta t/6$. Luego una advección de posición por medio paso temporal, $\Delta t/2$, seguida de una advección de velocidad con término de forzamiento corregido, $\vec{E}' = \vec{E} + \frac{(\Delta t)^2}{48} \frac{\kappa_j}{\mu_j} \frac{\partial |\vec{E}|^2}{\partial \vec{x}}$, durante dos tercios de paso temporal, $2\Delta t/3$, una advección de posición de medio paso temporal, $\Delta t/2$ y finalmente una advección de velocidad por otro sexto de paso temporal, $\Delta t/6$.

2.3.3. Solución de las ecuaciones de advección

Como fue visto en la sección anterior, existen métodos de *splitting* que permiten aproximar la solución a la ecuación de Vlasov mediante la solución de una secuencia combinada de las dos ecuaciones de advección,

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \nu_j \vec{v}_j \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \vec{x}} = 0, \quad (2.24a)$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\kappa_j}{\mu_j \nu_j} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \vec{v}_j} = 0, \quad (2.24b)$$

las cuales pueden ser fácilmente resueltas por medio de transformadas de Fourier.

Por un lado, transformando la ecuación (2.24a) en la variable espacial, $\vec{x} \rightarrow \vec{k}$, con la transformada de Fourier definida como

$$\begin{aligned}\widehat{f}_j(\vec{k}, \vec{v}_j, t) &= \mathcal{F}\{f_j\}(\vec{k}, \vec{v}_j, t), \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f_j(\vec{x}, \vec{v}_j, t) d^3x,\end{aligned}$$

y utilizando la propiedad de la transformada de Fourier aplicada a la derivada de una función se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \widehat{f}_j(\vec{k}, \vec{v}_j, t)}{\partial t} - i\nu_j \vec{k} \cdot \vec{v}_j \widehat{f}_j(\vec{k}, \vec{v}_j, t) = 0,$$

que tiene solución

$$\widehat{f}_j(\vec{k}, \vec{v}_j, t + \Delta t) = \exp\left(i\Delta t \nu_j \vec{k} \cdot \vec{v}_j\right) \widehat{f}_j(\vec{k}, \vec{v}_j, t), \quad (2.25)$$

y puede ser transformada de vuelta al espacio real usando la transformada de Fourier inversa, definida por

$$\begin{aligned}f_j(\vec{x}, \vec{v}_j, t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}_j\}(\vec{x}, \vec{v}_j, t), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \widehat{f}_j(\vec{k}, \vec{v}_j, t) d^3k,\end{aligned}$$

para proveer la solución analítica a la ecuación (2.24a),

$$f_j(\vec{x}, \vec{v}_j, t + \Delta t) = f_j\left(\vec{x} + \vec{v}_j \nu_j \Delta t, \vec{v}_j, t\right). \quad (2.26)$$

De manera análoga es posible mostrar que la ecuación (2.24b) tiene solución en el espacio de Fourier para las velocidades dada por

$$\widehat{f}_j(\vec{x}, \vec{p}, t + \Delta t) = \exp\left(i\Delta t \frac{\kappa_j}{\mu_j \nu_j} \vec{E} \cdot \vec{p}\right) \widehat{f}_j(\vec{x}, \vec{p}, t), \quad (2.27)$$

donde $\widehat{f}_j(\vec{x}, \vec{p}, t) = \mathcal{F}\{f_j\}(\vec{x}, \vec{v}_j, t)$. Expresión que transformada de vuelta al espacio real equivale a

$$f_j(\vec{x}, \vec{v}_j, t + \Delta t) = f_j\left(\vec{x}, \vec{v}_j + \frac{\kappa_j}{\mu_j \nu_j} \vec{E} \Delta t, t\right). \quad (2.28)$$

Las ecuaciones de advección pueden, por tanto, ser solucionadas utilizando interpolación espectral, de Galerkin, polinomial, o el método que se considere más adecuado.

Notar que para que la expansión del propagador exponencial en (2.20) tenga sentido, cada advección de velocidad debe realizarse habiendo recalculado el término forzante a partir de la función de distribución actualizada.

2.3.4. Cálculo de la fuerza electrostática

A partir de la ecuación (2.17), y utilizando la definición de la transformada de Fourier (A.1a), es directo mostrar que el término forzante puede ser calculado como

$$\vec{E} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ i \frac{\vec{k}}{k^2} \mathcal{F}\{\rho\} \right\}. \quad (2.29)$$

Es importante recordar que la fuerza depende del espacio, y por tanto, debe ser recalculada cada vez que se resuelva una ecuación de advección espacial. Lo anterior no es cierto para ecuaciones de advección en velocidad.

2.3.5. Control de validez de las simulaciones

La ecuación de Vlasov puede ser representada de manera implícita como

$$\frac{df}{dt} = 0,$$

lo que implica que cualquier función bien portada que sólo dependa de la distribución, $C(f)$, debe ser también una constante en el tiempo. Así, un modo de verificar que una simulación de Vlasov sea capaz de resolver el sistema es justamente verificar que estas cantidades sean conservadas.

Multitud de cantidades conservadas importantes pueden ser construidas, pero las que más comúnmente se utilizan son la energía total,

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \int |\vec{v}|^2 f d^3x d^3v + \frac{1}{2} \int |\vec{E}|^2 d^3x, \quad (2.30)$$

y la *cantidad de partículas* de la simulación,

$$N = \int f d^3x d^3v. \quad (2.31)$$



Capítulo 3

Resultados

3.1. Casos simulados

3.1.1. Parámetros de las simulaciones

La librería desarrollada por el autor fue utilizada para reproducir los casos estudiados por Hou *et. al.* [3]. Estos casos, que corresponden a la superposición de un número de haces Maxwellianos de electrones sobre un fondo de iones inmóviles neutralizantes, son los siguientes:

- (i) 3 corrientes: Los grupos de electrones tienen densidades $0,3n_e$, $0,4n_e$ y $0,3n_e$, y velocidades $-5v_{te}$, $0v_{te}$ y $5v_{te}$, respectivamente.
- (ii) 4 corrientes: Con densidades $0,2n_e$, $0,3n_e$, $0,3n_e$ y $0,2n_e$, y velocidades $-5v_{te}$, $-2v_{te}$, $2v_{te}$, y $5v_{te}$.
- (iii) 5 corrientes: Cada uno con densidad $0,2n_e$, y con velocidades $-6v_{te}$, $-3v_{te}$, $0v_{te}$, $3v_{te}$ y $6v_{te}$.

En el trabajo original se utilizó un código de Vlasov-Poisson basado en el método de splitting desarrollado por Cheng y Knorr [16], donde las ecuaciones de advección son resueltas usando el método de Lax-Wendroff. Resolvieron la ecuación de Poisson con

diferencias centradas usando el algoritmo de matriz tridiagonal e integración por el método de Simpson. Su discretización utilizó una resolución de $Nx = 1024$ puntos en el espacio y $Nv = 3000$ puntos en velocidad, con un espacio de fases dado por una caja de largo $L_x = 20\pi\lambda_D$ en la dimensión espacial, y con velocidades desde $-16v_{te}$ a $16v_{te}$.

En este trabajo, en cambio, se utilizó un código pseudoespectral y una resolución de $Nx = 512$ puntos en el espacio y $Nv = 2048$, la cual mostró ser suficiente en pruebas de convergencia de los resultados. Adicionalmente, se utilizó el algoritmo de *splitting* de Verlet de velocidad [15], un paso temporal de $dt = 0,1\omega_{pe}^{-1}$, y se incluyó una distribución uniforme de ruido con intensidad del orden de 10^{-16} para permitir la excitación de las inestabilidades.

3.1.2. Confirmación del fenómeno de crecimiento oscilatorio

En la Figura 3.1, se muestra la energía total de la onda, V , en cada uno de los casos simulados. En la Figura 3.1b puede observarse el crecimiento exponencial típico levantado por funciones de distribución con *beams*, mientras que en las Figuras 3.1a y 3.1c se observa, además del crecimiento exponencial, la modulación reportada por Hou *et. al.* [3]. En todos los casos, la energía electrostática parte de un transiente al nivel de ruido numérico, pasa una etapa de crecimiento exponencial, y luego satura. Si bien los tiempos de saturación son diferentes a los mostrados por Hou *et. al.* [3], las tasas de crecimiento son coincidentes, lo que se explica sencillamente por el orden de magnitud del ruido inicial, que en el caso de ellos es mayor.

3.1.3. Modos dominantes en el espacio

En la Figura 3.2 se muestra una descomposición espectral del campo eléctrico como función del tiempo, resultante de las simulaciones (i), (ii) y (iii). De ella, se observa que los modos dominantes en cada una tienen números de onda $0,2\lambda_{De}^{-1}$,

$0,2\lambda_{De}^{-1}$, y $0,1\lambda_{De}^{-1}$, respectivamente, y que estos dominan toda la fase de crecimiento exponencial.

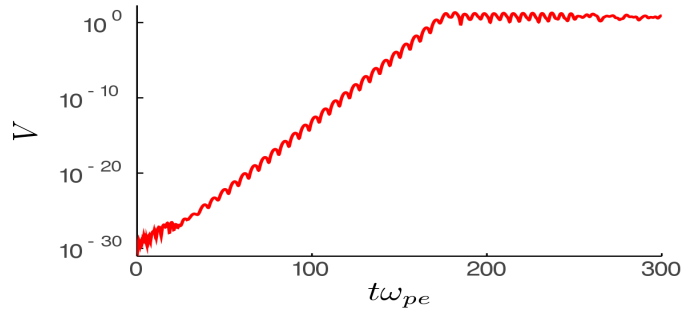
Es importante mencionar que si bien las Figuras 3.2a y 3.2b coinciden cualitativamente con sus análogas en el trabajo de Hou *et. al.* [3], la Figura 3.2c difiere significativamente lo que ellos muestran, pues en su trabajo se observa que el número de onda correspondiente a $0,2\lambda_{De}^{-1}$ domina la primera mitad de la fase de crecimiento de la simulación (iii), hasta que el primer armónico, de $0,1\lambda_{De}^{-1}$, lo supera en intensidad. Mas aún, la descomposición espectral del campo eléctrico que ellos muestran revela que su segundo armónico comienza la simulación (iii) con un nivel de energía mas alto que el resto de los modos, aún cuando el primer armónico presenta una mayor tasa de crecimiento desde el principio. De esta manera, el cambio de modo dominante puede ser explicado simplemente por la presencia de ruido numérico que no obedece a una distribución aleatoria plana al construir la función de distribución inicial, de forma que esta comienza con modos preferencialmente excitados.

3.1.4. Caracterización de la inestabilidad

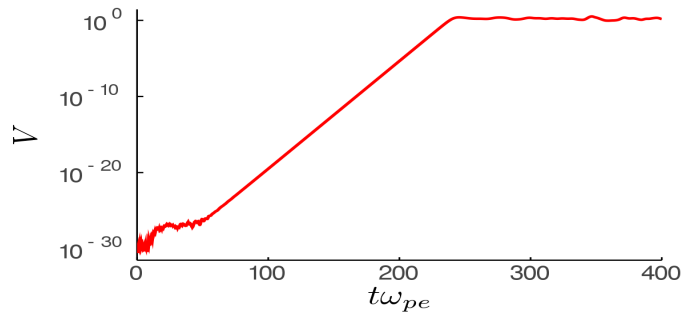
A partir de los datos mostrados en la Figura 3.1 se estimó los rangos temporales que definen la fase de crecimiento exponencial en cada uno de los casos. En este rango de tiempo, T_{med} , se midió la frecuencia de oscilación de la energía, $\omega_{energia}$, y además se midió su tasa de crecimiento, $\gamma_{energia}$, mediante un ajuste exponencial. Esta información, junto al número de onda mas excitado, k , se resume en la Tabla 3.1.

3.2. Predicciones de la teoría lineal

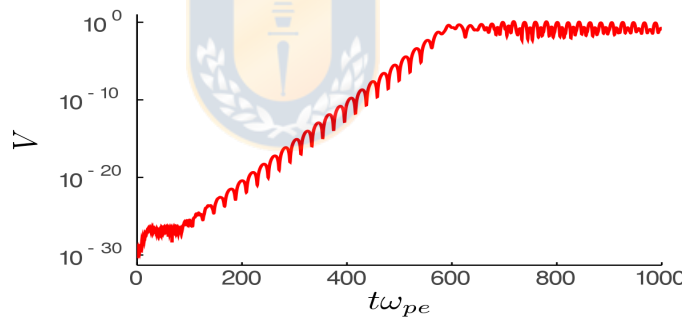
Buscando las raíces complejas $\omega = \omega(k)$ que satisfacen la Ecuación (2.10), se determinó los modos más inestables en cada uno de los casos estudiados. Esto se hizo considerando que al imponer condiciones de borde periódicas se restringen las



(a) Simulación (i)



(b) Simulación (ii)

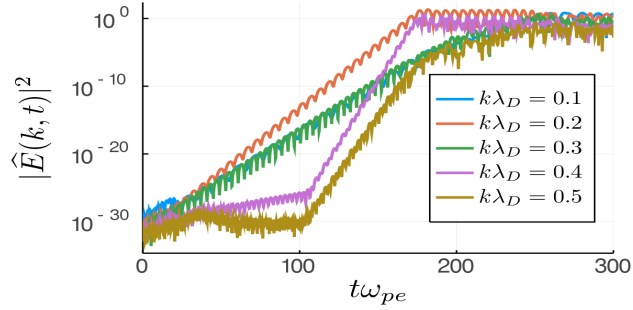


(c) Simulación (iii)

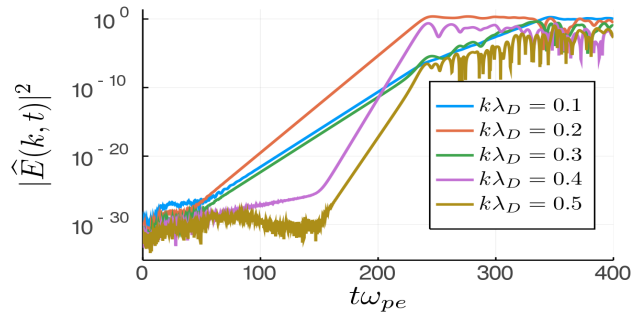
Figura 3.1: Energías electrostáticas obtenidas para cada caso simulado. Dado que se excita inestabilidades con diferentes tasas de crecimiento, cada imagen se muestra con su propia escala temporal.

soluciones a números de onda que quepan una cantidad entera de veces en el espacio.

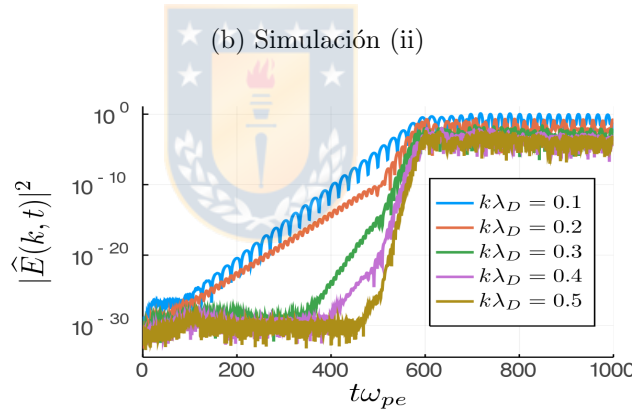
En las Figuras 3.3, 3.4 y 3.5 se muestran soluciones encontradas para los casos con 3, 4 y 5 corrientes, respectivamente, donde se indica en color rojo la rama mas



(a) Simulación (i)



(b) Simulación (ii)



(c) Simulación (iii)

Figura 3.2: Descomposición espectral del campo eléctrico en función del tiempo. Se muestran los primeros 5 modos espaciales. Cada imagen tiene su propia escala temporal.

excitada con velocidad de fase no negativa, y con un rombo del mismo color el modo más excitado. Además, se muestra en gris las ramas pseudo-acústicas y en negro las ramas de Langmuir.

	T_{med}/ω_{pe}^{-1}	$\omega_{energia}/\omega_{pe}$	$\gamma_{energia}/\omega_{pe}$	$k\lambda_{De}$
Simulación (i)	50 – 150	1.091	0.429	0.2
Simulación (ii)	80 – 220	0.0	0.326	0.2
Simulación (iii)	200 – 550	0.302	0.118	0.1

Tabla 3.1: Caracterización del crecimiento de la energía electrostática.

La información de los modos mas excitados se resume en la Tabla 3.2.

	ω/ω_{pe}	γ/ω_{pe}	$k\lambda_{De}$
Simulación (i)	0.545	0.215	0.2
Simulación (ii)	0.0	0.163	0.2
Simulación (iii)	0.151	0.059	0.1

Tabla 3.2: Modos más excitados según ecuación (2.10).

3.3. Comparación entre predicción lineal y simulaciones

De la información dada en la Sección 2.2.2 es claro que si el fenómeno de crecimiento oscilatorio se debe a la formación de ondas estacionarias formadas por excitación de modos contrapropagantes, entonces la frecuencia de oscilación y tasa de crecimiento de esos modos corresponde a la mitad de la frecuencia y tasa de crecimiento de la energía electrostática.

Considerando esto, se construyó la Tabla 3.3 en la que se resumen las propiedades de los modos predichos por la teoría lineal, y las propiedades medidas de la energía electrostática en fase de crecimiento en las simulaciones.

De esta última tabla, es claro que el fenómeno de crecimiento oscilatorio coincide completamente con lo predicho por la teoría cinética lineal, y que sus propiedades

	Predicción teoría lineal			Simulación		
	$k\lambda_{De}$	ω_r/ω_{pe}	γ/ω_{pe}	$k\lambda_{De}$	$\omega_{energia}/2\omega_{pe}$	$\gamma_{energia}/2\omega_{pe}$
Simulación (i)	0.2	0.545	0.215	0.2	0.546	0.215
Simulación (ii)	0.2	0.0	0.163	0.2	0.0	0.163
Simulación (iii)	0.1	0.151	0.059	0.1	0.151	0.059

Tabla 3.3: Comparación de los modos inestables predichos por teoría lineal y la inestabilidad observada en la energía electrostática en simulaciones. Se resume información de las Tablas 3.1 y 3.2.

son heredadas de los modos mas excitados.

Mas aún, en la Figura 3.6 se observa que el desarrollo de la energía electrostática en las simulaciones sigue de forma idéntica lo prescrito por la ecuación (2.14) durante la fase de crecimiento.

3.4. Observación del mecanismo físico

Uno de los efectos no lineales que pueden ocurrir en un plasma es el de atrapamiento (*trapping*) de partículas, lo cual es el componente principal en un tipo de soluciones no lineales y exactas del sistema de Vlasov-Poisson denominados modos Bernstein-Greene-Kruskal (BGK) [19]. Los modos BGK pueden sostener diferentes tipos de potenciales, y son comúnmente observados como vórtices que encierran zonas de baja densidad de partículas. Por ello, en plasmas electrónicos es común que se les llame *electron holes*, donde un potencial viajero positivo mantiene un grupo de partículas atrapadas viajando junto a él [20].

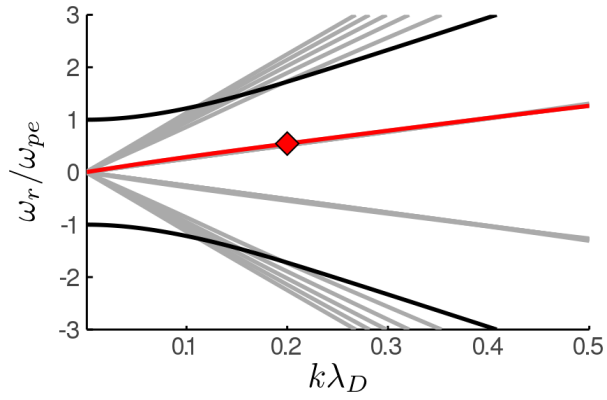
Aún cuando la teoría lineal deja de ser válida cuando las ondas planas aumentan demasiado su amplitud y pasan a ser estados tipo BGK con atrapamiento de electrones, aún es posible observar, poco antes de la saturación no lineal, cómo estas se

superponen de forma similar a cómo lo hacían en su etapa de ondas planas.

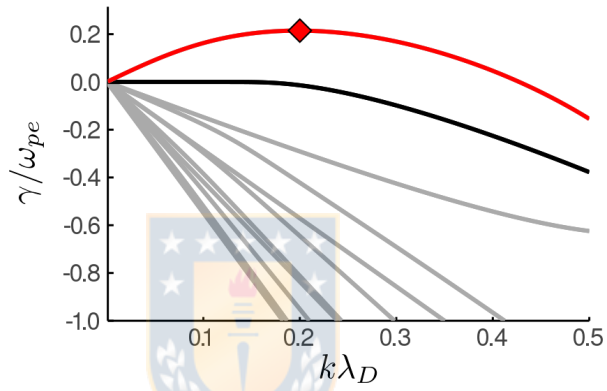
En la Figura 3.7 se observa como los máximos de energía electrostática se dan en el momento en que dos ondas contrapropagantes coinciden en el espacio, y como los mínimos de energía electrostática se dan cuando estas ondas se encuentran completamente desfasadas.

Llegado a este punto es de esperar que los fenómenos no lineales deformen las ondas viajeras, y con ello, que rompan la onda estacionaria, lo que explica el cambio de comportamiento de las energías electrostáticas al saturarse, como se observa en las Figuras 3.1. De todos modos, ese análisis se escapa del alcance de este trabajo.

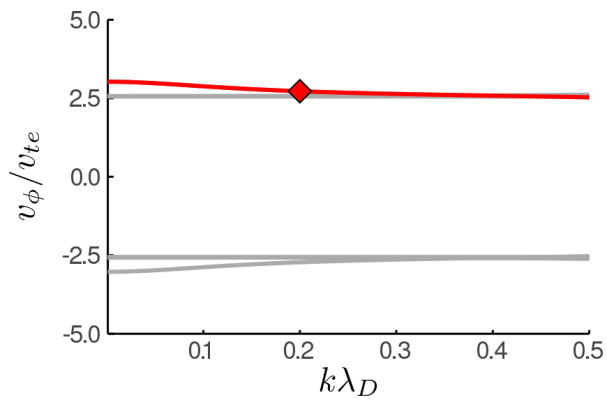




(a) Frecuencia de oscilación

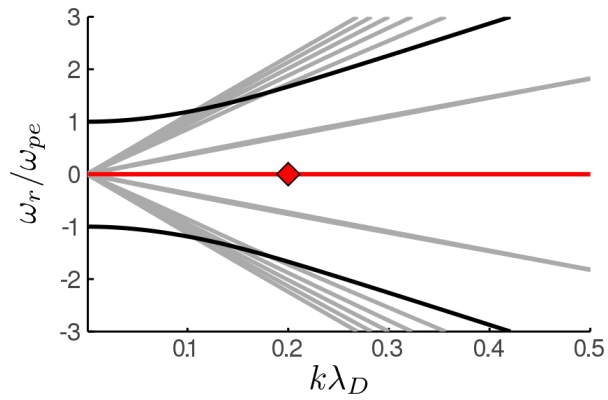


(b) Tasa de crecimiento

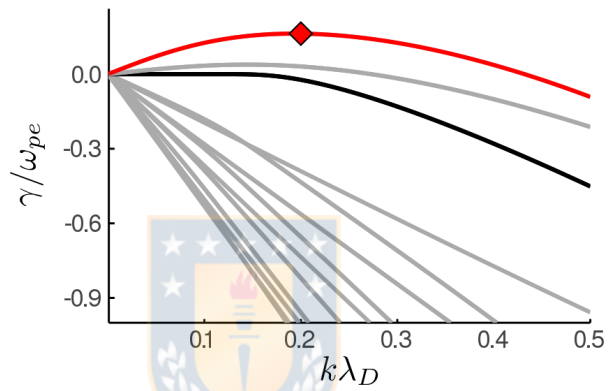


(c) Velocidad de fase

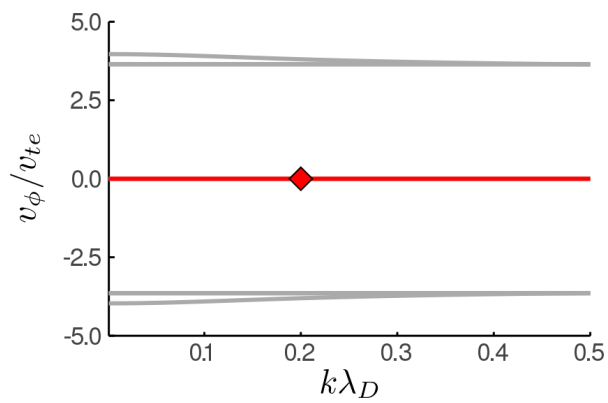
Figura 3.3: Soluciones de la relacion de dispersión lineal para la simulación (i). Rombos rojos denotan la configuración de la onda más excitada.



(a) Frecuencia de oscilación

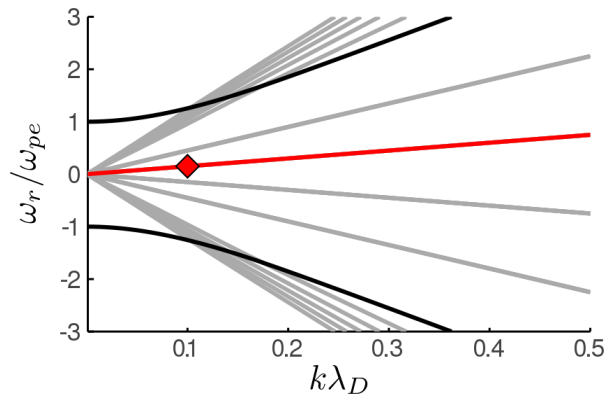


(b) Tasa de crecimiento

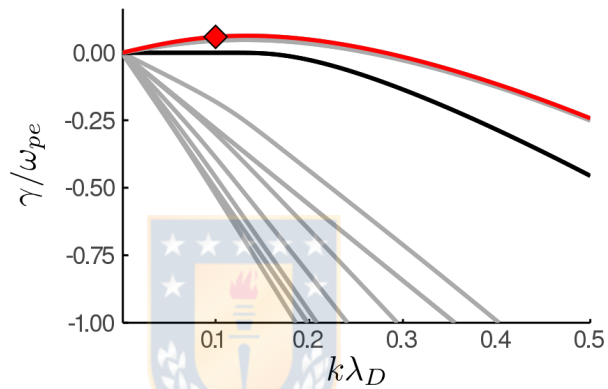


(c) Velocidad de fase

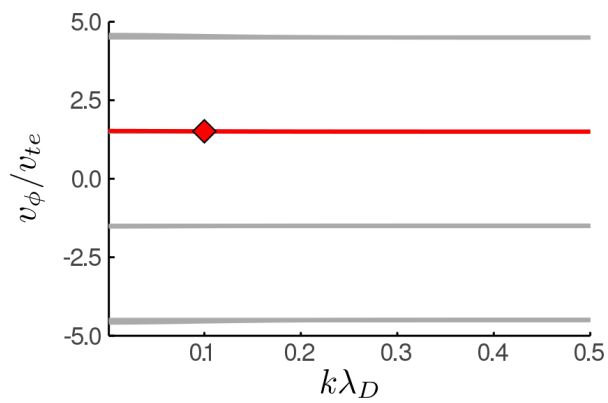
Figura 3.4: Soluciones de la relacion de dispersión lineal para la simulación (ii).
Rombos rojos denotan la configuración de la onda más excitada.



(a) Frecuencia de oscilación

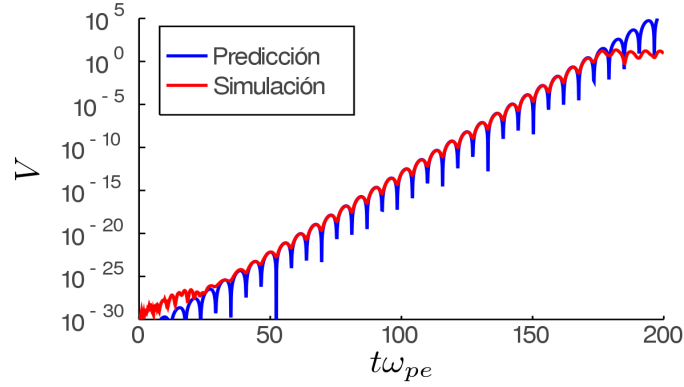


(b) Tasa de crecimiento

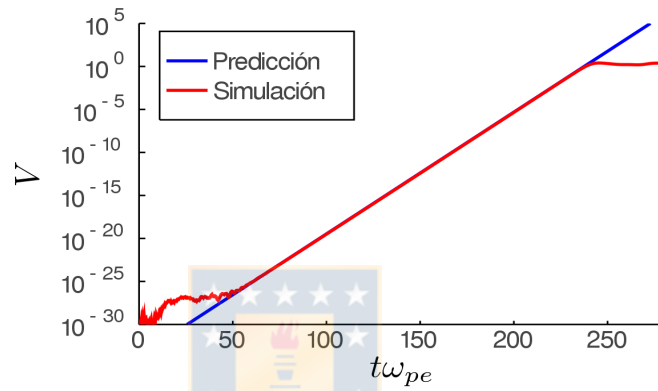


(c) Velocidad de fase

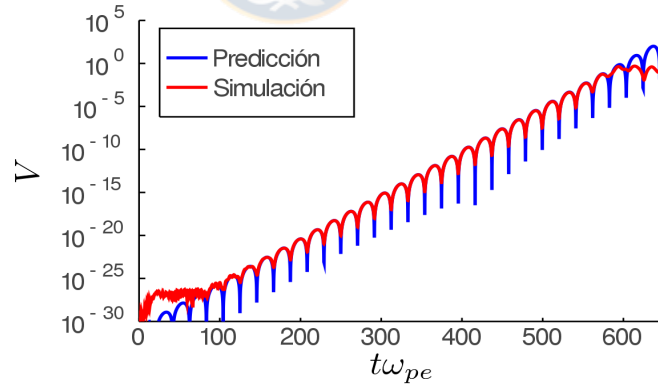
Figura 3.5: Soluciones de la relacion de dispersión lineal para la simulación (iii). Rombos rojos denotan la configuración de la onda más excitada.



(a) 3 corrientes. $E_0 = 3,3 \cdot 10^{-17}$



(b) 4 corrientes. $E_0 = 1,2 \cdot 10^{-17}$



(c) 5 corrientes. $E_0 = 9 \cdot 10^{-17}$

Figura 3.6: Comparación de las energías electrostáticas simuladas y las predichas mediante la ecuación (2.14). En cada caso se muestra el rango temporal correspondiente a su propia fase de crecimiento exponencial. Además, se ajustó la amplitud inicial, E_0 , además de añadir una fase constante.

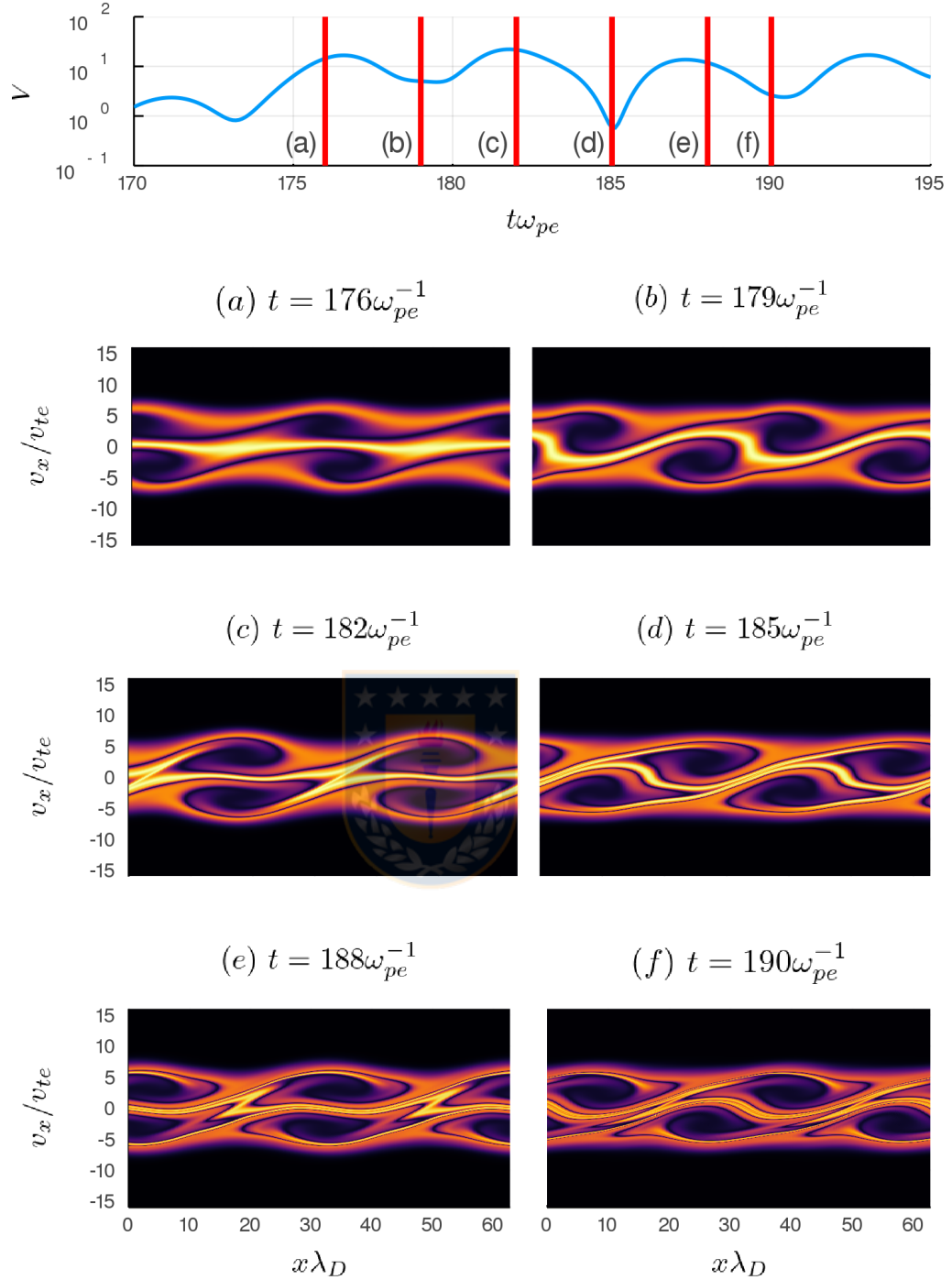


Figura 3.7: Función de distribución en instantes cercanos a máximos locales, (a), (c), y (e), y mínimos locales (b), (d) y (e), de energía electrostática. Rango de tiempo posterior a la fase de crecimiento exponencial de la simulación (i).

Capítulo 4

Conclusiones

En el Capítulo 3 se verificó el crecimiento oscilatorio recientemente reportado por Hou *et. al.* [3] en simulaciones de Vlasov-Poisson durante la fase de crecimiento exponencial de la energía en plasmas con múltiples corrientes. Adicionalmente, se propuso un mecanismo para explicarlo basado en la formación de ondas estacionarias producto de la superposición de modos idénticos y contrapropagantes levantados por una función de distribución simétrica en velocidad, y se evidenció por medio de la teoría cinética lineal que este mecanismo predice con exactitud el comportamiento observado, confirmando la hipótesis de trabajo. Además, se comprobó que la librería desarrollada para realizar simulaciones de Vlasov-Poisson funciona correctamente, y se mostró discrepancias explicables con respecto a una de las simulaciones presentadas en el reporte de Hou *et. al.* [3], debido a que su distribución inicial presenta un modo preferente que condiciona el comienzo de la simulación.

A futuro, resulta interesante considerar la estabilidad y superposición de los modos contrapropagantes excitados una vez que estos crecen lo suficiente para deformar la distribución, y cómo esto podría definir un estado estacionario post saturación.

Apéndice A

Convenciones

A lo largo del documento, todas las expresiones utilizarán el Sistema Cegesimal de Unidades, CGS, excepto por la Sección 2.3 Simulaciones de Vlasov-Poisson, en la cual se trabaja con cantidades adimensionalizadas.

A.1. Cantidades útiles

En el estudio de la física de plasmas, es común encontrarse con la *frecuencia de plasmas* de una especie j ,

$$\omega_{pj} = \sqrt{\frac{4\pi n_j q_j^2}{m_j}},$$

que describe la frecuencia característica de la respuesta de un plasma de esa especie ante una perturbación infinitesimal, donde n_j corresponde a la densidad espacial de la especie, y q_j y m_j a la carga y masa de una partícula de la especie.

Junto con la frecuencia de plasmas, es también un parámetro característico de la especie su *velocidad térmica*,

$$v_{tj} = \sqrt{\frac{2k_B T_j}{m_j}},$$

que corresponde a la velocidad más probable de una partícula que se mueve en el

plasma. T_j corresponde a la temperatura de la especie y $k_B \approx 6,381$ [erg · K⁻¹] es la constante de Boltzmann.

Notar que es común también encontrar esta cantidad definida como la raíz cuadrática media de la velocidad de las partículas a lo largo de una de las dimensiones,

$$v_{tj} = \sqrt{\frac{k_B T_j}{m_j}},$$

pero en este trabajo se utilizará la primera definición.

Otra cantidad importante es la *longitud de Debye*,

$$\lambda_{Dj} = \sqrt{\frac{k_B T_j}{4\pi n_j q_j^2 + \sum_i \kappa_i^2 n_i / T_i}},$$

donde i suma sobre todas las especies del plasma y κ_i es la razón entre la carga de la especie i y la especie j . La longitud de Debye representa la distancia típica en la que un campo eléctrico es apantallado por el plasma.

En un plasma de electrón-protón, es común despreciar la dinámica de los protones y expresar la longitud de Debye electrónica como

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi n_e q_e^2}},$$

A.2. Gradiente con respecto a un vector

En general, dado un vector $\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$, se utilizará la expresión $\frac{\partial}{\partial \vec{a}}$ para denotar al gradiente con respecto a ese vector. Es decir,

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial a_x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial a_y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial a_z}.$$

De esta manera, $\frac{\partial}{\partial \vec{x}}$ es el operador gradiente usual, y $\frac{\partial}{\partial \vec{v}}$ corresponde al gradiente en el espacio de velocidades.

A.3. Transformada de Fourier

Dada una función $f(x)$, su transformada de Fourier, $\widehat{f}(k)$, será definida a lo largo de este documento según

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \mathcal{F}\{f(x)\}(k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x),\end{aligned}\tag{A.1a}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(k)\}(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \widehat{f}(k),\end{aligned}\tag{A.1b}$$

donde k es la variable conjugada de x .

Notar que x es una variable arbitraria, y no necesariamente representa la posición.



Apéndice B

Validez de simulaciones realizadas

En este capítulo se muestra, a modo de control de calidad de las simulaciones, la conservación de la energía total, E_{tot} , y el número de partículas, N , de cada simulación realizada.

De las Figuras B.1, B.2 y B.3, se verifica que en ninguna de las simulaciones presentadas se obtiene una variación porcentual de la energía total mayor al $5 \cdot 10^{-3} \%$, y el número de partículas se mantiene siempre con variaciones del orden de $10^{-14} \%$. Así, se puede decir que las cantidades efectivamente son conservadas.

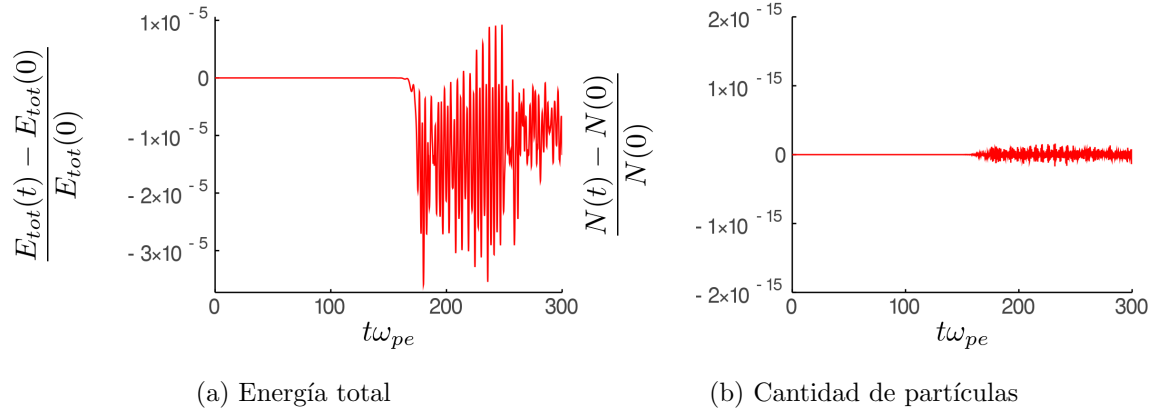


Figura B.1: Variación relativa de la energía total (a) y el número de partículas (b) en la simulación (i).

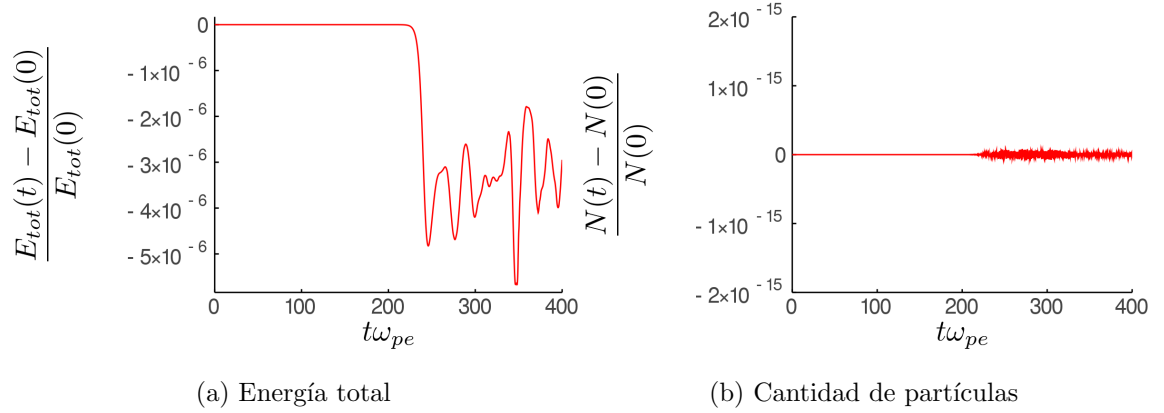


Figura B.2: Variación relativa de la energía total (a) y el número de partículas (b) en la simulación (ii).

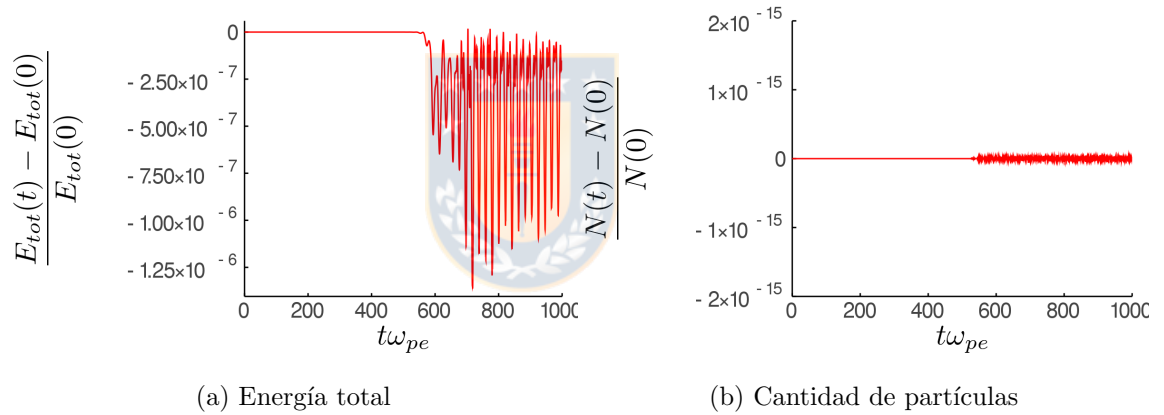


Figura B.3: Variación relativa de la energía total (a) y el número de partículas (b) en la simulación (iii).

Bibliografía

- [1] M. Goldman, M. Oppenheim y D. Newman. «Nonlinear two-stream instabilities as an explanation for auroral bipolar wave structures». En: *Geophysical Research Letters* (1999). ISSN: 00948276. DOI: 10.1029/1999GL900435 (vid. págs. 1, 4).
- [2] T. Morita y col. «Thomson scattering measurement of a shock in laser-produced counter-streaming plasmas». En: *Physics of Plasmas* 20.9 (2013), pág. 092115. DOI: 10.1063/1.4821967 (vid. págs. 1, 4).
- [3] Y. Hou y col. «Oscillatory growth behavior of multistream instabilities». En: *Plasma Physics Reports* 42.9 (2016), págs. 900-907. ISSN: 1063780X. DOI: 10.1134/S1063780X1609004X (vid. págs. 1, 3, 23-25, 36).
- [4] J. Bezanson y col. «Julia: A fresh approach to numerical computing». En: *SIAM review* 59.1 (2017), págs. 65-98. DOI: 10.1137/141000671 (vid. pág. 3).
- [5] A. Vlasov. «The vibrational properties of an electron gas». En: *Physics-Uspekhi* 721 (1968). DOI: 10.1070/PU1968v010n06ABEH003709 (vid. págs. 5, 7).
- [6] Hans L. Pécseli. *Waves and oscillations in plasmas*. 2016. ISBN: 9781439878491. DOI: 10.5860/choice.50-5055 (vid. pág. 6).
- [7] Håkan Andréasson. *The Einstein-Vlasov system/kinetic theory*. 2011. DOI: 10.12942/lrr-2011-4. arXiv: 1106.1367 (vid. pág. 6).

- [8] R. Davidson. «Kinetic waves and instabilities in a uniform plasma». En: *Handbook of Plasma Physics, Vol 1: Basic Plasma Physics* (1983), págs. 519-585 (vid. pág. 7).
- [9] L.D. Landau. «On the vibrations of the electronic plasma». En: *J. Phys. (USSR)* 10 (1946), págs. 25-34 (vid. págs. 7, 10).
- [10] B. Fried y S. Conte. «The Plasma Dispersion Function: The Hilbert Transform of the Gaussian». En: *Mathematics of Computation* (1963). ISSN: 00255718. DOI: 10.2307/2003748 (vid. pág. 8).
- [11] S. Ichimaru. *Statistical Plasma Physics*. Vol. 1. 1991. ISBN: 0-201-55490-9 (vid. págs. 11, 13).
- [12] D. Swanson. «Plasma Waves (2nd edition)». En: *Plasma Physics and Controlled Fusion* (2003). ISSN: 0741-3335. DOI: 10.1088/0741-3335/45/6/701 (vid. pág. 13).
- [13] R. Courant, K. Friedrichs y H. Lewy. «On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics». En: *IBM Journal of Research and Development* 11.2 (1967), págs. 215-234 (vid. pág. 14).
- [14] H. Yoshida. «Symplectic Integrators for Hamiltonian Systems: Basic Theory». En: *Symposium - International Astronomical Union* 152 (1992), págs. 407-411. DOI: 10.1017/S0074180900091440 (vid. pág. 16).
- [15] C. Swope y col. «A computer simulation method for the calculation of equilibrium constants for the formation of physical clusters of molecules: Application to small water clusters». En: *The Journal of Chemical Physics* 76.1 (1982), págs. 637-649. DOI: 10.1063/1.442716 (vid. págs. 18, 24).
- [16] C. Cheng y G. Knorr. «The integration of the vlasov equation in configuration space». En: *Journal of Computational Physics* 22.3 (1976), págs. 330-351. DOI: 0.1016/0021-9991(76)90053-X (vid. págs. 18, 23).

- [17] H. Yoshida. «Construction of higher order symplectic integrators». En: *Physics Letters A* 150.5-7 (1990), págs. 262-268. DOI: 10.1016/0375-9601(90)90092-3 (vid. pág. 18).
- [18] S. Chin. «Symplectic integrators from composite operator factorizations». En: *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* 226.6 (1997), págs. 344-348. ISSN: 03759601. DOI: 10.1016/S0375-9601(97)00003-0 (vid. pág. 19).
- [19] I. Bernstein, J. Greene y M. Kruskal. «Exact nonlinear plasma oscillations». En: *Physical Review* 108.3 (1957), págs. 546-550. DOI: 10.1103/PhysRev.108.546 (vid. pág. 29).
- [20] I. Hutchinson. «Electron holes in phase space: What they are and why they matter». En: *Physics of Plasmas* 24.5 (2017). ISSN: 10897674. DOI: 10.1063/1.4976854 (vid. pág. 29).

