



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**The Gravitational Clock Compass in General
Relativity: Extensions And Improvements (La
Brújula de Relojes Gravitacional en Relatividad
General: Extensiones y Mejoras)**

Profesor Guía: **Dr. Guillermo Rubilar Alegría**
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas para
optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Física
de la Universidad de Concepción

Código Programa: 4102

por

Gerald Fred Neumann Delgado
CONCEPCIÓN - CHILE
Junio 2020



Comisión examinadora : Dr. Guillermo Rubilar Alegría (guía)
Dr. Aldo Delgado Hidalgo
Dr. Julio Oliva Zapata

Agradecimientos

Es emocionante escribir esta sección pues significa que este camino, empezado hace casi 3 años y medio, está llegando por fin a su final. Llegando a esta etapa, no me queda más que agradecer a las personas que más me acompañaron en esta etapa, tanto del magíster en general como en la tesis misma.

Quiero agradecer primero a mis padres, Ivonne y Erwin, quienes han estado siempre ahí, han tenido para mí siempre su apoyo incondicional, y gracias a quiénes soy lo que soy. Les estaré eternamente agradecido por todo.

En la universidad me fui encontrando con mucha gente muy importante. De ellos, primero le daré las gracias a mis compañeros y amigos con los que empecé en el pregrado y que me han acompañado hasta el día de hoy. A los astrónomos Alex Alarcón, Pedro Humire, Lientur Celedón y Bastián Reinoso (a.k.a *los mutantes* o *los lienture*), al astrónomo arrepentido ahora físico Diego Hidalgo, y a los “físicos” Karina Ferrada y Gonzalo Abarzúa. Gracias por todas las reuniones de estudio y “momentos de distracción” que tuvimos, y por todo su apoyo durante tanto tiempo, que hicieron que la etapa universitaria fuera mucho más llevadera.

Agradezco también a mis compañeros de oficina en el Magíster, los *exiliados* del sexto piso Jean Cortés, Nayda Guerrero, Sebastián Pons, Luciano Pereira, Nicole Araneda, Antonio González y Sebastián Fuenzalida, con quienes compartí toda esta etapa del postgrado. Gracias por todas las conversaciones, almuerzos, cafecitos, juntas y “tardes lúdicas” de Catan (y otros) que hicimos. Hicieron que el ambiente de trabajo sea muy muy bueno.

No puedo olvidar agradecer a los profesores que más me ayudaron, partiendo por mi guía y Maestro en la *Fuerza*, el Dr. Guillermo Rubilar. Faltan palabras en el diccionario para agradecerle toda su paciencia y ayuda durante todo este tiempo. Sin su presencia, este proceso hubiese sido aún más complicado. Le agradezco además las idas al cine, los almuerzos, e incluso aquella vez que me llevó al hospital cuando me sentía mal por mi problema de vértigo. No podría haberlo hecho sin usted, profe.

También quiero agradecer a los profesores Dr. Julio Oliva y Dr. Aldo Delgado por formar parte de la comisión evaluadora de la tesis, al Dr. Fernando Izaurieta,

por darme trabajo en sus ayudantías, que me dieron experiencia en docencia y que me ayudaron económicamente, y al Dr. Hernán Astudillo, quien me ayudó con sus conversaciones en un momento que para mí fue muy complicado.

Le agradezco también a nuestro colaborador Dr. Dirk Puetzfeld, de la Universidad de Bremen, por su ayuda para terminar el artículo asociado a la tesis, con sus sugerencias por correos y reuniones por Zoom, que sin duda extrañaré.

Agradezco también a Milú, por apoyarme en la última etapa de la escritura de la tesis, estando ahí en las buenas y en las malas, ser mi contención cuando la angustia por no terminar me embargada, y darme las energías necesarias para terminar. En fin, gracias por todo su cariño y amor.

Finalmente, agradezco la ayuda económica recibida por parte de la Dirección de postgrado de la Universidad de Concepción, a través de sus becas de Exención y Estipendio, y por parte de la Agencia Nacional de Investigación y desarrollo (ANID) / Programa Becas / MAGISTER NACIONAL / 2018 - 22182173.



Tabla de contenido

Agradecimientos	III
Índice de tablas	VII
Índice de figuras	VIII
Resumen	X
1. Introducción	1
2. Relatividad General como teoría de la gravedad	4
2.1. Gravedad como curvatura del espaciotiempo	4
2.2. Campo gravitacional débil y redshift gravitacional	7
2.3. Observadores acelerados y tetraada asociada	9
3. Gravitational Clock Compass	11
3.1. Coordenadas de Fermi	11
3.1.1. Forma explícita de la métrica	14
3.1.2. Comportamiento aparente de relojes	16
3.2. Gravitational Clock Compass: idea central	17
3.3. Determinación de la aceleración lineal y velocidad angular, a primer orden	19
3.3.1. Determinación de la aceleración lineal	20
3.3.2. Determinación de la velocidad angular	21
3.4. Determinación de la aceleración lineal y velocidad angular, a segundo orden	22
3.4.1. Determinación de la aceleración lineal: solución con 3 relojes	22
3.4.2. Determinación de la aceleración lineal: solución con 6 relojes	24
3.4.3. Determinación de la velocidad angular: relojes en movimiento	25
3.4.4. Determinación de la velocidad angular: relojes en reposo	27
3.4.5. Determinación simultánea de la aceleración lineal y la velocidad angular	27

	VI
3.5. Determinación de la curvatura	29
4. Estimación simulada de parámetros	35
4.1. Inferencia bayesiana	35
4.2. Procedimiento general	37
4.2.1. Ejemplo 1: ajustando un único parámetro	37
4.2.2. Ejemplo 2: ajustando dos parámetros en un modelo lineal	40
4.3. Estimación de parámetros gravitacionales usando el GCC	42
4.3.1. Generación de datos	43
4.3.2. Estimación de la aceleración lineal	43
4.3.3. Estimación de las componentes de la curvatura: modelo de espaciotiempo	44
4.3.4. Estimación de las componentes de la curvatura: obteniendo una única componente	47
4.3.5. Estimación de las componentes de la curvatura: variando pa- rámetros	47
4.3.6. Estimación de las componentes de la curvatura: obteniendo múltiples componentes	49
5. Conclusión	58
A. Notación y convenciones	60
A.1. Geometría diferencial	60
A.1.1. Conexión y derivados	61
A.2. Tensor de curvatura, propiedades y derivados	61
B. Forma completamente resuelta de la solución de la curvatura	63
C. Expresiones analíticas para el error propagado	66
Bibliografía	68

Índice de tablas

3.1. Grupos de componentes de la curvatura	34
--	----



Índice de figuras

1.1. “Gravitational compass”	2
2.1. Bosquejo de dos geodésicas y el vector diferencia que une dos eventos en estas líneas de mundo	7
2.2. Evolución de la tetrad a lo largo de la curva de referencia	10
3.1. Construcción de las coordenadas de Fermi alrededor de la curva de referencia	13
3.2. Esquema de las posiciones usadas como condiciones iniciales para los relojes	19
3.3. Configuración de los relojes usada en la determinación simultánea de la velocidad angular y la aceleración lineal	28
4.1. Datos simulados para el ejemplo de la sección 4.2.1	39
4.2. Resultado de la simulación MCMC usando emcee para el ejemplo de la sección 4.2.1	40
4.3. Datos simulados para el ejemplo de la sección 4.2.2.	41
4.4. Resultado de la simulación MCMC usando emcee para el ejemplo de la sección 4.2.2, para la pendiente de la recta m	42
4.5. Resultado de la simulación MCMC usando emcee para el ejemplo de la sección 4.2.2, para coeficiente de posición de la recta b	42
4.6. Resultado de la estimación de la aceleración para diferentes valores de la distancia media de los relojes	45
4.7. Resultado de la estimación de la aceleración para diferente número de mediciones	46
4.8. Distribución obtenida para la componente de la curvatura R_{0110}	48
4.9. Estimación de la componente de la curvatura R_{0110} para diferente número de mediciones	50
4.10. Estimación de la componente de la curvatura R_{0110} para diferentes valores de la distancia media de los relojes	51
4.11. Desviación estándar de la distribución de probabilidad de la componente R_{0110} para diferentes valores del error en la medición de la razón de tiempos	52

4.12. Distribución de probabilidad obtenida para las componentes R_{0110} , R_{0220} y R_{0120} , obtenidas de manera simultánea	53
4.13. Distribuciones de probabilidad para las componentes R_{0110} , R_{1210} y R_{1212} , obtenidas de manera simultánea	54
4.14. Distribuciones de probabilidad para las componentes R_{0110} , R_{0220} , R_{1210} , R_{1212} y R_{1220} , obtenidas de manera simultánea	55
4.15. Distribución para la componente de la curvatura R_{0120} , obtenida en forma jerárquica	56
4.16. Distribuciones para las componentes de la curvatura R_{1210} y R_{1212} , obtenidas de manera jerárquica	57



Resumen

En la presente tesis se muestra cómo se puede usar un arreglo de relojes adecuadamente preparado para extraer información sobre el campo gravitacional en el contexto de la Relatividad General, extendiendo el marco de lo que se conoce como “brújula gravitacional de relojes” (o “gravitational clock compass”). Se destacan las diferencias conceptuales entre la versión estándar y esta versión extendida de dicho arreglo, mostrando las nuevas soluciones obtenidas que permiten determinar tanto las propiedades cinemáticas del sistema de referencia (aceleración y velocidad angular) como las propiedades del espaciotiempo (curvatura) a partir de mediciones de relojes. Además, se presentan resultados de simulaciones del proceso de inferencia para la aceleración y las componentes de la curvatura, utilizando herramientas estadísticas. En particular, se discuten varios ejemplos de diferentes estrategias para el cálculo de las distribuciones de probabilidad de las componentes de curvatura. Esto permite anticipar la precisión con la que se pueden determinar las cantidades físicas en un proceso de medición realista.

Los resultados de esta tesis pueden encontrarse en el artículo asociado “*Extended gravitational clock compass: new exact solutions and simulations*”, G. Neumann, D. Puetzfeld and G. F. Rubilar, *Physica Review D*, 2020, submitted, que puede ser encontrado en <https://arxiv.org/abs/2006.09716>.

Capítulo 1

Introducción

La pregunta sobre cómo el campo gravitacional puede ser determinado en una forma operacional es de fundamental importancia en Física. Esto, en el contexto de la Relatividad General, significa *explorar de manera experimental las propiedades de la geometría del espaciotiempo*. En particular, se puede obtener el tensor de curvatura de Riemann midiendo el desvío geodésico (es decir, la aceleración relativa) que la curvatura produce entre las líneas de mundo de un conjunto de cuerpos de prueba vecinos (lo que se muestra en la ecuación (2.7)). Esto condujo a la composición de un dispositivo llamado “gravitational compass”¹ [1]. El esquema de este dispositivo puede ser visto en la figura 1.1.

Desde el punto de vista experimental, los relojes modernos han alcanzado niveles de precisión y estabilidad sin precedentes [2–7]. La aplicación de relojes para la determinación del campo gravitacional representa entonces un tema de interés. Una propuesta particular que ha recibido atención es el llamado “gravitational clock compass” (GCC)² [8], que adapta la idea original presentada en [1], reemplazando los cuerpos de prueba por relojes. En este caso, se usan las mediciones de tiempo relativas entre dichos relojes para determinar la curvatura del espaciotiempo. Este método para obtener la curvatura ha sido profundizado en [9, 10].

Mientras los trabajos antes mencionados lograron establecer los fundamentos del GCC, el objetivo de este trabajo es ampliar lo ya realizado en [8], centrándose en métodos que ayuden a manifestar su uso práctico en futuros experimentos. Para ello, se extenderá el marco del GCC de dos maneras.

En primer lugar, se obtendrán nuevas expresiones analíticas que permitan deter-

¹Esto puede ser traducido como “brújula gravitacional”. Este es un nombre adecuado pues este dispositivo permitiría medir el campo gravitacional, y además orientarse en él.

²Cuya traducción al español sería “brújula gravitacional de relojes”. En el cuerpo de la tesis, se usará su nombre original en inglés.

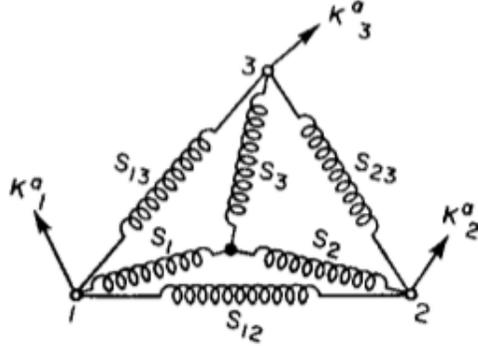


Figura 1.1: “Gravitational compass”. Las flechas indican las direcciones principales del tensor de marea $K_{ac} := R_{abcd}u^b u^d$, definido a partir del tensor de curvatura de Riemann completamente covariante R_{abcd} . Figura original de [1].

minar la aceleración y velocidad angular del sistema de referencia en el que el proceso se realiza. Lo mismo es llevado a cabo para las 20 componentes independientes del tensor de curvatura, en el contexto de Relatividad General. Se remarcarán las diferencias entre lo enunciado en [8] y lo acá propuesto. además, se hará énfasis en las configuraciones óptimas para los relojes usados.

En segundo lugar, se analizará la forma en la cual las cantidades físicas (en particular, aceleración y curvatura) pueden ser efectivamente medidas a partir de datos obtenidos por una configuración de relojes. Esto se hará a partir de la generación de datos sintéticos, los cuales serán usados para simular el proceso de determinación de parámetros, a través de métodos estadísticos. Se prestará especial atención en la discusión sobre las distintas estrategias en que estos datos pueden ser usados para el cálculo de cada componente de la curvatura.

La estructura de esta tesis es como sigue: en el capítulo 2 se mostrarán aquellos aspectos de la teoría de la Relatividad General que serán relevantes para el desarrollo de los capítulos futuros. En el capítulo 3 se mostrarán detalladamente los aspectos teóricos del GCC. Se explicará cómo un arreglo de relojes puede ser usado para determinar el estado de movimiento (aceleración y velocidad angular) de un sistema de referencia con respecto a otro en caída libre. Luego, se ilustrará cómo un arreglo de relojes puede permitir la medición del campo gravitacional, mostrando una solución analítica general para las componentes de la curvatura en términos de razones de tiempo medidas por relojes, así como de sus posiciones y velocidades en un sistema de referencia dado. A continuación, en el capítulo 4 se discutirá cómo, y con qué precisión, se pueden determinar los distintos parámetros, simulando el proceso de estimación usando datos sintéticos. Se mostrarán primero las herramientas a utilizar, por medio de ejemplos simples. Luego, se discutirá cómo estos datos sintéticos

son generados, incorporando posibles errores de medición. Finalmente, se mostrarán ejemplos de la estimación tanto de la aceleración como de las componentes de la curvatura. Se discutirá la influencia en los resultados tanto de ciertos valores medidos, como de la estrategia usada para computar los datos. Las conclusiones de este trabajo serán mostradas en el capítulo 5. Información complementaria útil puede ser encontrada en los apéndices A – C.



Capítulo 2

Relatividad General como teoría de la gravedad

En esta tesis se considerará como base la teoría de la Relatividad General (RG), que es la teoría que mejor describe actualmente la interacción gravitacional. En este capítulo se mencionarán los aspectos de esta Teoría más relevantes para el desarrollo de esta tesis. Para un análisis más detallado, se sugiere revisar [11–15]. Las notaciones y convenciones utilizadas pueden ser vistas en el apéndice A.

2.1. Gravedad como curvatura del espaciotiempo

La teoría de la Relatividad General (RG) describe un campo gravitacional general como un espaciotiempo cuatridimensional curvo (*tensor de curvatura no nulo, métrica no constante*), geometrizando de esta forma la interacción gravitacional. Por esto, en esta teoría se ocupan las herramientas matemáticas de la geometría pseudo-riemanniana, siendo el campo dinámico fundamental el tensor métrico del espaciotiempo, o **métrica**, g_{ab} .

El tensor métrico permite definir cantidades observables en el espaciotiempo. Por ejemplo, como extensión natural de lo que ocurre en Relatividad Especial, en RG se asume que los cuerpos masivos y los observadores “puntuales” describen trayectorias en el espaciotiempo, o líneas de mundo $Y^a(\tau)$, que pueden ser parametrizadas a través del **tiempo propio** τ , definido de tal forma que

$$d\tau := \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{g_{ab}(x) dx^a dx^b}, \quad (2.1)$$

donde ds es el **elemento de línea** definido a partir de la métrica g_{ab} , ver (A.1). Este tiempo propio se interpreta como *el tiempo que un reloj comóvil con el obser-*

vador mide entre los eventos con coordenadas x^a y $x^a + dx^a$. De la igualdad (2.1) se espera que el tiempo propio medido por un reloj dependa tanto de su posición en el espaciotiempo (mediado por los valores de la métrica g_{ab}) como por su movimiento (o velocidad, a través de los valores que pueda tomar dx^a).

En esta teoría, la línea de mundo $Y^a(\tau)$ de una partícula libre de fuerzas no-gravitacionales está dada por la **ecuación de la geodésica**

$$\frac{Du^a}{d\tau} = u^b \nabla_b u^a = 0, \quad (2.2)$$

donde $u^a = dY^a/d\tau$ es su 4-velocidad, $Du^a/d\tau$ es la derivada covariante total a lo largo de la línea de mundo, y $\nabla_b u^a$ es la derivada covariante del vector u^a , ver (A.6) y (A.4), respectivamente. Ambas derivadas se definen usando la conexión dada por los símbolos de Christoffel, ver (A.3). Para una partícula sobre la cual actúan fuerzas externas no-gravitacionales, el lado derecho de (2.2) ya no es cero¹. En este caso, se define la **4-aceleración** como

$$a^a := \frac{Du^a}{d\tau}. \quad (2.4)$$

De esta manera, este vector a^a cuantifica *cuánto se desvía dicha partícula de las curvas geodésicas*.

La geometría del espaciotiempo se relaciona con la fuente de la gravedad de acuerdo a la ecuación de campo de Einstein (sin constante cosmológica):

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}, \quad (2.5)$$

donde R_{ab} es el tensor de Ricci definido a partir del tensor de curvatura de Riemann $R_{cab}{}^c$, R es el escalar de curvatura, ver sección A.2, G es la constante de gravitación universal, c la rapidez de la luz en el vacío, y T_{ab} es el tensor de energía-momentum de la materia (que describe su distribución de energía, momentum, y sus flujos), y *es la fuente de campo gravitacional. El hecho de que el tensor de Riemann $R_{cab}{}^c$ sea no nulo es el que nos indica la existencia de un campo gravitacional.*

Se debe destacar que, si bien la curvatura está bien definida en cada punto, ésta se manifiesta solamente al estudiar propiedades no locales del espaciotiempo. Esto puede entenderse recordando el **principio de equivalencia** [16], que establece que

¹Por ejemplo, para una partícula con carga q y masa m moviéndose bajo la acción de un campo electromagnético externo, su ecuación de movimiento se escribe

$$\frac{Du^a}{d\tau} = \frac{q}{m}F^a{}_b u^b, \quad (2.3)$$

donde $F^a{}_b$ es el tensor de Faraday asociado a dicho campo.

en una vecindad de un evento siempre es posible encontrar coordenadas en las que la métrica del espaciotiempo adopta aproximadamente su forma plana, es decir,

$$g_{ab} \approx \eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (2.6)$$

como si *no hubiese gravedad*. Desde un punto de vista físico, esto se corresponde con los sistemas de referencia en caída libre, también conocidos como sistemas de referencia localmente inerciales (SRLI's). En estos sistemas de referencia es en los que son válidas todas las leyes válidas en el contexto de la Relatividad Especial.

Una de estas manifestaciones de la curvatura se encuentra en la **ecuación de desvío geodésico**. Considérense dos geodésicas infinitesimalmente cercanas en el espaciotiempo, $Y^a(\tau)$ y $\bar{Y}^a(\tau)$, descritas con el mismo parámetro afín τ , y un vector desplazamiento δx^a que va desde un punto de una geodésica a un punto de la otra, caracterizados por el mismo valor del parámetro τ , de tal forma que $\bar{Y}^a(\tau) = Y^a(\tau) + \delta x^a(\tau)$ (ver figura 2.1). La evolución de este vector diferencia viene dada por

$$\frac{D^2}{d\tau^2} \delta x^a = -R_{bcd}{}^a \delta x^b u^c u^d, \quad (2.7)$$

lo que describe cómo y cuánto se van acercando (o alejando) dos geodésicas cercanas en un espaciotiempo con curvatura no nula. Si existiesen dos partículas que siguen dichas geodésicas, este efecto se manifiesta como una fuerza de atracción (o repulsión) entre dichas partículas.

Como caso particular de espaciotiempo, en esta tesis se usará la solución de Schwarzschild [17], o métrica de Schwarzschild, la cual describe el campo gravitacional producido por un cuerpo esféricamente simétrico en reposo de masa M , fuera de dicha distribución de masa. Esta métrica, escrita en coordenadas de Schwarzschild $x^a = (ct, r, \theta, \varphi)$, tales que $\theta \in [0, \pi]$ y $\varphi \in [0, 2\pi[$, tiene elemento de línea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2r_s}{r}\right) (cdt)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2r_s}{r}} - r^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2], \quad (2.8)$$

donde $2r_s := 2GM/c^2$ es el *radio de Schwarzschild*. Las componentes no nulas de la curvatura, para esta métrica y en estas coordenadas, son

$$\begin{aligned} R_{rtr}{}^t &= 2R_{\theta rr}{}^\theta = 2R_{\varphi rr}{}^\varphi = \frac{2r_s}{r^2(2r_s - r)}, \\ 2R_{\theta t\theta}{}^t &= 2R_{\theta r\theta}{}^r = R_{\varphi\theta\theta}{}^\varphi = \frac{2r_s}{r}, \\ 2R_{\varphi t\varphi}{}^t &= 2R_{\varphi r\varphi}{}^r = -R_{\varphi\theta\varphi}{}^\theta = \frac{2r_s \sin^2(\theta)}{r}, \\ R_{rtt}{}^r &= -2R_{\theta t\theta}{}^\theta = -2R_{\varphi t\varphi}{}^\varphi = c^2 \frac{2r_s(2r_s - r)}{r^4}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

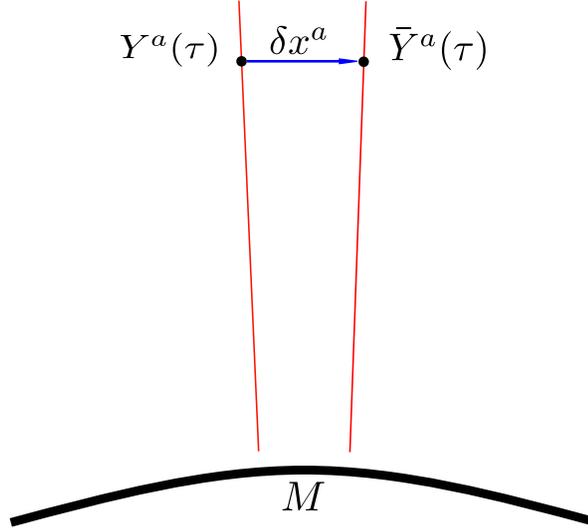


Figura 2.1: Bosquejo de dos geodésicas Y y \bar{Y} y el vector diferencia δx^a que une dos eventos en estas líneas de mundo, $Y^a(\tau)$ y $\bar{Y}^a(\tau)$ respectivamente, que verifican $\bar{Y}^a(\tau) = Y^a(\tau) + \delta x^a(\tau)$. La evolución en el tiempo de este vector diferencia está dado por (2.7).

2.2. Campo gravitacional débil y redshift gravitacional

Cuando se comenzó a estudiar la teoría de RG, uno de los primeros efectos estudiados fue el de **redshift gravitacional**, el cual nos dice que existen diferencias en el tiempo (propio) medido por dos observadores ubicados en distintos lugares de un campo gravitacional.

Por ejemplo, un **campo gravitacional débil**, como el producido por nuestro planeta, en RG se describe por un espacio “ligeramente curvado”. La métrica de este espacio se puede describir como una perturbación de la métrica de Minkowski:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}, \quad \text{con} \quad |h_{ab}| \ll 1. \quad (2.10)$$

Suponiendo además que los cuerpos se mueven muy lentamente, es decir, $|dY^\alpha/d\tau| \ll c$, $\alpha = 1, 2, 3$ (ver apéndice A para más detalles respecto a la notación), la única componente relevante de h_{ab} en nuestra expansión (2.10) será la componente puramente temporal, h_{00} . Si además consideramos que el campo gravitacional es estacionario, es decir, $\partial_t h_{ab} = 0$, se puede encontrar que la componente 00 de la perturbación h_{ab} se puede escribir como

$$h_{00} \approx \frac{2}{c^2} \phi, \quad (2.11)$$

donde

$$\phi = -\frac{GM}{r} \quad (2.12)$$

es el potencial gravitacional newtoniano producido por un cuerpo de masa M . De esta forma, con las consideraciones mencionadas se obtiene que, a primer orden en h_{00} ,

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2}{c^2}\phi. \quad (2.13)$$

A esta aproximación se le conoce como **límite newtoniano**.

La consistencia de la aproximación (2.13) con la relación (2.10) requiere que $|\phi/c^2| \ll 1$. Considerando (2.12), esta condición implica que $GM/c^2r \ll 1$. Para la superficie del Sol², $GM_{\odot}/c^2r_{\odot} \sim 10^{-6}$, mientras que en la superficie de la Tierra³, $GM_{\oplus}/c^2r_{\oplus} \sim 10^{-9}$. Esto confirma que, en estos casos, (2.13) es una buena aproximación.

Con esto en mente, considérese un emisor de señales en reposo en el punto de coordenadas x_e^a y un receptor en el punto x_r^a . Los respectivos tiempos propios de emisión y recepción de dos señales están dados, en esta aproximación, por

$$d\tau_e = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}(x_e) c^2 dt_e^2} \approx \sqrt{1 + \frac{2\phi(x_e)}{c^2}} dt_e \approx \left(1 + \frac{\phi(x_e)}{c^2}\right) dt_e, \quad (2.14)$$

$$d\tau_r = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}(x_r) c^2 dt_r^2} \approx \sqrt{1 + \frac{2\phi(x_r)}{c^2}} dt_r \approx \left(1 + \frac{\phi(x_r)}{c^2}\right) dt_r. \quad (2.15)$$

En este caso, se puede demostrar que $dt_e = dt_r$, por lo que

$$\frac{d\tau_r}{d\tau_e} \approx \frac{1 + \frac{\phi(x_r)}{c^2}}{1 + \frac{\phi(x_e)}{c^2}} \approx \left(1 + \frac{\phi(x_r)}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\phi(x_e)}{c^2}\right) \approx 1 + \frac{\phi(x_r)}{c^2} - \frac{\phi(x_e)}{c^2}, \quad (2.16)$$

por lo que

$$\frac{d\tau_r}{d\tau_e} \approx 1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (2.17)$$

Definiendo el *redshift* z como

$$z := \frac{d\tau_r}{d\tau_e} - 1, \quad (2.18)$$

esto queda simplemente

$$z \approx \frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (2.19)$$

² $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}$ kg, $r_{\odot} = 6.957 \times 10^5$ km.

³ $M_{\oplus} = 5.972 \times 10^{24}$ kg, $r_{\oplus} = 6.371 \times 10^3$ km.

Este efecto fue discutido inicialmente por el mismo Einstein [16, 18], y confirmado posteriormente por diversos experimentos [19–25]. En efecto, es necesario tomar en cuenta este efecto en los satélites que conforman el Sistema de Posicionamiento Global (GPS) para su correcto funcionamiento (ver, por ejemplo, [26]).

2.3. Observadores acelerados y tetraada asociada

Considérese un observador que se mueve a lo largo de una curva de referencia en el espaciotiempo (no necesariamente geodésica) $Y^a(\tau)$, parametrizada con su tiempo propio τ . Este observador tendrá asociado un marco de referencia definido por una tetraada $\lambda^a_{(i)}$ ortonormal en todo tiempo, es decir,

$$\lambda^a_{(i)}\lambda^b_{(j)}g_{ab} = \eta_{(i)(j)}, \quad \forall \tau, \quad (2.20)$$

donde $\eta_{(i)(j)} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, de modo que la condición (2.20) significa que el vector $\lambda^a_{(0)}$ es tipo tiempo y de módulo 1, que cada vector $\lambda^a_{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) es tipo espacio y módulo -1, y que estos vectores son ortogonales entre sí. Se usará esta tetraada para describir un sistema de referencia comóvil respecto del observador, esto es, que para todo τ su vector temporal será la 4-velocidad del sistema de referencia asociado a la tetraada, es decir, $\lambda^a_{(0)} = u^a/c$.

Este observador puede tener una 4-aceleración como la definida en (2.4). Debido a esta definición, y a que la magnitud de la 4-velocidad es constante pues verifica que $u^a u_a = c^2$, la 4-velocidad y la 4-aceleración del observador verifican

$$a^a u_a = 0, \quad (2.21)$$

es decir, son ortogonales. Además, las direcciones espaciales de la tetraada pueden rotar en el espacio con un vector velocidad angular ω^a , definido de tal manera que

$$\omega^a := \frac{1}{2}\sqrt{-g} \epsilon_{abcd} u^b \Omega^{cd}, \quad \Omega^a_b := \lambda_b^{(i)} \frac{D\lambda^a_{(i)}}{d\tau}, \quad (2.22)$$

donde ϵ_{abcd} es el símbolo de Levi-Civita 4-dimensional totalmente antisimétrico, y

$$\lambda_b^{(i)} := \lambda^a_{(j)} g_{ab} \eta^{(j)(i)} \quad (2.23)$$

es la tetraada inversa, que satisface

$$\lambda_a^{(i)} \lambda^a_{(j)} = \delta^{(i)}_{(j)}, \quad \lambda_a^{(i)} \lambda^b_{(i)} = \delta^b_a. \quad (2.24)$$

Como consecuencia de (2.22a), ω^a también es ortogonal a la 4-velocidad, es decir,

$$\omega^a u_a = 0. \quad (2.25)$$

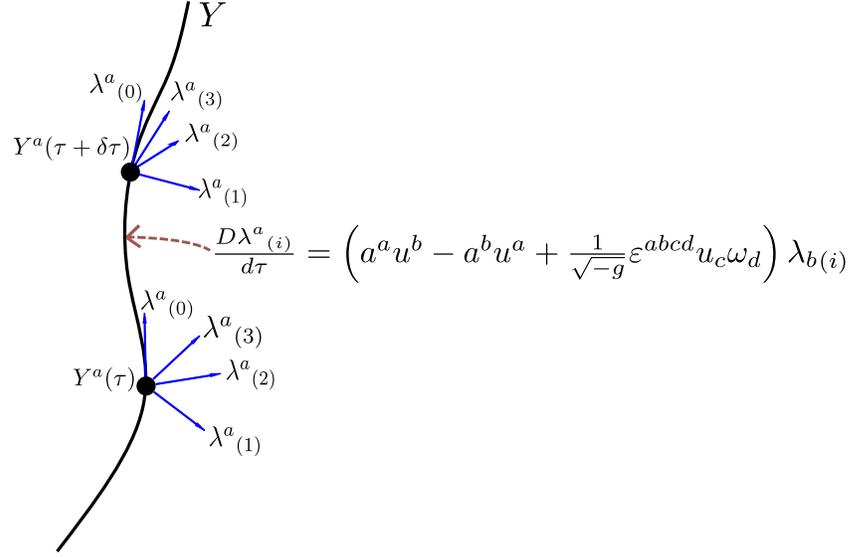


Figura 2.2: Evolución de la tetrada $\lambda^a_{(i)}$ a lo largo de la curva de referencia $Y(\tau)$. Esta evolución está dada por (2.26).

Dadas estas definiciones, un álgebra sencilla muestra que la derivada covariante de la tetrada a lo largo de la línea de mundo considerada se puede escribir en función de a^a , u^a , y ω^a como

$$\frac{D\lambda^a_{(i)}}{d\tau} = \left(a^a u^b - a^b u^a + \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{abcd} u_c \omega_d \right) \lambda_{b(i)}, \quad (2.26)$$

con $g := \det(g_{ab})$. La evolución de esta tetrada a lo largo de la curva se grafica esquemáticamente en la figura 2.2.

Se puede identificar a^a como la 4-aceleración de la tetrada c/r a una que se mueva en una geodésica (tal y como se dijo al definir (2.4)), es decir, como la aceleración c/r a un SRLI. Por su parte, podemos identificar a ω^a como la 4-velocidad angular de la tetrada c/r a una que no rote espacialmente o, dicho de otra forma, como la velocidad angular de rotación de los vectores base espaciales $\lambda^a_{(\alpha)}$ c/r a giróscopos guía inerciales. Si $\omega^a = 0$ se dice que la tetrada satisface el **transporte de Fermi-Walker**, y es la trayectoria que sigue, por ejemplo, el vector de spín con rotación que acelera, pero sobre el cual no se ejerce ningún torque externo (ver, por ejemplo, [12]). Por otro lado, si tanto a^a como ω^a son cero, el observador se encuentra en caída libre, es decir, define un SRLI.

Capítulo 3

Gravitational Clock Compass

En este capítulo se describirán las características principales del “gravitational clock compass” (GCC) descrito originalmente en [8], empezando por el sistema coordenado que se usará en los cálculos respectivos. Luego, se mostrará el detalle del modelo propuesto, haciendo énfasis en las diferencias entre lo descrito en este trabajo y lo mostrado en [8].

Durante este capítulo se usará la convención en la que $c = 1$.

3.1. Coordenadas de Fermi

Si bien es cierto que las cantidades físicas son independientes de las coordenadas usadas para describir un fenómeno o realizar algún cálculo, la relación explícita entre dichas cantidades directamente medibles y las coordenadas puede ser no-trivial, adoptando formas distintas en distintos sistemas coordenados, y complicando el análisis. Además, la ejecución operacional de estas coordenadas es crucial cuando se trata de mediciones.

Para los cálculos de esta tesis se usarán las llamadas **coordenadas de Fermi** o coordenadas normales (ver [12] y las citas allí para más detalles, también puede verse [27]). Estas coordenadas tienen la ventaja de que son las “más parecidas” a las cartesianas que podemos construir para un sistema de referencia que no sigue una geodésica, como puede ser un laboratorio que no se encuentre en caída libre. En efecto, las coordenadas de Fermi se reducen a las cartesianas, en el espacio plano, para observadores no acelerados ni rotantes.

Estas coordenadas se construyen a partir de un observador que lleva asociada una tetraada con las características discutidas en la sección 2.3. Además, se impon-

drá la condición de que las líneas coordenadas de las coordenadas de Fermi sean paralelas a los vectores de la tetraada cuando se evalúan sobre la curva de referencia. Matemáticamente, esto equivale a que se cumpla que

$$\lambda^a_{(i)}|_Y \stackrel{!}{=} \delta^a_{(i)}, \quad \forall \tau. \quad (3.1)$$

En particular esto implica que, en coordenadas de Fermi,

$$u^a = \lambda^a_{(0)} = (1, 0, 0, 0). \quad (3.2)$$

Las expresiones (3.2), (2.21) y (2.25) implican que la 4-aceleración y la 4-velocidad angular, en estas coordenadas, son de la forma

$$a^a = (0, a^\alpha), \quad \text{y} \quad \omega^a = (0, \omega^\alpha). \quad (3.3)$$

Ahora, consideremos un punto X en las vecindades de la curva de referencia Y , y una única geodésica que los una. Definimos las coordenadas del punto X como

$$X^0 := \tau, \quad X^\alpha := s \xi^b \lambda_b^{(\alpha)}, \quad (3.4)$$

donde ξ^b es un vector tangente a la geodésica considerada, y s es la distancia propia entre Y y X a lo largo de esta geodésica.

Si la tetraada $\lambda_b^{(\alpha)}$ usada en (3.4) verifica (2.26), las coordenadas definidas en (3.4) son llamadas **coordenadas de Fermi** o **coordenadas normales**. Un esquema de la construcción de estas coordenadas puede ser visto en la figura 3.1.

Las coordenadas de Fermi, por construcción, no pueden cubrir toda la variedad. En primera instancia, la región de validez de las coordenadas depende del movimiento del observador, en particular, de la magnitud de la aceleración $|a^\alpha|$ y de la velocidad angular $|\omega^\alpha|$. Si estas magnitudes son muy altas, a medida que la tetraada evolucione en el tiempo habrán regiones del espaciotiempo cubiertas por más de un sistema coordinado, en distintos tiempos, mientras que otras regiones no estarán cubiertas por ninguna (para más detalles, puede verse la sección 6.3 de [12], y [27]). Así, estas magnitudes definen dos escalas de longitud características, $\ell_{\text{accel}} = c^2/|a^\alpha|$, y $\ell_{\text{rot}} = c/|\omega^\alpha|$. Las coordenadas de Fermi proveen una buena descripción para la región $|X^\alpha| \ll \ell$, para ambas distancias. Para un observador en reposo sobre la superficie de la Tierra, $\ell_{\text{accel}} = c^2/|g_{\text{Tierra}}^\alpha| \approx 10^{16}\text{m}$ (\approx un año luz), y $\ell_{\text{rot}} = c/|\Omega_{\text{Tierra}}^\alpha| \approx 4 \times 10^{12}\text{m}$ ($\approx 27 \text{ UA}^1$). Esto muestra que, en las cercanías de nuestro planeta, las coordenadas de Fermi son adecuadas para describir fenómenos gravitatorios.

Además, la región de validez de las coordenadas de Fermi también está dada por la intensidad del campo gravitacional en la región de interés, es decir, por el

¹La unidad astronómica (o UA) es una unidad de longitud que equivale aproximadamente a la distancia media entre la Tierra y el Sol. $1\text{UA} \approx 1.5 \times 10^{11}\text{m}$.

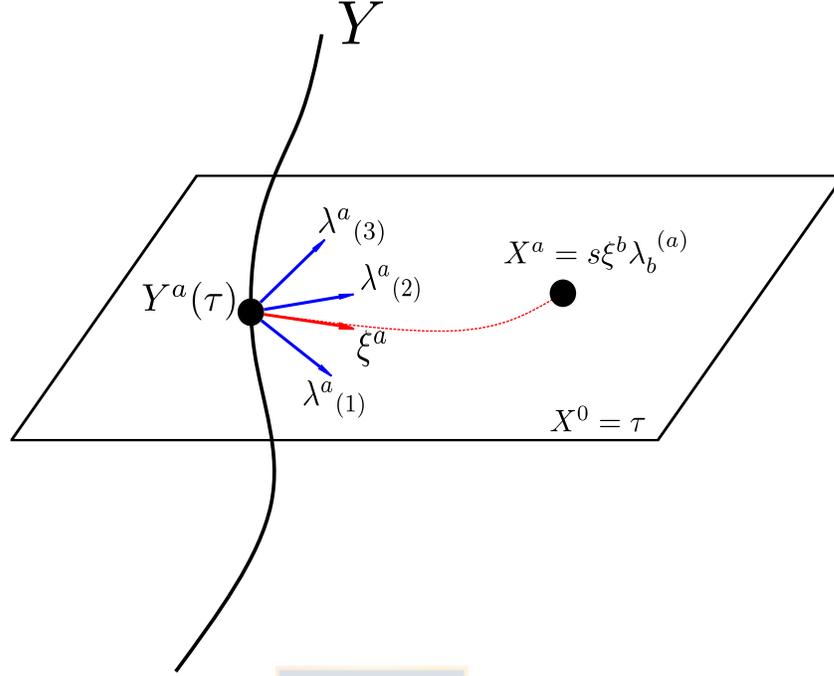


Figura 3.1: Construcción de las coordenadas de Fermi alrededor de la curva de referencia Y . Podemos ver las coordenadas X^a de un punto X en las vecindades de Y . Sus coordenadas espaciales están construídas por medio de los vectores espaciales de la tetrad $\lambda^b_{(\alpha)}$, que se ven en azul, mientras que en rojo se ve el vector ξ^a tangente a la (única) geodésica que une Y con X . Además, se muestra la hipersuperficie a τ constante, que define la coordenada temporal X^0 del punto X .

valor de las componentes de la curvatura en la vecindad de la curva de referencia. Esto, pues se espera que la curvatura no cause que las geodésicas se crucen (debido a la ecuación de desvío geodésico (2.7), dos geodésicas inicialmente diferentes podrían cruzarse), para que se cumpla que la geodésica que une los puntos Y y X sea única, como nos pide la definición (3.4). Esto define otra escala de distancias, $\ell_{\text{grav}} = \min\{|R_{abcd}|^{-1/2}, |R_{abcd}|/|\partial_e R_{abcd}|\}$ [27]. En general, para un campo gravitacional producido por una masa M descrito por la métrica de Schwarzschild (2.8), tendremos aproximadamente que $\ell_{\text{grav}} = \min\{|r_s/r^3|^{-1/2}, r/3\}$, donde r es la coordenada radial donde se está midiendo, que puede ser aproximada a la distancia desde el centro del objeto en consideración. Para la superficie de la Tierra, $|r_s/r_{\text{Tierra}}^3|^{-1/2} \approx |3.41 \times 10^{-23} \text{ m}^{-2}|^{-1/2} \approx 1.71 \times 10^{11} \text{ m}$, y $r_{\text{Tierra}}/3 \approx 2.12 \times 10^6 \text{ m}$, por lo que $\ell_{\text{grav}} \sim r_{\text{Tierra}}/3 \approx 10^6 \text{ m}$. Así, se concluye que las coordenadas de Fermi son adecuadas para describir experimentos en las cercanías de la Tierra, incluyendo satélites artificiales que la orbiten.

Reemplazando las tetradas (3.1) y los valores de la aceleración y la velocidad (3.3) en (2.26), se pueden encontrar las componentes de la conexión. Al hacer esto,

se obtiene que estas componentes, *evaluadas sobre la curva y en estas coordenadas*², valen

$$\Gamma_{00}{}^0 = 0, \quad (3.5a)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^c = 0, \quad (3.5b)$$

$$\Gamma_{00}{}^\alpha = a^\alpha, \quad (3.5c)$$

$$\Gamma_{0\alpha}{}^0 = a_\alpha, \quad (3.5d)$$

$$\Gamma_{0\beta}{}^\alpha = -\epsilon^\alpha{}_{\beta\gamma}\omega^\gamma. \quad (3.5e)$$

De aquí en adelante, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ es el símbolo de Levi-Civita 3-dimensional, y se usará la métrica euclidiana 3-dimensional $\delta_{\alpha\beta}$ para subir y bajar índices espaciales (griegos) de cantidades puramente espaciales. En particular, $a_\alpha = \delta_{\alpha\beta}a^\beta$, y $\epsilon^\alpha{}_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha\delta}\epsilon_{\delta\beta\gamma}$.

Las derivadas temporales de la conexión sobre la curva se encuentran simplemente derivando (3.5) con respecto al tiempo, y adoptan la forma

$$\partial_0\Gamma_{00}{}^0 = 0, \quad (3.6a)$$

$$\partial_0\Gamma_{\alpha\beta}{}^c = 0, \quad (3.6b)$$

$$\partial_0\Gamma_{00}{}^\alpha = \partial_0a^\alpha =: b^\alpha, \quad (3.6c)$$

$$\partial_0\Gamma_{0\alpha}{}^0 = b_\alpha, \quad (3.6d)$$

$$\partial_0\Gamma_{0\beta}{}^\alpha = -\epsilon^\alpha{}_{\beta\gamma}\partial_0\omega^\gamma =: -\epsilon^\alpha{}_{\beta\gamma}\eta^\gamma. \quad (3.6e)$$

De la definición de curvatura (A.7) se pueden obtener las derivadas espaciales de la conexión en términos de dicha curvatura, las cuales son

$$\partial_\alpha\Gamma_{00}{}^0 = b_\alpha - a_\beta\epsilon^\beta{}_{\alpha\gamma}\omega^\gamma, \quad (3.7a)$$

$$\partial_\alpha\Gamma_{00}{}^\beta = -R_{0\alpha 0}{}^\beta - \epsilon^\beta{}_{\alpha\gamma}\eta^\gamma + a_\alpha a^\beta - \delta_\alpha^\beta\omega_\gamma\omega^\gamma + \omega_\alpha\omega^\beta, \quad (3.7b)$$

$$\partial_\alpha\Gamma_{0\beta}{}^0 = -R_{0\alpha\beta}{}^0 - a_\alpha a_\beta, \quad (3.7c)$$

$$\partial_\alpha\Gamma_{0\beta}{}^\gamma = -R_{0\alpha\beta}{}^\gamma + \epsilon^\gamma{}_{\alpha\delta}\omega^\delta a_\beta, \quad (3.7d)$$

$$\partial_\alpha\Gamma_{\beta\gamma}{}^d = \frac{1}{3}\left(R_{\alpha\beta\gamma}{}^d + R_{\alpha\gamma\beta}{}^d\right) =: \frac{2}{3}R_{\alpha(\beta\gamma)}{}^d. \quad (3.7e)$$

3.1.1. Forma explícita de la métrica

Para determinar la métrica en el punto X (en la vecindad de la curva de referencia $Y(\tau)$) con coordenadas y^a , se considerará la expansión de la métrica alrededor de nuestra curva de referencia hasta segundo orden en las coordenadas y^a :

$$g_{ab}|_X = g_{ab}|_Y + (\partial_c g_{ab})|_Y y^c + \frac{1}{2}(\partial_c\partial_d g_{ab})|_Y y^c y^d + \dots \quad (3.8)$$

²En adelante, omitiremos la notación $|_Y$ para indicar cantidades evaluadas sobre la curva Y , ya que todas las cantidades serán expandidas en torno a esa curva de referencia.

En coordenadas de Fermi, dada la elección de los vectores de la tetrada (3.1) y a sus propiedades de ortonormalidad (2.20), se tiene que

$$g_{ab}|_X = \eta_{ab}, \quad (3.9)$$

mientras que las derivadas de la métrica deben ser calculadas. En este caso, las derivadas de la métrica pueden ser obtenidas considerando la condición de metricidad (A.5) y sucesivas derivadas de ésta, esto es,

$$\begin{aligned} \partial_c g_{ab} &= 2 g_{d(a} \Gamma_{b)c}{}^d, \\ \partial_c \partial_d g_{ab} &= 2 [(\partial_d g_{e(a} \Gamma_{b)c}{}^e + (\partial_d \Gamma_{c(a}{}^e) g_{b)e}], \end{aligned} \quad (3.10)$$

etc. Combinando (3.10) con (3.5), las derivadas de primer orden de la métrica quedan

$$\partial_0 g_{00} = \partial_0 g_{0\alpha} = \partial_0 g_{\alpha\beta} = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.11a)$$

$$\partial_\alpha g_{00} = 2a_\alpha, \quad (3.11b)$$

$$\partial_\beta g_{0\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega^\gamma. \quad (3.11c)$$

Para las derivadas de segundo orden de la métrica se usa nuevamente (3.10), combi-
nándola con (3.6), (3.7), y (3.11) obteniendo

$$\partial_0 \partial_0 g_{00} = \partial_0 \partial_0 g_{0\alpha} = \partial_0 \partial_0 g_{\alpha\beta} = \partial_0 \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.12a)$$

$$\partial_0 \partial_\alpha g_{00} = 2b_\alpha, \quad (3.12b)$$

$$\partial_0 \partial_\beta g_{0\alpha} = -\epsilon^\gamma{}_{\beta\delta} \eta^\delta g_{\alpha\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\delta} \eta^\delta, \quad (3.12c)$$

$$\partial_\beta \partial_\alpha g_{00} = -2R_{0\beta\alpha}{}^0 + 2a_\alpha a_\beta - 2\delta_{\alpha\beta} \omega_\gamma \omega^\gamma + 2\omega_\alpha \omega_\beta, \quad (3.12d)$$

$$\partial_\gamma \partial_\beta g_{0\alpha} = -\frac{2}{3} (R_{\alpha\beta\gamma}{}^0 + R_{\alpha\gamma\beta}{}^0) =: -\frac{4}{3} R_{\alpha(\beta\gamma)}{}^0, \quad (3.12e)$$

$$\partial_\delta \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{3} (R_{\gamma\alpha\beta\delta} + R_{\gamma\beta\alpha\delta}) =: -\frac{2}{3} R_{\gamma(\alpha\beta)\delta}, \quad (3.12f)$$

donde, y de aquí en adelante, se recurrirá a la convención usual para bajar el último índice de la curvatura, usando la métrica completa.

La ecuación (3.12f) es distinta a la correspondiente en el set de ecuaciones (15) del artículo original [8]. Esto es debido a que, en esta tesis, se baja el índice contravariante de la curvatura usando la métrica completa g_{ab} , en lugar de bajarlo con la métrica euclidiana 3-dimensional $\delta_{\alpha\beta}$ como se hace, por ejemplo, en (3.5), y como se hizo en [8] con dicha ecuación en (15).

Reemplazando (3.9), (3.11) y (3.12) en (3.8), se obtiene que el elemento de línea en coordenadas de Fermi para un punto en la vecindad de la curva de referencia, hasta segundo orden en las coordenadas y^a , se escribe como

$$ds^2|_X = (dy^0)^2 [1 + 2a_\alpha y^\alpha + 2b_\alpha y^\alpha y^0 + (a_\alpha a_\beta - \delta_{\alpha\beta} \omega_\gamma \omega^\gamma + \omega_\alpha \omega_\beta - R_{0\alpha\beta 0}) y^\alpha y^\beta]$$

$$\begin{aligned}
& + 2dy^0 dy^\alpha [\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma y^\beta + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\eta^\gamma y^\beta y^0 - \frac{2}{3}R_{\alpha\beta\gamma 0}y^\beta y^\gamma] \\
& - dy^\alpha dy^\beta [\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}R_{\gamma\alpha\beta\delta}y^\gamma y^\delta] + \mathcal{O}(3).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Es importante destacar que, al escribir el elemento de línea como en (3.13), se obtienen en los relojes efectos que dependen de la aceleración y la velocidad angular, es decir, de cantidades puramente cinemáticas asociadas al sistema de referencia en el que estamos observando. Esto se debe a la elección de un observador general, que puede ser no-inercial. Además, podemos ver que en los términos a primer orden sólo aparecen estos efectos cinemáticos, mientras que en los términos a segundo orden aparecen además los efectos de la curvatura en el elemento de línea.

Este resultado será usado para describir el comportamiento de relojes en la vecindad de la línea de mundo de referencia, en las coordenadas que se están usando.

3.1.2. Comportamiento aparente de relojes

Usando (3.13) se puede ver que, en el espacio curvo y en coordenadas de Fermi, la razón entre tiempos propios de dos relojes, ubicados uno sobre la curva de referencia Y y el otro sobre un punto X de coordenadas y^α , en las vecindades de Y , viene dada por

$$\begin{aligned}
\left(\frac{ds|_X}{ds|_Y}\right)^2 &= \left(\frac{dy^0}{ds|_Y}\right)^2 \left[-\delta_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta + 2a_\alpha y^\alpha + y^\alpha y^\beta (a_\alpha a_\beta - \delta_{\alpha\beta}\omega_\gamma \omega^\gamma + \omega_\alpha \omega_\beta - R_{0\alpha\beta 0}) \right. \\
&\quad \left. + 2v^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} y^\beta \omega^\gamma - \frac{4}{3}v^\alpha y^\beta y^\gamma R_{\alpha\beta\gamma 0} - \frac{1}{3}v^\alpha v^\beta y^\gamma y^\delta R_{\gamma\alpha\beta\delta} + 1 \right] + \mathcal{O}(3),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde $v^\alpha := dy^\alpha/dy^0$ es la **velocidad (coordenada)** del reloj ubicado en el punto X . Se definirá la cantidad adimensional \bar{C} de tal manera que

$$\bar{C}(y^\alpha, y^0, v^\alpha, a^\alpha, \omega^\alpha, b^\alpha, \eta^\alpha, R_{abcd}) + 1 := \left(\frac{ds|_X}{ds|_Y}\right)^2. \tag{3.15}$$

Esta definición es diferente a definición de la cantidad C mostrada en la ecuación (23) de [8], y será más útil pues simplificará los cálculos y las expresiones venideras.

Esta razón de tiempos \bar{C} está relacionada con el **redshift** z (de X con respecto a Y). En efecto, dada la definición usual del redshift

$$1 + z := \left(\frac{ds|_Y}{ds|_X}\right), \tag{3.16}$$

se tiene que

$$\bar{C} + 1 = \left(\frac{ds|_X}{ds|_Y} \right)^2 = (1 + z)^{-2}. \quad (3.17)$$

Nótese que, si $z \ll 1$, entonces

$$\bar{C} \approx -2z. \quad (3.18)$$

Para este trabajo, se supondrá que el reloj ubicado en la curva de referencia, que será llamado **reloj de referencia**, está siempre *en reposo* respecto de dicha curva. Con esto, $(dy^0)/(ds|_Y) \equiv 1$, por lo que (3.14), usando además (3.15), queda

$$\begin{aligned} \bar{C} = & -\delta_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta + 2a_\alpha y^\alpha + 2b_\alpha y^\alpha y^0 + y^\alpha y^\beta (a_\alpha a_\beta - \delta_{\alpha\beta}\omega_\gamma \omega^\gamma + \omega_\alpha \omega_\beta - R_{0\alpha\beta 0}) \\ & + 2v^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (y^\beta \omega^\gamma + y^0 y^\beta \eta^\gamma) - \frac{4}{3}v^\alpha y^\beta y^\gamma R_{\alpha\beta\gamma 0} - \frac{1}{3}v^\alpha v^\beta y^\gamma y^\delta R_{\gamma\alpha\beta\delta} + \mathcal{O}(3). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Esta suposición es diferente a la usada en el trabajo original [8], donde el reloj de referencia tenía la misma velocidad (coordinada) que el reloj ubicado en el punto X , por lo que la ecuación (3.19) es diferente a la ecuación (24) de [8], la cual es su símil. Además, y por simplicidad, se considerará el caso en que las cantidades involucradas son independientes del tiempo, es decir, $b_\alpha = \eta_\alpha \equiv 0$, por lo que el elemento de línea queda escrito finalmente como

$$\begin{aligned} \bar{C} = & -v^2 + 2a_\alpha y^\alpha + y^\alpha y^\beta (a_\alpha a_\beta - \delta_{\alpha\beta}\omega_\gamma \omega^\gamma + \omega_\alpha \omega_\beta - R_{0\alpha\beta 0}) \\ & + 2v^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} y^\beta \omega^\gamma - \frac{4}{3}v^\alpha y^\beta y^\gamma R_{\alpha\beta\gamma 0} - \frac{1}{3}v^\alpha v^\beta y^\gamma y^\delta R_{\gamma\alpha\beta\delta} + \mathcal{O}(3), \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde se ha ocupado $v^2 = \delta_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta$. Esta será la llamada “ecuación maestra”, la igualdad más importante para el desarrollo de esta tesis. Es la que más se usará, pues relaciona una cantidad medible (lado izquierdo) con las propiedades del sistema de referencia y del campo gravitacional (lado derecho).

3.2. Gravitational Clock Compass: idea central

Cómo determinar el campo gravitacional en una forma operacional ha sido de suma importancia en área de la gravitación. En 1956, Pirani sugiere que las componentes físicas (es decir, las linealmente independientes) del tensor de Riemann pueden ser determinados por un experimento donde se dispone de una nube de partículas de prueba y se miden sus aceleraciones relativas las cuales, considerando (2.7), son proporcionales al tensor de Riemann [28]. Inspirado en esto, en [1] se introduce el

concepto de “gravitational compass”, un arreglo de partículas de prueba conectadas por resortes (como se muestra en la figura 1.1). La curvatura se manifiesta en forma de tensión sobre los resortes.

Inspirándose en esta idea es que es postulado el GCC [8] el cual, en vez de considerar la aceleración relativa entre partículas, toma en cuenta los efectos gravitacionales en la medición de tiempo propio de relojes estándar, descrito en la sección 2.2. De esta manera, la idea principal del GCC es considerar diferentes configuraciones de relojes, es decir, cierta cantidad de relojes con posiciones y velocidades diferentes entre ellos, y medir sus tiempos propios relativos respecto de un reloj de referencia, como sugiere el resultado de la sección 3.1.2. Realizando esto con varios relojes con diferentes configuraciones iniciales, se obtienen varias copias de (3.20), con distintos valores medidos para las razones de tiempos en sus lados izquierdos, y una combinación entre los valores para las posiciones y velocidades de dichas configuraciones y las incógnitas en el lado derecho, las que serán la aceleración a^α , la velocidad angular ω^α , y/o las componentes del tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, según corresponda al caso en cuestión. En otras palabras, se obtiene un sistema de ecuaciones que usaremos para encontrar las cantidades físicas deseadas. Notar que este sistema de ecuaciones será, en general, *cuadrático* en las variables a^α y ω^α , y *lineal* en $R_{\gamma\alpha\beta\delta}$ (ver (3.20)).

Se comenzará etiquetando las posibles configuraciones de posición y velocidad para los relojes. Para la posición, se etiquetarán estas posibles configuraciones como:

$$\begin{aligned}
 {}^{(1)}y^\alpha &= \begin{pmatrix} y_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & {}^{(2)}y^\alpha &= \begin{pmatrix} 0 \\ y_{22} \\ 0 \end{pmatrix}, & {}^{(3)}y^\alpha &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_{33} \end{pmatrix}, \\
 {}^{(4)}y^\alpha &= \begin{pmatrix} y_{41} \\ y_{42} \\ 0 \end{pmatrix}, & {}^{(5)}y^\alpha &= \begin{pmatrix} 0 \\ y_{52} \\ y_{53} \end{pmatrix}, & {}^{(6)}y^\alpha &= \begin{pmatrix} y_{61} \\ 0 \\ y_{63} \end{pmatrix}, \\
 {}^{(7)}y^\alpha &= -{}^{(1)}y^\alpha, & {}^{(8)}y^\alpha &= -{}^{(2)}y^\alpha, & {}^{(9)}y^\alpha &= -{}^{(3)}y^\alpha.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Esta forma difiere ligeramente a la definida en (25) de [8], con la intención de que aparezcan las distancias de manera explícita. Estas condiciones iniciales pueden ser vistas esquemáticamente en la figura 3.2.

Para la velocidad se considerará, *a menos que se indique lo contrario*, el caso más general en el que cada reloj puede tener una velocidad general, es decir, en que cada una de sus componentes sean no nulas. Se escribirá la configuración general para la velocidad como

$${}^{(n)}v^\alpha = \begin{pmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ v_{n3} \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

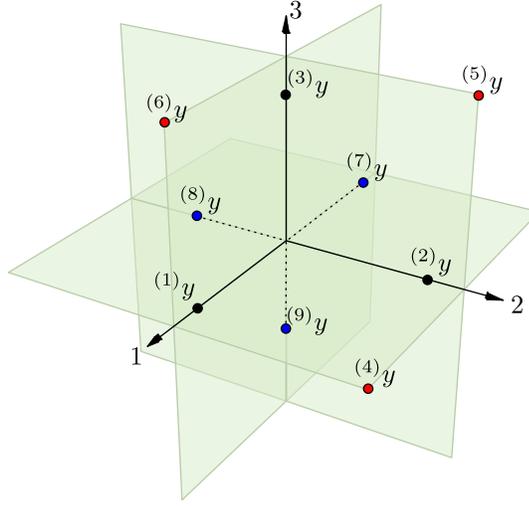


Figura 3.2: Esquema de las posiciones (3.21) usadas como condiciones iniciales para los relojes. Figura adaptada a partir de esta figura original.

donde n denota el n -ésimo reloj considerado (o la n -ésima condición general considerada, en caso que éstas se especifiquen). Si bien es cierto que esta definición es más general, durante la tesis se mencionarán algunas configuraciones particulares similares a las definidas en las ecuaciones (26) de [8].

Por su parte, la aceleración y la velocidad angular son propiedades del sistema de referencia, por lo que los vectores a^α y ω^α son únicos dada la definición de dicho sistema. Estas cantidades se denotarán como

$$a_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \omega_\alpha = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

3.3. Determinación de la aceleración lineal y velocidad angular, a primer orden

Se comenzará viendo cómo se pueden encontrar configuraciones de relojes que permitan determinar las componentes de las cantidades cinemáticas relacionadas al sistema de referencia, es decir, cómo se puede determinar la aceleración lineal a^α y la velocidad angular ω^α , considerando sólo los términos a primer orden de (3.20), esto es, considerando sólo

$$\bar{C} = -v^2 + 2a_\alpha y^\alpha + 2v^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} y^\beta \omega^\gamma + \mathcal{O}(2). \quad (3.24)$$

Este análisis no aparece en [8]. Fue realizado para esta tesis, para poder compararlo con el caso clásico.

3.3.1. Determinación de la aceleración lineal

Para la determinación de la aceleración lineal, se reescribe (3.24) como

$$2a_\alpha y^\alpha = A_1(\bar{C}, y^\alpha, v^\alpha, \omega^\alpha), \quad (3.25)$$

donde la razón de tiempo medida \bar{C} , así como el resto de las cantidades involucradas, como la posición y velocidad del reloj y la velocidad angular del sistema, son recolectadas en la cantidad A_1 del lado derecho de (3.25), de tal forma que

$$A_1(\bar{C}, y^\alpha, v^\alpha, \omega^\alpha) := \bar{C} + v^2 - 2v^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} y^\beta \omega^\gamma. \quad (3.26)$$

Cabe notar que, para despejar la aceleración del sistema, todas las cantidades involucradas en la definición de A_1 se asumirán *conocidas*, pues nuestros resultados dependerán de ellas.

Para este caso, considerando (3.21) y (3.22), se tendrá el sistema

$$\begin{aligned} 2a_\alpha {}^{(n)}y^\alpha &= A_1({}^{(n)}\bar{C}, {}^{(n)}y^\alpha, {}^{(n)}v^\alpha, \omega^\alpha) \\ &=: {}^{(n)}A_1, \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde ${}^{(n)}\bar{C}$ es el valor de \bar{C} dado por la expresión (3.25) evaluada para un reloj en la posición ${}^{(n)}y^\alpha$ con velocidad ${}^{(n)}v^\alpha$. Esto representa n ecuaciones con n configuraciones diferentes. Para determinar las componentes de la aceleración se usarán 3 relojes, en las posiciones ${}^{(1)}y^\alpha$, ${}^{(2)}y^\alpha$ y ${}^{(3)}y^\alpha$, donde cada reloj poseerá una velocidad general (3.22). Esto puede elegirse de esta forma ya que, viendo el lado izquierdo de (3.27), se puede notar que en el término donde aparece la aceleración no depende de la velocidad lineal del sistema.

Esta elección lleva a un set de ecuaciones que puede ser usado para resolver las componentes de a_α . Esta solución, en términos de los \bar{C} 's, queda

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2y_{11}} \left({}^{(1)}\bar{C} - 2\omega_2 v_{13} y_{11} + 2\omega_3 v_{12} y_{11} + {}^{(1)}v^2 \right), \\ a_2 &= \frac{1}{2y_{22}} \left({}^{(2)}\bar{C} + 2\omega_1 v_{23} y_{22} - 2\omega_3 v_{21} y_{22} + {}^{(2)}v^2 \right), \\ a_3 &= \frac{1}{2y_{33}} \left({}^{(3)}\bar{C} - 2\omega_1 v_{32} y_{33} + 2\omega_2 v_{31} y_{33} + {}^{(3)}v^2 \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Estas expresiones pueden ser usadas para obtener la aceleración a partir de mediciones de un arreglo con 3 relojes distintos.

Como caso particular de interés, si se fija la velocidad de cada reloj como cero, se obtiene

$$a_1 = \frac{{}^{(1)}\bar{C}}{2y_{11}}, \quad a_2 = \frac{{}^{(2)}\bar{C}}{2y_{22}}, \quad a_3 = \frac{{}^{(3)}\bar{C}}{2y_{33}}. \quad (3.29)$$

Es importante notar que esta última solución (3.29) no depende de la velocidad angular del sistema, por lo que no requiere otro conocimiento previo sobre el sistema de referencia para determinar su aceleración, sino que sólo se requiere conocer cantidades medidas directamente, que son las distancias y_{ii} y las razones de tiempo ${}^{(j)}\bar{C}$ de los relojes utilizados.

Además, nótese que este resultado es consistente con el obtenido en (2.19). En efecto, usando (3.18) se puede escribir alguno de los resultados obtenidos en (3.29), considerando el caso en que la aceleración es paralela a uno de los ejes, como

$$z = -\frac{a_1 y_{11}}{c^2}, \quad (3.30)$$

Esta expresión es compatible con (2.19) pues, en este caso, $\Delta\phi \approx -a_1 y_{11}$.

3.3.2. Determinación de la velocidad angular

Para determinar la velocidad angular del sistema se procederá de manera análoga a la sección anterior, reescribiendo (3.24) como

$$2v^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} y^\beta \omega^\gamma = A_2(\bar{C}, y^\alpha, v^\alpha, a^\alpha), \quad (3.31)$$

donde, al igual que en la definición (3.26), se define

$$A_2(y^\alpha, v^\alpha, a^\alpha) := \bar{C} + v^2 - 2a_\alpha y^\alpha. \quad (3.32)$$

En esta función A_2 se han incluido todas las otras cantidades involucradas que, una vez más, se supondrán conocidas.

Considerado (3.21) y (3.22), queda el sistema

$$\begin{aligned} 2 {}^{(n)}v^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} {}^{(n)}y^\beta \omega^\gamma &= A_2({}^{(n)}\bar{C}, {}^{(n)}y^\alpha, {}^{(n)}v^\alpha, \omega^\alpha) \\ &=: {}^{(n)}A_2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

el cual, al igual que en la sección anterior, representa un sistema de n ecuaciones, que necesita n configuraciones diferentes para ser resuelto. Para este caso, se usarán relojes en las posiciones ${}^{(1)}y^\alpha$, ${}^{(2)}y^\alpha$, y ${}^{(3)}y^\alpha$, los cuales tendrán las siguientes condiciones para la velocidad:

$${}^{(1)}v^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{12} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{(2)}v^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{23} \end{pmatrix}, \quad {}^{(3)}v^\alpha = \begin{pmatrix} v_{31} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

es decir, se usarán 3 relojes en total. Nótese que estas velocidades se han elegido de tal manera que sean *ortogonales* a su correspondiente posición pues, del lado izquierdo de (3.33), se ve que sólo las componentes perpendiculares a la posición contribuyen a dicho término, mientras que las paralelas se anulan, por lo que es más simple que la velocidad sólo tenga componentes perpendiculares.

Considerando estas condiciones iniciales, la solución explícita de este sistema será

$$\begin{aligned}\omega^1 &= \frac{-(2)\bar{C} + 2a_2y_{22} - v_{23}^2}{2y_{22}v_{23}}, \\ \omega^2 &= \frac{-(3)\bar{C} + 2a_3y_{33} - v_{31}^2}{2y_{33}v_{31}}, \\ \omega^3 &= \frac{-(1)\bar{C} + 2a_1y_{11} - v_{12}^2}{2y_{11}v_{12}}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

3.4. Determinación de la aceleración lineal y velocidad angular, a segundo orden

Se continuará viendo cómo se puede determinar las propiedades del sistema de referencia, considerando ahora los términos de la expansión (3.20) hasta segundo orden en las coordenadas. En esta sección se considerará que la contribución de las componentes de la curvatura a la cantidad \bar{C} es despreciable.

Los resultados de esta sección, y de la siguiente, están basados en lo hecho en [8], y son muy similares, aunque no iguales. Las diferencias entre ambos serán comentadas a medida que vayan apareciendo.

3.4.1. Determinación de la aceleración lineal: solución con 3 relojes

En este caso, para la determinación de la aceleración lineal se reescribirá (3.20) como

$$2a_\alpha y^\alpha + a_\alpha a_\beta y^\alpha y^\beta = B_1(\bar{C}, y^\alpha, v^\alpha, \omega^\alpha),\tag{3.36}$$

donde todas las razones de tiempo medidas, así como el resto de las cantidades involucradas, son recolectadas en la cantidad B_1 del lado derecho de (3.36):

$$B_1(\bar{C}, y^\alpha, v^\alpha, \omega^\alpha) := \bar{C} + v^2 - y^\alpha y^\beta (\omega_\alpha \omega_\beta - \delta_{\alpha\beta} \omega^2) - 2v^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} y^\beta \omega^\gamma.\tag{3.37}$$

Al igual que en la sección 3.3 cuando se definieron las cantidades A_1 en (3.26) y A_2 en (3.32), todas las cantidades involucradas en la definición de B_1 se asumirán *conocidas*, pues nuestros resultados dependerán de ellas.

Para este caso, considerando (3.21) y (3.22), se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2a_\alpha {}^{(n)}y^\alpha + a_\alpha a_\beta {}^{(n)}y^\alpha {}^{(n)}y^\beta &= B_1({}^{(n)}\bar{C}, {}^{(n)}y^\alpha, {}^{(n)}v^\alpha, \omega^\alpha) \\ &=: {}^{(n)}B_1, \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde ${}^{(n)}\bar{C}$ es el valor de \bar{C} dada por (3.20) evaluada en la posición ${}^{(n)}y^\alpha$ y la velocidad ${}^{(n)}v^\alpha$. Esto define un sistema de n ecuaciones con n configuraciones iniciales diferentes.

Es posible resolver el sistema (3.38) y determinar las componentes de la aceleración con sólo 3 relojes, en las posiciones ${}^{(1)}y^\alpha$, ${}^{(2)}y^\alpha$ y ${}^{(3)}y^\alpha$, donde cada reloj poseerá una velocidad general (3.22), es decir, la misma configuración usada en la sección 3.3.1.

Con esta configuración, se puede resolver el set de ecuaciones obtenido para las componentes de a^α . Si bien es cierto que, al ser ecuaciones cuadráticas, se tienen dos soluciones para las componentes de la aceleración, sólo una de ellas es físicamente admisible. Así, la solución del sistema de ecuaciones, en términos de los \bar{C} 's, resulta

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{y_{11}} \left(\sqrt{{}^{(1)}\bar{C} + 2\omega_3 v_{12} y_{11} - 2\omega_2 v_{13} y_{11} + \omega_2^2 y_{11}^2 + \omega_3^2 y_{11}^2 + ({}^{(1)}v^2 + 1 - 1)} \right), \\ a_2 &= \frac{1}{y_{22}} \left(\sqrt{{}^{(2)}\bar{C} + 2\omega_1 v_{23} y_{22} - 2\omega_3 v_{21} y_{22} + \omega_1^2 y_{22}^2 + \omega_3^2 y_{22}^2 + ({}^{(2)}v^2 + 1 - 1)} \right), \\ a_3 &= \frac{1}{y_{33}} \left(\sqrt{{}^{(3)}\bar{C} + 2\omega_2 v_{31} y_{33} - 2\omega_1 v_{32} y_{33} + \omega_1^2 y_{33}^2 + \omega_2^2 y_{33}^2 + ({}^{(3)}v^2 + 1 - 1)} \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

(Recordar que los índices de estas cantidades puramente espaciales se bajan con la métrica euclidiana 3-dimensional $\delta_{\alpha\beta}$, como fue hecho en (3.5).) Estas expresiones pueden ser usadas para obtener la aceleración a partir de mediciones de un arreglo con 3 relojes distintos.

Como caso particular, si se ubican los relojes en reposo, esta solución queda escrita como

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{y_{11}} \left(\sqrt{{}^{(1)}\bar{C} + \omega_2^2 y_{11}^2 + \omega_3^2 y_{11}^2 + 1 - 1} \right), \\ a_2 &= \frac{1}{y_{22}} \left(\sqrt{{}^{(2)}\bar{C} + \omega_1^2 y_{22}^2 + \omega_3^2 y_{22}^2 + 1 - 1} \right), \\ a_3 &= \frac{1}{y_{33}} \left(\sqrt{{}^{(3)}\bar{C} + \omega_1^2 y_{33}^2 + \omega_2^2 y_{33}^2 + 1 - 1} \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.4.2. Determinación de la aceleración lineal: solución con 6 relojes

La cantidad de relojes en la solución anterior no es la única posible. En efecto, es posible obtener las componentes de la aceleración utilizando 6 ecuaciones que provengan del uso de 6 relojes, las cuales permiten cancelar los términos cuadráticos que aparecen en el lado izquierdo de (3.38), de forma que no aparezca una raíz en el resultado. De esta manera, para determinar las componentes de la aceleración se usarán relojes en las posiciones $^{(1)}y^\alpha$, $^{(2)}y^\alpha$, $^{(3)}y^\alpha$, $^{(7)}y^\alpha$, $^{(8)}y^\alpha$ y $^{(9)}y^\alpha$ de (3.21), donde cada reloj posee una velocidad general (3.22). Esta velocidad puede elegirse así pues, viendo el lado izquierdo de (3.38), y de la misma manera a lo ocurrido en la sección 3.3.1, se puede notar que en los términos donde aparece la aceleración no aparece la velocidad lineal del sistema.

Esta elección lleva a un set de ecuaciones que puede ser usado para resolver las componentes de a_α . Esta solución, en términos de los \bar{C} 's, es

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{4y_{11}} \left(^{(1)}\bar{C} - ^{(7)}\bar{C} - 2\omega_2 y_{11} (v_{13} + v_{73}) + 2\omega_3 y_{11} (v_{12} + v_{72}) + ^{(1)}v^2 - ^{(7)}v^2 \right), \\
 a_2 &= \frac{1}{4y_{22}} \left(^{(2)}\bar{C} - ^{(8)}\bar{C} + 2\omega_1 y_{22} (v_{23} + v_{83}) - 2\omega_3 y_{22} (v_{21} + v_{81}) + ^{(2)}v^2 - ^{(8)}v^2 \right), \\
 a_3 &= \frac{1}{4y_{33}} \left(^{(3)}\bar{C} - ^{(9)}\bar{C} - 2\omega_1 y_{33} (v_{32} + v_{92}) + 2\omega_2 y_{33} (v_{31} + v_{91}) + ^{(3)}v^2 - ^{(9)}v^2 \right).
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Así, estas expresiones pueden ser usadas para obtener la aceleración a partir de mediciones de un arreglo con 6 relojes distintos.

Si se considera que cada reloj tiene la misma velocidad, es decir, que $^{(n)}v^\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ para todo n , se obtiene

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{4y_{11}} \left(^{(1)}\bar{C} - ^{(7)}\bar{C} - 4\omega_2 v_3 y_{11} + 4\omega_3 v_2 y_{11} \right), \\
 a_2 &= \frac{1}{4y_{22}} \left(^{(2)}\bar{C} - ^{(8)}\bar{C} + 4\omega_1 v_3 y_{22} - 4\omega_3 v_1 y_{22} \right), \\
 a_3 &= \frac{1}{4y_{33}} \left(^{(3)}\bar{C} - ^{(9)}\bar{C} - 4\omega_1 v_2 y_{33} + 4\omega_2 v_1 y_{33} \right).
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Como caso particular de interés, si se fija la velocidad de cada reloj como cero, se obtiene

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{4y_{11}} \left(^{(1)}\bar{C} - ^{(7)}\bar{C} \right), \\
 a_2 &= \frac{1}{4y_{22}} \left(^{(2)}\bar{C} - ^{(8)}\bar{C} \right),
 \end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{1}{4y_{33}} ({}^{(3)}\bar{C} - {}^{(9)}\bar{C}). \quad (3.43)$$

Esta última solución (3.43), igual a lo ocurrido para la solución (3.29), y a diferencia de las demás soluciones mostradas en esta sección, no depende de la velocidad angular del sistema, sino que sólo depende de cantidades medibles (las distancias y_{ii} y las razones de tiempo ${}^{(j)}\bar{C}$) por los relojes.

3.4.3. Determinación de la velocidad angular: relojes en movimiento

Para determinar la velocidad angular del sistema procederemos de manera análoga a la sección anterior, reescribiendo (3.20) como

$$2v^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} y^\beta \omega^\gamma - y^\alpha y^\beta (\delta_{\alpha\beta} \omega^2 - \omega_\alpha \omega_\beta) = B_2(\bar{C}, y^\alpha, v^\alpha, a^\alpha), \quad (3.44)$$

donde, al igual que en la definición (3.37), definimos

$$B_2(\bar{C}, y^\alpha, v^\alpha, a^\alpha) := \bar{C} + v^2 - 2a_\alpha y^\alpha - a_\alpha a_\beta y^\alpha y^\beta, \quad (3.45)$$

donde incluimos en la función B_2 todas las otras cantidades involucradas que, una vez más, supondremos conocidas.

Considerado (3.21) y (3.22), nos quedamos con el sistema

$$\begin{aligned} 2{}^{(m)}v^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} {}^{(n)}y^\beta \omega^\gamma - {}^{(n)}y^\alpha {}^{(n)}y^\beta (\delta_{\alpha\beta} \omega^2 - \omega_\alpha \omega_\beta) &= B_2({}^{(n,m)}\bar{C}, {}^{(n)}y^\alpha, {}^{(m)}v^\alpha, \omega^\alpha) \\ &=: {}^{(n,m)}B_2, \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde hemos introducido una nueva notación, en la que aparecen 2 índices en la función B_2 , los cuales representan el índice n para condición inicial de la posición, y el índice m para la condición inicial de la velocidad, respectivamente, de manera que ${}^{(n,m)}\bar{C}$ es el valor de la cantidad \bar{C} dado por (3.20) evaluada en la posición ${}^{(n)}y^\alpha$ y la velocidad ${}^{(m)}v^\alpha$. *Este cambio de notación será usado de aquí en adelante.* Al igual que en las secciones anteriores, la expresión (3.46) define un sistema de ecuaciones, que necesita cierta cantidad de combinaciones diferentes de los posibles valores iniciales de los relojes para ser resuelto.

A diferencia de lo mostrado en la sección 3.4.1, en este caso es difícil encontrar una solución simple usando sólo 3 relojes. Por esto, se usarán 6 relojes en total para encontrar una solución, en las posiciones ${}^{(1)}y^\alpha$, ${}^{(2)}y^\alpha$, y ${}^{(3)}y^\alpha$, con 2 relojes en cada posición, los cuales tendrán una de las siguientes posibles velocidades:

$${}^{(1)}v^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{12} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{(2)}v^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{23} \end{pmatrix}, \quad {}^{(3)}v^\alpha = \begin{pmatrix} v_{31} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$${}^{(4)}v^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_{42} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{(5)}v^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_{53} \end{pmatrix}, \quad {}^{(6)}v^\alpha = \begin{pmatrix} -v_{61} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Notar que se han escogido estas velocidades de forma que sean ortogonales a su correspondiente posición, igual a como fue hecho en la sección 3.3.2, lo que permite que las soluciones tengan formas más simples.

Considerando estas configuraciones para los relojes, la solución explícita de este sistema será

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \frac{-{}^{(2,2)}\bar{C} + {}^{(2,5)}\bar{C} - v_{23}^2 + v_{53}^2}{2y_{22}(v_{23} + v_{53})}, \\ \omega^2 &= \frac{-{}^{(3,3)}\bar{C} + {}^{(3,6)}\bar{C} - v_{31}^2 + v_{61}^2}{2y_{33}(v_{31} + v_{61})}, \\ \omega^3 &= \frac{-{}^{(1,1)}\bar{C} + {}^{(1,4)}\bar{C} - v_{12}^2 + v_{42}^2}{2y_{11}(v_{12} + v_{42})}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde aparecen los dos índices en la razón de tiempos, el primero para una de las posibles posiciones iniciales definidas en (3.21), y el segundo para la condición inicial de la velocidad, definidas en (3.47). Esta solución puede ser simplificada considerando que, de los dos relojes en la misma posición, uno tiene una velocidad determinada, y el otro se encuentra en reposo. Así, la solución obtenida es

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \frac{-{}^{(2,2)}\bar{C} + {}^{(2,0)}\bar{C} - v_{23}^2}{2y_{22}v_{23}}, \\ \omega^2 &= \frac{-{}^{(3,3)}\bar{C} + {}^{(3,0)}\bar{C} - v_{31}^2}{2y_{33}v_{31}}, \\ \omega^3 &= \frac{-{}^{(1,1)}\bar{C} + {}^{(1,0)}\bar{C} - v_{12}^2}{2y_{11}v_{12}}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde el índice 0 para la velocidad denota relojes quietos con respecto al sistema de referencia ($v^\alpha = (0, 0, 0)$). Finalmente, la solución puede quedar escrita de manera más simplificada, configurando los relojes en la misma posición con velocidades iguales y opuestas, de tal manera que la solución queda escrita como

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \frac{-{}^{(2,2)}\bar{C} + {}^{(2,-2)}\bar{C}}{4y_{22}v_{23}}, \\ \omega^2 &= \frac{-{}^{(3,3)}\bar{C} + {}^{(3,-3)}\bar{C}}{4y_{33}v_{31}}, \\ \omega^3 &= \frac{-{}^{(1,1)}\bar{C} + {}^{(1,-1)}\bar{C}}{4y_{11}v_{12}}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde el signo $(-)$ en el índice de velocidad indica una velocidad opuesta a la definida en (3.47).

3.4.4. Determinación de la velocidad angular: relojes en reposo

Viendo (3.44) se puede notar que las componentes de la velocidad angular sólo aparecen linealmente multiplicadas por la velocidad, mientras que aparece cuadráticamente multiplicada por la posición. Por esto, *no se pueden encontrar* los valores de cada componente de la velocidad angular usando sólo relojes en reposo. Sin embargo, *sí es posible encontrar los valores absolutos de dichas componentes*. En efecto, usando tres relojes con velocidad nula en las posiciones $^{(1)}y^\alpha$, $^{(2)}y^\alpha$ y $^{(3)}y^\alpha$ y reemplazando en (3.20) se obtiene un sistema de ecuaciones para las incógnitas ω_1^2 , ω_2^2 y ω_3^2 , cuya solución es

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{^{(1,0)}\bar{C}}{2y_{11}^2} - \frac{^{(2,0)}\bar{C}}{2y_{22}^2} - \frac{^{(3,0)}\bar{C}}{2y_{33}^2} - \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{2} - \frac{a_1}{y_{11}} + \frac{a_2}{y_{22}} + \frac{a_3}{y_{33}}, \\ \omega_2^2 &= -\frac{^{(1,0)}\bar{C}}{2y_{11}^2} + \frac{^{(2,0)}\bar{C}}{2y_{22}^2} - \frac{^{(3,0)}\bar{C}}{2y_{33}^2} + \frac{a_1^2}{2} - \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{2} + \frac{a_1}{y_{11}} - \frac{a_2}{y_{22}} + \frac{a_3}{y_{33}}, \\ \omega_3^2 &= -\frac{^{(1,0)}\bar{C}}{2y_{11}^2} - \frac{^{(2,0)}\bar{C}}{2y_{22}^2} + \frac{^{(3,0)}\bar{C}}{2y_{33}^2} + \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} - \frac{a_3^2}{2} + \frac{a_1}{y_{11}} + \frac{a_2}{y_{22}} - \frac{a_3}{y_{33}}.\end{aligned}\quad (3.51)$$

Si posicionamos los 3 relojes a la misma distancia del reloj de referencia, es decir, $y_{11} = y_{22} = y_{33} = y$, esto se reduce a

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{1}{2y^2} \left(^{(1,0)}\bar{C} - ^{(2,0)}\bar{C} - ^{(3,0)}\bar{C} - a_1^2 y^2 + a_2^2 y^2 + a_3^2 y^2 - 2a_1 y + 2a_2 y + 2a_3 y \right), \\ \omega_2^2 &= \frac{1}{2y^2} \left(-^{(1,0)}\bar{C} + ^{(2,0)}\bar{C} - ^{(3,0)}\bar{C} + a_1^2 y^2 - a_2^2 y^2 + a_3^2 y^2 + 2a_1 y - 2a_2 y + 2a_3 y \right), \\ \omega_3^2 &= \frac{1}{2y^2} \left(-^{(1,0)}\bar{C} - ^{(2,0)}\bar{C} + ^{(3,0)}\bar{C} + a_1^2 y^2 + a_2^2 y^2 - a_3^2 y^2 + 2a_1 y + 2a_2 y - 2a_3 y \right).\end{aligned}\quad (3.52)$$

3.4.5. Determinación simultánea de la aceleración lineal y la velocidad angular

Las soluciones presentadas en las secciones 3.4.1–3.4.4 tienen la particularidad de que, para encontrar la cantidad física buscada, en algunas situaciones es necesario conocer la otra *de antemano, por algún otro método* (por ejemplo, en la solución (3.41) mostrada en la sección 3.4.1 es necesario conocer los valores de la velocidad angular para encontrar los valores de la aceleración). En esta sección, se extenderá el análisis para encontrar configuraciones que nos permitan obtener la aceleración lineal y la velocidad angular del sistema de referencia *de manera simultánea*, esto es, calcular las seis componentes de a^α y ω^α usando una única configuración de relojes.

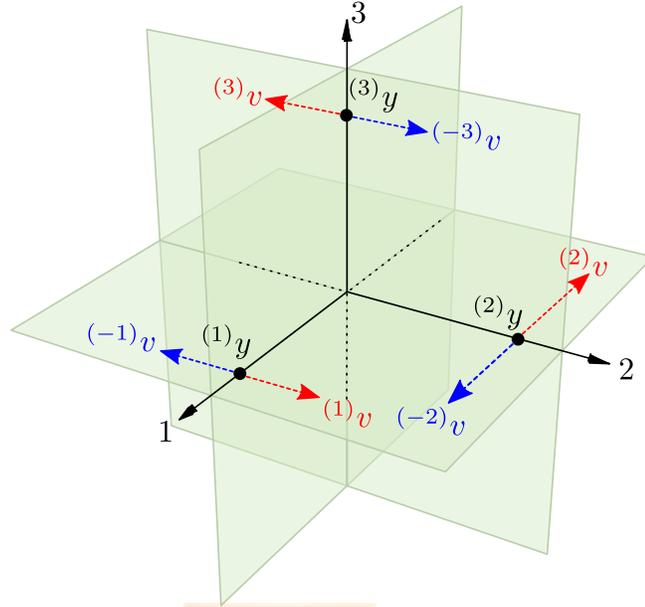


Figura 3.3: Configuración de los relojes usada en la determinación simultánea de la velocidad angular (3.54) y la aceleración lineal (3.56) del sistema de referencia. Al igual que la figura 3.2, esta figura fue adaptada a partir de esta figura original.

Luego de analizar la ecuación maestra (3.20), se encontró una configuración de 6 relojes que entrega una solución analítica relativamente simple. Se ubica un par de relojes en la misma posición a lo largo de cada eje, y para cada par se eligen velocidades con sentido opuesto, perpendicular a su vector posición. Con estas consideraciones, la configuración para los relojes se escoge de tal manera que los 3 primeros estén en las posiciones $(1)y^\alpha$, $(2)y^\alpha$ y $(3)y^\alpha$ como en (3.21), con velocidades perpendiculares a su posición, esto es,

$${}^{(1)}v^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix}, \quad {}^{(2)}v^\alpha = \begin{pmatrix} v_{21} \\ 0 \\ v_{23} \end{pmatrix}, \quad {}^{(3)}v^\alpha = \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

mientras que los 3 relojes restantes estarán ubicados en la misma posición, pero con velocidades opuestas al correspondiente del primer grupo. Esta situación se ilustra en la figura 3.3.

Para esta configuración de relojes, se obtienen las siguientes expresiones para la velocidad angular y la aceleración del sistema de referencia:

$$\omega_1 = -\frac{v_{21}v_{31}y_{22}y_{33} \Delta^{(1)}\bar{C} + v_{12}v_{31}y_{11}y_{33} \Delta^{(2)}\bar{C} + v_{13}v_{21}y_{11}y_{22} \Delta^{(3)}\bar{C}}{4y_{11}y_{22}y_{33} (v_{12}v_{23}v_{31} - v_{13}v_{21}v_{32})},$$

$$\begin{aligned}\omega_2 &= -\frac{v_{21}v_{32}y_{22}y_{33} \Delta^{(1)}\bar{C} + v_{12}v_{32}y_{11}y_{33} \Delta^{(2)}\bar{C} + v_{12}v_{23}y_{11}y_{22} \Delta^{(3)}\bar{C}}{4y_{11}y_{22}y_{33} (v_{12}v_{23}v_{31} - v_{13}v_{21}v_{32})}, \\ \omega_3 &= -\frac{v_{23}v_{31}y_{22}y_{33} \Delta^{(1)}\bar{C} + v_{13}v_{32}y_{11}y_{33} \Delta^{(2)}\bar{C} + v_{13}v_{23}y_{11}y_{22} \Delta^{(3)}\bar{C}}{4y_{11}y_{22}y_{33} (v_{12}v_{23}v_{31} - v_{13}v_{21}v_{32})},\end{aligned}\quad (3.54)$$

donde se ha definido

$$\Delta^{(i)}\bar{C} := {}^{(i,i)}\bar{C} - {}^{(i,-i)}\bar{C}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (3.55)$$

y

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{2y_{11}} \left(\sqrt{2^{(1,1)}C + 2^{(1,-1)}C + 4\omega_2^2 y_{11}^2 + 4\omega_3^2 y_{11}^2 + 4^{(1)}v^2 + 4 - 1} \right), \\ a_2 &= \frac{1}{2y_{22}} \left(\sqrt{2^{(2,2)}C + 2^{(2,-2)}C + 4\omega_1^2 y_{22}^2 + 4\omega_3^2 y_{22}^2 + 4^{(2)}v^2 + 4 - 1} \right), \\ a_3 &= \frac{1}{2y_{33}} \left(\sqrt{2^{(3,3)}C + 2^{(3,-3)}C + 4\omega_1^2 y_{33}^2 + 4\omega_2^2 y_{33}^2 + 4^{(3)}v^2 + 4 - 1} \right).\end{aligned}\quad (3.56)$$

Es posible reemplazar las expresiones (3.54) en (3.56) para obtener explícitamente el resultado final. Recordar que el signo menos (−) en el índice de la velocidad indica velocidad opuesta a la mostrada en (3.53).

3.5. Determinación de la curvatura

Hasta ahora, se ha centrado la discusión en la obtención de cantidades cinemáticas, es decir, aquellas que son propias del sistema de referencia. En esta sección se verá cómo se pueden determinar propiedades no-cinemáticas, aquellas que son propias del espacio-tiempo, es decir, cómo determinar las componentes del tensor de curvatura de Riemann R_{abcd} .

Para determinar las componentes de la curvatura, se reescribe (3.20) como

$$\begin{aligned}{}^{(n)}y^\alpha {}^{(n)}y^\beta \left(-R_{0\alpha\beta 0} - \frac{4}{3} {}^{(m)}v^\gamma R_{\gamma\alpha\beta 0} - \frac{1}{3} {}^{(m)}v^\gamma {}^{(m)}v^\delta R_{\alpha\gamma\delta\beta} \right) &= B_3({}^{(n)}y^\alpha, {}^{(m)}v^\gamma, a^\alpha, \omega^\alpha) \\ &= {}^{(n,m)}B_3,\end{aligned}\quad (3.57)$$

donde ahora se ha definido B_3 como

$$\begin{aligned}{}^{(n,m)}B_3 &:= {}^{(n,m)}\bar{C} + {}^{(m)}v^2 - 2a_\alpha {}^{(n)}y^\alpha - 2v^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} {}^{(n)}y^\beta \omega^\gamma \\ &\quad - {}^{(n)}y^\alpha {}^{(n)}y^\beta (a_\alpha a_\beta - \delta_{\alpha\beta} \omega_\gamma \omega^\gamma + \omega_\alpha \omega_\beta).\end{aligned}\quad (3.58)$$

Para resolverlo, se eligen para las posiciones las condiciones $^{(n)}y^\alpha$ ($n = 1, \dots, 6$) definidas en (3.21), estableciendo para este caso que $y_{11} = y_{22} = y_{33} = y_{41} = y_{42} = y_{52} = y_{52} = y_{61} = y_{63} =: y$, es decir, todos los relojes están en la misma distancia en cada eje. Esto, a modo de simplificar la solución obtenida. Mientras que, para las velocidades, se establecen las siguientes posibles configuraciones:

$$\begin{aligned} {}^{(1)}v^\alpha &= \begin{pmatrix} v_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & {}^{(2)}v^\alpha &= \begin{pmatrix} 0 \\ v_{22} \\ 0 \end{pmatrix}, & {}^{(3)}v^\alpha &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{33} \end{pmatrix}, \\ {}^{(4)}v^\alpha &= \begin{pmatrix} v_{41} \\ v_{42} \\ 0 \end{pmatrix}, & {}^{(5)}v^\alpha &= \begin{pmatrix} 0 \\ v_{52} \\ y_{53} \end{pmatrix}, & {}^{(6)}v^\alpha &= \begin{pmatrix} v_{61} \\ 0 \\ v_{63} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Para la solución que será mostrada, las componentes de la curvatura se obtienen usando ciertas combinaciones de posiciones y velocidades tales que, en cada caso que el reloj tenga una velocidad no nula, esta velocidad sea *perpendicular* a la posición del reloj, tal como se hizo en secciones anteriores. En este caso, esto está motivado pues esta elección es equivalente al caso en que dicho reloj está (instantáneamente hablando) en rotación alrededor del reloj de referencia o, dicho de otra forma, es el sistema el que rota, lo cual tiene una importancia experimental, pues es más realizable operacionalmente.

Las primeras seis componentes a obtener son aquellas que corresponden al “constrained clock compass” (ver sección IV.F de [8]), es decir, con una configuración de 6 relojes en reposo:

$$01 : R_{0110} = -\frac{{}^{(1,0)}B_3}{y^2}, \quad (3.60)$$

$$02 : R_{0220} = -\frac{{}^{(2,0)}B_3}{y^2}, \quad (3.61)$$

$$03 : R_{0330} = -\frac{{}^{(3,0)}B_3}{y^2}, \quad (3.62)$$

$$04 : R_{0120} = -\frac{1}{2y^2} \left({}^{(4,0)}B_3 + y^2(R_{0110} + R_{0220}) \right), \quad (3.63)$$

$$05 : R_{0130} = -\frac{1}{2y^2} \left({}^{(6,0)}B_3 + y^2(R_{0110} + R_{0330}) \right), \quad (3.64)$$

$$06 : R_{0230} = -\frac{1}{2y^2} \left({}^{(5,0)}B_3 + y^2(R_{0220} + R_{0330}) \right). \quad (3.65)$$

Aquí, el índice 0 usado en los términos $^{(1,0)}B_3$ y similares denota el caso en que el reloj está en reposo (en esta sección se indican también los índices de posición y velocidad).

Las componentes faltantes pueden ser obtenidas como

$$07 : R_{1210} = \frac{3}{8v_{22}y^2} \left({}^{(1,2)}B_3 - {}^{(1,-2)}B_3 \right), \quad (3.66)$$

$$08 : R_{1310} = \frac{3}{8v_{33}y^2} \left({}^{(1,3)}B_3 - {}^{(1,-3)}B_3 \right), \quad (3.67)$$

$$09 : R_{2320} = \frac{3}{8v_{33}y^2} \left({}^{(2,3)}B_3 - {}^{(2,-3)}B_3 \right), \quad (3.68)$$

$$10 : R_{1212} = \frac{3}{2v_{22}^2y^2} \left({}^{(1,2)}B_3 + {}^{(1,-2)}B_3 + 2y^2R_{0110} \right), \quad (3.69)$$

$$11 : R_{1313} = \frac{3}{2v_{33}^2y^2} \left({}^{(1,3)}B_3 + {}^{(1,-3)}B_3 + 2y^2R_{0110} \right), \quad (3.70)$$

$$12 : R_{2323} = \frac{3}{2v_{33}^2y^2} \left({}^{(2,3)}B_3 + {}^{(2,-3)}B_3 + 2y^2R_{0220} \right), \quad (3.71)$$

$$13 : R_{1220} = \frac{1}{4v_{11}y^2} \left(-3^{(2,1)}B_3 - 3y^2R_{0220} + v_{11}^2y^2R_{1212} \right), \quad (3.72)$$

$$14 : R_{1330} = \frac{1}{4v_{11}y^2} \left(-3^{(3,1)}B_3 - 3y^2R_{0330} + v_{11}^2y^2R_{1313} \right), \quad (3.73)$$

$$15 : R_{2330} = \frac{1}{4v_{22}y^2} \left(-3^{(3,2)}B_3 - 3y^2R_{0330} + v_{22}^2y^2R_{2323} \right), \quad (3.74)$$

$$16 : R_{1213} = \frac{1}{2v_{52}v_{53}y^2} \left(3^{(1,5)}B_3 + 3y^2R_{0110} - v_{52}y^2(4R_{1210} + v_{52}R_{1212}) \right. \\ \left. - v_{53}y^2(4R_{1310} + v_{53}R_{1313}) \right), \quad (3.75)$$

$$17 : R_{1223} = \frac{1}{2v_{61}v_{63}y^2} \left(-3^{(2,6)}B_3 - 3y^2R_{0220} - v_{61}y^2(4R_{1220} - v_{61}R_{1212}) \right. \\ \left. + v_{63}y^2(4R_{2320} + v_{63}R_{2323}) \right), \quad (3.76)$$

$$18 : R_{1323} = \frac{1}{2v_{41}v_{42}y^2} \left(3^{(3,4)}B_3 + 3y^2R_{0330} + v_{41}y^2(4R_{1330} - v_{41}R_{1313}) \right. \\ \left. + v_{42}y^2(4R_{2330} - v_{42}R_{2323}) \right), \quad (3.77)$$

$$19 : R_{1230} = \frac{1}{4v_{33}y^2} \left(-3^{(4,3)}B_3 - 3y^2(R_{0110} + 2R_{0120} + R_{0220}) \right. \\ \left. + 4v_{33}y^2(R_{1310} + R_{2320}) \right. \\ \left. + v_{33}^2y^2(R_{1313} + 2R_{1323} + R_{2323}) \right), \quad (3.78)$$

$$20 : R_{2310} = \frac{1}{4v_{11}y^2} \left(3^{(5,1)}B_3 + 3y^2(R_{0220} + 2R_{0230} + R_{0330}) \right. \\ \left. + 4v_{11}y^2(R_{1220} + R_{1330}) \right. \\ \left. - v_{11}^2y^2(R_{1212} + 2R_{1213} + R_{1313}) \right). \quad (3.79)$$

donde el signo $(-)$ en el índice de velocidad indica una velocidad opuesta a la definida en (3.59). Notar que es posible usar la identidad (A.11) para escribir

$$R_{1320} = R_{2310} + R_{1230}, \quad (3.80)$$

y así obtener la componente R_{1320} , no listada en el set de expresiones anterior.

De esta manera, *es posible determinar las 20 componentes independientes de la curvatura, usando 20 mediciones de reloj independientes.*

La solución mostrada en (3.60)–(3.79) relaciona mediciones que necesitan ser realizadas con parámetros físicos (las componentes de la curvatura) de una forma jerárquica. Esto pues se muestran las expresiones obtenidas para las componentes en términos de aquellas componentes previamente determinadas, más el resultado de valores nuevos para ${}^{(n,m)}B_3$ (que representan mediciones). Como se discutirá más adelante, esta jerarquía puede ser usada como una posible estrategia para determinar experimentalmente el valor de cada componente de la curvatura. Alternativamente, es posible escribir expresiones para determinar cada componente de la curvatura de manera directa a partir de mediciones, las cuales pueden ser obtenidas reemplazando las correspondientes componentes previamente calculadas. Estas expresiones son mostradas en el apéndice B.

La solución (3.60) muestra que la componente R_{0110} puede ser determinada usando un único reloj en reposo ubicado a lo largo del eje x . Se denotará esta configuración como $(1, 0)$. Las componentes R_{0220} y R_{0330} pueden ser determinadas de manera análoga, por medio de las configuraciones $(2, 0)$ y $(3, 0)$, ubicadas a lo largo de los ejes y y z , respectivamente. Estas tres definen un primer grupo de componentes que comparten la forma en la que pueden ser obtenidas.

Para poder determinar R_{0120} es necesario tener mediciones de más de un reloj. Como es evidente de (3.63), además de conocer R_{0110} y R_{0220} , se necesitan datos de mediciones de un reloj en reposo ubicado en el plano $x - y$ a 45 grados de los ejes x e y (configuración que denotaremos como $(4, 0)$, ver también ${}^{(4)}y^\alpha$ en (3.21), con $y_{41} = y_{42} = y$). Esto establece una forma “jerárquica” de obtener dichas componentes. Equivalentemente, R_{0120} puede ser determinada directamente con los datos de mediciones de tiempo propio de relojes en tres configuraciones: $(1, 0)$, $(2, 0)$ y $(4, 0)$, ver Eq. (B.4). Es importante hacer notar que, adicionalmente, es posible una determinación “simultánea” de R_{0110} , R_{0220} y R_{0120} en un único procedimiento, a partir de datos de las mismas configuraciones $(1, 0)$, $(2, 0)$ y $(4, 0)$. La determinación de R_{0130} y R_{0230} puede ser hecha de manera análoga a la de R_{0120} (es decir, se puede determinar R_{0130} junto a las componentes R_{0110} y R_{0330} , mientras que R_{0230} se puede determinar junto a las componentes R_{0220} y R_{0330} , ya sea de manera jerárquica o simultánea), ver Eqs. (3.64) y (3.65) respectivamente y/o (B.5) y (B.6). Esto define un segundo grupo de componentes que comparten su forma de determinación. Nótese además que, como puede ser deducido de (3.20), al considerar una situación más general con

relojes con posiciones genéricas en el plano $x - y$, se necesitan mediciones de relojes en al menos tres posiciones diferentes para poder desacoplar las contribuciones de las componentes R_{0110} , R_{0220} y R_{0120} a la cantidad \bar{C} .

Un tercer grupo de componentes está dado por las expresiones (3.66)–(3.68). Cada una de estas tres componentes puede ser determinada con datos de relojes en dos diferentes configuraciones. En el caso de R_{1210} , por mediciones de relojes en las configuraciones (1, 2) y (1, -2), y de manera similar para R_{1310} con las configuraciones (1, 3) y (1, -3), y para R_{2320} con las configuraciones (2, 3) y (2, -3).

Un cuarto grupo está dado por (3.69)–(3.71). Estas expresiones muestran que, por ejemplo, R_{1212} puede ser determinada a partir de información sobre R_{0110} y el resultado de las mediciones de relojes en las configuraciones (1, 2) y (1, -2). Por otro lado, la determinación directa de esta componente necesita tres configuraciones de reloj: (1, 0), (1, 2) y (1, -2) (ver Eq. (B.10)), lo que corresponde a una combinación de datos del primer y el tercer grupo antes mencionado. Esto significa que las configuraciones (1, 0), (1, 2) y (1, -2) permiten además la determinación “simultánea” de las componentes R_{0110} , R_{1210} y R_{1212} . Existe una relación similar para las componentes R_{0110} , R_{1310} y R_{1313} y las configuraciones (1, 0), (1, 3) and (1, -3), así como para R_{0220} , R_{2320} y R_{2323} y las configuraciones (2, 0), (2, 3) y (2, -3), ver Eqs. (3.67) y (3.70), así como (3.68) y (3.71), respectivamente.

Un quinto grupo de componentes de la curvatura, representado por las ecuaciones (3.72)–(3.74), pueden ser obtenidas usando dos componentes previamente determinadas, más datos de una configuración de reloj adicional. Por su parte, la determinación directa requiere de un total de 5 configuraciones, como muestran las Eqs. (B.13)–(B.15). Alternativamente, es posible realizar una determinación simultánea de R_{0110} , R_{0220} , R_{1210} , R_{1212} y R_{1220} con la ayuda de las 5 configuraciones (1, 0), (1, 2), (1, -2), (2, 0) y (2, 1). Estas determinaciones simultáneas son también posibles para R_{0110} , R_{0330} , R_{1310} , R_{1313} y R_{1330} , usando datos de las configuraciones (1, 0), (1, 3), (1, -3), (3, 0) y (3, 1); así como para R_{0330} , R_{0220} , R_{2320} , R_{2323} y R_{2330} , utilizando (2, 0), (2, 3), (2, -3), (3, 0) y (3, 2).

Un sexto grupo está dado por (3.75)–(3.77), en las cuales la curvatura puede ser obtenida desde datos previos además de datos de un reloj adicional. En otras palabras, la componente R_{1213} requiere mediciones adicionales de la configuración (1, 5), R_{1223} de (2, 6), y R_{1323} de (3, 4), respectivamente. Las expresiones “directas” completamente reemplazadas se muestran en Eqs. (B.16)–(B.18). De la misma manera que a los grupos previos, se puede realizar una determinación simultánea de la curvatura a partir de mediciones de un grupo de relojes elegidos adecuadamente. Como ejemplo, las configuraciones (1, 0), (1, 2), (1, -2), (1, 3), (1, -3) y (1, 5) permiten determinar simultáneamente R_{1213} , R_{0110} , R_{1210} , R_{1212} , R_{1310} y R_{1313} .

Finalmente, un séptimo grupo está dado por (3.78) y (3.79). La determinación

Tabla 3.1: Grupos de componentes de la curvatura, y número de configuraciones de reloj necesarias para medir cada una de ellas. La “asimetría” que puede verse en las componentes del grupo 6 viene a consecuencia de la asimetría en las configuraciones elegidas para los relojes. Esto puede verse en las configuraciones que poseen velocidad negativa, $(1, -2)$, $(1, -3)$ y $(2, -3)$. Es decir, se definieron dos configuraciones con velocidad negativa en la posición $^{(1)}y^\alpha$, una en la posición $^{(2)}y^\alpha$, y cero en las demás posiciones.

Componentes de la curvatura	Grupo	# de configuraciones
$R_{0110}, R_{0220}, R_{0330}$	1	1
$R_{0120}, R_{0130}, R_{0230}$	2	3
$R_{1210}, R_{1310}, R_{2320}$	3	2
$R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}$	4	3
$R_{1220}, R_{1330}, R_{2330}$	5	5
R_{1213}	6	6
R_{1223}	6	8
R_{1323}	6	10
R_{1230}, R_{2310}	7	12

de R_{1230} y R_{2310} requiere mediciones de sólo una única configuración de reloj adicional, además de la información ya conocida. Como ejemplo, la determinación de R_{1230} requiere datos de la configuración adicional $(4, 3)$. De nuevo, las expresiones completamente reemplazadas de estas componentes pueden ser encontradas en el apéndice B.

La tabla 3.1 resume las propiedades de las 20 componentes de la curvatura mostradas, donde se lista el grupo al que pertenecen (según la discusión anterior), así como el número total de mediciones necesarias para estimarlas según el esquema mostrado.

La elección de determinar las componentes de la curvatura de manera jerárquica o simultánea jugará un rol importante en la discusión que se hará en el capítulo siguiente.

Capítulo 4

Estimación simulada de parámetros

En este capítulo, se realizará un breve análisis sobre la precisión con la que se pueden estimar las cantidades físicas de interés, como lo son la aceleración, la velocidad angular del sistema de referencia, y las componentes de la curvatura del espacio-tiempo, usando mediciones de relojes en las configuraciones presentadas en el capítulo 3. Esto será hecho por medio de la creación de datos sintéticos, con los cuáles se simulará el proceso de estimación.

Primero, se mostrará una breve descripción de las herramientas utilizadas, tanto matemáticas como informáticas, para luego dar paso a mostrar el procedimiento usado y los resultados obtenidos.

4.1. Inferencia bayesiana

En estadística, existen dos interpretaciones sobre la probabilidad. La primera, y más usada, es la **interpretación frecuentista**. En esta interpretación, las probabilidades obtenidas se entienden como el *resultado de varios experimentos* (u observaciones), a partir de los cuales se obtiene una distribución de probabilidad. La segunda es la **interpretación bayesiana**. En esta interpretación, la probabilidad se entiende como *el grado de creencia o credibilidad de una hipótesis*, ya sea de algo que pueda ocurrir, o del valor que puede tener algún parámetro.

En esta tesis, para derivar información sobre los valores que pueden adoptar las variables físicas, se trabajará en el marco de la inferencia bayesiana (para más detalles, se puede consultar [29]). En la inferencia bayesiana se aplica el **teorema de Bayes** [30] para calcular la probabilidad de una hipótesis dada la evidencia disponible. El teorema de Bayes dice que la probabilidad condicional de que ocurra un

evento A dado un evento B viene dada por la expresión

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \quad (4.1)$$

donde $P(B|A)$ es la probabilidad de que ocurra el evento B dado que ocurre el evento A , mientras que $P(A)$ y $P(B)$ son las probabilidades de que ocurran el evento A como el B , de manera individual, respectivamente. Se puede usar este teorema para inferir la probabilidad de alguna hipótesis dados ciertos datos, con cierta probabilidad. Para entender esto, se reescribe (4.1) en lenguaje de distribuciones de probabilidad, como

$$P(F_{\text{true}}|D) = \frac{P(D|F_{\text{true}})P(F_{\text{true}})}{P(D)}, \quad (4.2)$$

donde:

- $P(F_{\text{true}}|D)$ es la **probabilidad a posteriori** o *posterior*, es decir, la probabilidad condicional de que sean ciertos el conjunto de parámetros, o hipótesis, F_{true} dado un set de datos medidos, o evidencia, D . En términos simples, es la distribución de probabilidad para los parámetros F_{true} dados los datos D .
- $P(D|F_{\text{true}})$ es la **verosimilitud** o *likelihood*, esto es, la probabilidad de que se obtenga el set de datos D dados algunos valores específicos para los parámetros F_{true} . Es esta la cantidad que se ocupa para modelar los datos obtenidos, incluyendo errores asociados a la medición, dados posibles valores para los parámetros (reales o físicos) del sistema.
- $P(F_{\text{true}})$ es la **probabilidad a priori** o *prior*, que guarda la información conocida o supuesta sobre el sistema previo a considerar los datos. Por ejemplo, en esta probabilidad a priori se incluyen restricciones sobre los parámetros del modelo, como pueden ser el signo positivo de la masa de un cuerpo, o el valor positivo de una distancia, etc.
- $P(D)$ es la **probabilidad marginal** o **evidencia**, que representa la probabilidad de obtener los datos D bajo todas las hipótesis posibles.

En la práctica, $P(D)$ funciona como un factor de normalización¹, de modo que la suma de las probabilidades de (4.2), para todas las posibles $P(F_{\text{true}}|D)$, sea 1. Así, se ocupará

$$P(F_{\text{true}}|D) \propto P(D|F_{\text{true}})P(F_{\text{true}}). \quad (4.3)$$

¹Esto ocurre pues este trabajo consiste en ajustar parámetros, para un modelo elegido. Cuando se trata de selección entre modelos, este factor se vuelve fundamental. Ver, por ejemplo, [29]

4.2. Procedimiento general

Obtener las probabilidades dadas por (4.3) puede ser muy difícil. Por ejemplo, cuando no es posible calcular estas distribuciones de manera analítica. Sin embargo, existen métodos que nos permiten muestrear la distribución a posteriori y extraer la distribución de probabilidad de los parámetros a estimar. Un conjunto de estos métodos son los llamados **Markov Chain Monte Carlo** (MCMC) (para más detalle, ver por ejemplo [31]). Estos métodos consisten en realizar un muestreo de la distribución de probabilidad de los parámetros a ajustar de un modelo, calculando una alta cantidad de valores al azar para obtener en forma aproximada dicha distribución. Si bien cada muestra se calcula al azar, la elección de cada valor está limitada por el valor actual del parámetro y la distribución asumida para éstos. Así, MCMC puede ser considerado un caminante aleatorio (o random walker) que converge gradualmente a la distribución real.

Para estimar las distribuciones a posteriori $P(F_{\text{true}}|D)$ usando un esquema MCMC se usará la librería `emcee` [32], que es un módulo de Python que implementa los algoritmos presentados en [33]. Para este trabajo, el uso de este módulo consiste en los siguientes pasos:

- Primero, se generarán una serie de datos sintéticos suponiendo algún valor (esperado o *de prueba*) para el parámetro a buscar.
- Luego, se agregará a estos datos simulados una variación, que modela los errores que puedan aparecer en los procesos de medida.
- Además, se debe definir la distribución que será usada como *posterior*.

Con todo esto, se ejecuta un programa usando el paquete `emcee`, con las funciones que éste incluye, obteniéndose una distribución de probabilidad para los parámetros estimados.

Se ilustrará el funcionamiento de la librería por medio de dos ejemplos.

4.2.1. Ejemplo 1: ajustando un único parámetro

El primer ejemplo que se mostrará es el caso en el que se ajusta un único parámetro. En este caso, se desea ajustar un valor real de una magnitud física a partir de mediciones de dicha magnitud, las cuales incluyen error. Este ejemplo está adaptado de [34], donde se ejemplifica el uso de `emcee` a partir de la medición del conteo de fotones en un telescopio, pero el mismo ejemplo se puede aplicar a la determinación de una única cantidad física, cuya medición pueda tener un error asociado, como puede

ser la determinación del largo de una mesa con una regla, la masa de un objeto con una balanza, etc.

Imagínese que se tiene una magnitud física que queremos observar, con algún instrumento de medida. Se supondrá, para este ejemplo, que dicha magnitud es constante, y su valor es F_{true} . Se supondrá, además, que se realizarán N medidas con el instrumento, donde F_i y e_i , con $i = 1, \dots, N$, son la medida reportada para el valor observado y el error de la i -ésima medida, respectivamente.

El problema es, dado un conjunto de mediciones $D = \{F_i, e_i\}$, ¿cuál es la mejor estimación para F_{true} ? En otras palabras, lo que se desea es obtener la probabilidad a posteriori $P(F_{\text{true}}|D)$. Usando (4.3), y suponiendo $P(F_{\text{true}}) \propto 1$ (es decir, un a priori plano), queda que

$$P(F_{\text{true}}|D) \propto P(D|F_{\text{true}}). \quad (4.4)$$

Notar que esta elección del “prior” no entrega ninguna información adicional. Incluso, el “posterior” resultante puede incluir valores negativos, lo que puede ser físicamente imposible según el caso (por ejemplo, si se está midiendo una distancia). De esta manera, y dado que se necesita ajustar un único parámetro, basta con encontrar la distribución de probabilidad $P(F_{\text{true}}|D)$, o su proporcional $P(D|F_{\text{true}})$, como función de F_{true} .

Para esto se supondrá que, dada la i -ésima observación $D_i = (F_i, e_i)$, se modela la distribución de probabilidad de la medición dado el valor real F_{true} como una Gaussiana centrada en F_{true} con desviación estandar e_i :

$$P(D_i|F_{\text{true}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e_i^2}} \exp \left[\frac{-(F_i - F_{\text{true}})^2}{2e_i^2} \right]. \quad (4.5)$$

Suponiendo que una medición no afecta las probabilidades de las otras (es decir, que son eventos independientes), se construirá la función de verosimilitud, esto es, la función de probabilidad de obtener el conjunto de datos $D = \{D_i\}$ al realizar N mediciones, como el producto de las probabilidades para cada par de datos:

$$\mathcal{L}(D|F_{\text{true}}) = P(D|F_{\text{true}}) = \prod_{i=1}^N P(D_i|F_{\text{true}}). \quad (4.6)$$

Dada esta forma para esta función, y dado que puede tener valores muy pequeños, se prefiere trabajar con su logaritmo:

$$\ln \mathcal{L}(D|F_{\text{true}}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[\ln(2\pi e_i^2) + \frac{(F_i - F_{\text{true}})^2}{e_i^2} \right]. \quad (4.7)$$

Esta información es ingresada al paquete `emcee` con un código como el siguiente:

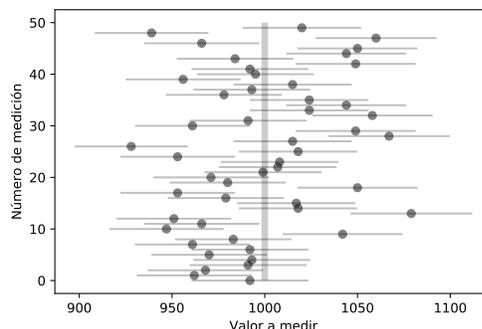


Figura 4.1: Datos simulados para el ejemplo de la sección 4.2.1. Cada punto indica el valor medido simulado del parámetro, incluyendo su barra de error. La línea vertical gris representa el valor supuesto para F_{true} .

```
def log_prior(theta):
    return 1 # a priori plano

def log_likelihood(theta, F, e):
    return -0.5*np.sum(np.log(2 * np.pi * e ** 2)
                      + (F - theta[0]) ** 2 / e ** 2)

def log_posterior(theta, F, e):
    #Notar que esta definicion del posterior viene dada por el producto
    #de las dos funciones anteriores, las cuales, en logaritmo, se suman
    return log_prior(theta) + log_likelihood(theta, F, e)
```

Para hacer este ejemplo vía MCMC con `emcee`, se crearán $N = 50$ datos usando la distribución de Poisson, con un valor de $F_{\text{true}} = 1000$, y cuyo error está dado por la desviación estándar de dicha distribución, esto es, $e_i = \sqrt{F_i}$. Estos datos pueden verse en la figura 4.1. Con estos datos, se ejecuta un programa ocupando `emcee`, obteniéndose una distribución de probabilidad para F_{true} mostrada en la figura 4.2. Como se puede ver, la simulación recupera bastante bien el valor de prueba original, el cual se encuentra dentro del intervalo 1σ de la distribución.

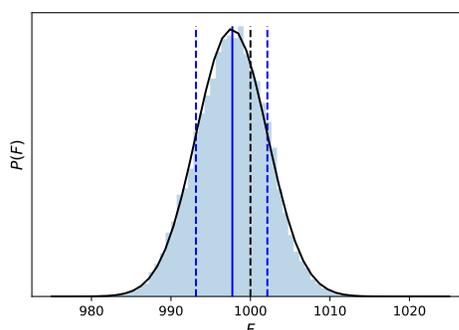


Figura 4.2: Resultado de la simulación MCMC usando emcee para el ejemplo de la sección 4.2.1. El histograma representa la distribución de probabilidad para el parámetro F_{true} . El contorno negro representa un ajuste Gaussiano al histograma, con media igual a la media de la distribución obtenida, y desviación estándar igual a la desviación estándar de esta distribución. La línea vertical sólida azul representa el percentil 50 del resultado, que coincide muy bien con el valor medio. Las líneas verticales punteadas azules muestran los percentiles 16 y 84. Para esta distribución, este intervalo coincide muy bien con el intervalo 1σ . La línea vertical punteada negra muestra el valor de prueba con que se crearon los datos sintéticos.

4.2.2. Ejemplo 2: ajustando dos parámetros en un modelo lineal

Un segundo ejemplo que se dará de la implementación de la inferencia bayesiana será el ajuste de dos parámetros de un modelo a los datos que tengamos. El ejemplo más simple de esto es el de la regresión lineal.

Supóngase que se tiene un conjunto de N datos apareados $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)\}$, que pueden tener algún error, a los cuales se quiere ajustar una recta

$$y = mx + b. \quad (4.8)$$

Para hacer este ajuste, se necesitan determinar dos parámetros: la pendiente de la recta m y el coeficiente de posición b .

Para este ejemplo, se modelará la distribución de probabilidad para los datos de la forma

$$y \sim \mathcal{N}(\mu = mx + b, \sigma), \quad (4.9)$$

es decir, una distribución de probabilidad normal (o gaussiana) con media $mx_i + b$ y desviación estándar σ , que representa el error en la medición de la variable y (por simplicidad, se considerará sólo el error en y). Así, el problema será encontrar la

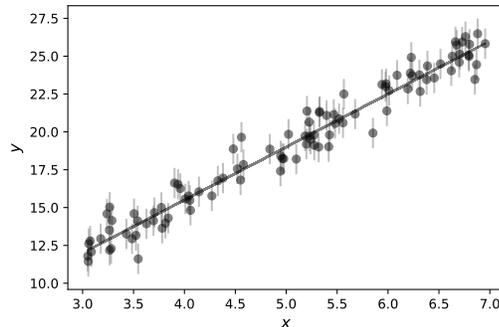


Figura 4.3: Datos simulados para el ejemplo de la sección 4.2.2. Cada punto indica el valor considerado de los datos, incluyendo su barra de error. La recta gris representa la recta $y = mx + b$, con los valores supuestos $m = 3.5$ y $b = 1.5$.

distribución de probabilidad para m y b tales que la variable y verifique (4.9), y que mejor ajusten los datos.

Siguiendo lo hecho en la sección 4.2.1, en este caso se tiene que, dada una observación $D_i = (x_i, y_i, \sigma_i)$, la distribución de probabilidad de esta medición dados los valores de m y b , es

$$P(D_i|m, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left[-\frac{(y_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right], \quad (4.10)$$

con

$$\mu_i = mx_i + b. \quad (4.11)$$

Para este caso, se simularán $N = 100$ datos, donde los x_i estarán uniformemente distribuidos entre 3 y 7. Por su parte, los valores y_i se obtendrán usando la ecuación de la recta, con $m = 3.5$ y $b = 1.5$. A cada dato y_i se le agregará un error aleatorio obtenido a partir de una distribución gaussiana, con $\sigma_y = 1$. Estos datos se pueden ver en la figura 4.3, mientras que los resultados pueden ser vistos en las figuras 4.4 y 4.5. En estas dos figuras se puede ver que las distribuciones de probabilidad obtenidas concuerdan bastante bien con el valor de prueba inicial para los parámetros. En efecto, el valor medio de las distribuciones es muy cercano al valor de prueba inicial, mientras que las desviaciones estándar de dichas distribuciones son de aproximadamente 0.1 en ambas variables, lo que es bastante aceptable pues es un orden de magnitud menos a sus valores medios.

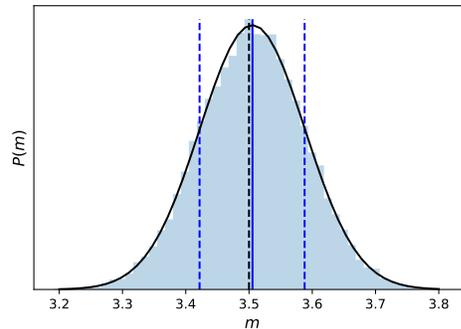


Figura 4.4: Resultado de la simulación MCMC usando emcee para el ejemplo de la sección 4.2.2, para la pendiente de la recta m . El histograma representa la distribución de probabilidad para este parámetro. El gráfico sigue la misma estructura que la figura 4.2.

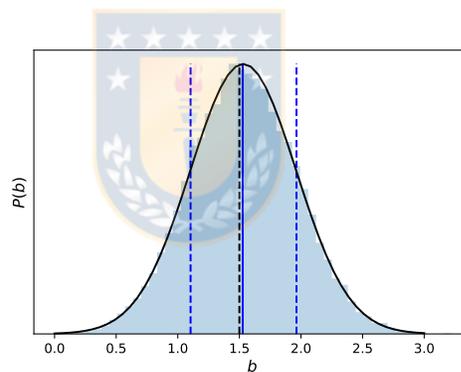


Figura 4.5: Resultado de la simulación MCMC usando emcee para el ejemplo de la sección 4.2.2, para coeficiente de posición de la recta b . El histograma representa la distribución de probabilidad para este parámetro. El gráfico sigue la misma estructura que las figuras 4.2 y 4.4.

4.3. Estimación de parámetros gravitacionales usando el GCC

Una vez mostrado cómo se implementan las herramientas que se ocuparán en los ejemplos 4.2.1 y 4.2.2, en esta sección se ocupará el módulo emcee para obtener la distribución de probabilidad de las variables físicas de nuestro interés, en el contexto del GCC. Esto se hará usando datos de observaciones simuladas.

4.3.1. Generación de datos

Para realizar las simulaciones, se necesitan crear datos de posición y velocidad para cada medición de reloj, además de un modelo para la variable \bar{C} asociada a la razón de tiempos propios medidos.

Por un lado, se deben suponer valores de prueba para las cantidades físicas que se desean determinar (como la aceleración lineal y la velocidad angular del sistema de referencia, así como las componentes de la curvatura). Para los datos simulados se generan, para cada configuración de reloj, una cantidad N de valores para su respectiva posición y velocidad en cada eje, siguiendo una distribución normal para dichas variables, esto es, $y \sim \mathcal{N}(\bar{y}, \sigma_y^2)$, $v \sim \mathcal{N}(\bar{v}, \sigma_v^2)$, donde y y v serán la posición y velocidad del reloj en el eje que sea requerido. Con estos datos, y los valores de prueba supuestos, se obtienen los correspondientes valores para la cantidad \bar{C} para cada una de las N mediciones, por medio de la ecuación maestra (3.20). En un paso siguiente, se agrega ruido a estos valores obtenidos de \bar{C} , con la intención de modelar la incerteza introducida en el proceso de medida de estos tiempos propios. Para este ruido $\delta\bar{C}$ se asume una distribución Gaussiana $\delta\bar{C} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\bar{C}}^2)$, con media nula y desviación estándar dada por la inestabilidad intrínseca del reloj, como la reportada por ejemplo en [25]. Se asumirá que los errores en la razones de tiempo, posición y velocidad son independientes entre sí.

Estos datos serán los que se utilizarán en el proceso de estimación de parámetros. Las particularidades de cada caso se detallarán a continuación.

4.3.2. Estimación de la aceleración lineal

Primero se realizarán simulaciones a fin de poder mostrar cómo puede determinarse la aceleración del sistema de referencia. Se considerará un sistema de referencia moviéndose con una aceleración a^α constante (independiente del tiempo) en la dirección del eje x , suponiendo un valor de prueba de $a_1 = -9.8 \text{ m/s}^2$. Para la velocidad angular del sistema, se supondrá la misma orientación que la aceleración, de tal manera que $\omega_1 = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ (valor que corresponde a la velocidad angular local debida a la rotación de la Tierra en el polo norte).

Tomando en cuenta el actual estado del arte de los resultados experimentales para las estabildades de relojes mostradas en [2, 25], se trabajará con la inestabilidad para la medición de la razón de frecuencias \bar{C} medidas por estos relojes. En [2] se reporta una incerteza para la variación fraccional en la frecuencia (redshift) de relojes ópticos de 8.6×10^{-18} , mientras que en [25] se reporta un error de 1.6×10^{-17} para el redshift debido a efectos relativistas de relojes ópticos con una diferencia en altitud de 33 cm. Nótese que, debido a (3.18), el error absoluto en la variable \bar{C} es aproximadamente

dos veces el valor del error absoluto del redshift. Para esta sección, se usará este último valor como la desviación estándar de nuestra distribución normal para el error en la medición del reloj, es decir, $\sigma_{\bar{C}} = 3.2 \times 10^{-17}$.

Considerando lo anterior, se realizarán simulaciones usando datos sintéticos, generados como fue explicado en la sección 4.3.1, para un arreglo de relojes en reposo con respecto a uno de referencia, como fue discutido en la sección 3.4.1, con distancias medias \bar{y} que van desde 0.37 m (la distancia mínima para detectar efectos relativistas en relojes debidos a la gravedad reportada en [25]) hasta 10.5 m, con $\sigma_y = 1$ cm, considerando $N = 100$ datos para cada par de mediciones (ver sección 3.4.2). Por simplicidad, no se considerarán los efectos de la velocidad del reloj para este caso. Usando los datos generados de esta forma se determina la distribución de probabilidad para la componente no nula de la aceleración a_1 , usando (MCMC) implementado en `emcee`. Para la inferencia de a_1 usamos una función de verosimilitud gaussiano con un prior plano, en combinación con la ecuación maestra (3.20). Con esto, se espera ver el efecto que tiene la distancia de los relojes en la estimación de la aceleración del sistema.

Los resultados de estas estimaciones son mostrados en la figura 4.6. Como era esperado, al aumentar la separación de los relojes la varianza en el valor inferido de a_1 disminuye, y el valor medio de la distribución se acerca al valor de prueba considerado. Explícitamente, aumentar la distancia media de los relojes desde $\bar{y} = 1$ m a $\bar{y} = 10$ m reduce el error de estimación desde ± 0.10 m/s² a ± 0.011 m/s².

En segunda instancia, se realizará el cálculo variando la cantidad de mediciones N de cada configuración de relojes, con los mismos valores iniciales que en el caso anterior, fijando la distancia media de los relojes a $\bar{y} = 1$ m. El resultado es mostrado en la figura 4.7. Como es esperado, la precisión en la determinación de a_1 aumenta con el número de mediciones. Por ejemplo, con $N = 100$ mediciones, se obtiene un valor para la distribución estándar de la aceleración σ_a del orden de 0.1 m/s².

4.3.3. Estimación de las componentes de la curvatura: modelo de espaciotiempo

En esta sección se mostrarán resultados similares a lo mostrado en la sección 4.3.2, destinados a ilustrar posibles estrategias para la determinación de las componentes de la curvatura, y la precisión con la que esto se puede hacer.

Se usará la métrica de Schwarzschild como guía para la estimación de valores de prueba para la curvatura. Las componentes no nulas de la curvatura de Riemann para esta métrica están dadas, en coordenadas de Schwarzschild, por (2.9). Considerando una base ortonormal, como la usada en los capítulos anteriores de este trabajo, cuyos vectores tipo espacio e_1 , e_2 and e_3 estén alineados a lo largo de las direcciones r , θ y

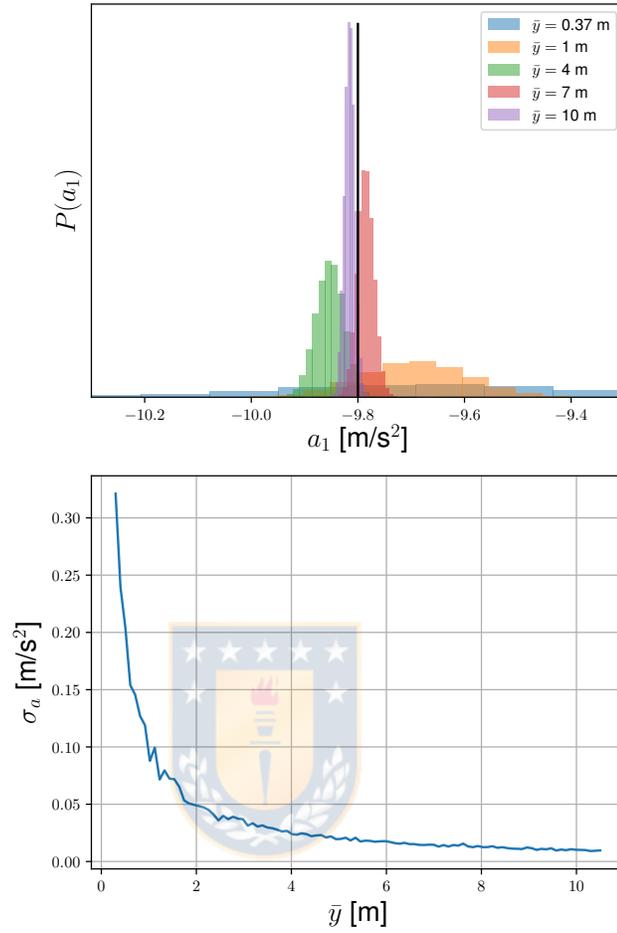


Figura 4.6: Resultado de la estimación de la aceleración a_1 para diferentes valores de la distancia media de los relojes. Panel superior: distribución de probabilidad obtenida para algunos valores representativos de esta distancia, expresada en metros. La línea negra vertical representa el valor de prueba $a_1 = -9.8\text{m/s}^2$. Aquí, se puede apreciar cómo la media de la distribución se acerca al valor de prueba a medida que aumenta la distancia con la que se simulan los datos. Panel inferior: desviación estándar de las distribuciones de probabilidad obtenidas para a_1 para un arreglo de distancias. Acá, se puede ver cómo esta desviación estándar disminuye a medida que el valor de la distancia aumenta. Para ambos paneles, se ha usado que $\sigma_C = 3.2 \times 10^{-17}$, $\sigma_y = 1$ cm, y $N = 100$.

φ , las componentes no nulas de esta curvatura son (para más detalle, ver por ejemplo [12, 35])

$$R_{0110} = R_{2323} = \frac{r_s}{r^3}, \quad (4.12)$$

$$R_{0220} = R_{0330} = R_{1212} = R_{1313} = -\frac{r_s}{2r^3}. \quad (4.13)$$

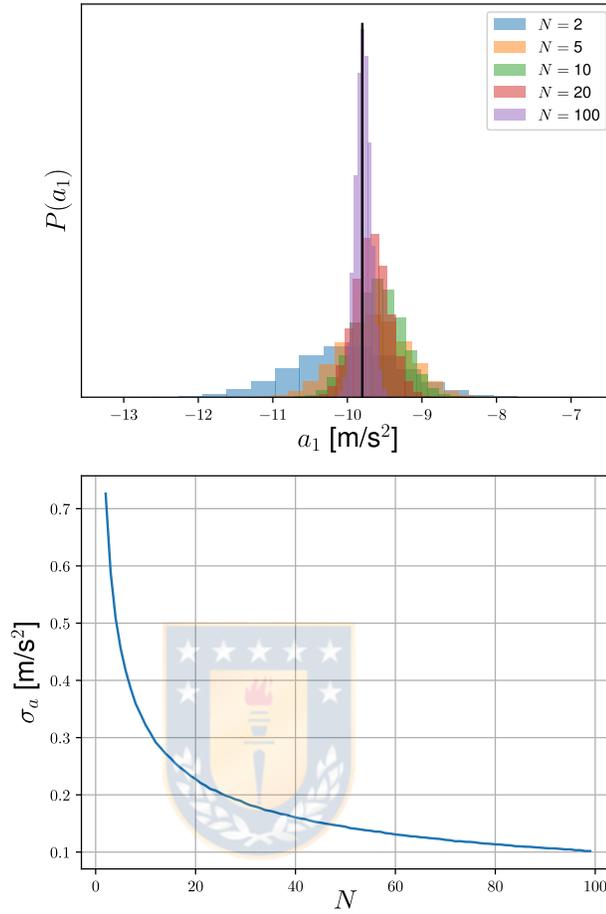


Figura 4.7: Resultado de la estimación de la aceleración a_1 para diferente número de mediciones N . Panel superior: distribución de probabilidad obtenida para algunos valores representativos de esta cantidad de mediciones. La línea negra vertical representa el valor de prueba $a_1 = -9.8\text{m/s}^2$. Aquí se puede apreciar cómo, a medida que aumenta el número de mediciones, la media de la distribución se acerca al valor de prueba inicial. Panel inferior: desviación estándar de las distribuciones de probabilidad obtenidas para a_1 para un arreglo de N . Se aprecia cómo esta desviación estándar disminuye a medida que la cantidad de mediciones aumenta. Para ambos paneles, se ha usado que $\sigma_C = 3.2 \times 10^{-17}$, $\bar{y} = 1$ m, y $\sigma_y = 1$ cm.

En nuestras simulaciones, sin embargo, se considerará la componente R_{0120} como no nula, con la intención de lidiar con cantidades no triviales en nuestros ejemplos, y poder comparar distintas estrategias. Por esto, se asignará un valor para esta componente *a mano* de $R_{0120} = R_{0110}/3$. De esta forma, en las simulaciones se usarán los siguientes valores no nulos de prueba:

$$R_{0110} = +3.415 \times 10^{-23} \text{ m}^{-2}, \quad (4.14)$$

$$R_{0220} = -1.708 \times 10^{-23} \text{ m}^{-2}, \quad (4.15)$$

$$R_{0120} = +1.138 \times 10^{-23} \text{ m}^{-2}. \quad (4.16)$$

Nótese que se ha elegido r igual al radio de la Tierra, de manera que estos valores de la curvatura son del orden de la curvatura producida por nuestro planeta en su superficie. Como simplificación, se supondrá que el sistema de referencia está completamente en caída libre en todo momento, esto es, $a^\alpha = 0$ y $\omega^\alpha = 0$.

4.3.4. Estimación de las componentes de la curvatura: obteniendo una única componente

Se comenzará con el caso más simple en el cual se determinará una única componente del tensor de curvatura de Riemann, usando una única configuración de reloj, como en el primer grupo discutido en la sección 3.5, por ejemplo R_{0110} . En este caso, esta componente está determinada por el valor e incerteza de la distancia y , así como de la cantidad \bar{C} .

Así, se realizará una simulación con $N = 100$ mediciones de razones de tiempo propios simulados, con posiciones $y \sim \mathcal{N}(\bar{y} = 10 \text{ km}, \sigma_y^2 = 10^4 \text{ m}^2)$; y con un ruido $\delta\bar{C}$ caracterizado por una desviación estándar de $\sigma_{\bar{C}} = 10^{-14}$, la cual se ha considerado como un valor moderadamente optimista para este tipo de mediciones, siendo cerca de tres órdenes de magnitud más alto que el valor reportado en [25] para experimentos en condiciones idealmente controladas. El resultado para algunos conjuntos representativos de datos es mostrado en la figura 4.8. La distribución de valores obtenida para la curvatura está caracterizada por un valor medio de $\bar{R}_{0110} = 3.06 \times 10^{-23} \text{ m}^{-2}$, y una desviación estándar de $\sigma_R = 0.99 \times 10^{-23} \text{ m}^{-2}$.

4.3.5. Estimación de las componentes de la curvatura: variando parámetros

Aquí se determinará cómo la distribución de probabilidad estimada para la componente de la curvatura R_{0110} cambia cuando se modifican algunos de los parámetros de nuestras simulaciones. Algunos resultados representativos son mostrados en las figuras 4.9 – 4.11.

Se puede ver de las figuras 4.9 y 4.10 que la precisión en la determinación de la curvatura aumenta, como era esperado a la luz de lo mostrado en 4.3.2, a medida que aumentan tanto el número de mediciones N como la distancia de los relojes al origen, mientras que las medias de estas distribuciones se van acercando al valor de prueba. Por ejemplo, para las simulaciones en las que se varía N , mostradas en la figura 4.9, se observa que la desviación estándar del *posterior* obtenido para R_{0110}

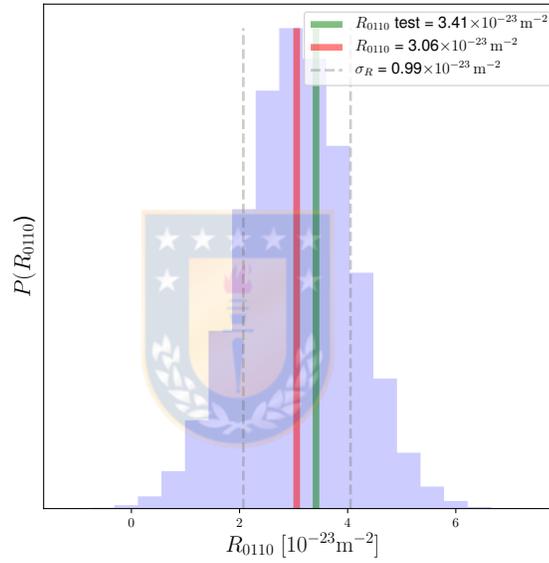


Figura 4.8: Distribución obtenida para la componente de la curvatura R_{0110} . La línea roja vertical representa la media de la distribución. Las líneas grises discontinuas verticales representan los percentiles 16 y 84 de la distribución (lo que para una distribución gaussiana es equivalente a los valores $\pm 1\sigma$). La línea verde vertical representa el valor de prueba (4.14). Para esta estimación se consideró $N = 100$, con $y \sim \mathcal{N}(\bar{y} = 10 \text{ km}, \sigma_y^2 = 10^4 \text{ m}^2)$ y $\sigma_C = 10^{-14}$.

disminuye desde $\approx 3 \times 10^{-23} \text{m}^{-2}$ para $N = 10$ hasta $\approx 1 \times 10^{-23} \text{m}^{-2}$ para $N = 100$, y finalmente hasta $\approx 3 \times 10^{-24} \text{m}^{-2}$ para $N = 1000$. Estos valores son consistentes con un decaimiento del tipo $\sigma_R \sim N^{-1/2}$, lo que es un resultado estándar para este tipo de análisis (ver, por ejemplo, capítulo 2 de [29]). De manera similar, se observa en la figura 4.10 cómo σ_R disminuye a medida que \bar{y} aumenta. Por ejemplo, para $\bar{y} = 10 \text{km}$, 20km , y 40km , se obtiene $\sigma_R \approx 9 \times 10^{-24} \text{m}^{-2}$, $2 \times 10^{-24} \text{m}^{-2}$ y $7 \times 10^{-25} \text{m}^{-2}$, respectivamente. Esto es consistente con el comportamiento esperado de $\sigma_R \sim \bar{y}^{-2}$, que puede inferirse a partir de la ecuación (C.1).

En la figura 4.11 se ve la influencia que tiene el error de medición de la razón de tiempos en los resultados. Como era de esperar, datos obtenidos con relojes más precisos permiten obtener distribuciones de probabilidad más estrechas, con desviaciones estándar menores.

4.3.6. Estimación de las componentes de la curvatura: obteniendo múltiples componentes

En esta sección se compararán estrategias para determinar los valores de las componentes de la curvatura pertenecientes a los siguientes grupos discutidos en la sección 3.5.

Primero, se determinará una componente perteneciente al segundo grupo (ver tabla 3.1), por ejemplo R_{0120} . Para este caso, se necesita tener datos de tres relojes en total, con tres configuraciones diferentes. Esto se hará simulando una determinación simultánea de las componentes R_{0110} , R_{0220} , y R_{0120} , a partir de mediciones simuladas de razones de tiempos propios de relojes en reposo con las posiciones discutidas en la sección. La determinación de estas componentes está afectada entonces por los valores de la distancia y y de las cantidades auxiliares $^{(1,0)}\bar{C}$, $^{(2,0)}\bar{C}$ y $^{(4,0)}\bar{C}$, y de sus respectivas incertezas.

Se simularon las componentes de la curvatura usando los valores de prueba (4.14)–(4.16), mientras las otras componentes fueron elegidas como cero. Se usaron los mismos parámetros para los relojes que los ocupados en la sección 4.3.4, estos son, $N = 100$ (por cada arreglo de 3 relojes) y $\bar{y} = 10 \text{km}$. Las desviaciones estándar usadas fueron elegidas como $\sigma_y = 100 \text{m}$ y $\sigma_{\bar{C}} = 10^{-14}$. Se ha despreciado la influencia de la velocidad de los relojes para este caso. El resultado es mostrado en la figura 4.12, donde se puede ver que la desviación estándar de las distribuciones obtenidas son del orden de 10^{-23}m^{-2} para cada componente, mientras que los valores de prueba se encuentran dentro del intervalo 2σ .

Ahora, se mostrará otro ejemplo de una inferencia simultánea, como lo es la determinación de las componentes R_{0110} , R_{1210} y R_{1212} , partiendo de datos de 3 configuraciones de relojes. Este caso es cualitativamente distinto al discutido previamente,

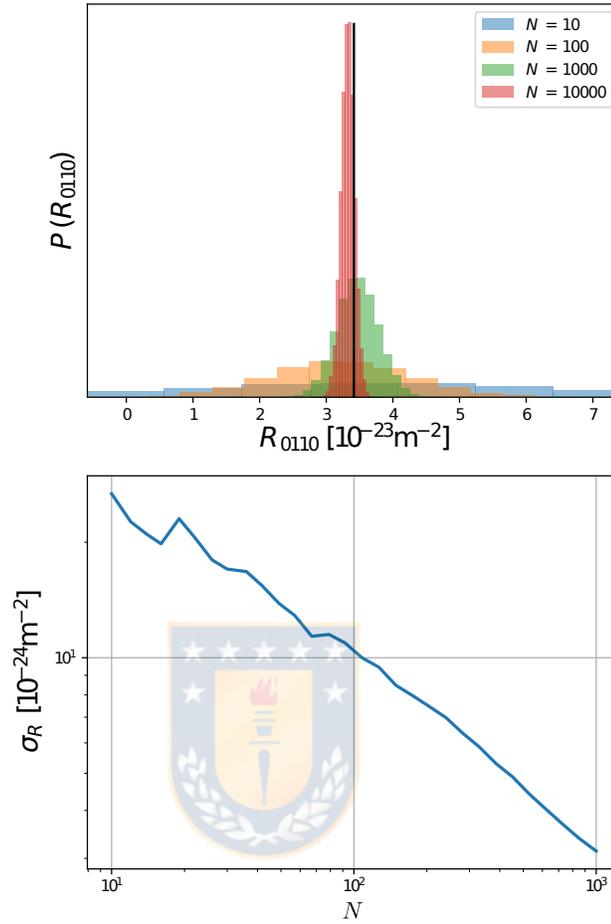


Figura 4.9: Estimación de la componente de la curvatura R_{0110} para diferente número N de mediciones. Panel superior: distribución de probabilidad obtenida para algunos valores representativos de esta cantidad de mediciones. La línea negra vertical representa el valor de prueba (4.14). Se aprecia cómo la media de la distribución se acerca al valor de prueba inicial, a medida que aumenta el número de mediciones, mientras que la distribución se va volviendo más estrecha. Panel inferior: desviación estándar de las distribuciones de probabilidad obtenidas para R_{0110} para un arreglo de N , mostrado en escala logarítmica para ambos ejes. Se aprecia cómo esta desviación estándar disminuye a medida que la cantidad de mediciones aumenta. Para ambos paneles, se ha usado $\bar{y} = 10$ km, $\sigma_y = 100$ m, y $\sigma_{\bar{C}} = 10^{-14}$ como parámetros iniciales. Este resultado es análogo al mostrado en la figura 4.7.

pues ahora dos de los relojes (aquellos que corresponden a las configuraciones (1, 2) y (1, -2)) están necesariamente moviéndose con respecto al reloj central, lo que permite inferir el valor de R_{1210} y R_{1212} , como fue discutido en detalle en la sección 3.5. Para esta simulación se usó $N = 100$ (para cada arreglo de 3 relojes), $\bar{y} = 10$ km,

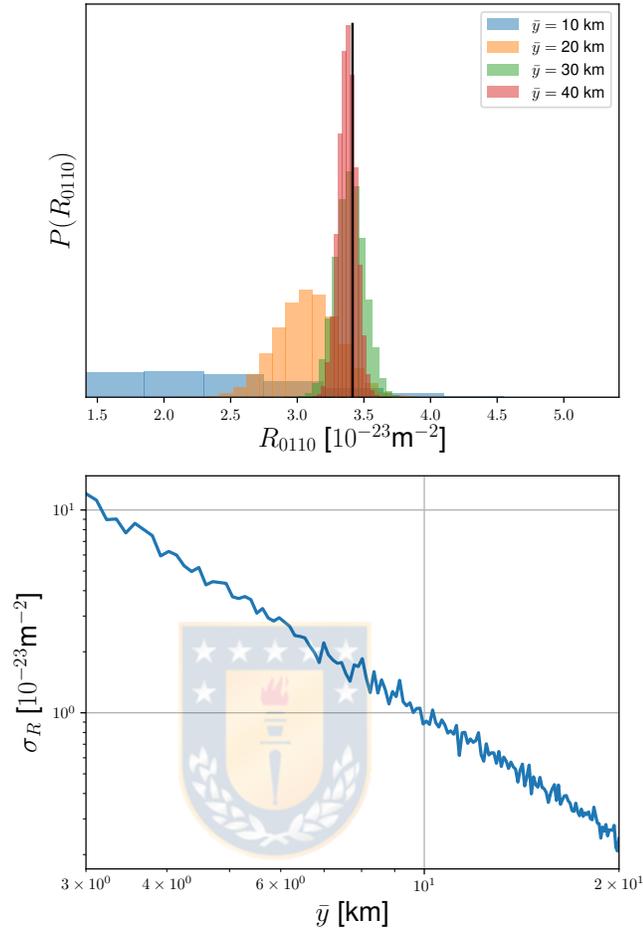


Figura 4.10: Estimación de la componente de la curvatura R_{0110} para diferentes valores de la distancia media de los relojes. Panel superior: distribución de probabilidad obtenida para algunos valores representativos de esta distancia, expresada en metros. La línea negra vertical representa el valor de prueba (4.14). Panel inferior: desviación estándar de las distribuciones de probabilidad obtenidas para R_{0110} para distintas distancias, en escala logarítmica para ambos ejes. Para ambos paneles, se ha usado $N = 100$, $\sigma_y = 100$ m, y $\sigma_{\bar{c}} = 10^{-14}$. Este resultado presenta el mismo comportamiento que el mostrado en la figura 4.6.

$\sigma_y = 100$ m, $\bar{v} = 10^{-6}c$, $\sigma_v = 10^{-8}c$, ambos para aquellos relojes con velocidad no nula, y $\sigma_{\bar{c}} = 10^{-14}$. El resultado es mostrado en la figura 4.13. Una característica importante que puede ser vista a partir de esta figura es que, a pesar que los valores de prueba (4.14)–(4.16) son de hecho recuperados dentro de los intervalos 2σ correspondientes, cada componente de la curvatura ha sido determinada con una precisión diferente: las desviaciones estándar de las distribuciones de probabilidad de R_{0110} , R_{1210} y R_{1212} son del orden de 10^{-23} m^{-2} , 10^{-17} m^{-2} y 10^{-11} m^{-2} , respec-

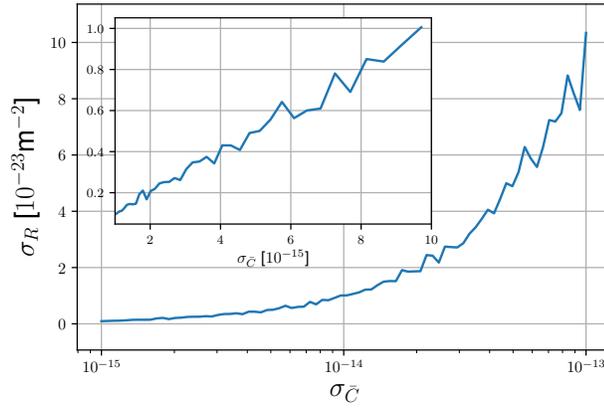


Figura 4.11: Desviación estándar de la distribución de probabilidad de la componente R_{0110} para diferentes valores del error $\sigma_{\bar{C}}$ en la medición de la razón de tiempos \bar{C} . El cuadro exterior muestra la evolución de σ_R en el intervalo de 10^{-15} a 10^{-13} para $\sigma_{\bar{C}}$, en escala logarítmica para el eje x . El cuadro interior muestra lo mismo, para el intervalo de $\sigma_{\bar{C}}$ desde 10^{-15} hasta 10^{-14} , en escala lineal. Para este resultado, se han usado $N = 100$, $\bar{y} = 10$ km, y $\sigma_y = 100$ m.

tivamente. Esto es consecuencia del efecto adicional de la velocidad involucrada en este análisis, la cual disminuye la contribución a la variable \bar{C} de las componentes de la curvatura “con más índices espaciales”, lo que reduce la precisión con la que estas componentes son determinadas en una manera jerárquica, es decir, aquellos con más índices espaciales son determinados con una desviación estándar más alta, de aproximadamente 6 órdenes de magnitud adicionales por índice espacial adicional, para los valores con los que fue realizada la simulación. Esto puede ser entendido viendo la ecuación maestra (3.20), donde la componente R_{1210} contribuye a la variable \bar{C} en una cantidad que es suprimida por un factor lineal en la velocidad v/c ($\sim 10^{-6}$ en este caso) comparada con la contribución de R_{0110} , mientras que la componente R_{1212} es suprimida por un término cuadrático en v/c .

Además, se mostrarán los resultados de una inferencia simultánea similar a la ya discutida, pero ahora estimando 5 componentes de la curvatura, R_{0110} , R_{0220} , R_{1210} , R_{1212} y R_{1220} , usando datos de 5 mediciones de relojes (ver la discusión en la sección 3.5). Usando de nuevo $N = 100$ (para cada arreglo de 5 relojes), $\bar{y} = 10$ km, $\sigma_y = 100$ m, $\bar{v} = 10^{-6}c$ para aquellos relojes con velocidad no nula, $\sigma_v = 10^{-8}c$, y $\sigma_{\bar{C}} = 10^{-14}$, el resultado obtenido es mostrado en la figura 4.14. El comportamiento de este caso más complejo es similar al discutido previamente, en el sentido que la velocidad define una jerarquía de precisiones en la determinación de cada componente: las distribuciones de R_{0110} y R_{0220} tiene una desviación estándar, para los valores ocupados en este ejemplo, del orden de 10^{-23} m^{-2} , mientras que para R_{1210} y R_{1220} se obtuvieron valores del orden de 10^{-17} m^{-2} , y finalmente R_{1212} es la componente

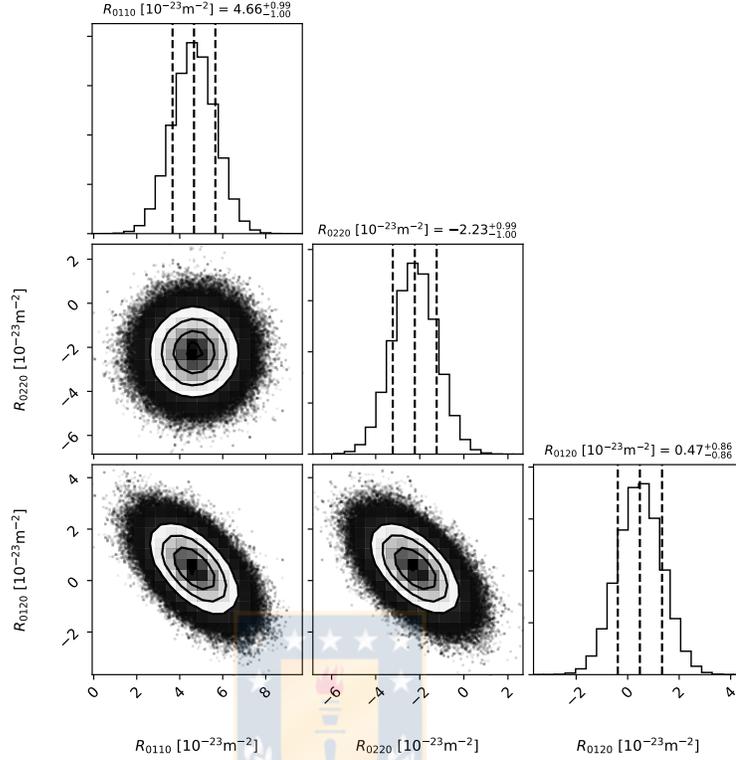


Figura 4.12: Distribución de probabilidad obtenida para las componentes R_{0110} , R_{0220} y R_{0120} , obtenidas de manera simultánea. Se ha usado $\bar{y} = 10$ km, $\sigma_{y_x} = \sigma_{y_y} = 100$ m, $\sigma_{\bar{C}} = 10^{-14}$, y $N = 100$ mediciones de reloj para cada una de las configuraciones involucradas (1, 0), (2, 0) y (4, 0) (es decir, 3×100 relojes, con sus posiciones y razón de tiempos). Esta figura, y similares, fueron hechas con el paquete corner [36].

con el error más alto, del orden de 10^{-10} m^{-2} .

Si se compara cómo la componente R_{0110} es determinada en esta última simulación con el resultado del caso simultáneo más simple de 3 curvaturas, mostrado en la figura 4.13, y con la determinación más simple mostrada en la figura 4.8, es posible notar un resultado similar para el ancho (desviación estándar) de las distribuciones correspondientes obtenidas.

Como análisis final, se mostrará el resultado de estimar las componentes R_{0120} , R_{1210} , R_{1212} y R_{1220} , previamente obtenidas simultáneamente, pero esta vez obtenidas en un procedimiento jerárquico, es decir, usando la información de otras componentes obtenidas previamente. Por ejemplo, la componente R_{0120} es estimada con la información del reloj en la configuración (4, 0), más la información de la estimación por separado de las componentes R_{0110} y R_{0220} . La distribución de probabilidad obteni-

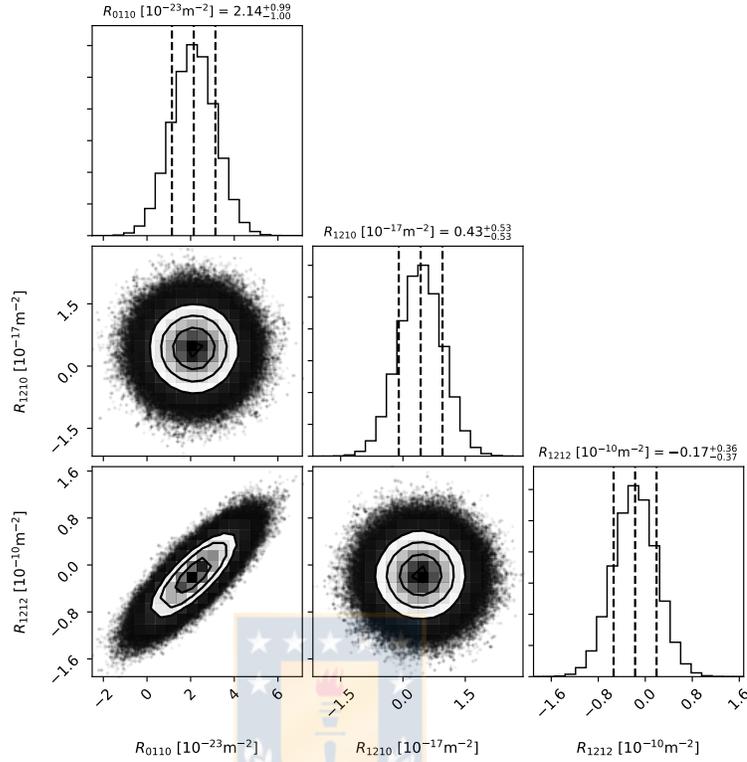


Figura 4.13: Distribuciones de probabilidad para las componentes R_{0110} , R_{1210} y R_{1212} , obtenidas de manera simultánea. En esta simulación se han ocupado los parámetros $\bar{y} = 10$ km, $\sigma_y = 100$ m, $\bar{v} = 10^{-6}c$, $\sigma_v = 10^{-8}c$, $\sigma_{\bar{c}} = 10^{-14}$, y $N = 100$ mediciones para cada reloj en las configuraciones (1, 0), (1, 2) y (1, -2) (es decir, 3×100 relojes con sus posiciones, velocidades y razones de tiempo medidas).

da para esta componente, en este caso, es mostrada en la figura 4.15. La desviación estándar de esta distribución de probabilidad resultante es de orden de 10^{-23} , m^{-2} , siendo del mismo orden que el casos en el que esta componente fue obtenida de manera simultánea junto a las demas, como ilustra la figura 4.12.

De la misma manera, se estimaron las componentes R_{1210} y R_{1212} , al mismo tiempo, pero usando la información de la estimación previa de la componente R_{0110} , en adición a la información de las mediciones de las configuraciones (1, 2) y (1, -2). Este resultado es mostrado en la figura 4.16. Las desviaciones estándar de las distribuciones de probabilidad resultantes mostradas en esta figura no difieren significativamente de los casos en que estas componentes fueron obtenidas de manera simultánea junto a las demas, usando los mismos datos, como se puede apreciar viendo las figuras 4.13 y 4.14.

De esta manera, estos resultados muestran que no existe diferencia significativa

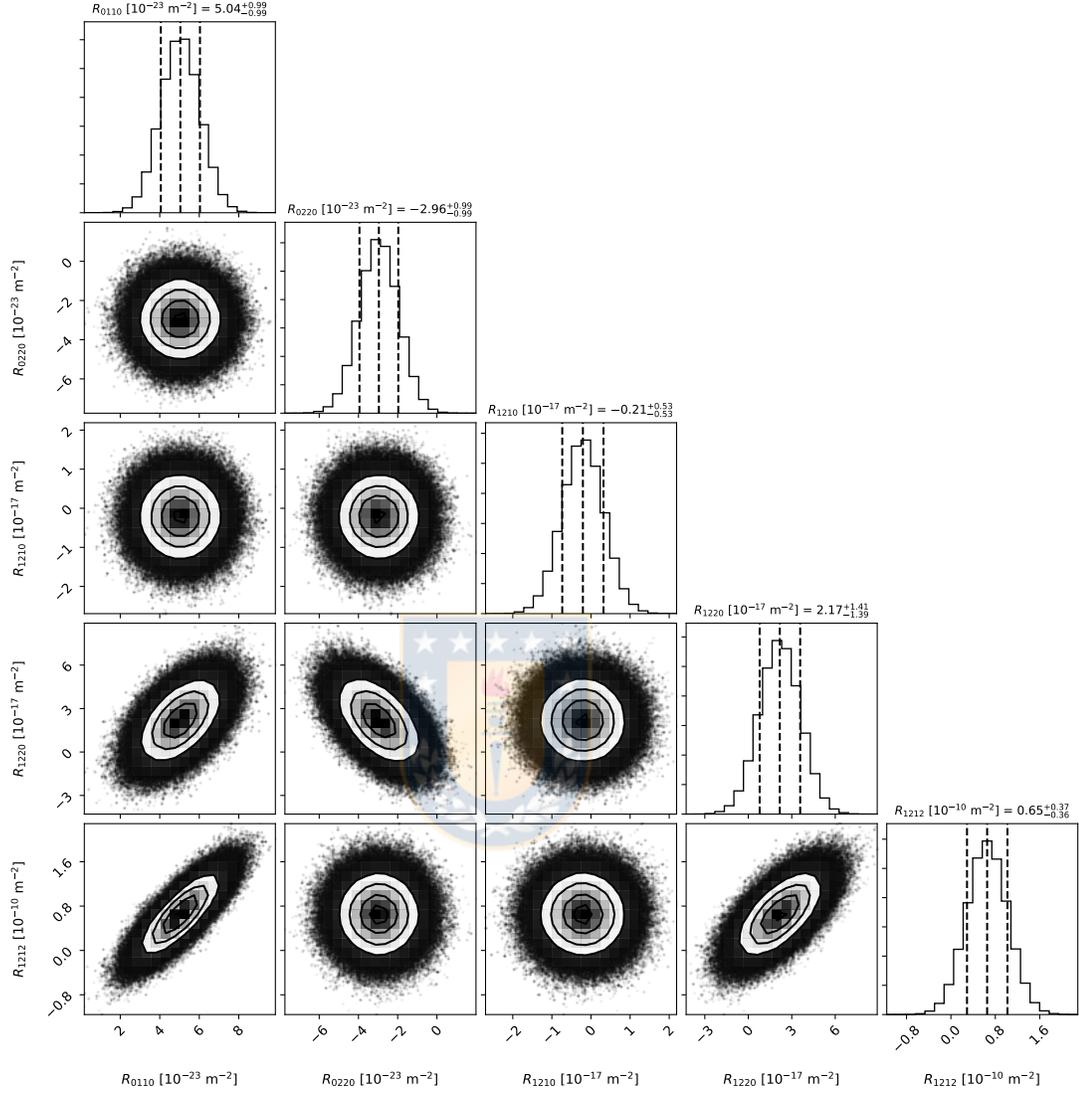


Figura 4.14: Distribuciones de probabilidad para las componentes R_{0110} , R_{0220} , R_{1210} , R_{1212} y R_{1220} , obtenidas de manera simultánea. En este caso, se usaron $\bar{y} = 10$ km, $\sigma_y = 100$ m, $\sigma_C = 10^{-14}$, $\bar{v} = 10^{-6}c$ (para relojes no estáticos), y $\sigma_v = 10^{-8}c$, con $N = 100$ mediciones para cada reloj en las configuraciones (1, 0), (2, 0), (1, 2), (1, -2) y (2, 1) (esto representa 5×100 relojes, con sus valores para las posiciones, velocidades y razones de tiempo).

entre las estrategias “jerárquica” y “simultánea” para la estimación de los valores de las componentes de la curvatura.

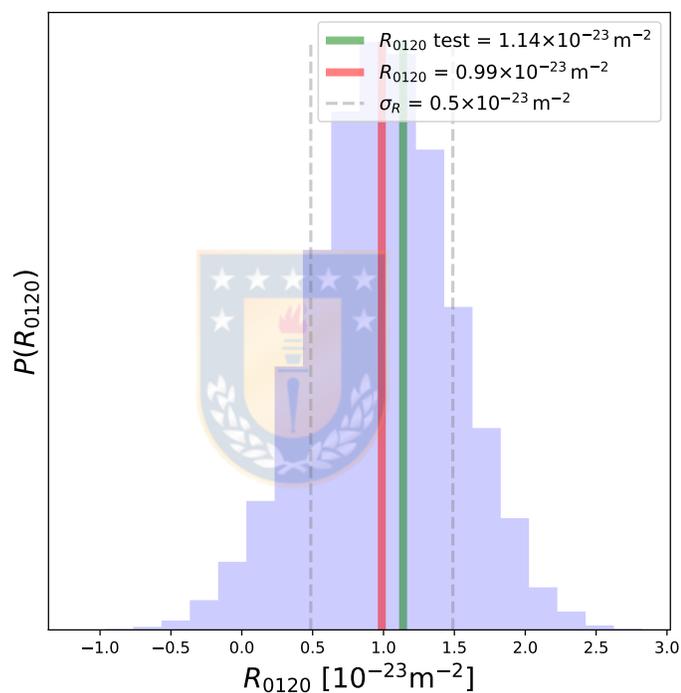


Figura 4.15: Distribución para la componente de la curvatura R_{0120} , obtenida en forma jerárquica. La línea roja vertical representa la media de la distribución. Las líneas grises discontinuas verticales representan los percentiles 16 y 84 de la distribución. La línea verde vertical representa el valor de prueba (4.16). Para esta estimación se consideró $N = 100$, $y \sim \mathcal{N}(\bar{y} = 10 \text{ km}, \sigma_y^2 = 10^4 \text{ m}^2)$ y $\sigma_C = 10^{-14}$.

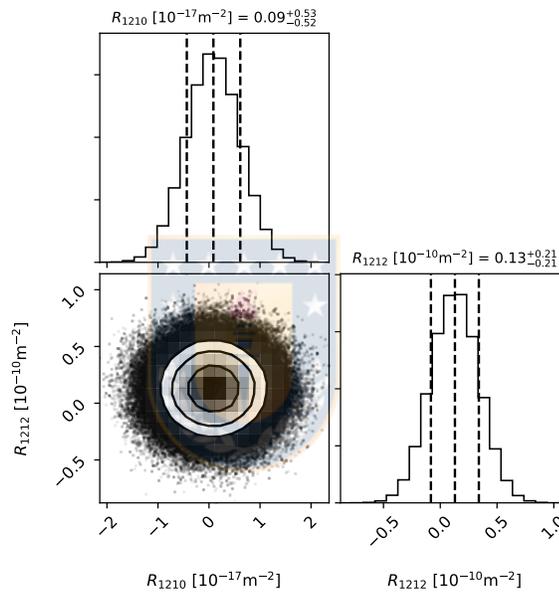


Figura 4.16: Distribuciones para las componentes de la curvatura R_{1210} y R_{1212} , obtenidas de manera jerárquica. En esta simulación se han ocupado los parámetros $\bar{y} = 10$ km, $\sigma_y = 100$ m, $\bar{v} = 10^{-6}c$, $\sigma_v = 10^{-8}c$, $\sigma_{\bar{c}} = 10^{-14}$, y $N = 100$ mediciones para cada reloj en las configuraciones, (1, 2) y (1, -2) (es decir, 2×100 relojes con sus posiciones, velocidades y razones de tiempo medidas).

Capítulo 5

Conclusión

En esta tesis se han trabajado nuevas soluciones, así como una descripción estadística del “gravitational clock compass” (GCC) [1, 8]. El modelo presentado acá es de relevancia directa para la determinación operacional del campo gravitacional en el contexto de Relatividad General, por medio del uso de relojes.

En particular, se extendió el resultado de [8] en dos formas. Primero, se derivaron nuevas soluciones analíticas para la aceleración y la velocidad angular del sistema en términos de razones de tiempo medidas por relojes en configuraciones adecuadas. Estas soluciones exactas son distintas de las que aparecen en [8] debido a una elección diferente para el estado de movimiento del reloj central de referencia. Adicionalmente, se presentan un conjunto de expresiones analíticas nuevas que permiten una determinación simultánea de las propiedades cinemáticas del sistema de referencia. Además, se obtuvo una nueva solución para todas las componentes de la curvatura en coordenadas de Fermi. Esta solución fue luego clasificada por el número de mediciones de relojes necesarias para determinar cada componente. A partir de esta solución, se discutieron diferentes estrategias para estimar experimentalmente estas componentes. En general, las componentes de la curvatura pueden ser determinadas de manera directa a partir de mediciones de relojes, en forma simultánea (en conjunto a otras componentes usando los mismos datos) y/o de manera jerárquica (usando el conocimiento de componentes previamente determinadas).

En la segunda parte de nuestro trabajo se ilustró cómo podría llevarse a cabo la determinación estadística de la aceleración del sistema, así como de algunas componentes representativas de la curvatura del espaciotiempo. Usando datos sintéticos (los cuáles toman en cuenta los valores de la posición, velocidad y razón de tiempos de los relojes, además de posibles variaciones a estos valores que provengan de errores de medición) se estimaron las distribuciones de probabilidad para valores de prueba de la aceleración y, especialmente, de las componentes de la curvatura usando distintas estrategias (simultánea y jerárquica). Esto llevó a un estimado de la pre-

cisión con la cual cada componente de la curvatura podría ser determinada en una medición realista, y cómo las distribuciones de probabilidad resultantes dependen de los distintos parámetros del modelo. Algunas componentes son mejor determinadas por configuraciones de relojes particulares, dependiendo de sus distancias al de referencia, velocidades en el sistema de referencia elegido, y la precisión de los relojes involucrados. Este comportamiento puede ser esperado notando que, dada la ecuación maestra (3.20), los distintos parámetros contribuyen con distinto peso a la cantidad auxiliar \bar{C} y, por consiguiente, a las razones de tiempo medidos. Por ejemplo, algunas componentes contribuyen con un factor lineal en la velocidad, otras con un factor cuadrático, etc.

Los resultados aquí mostrados indican que la estrategia jerárquica de determinación de las componentes de la curvatura lleva a una estimación de estas componentes de precisión similar, usando los mismos datos sintéticos, comparada con la estrategia simultánea. Esta discusión de la relación entre las diferentes componentes de la curvatura y las distintas estrategias para estimarlas es de directa relevancia para una futura implementación experimental de un “clock compass” como el descrito en este trabajo.

Es sencillo extender el análisis actual para incluir la determinación (simultánea y/o jerárquica) de más componentes de la curvatura. Incluso la determinación completa de las 20 componentes independientes no requiere técnicas conceptualmente diferentes a las acá presentadas. Usando el modelo definido por la ecuación maestra (3.20), y posiciones y velocidades adecuadas para un conjunto de relojes, además de sus correspondientes razones de tiempo, todas las 20 componentes pueden ser inferidas análogamente a los ejemplos aquí presentados.

Finalmente, debe ser mencionado que redes de relojes de alta precisión, que se encuentran actualmente en uso [37, 38] y bajo construcción [39, 40], podrían representar una prometedora aplicación directa del marco de trabajo aquí presentado.

Apéndice A

Notación y convenciones

En este apéndice, se presentarán las convenciones y notaciones usadas en la presente tesis. Esta notación está basada en la notación usada en [8].

A.1. Geometría diferencial

Durante el desarrollo de esta tesis, se ocupó la convención $(+, -, -, -)$ para la signatura de la métrica. Índices latinos (a, b, c, \dots) son índices de espaciotiempo, y toman valores de 0 a 3, mientras que índices griegos $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ son índices de espacio, y toman valores de 1 a 3¹. Se ocupará el convenio de suma de Einstein, según el cual índices repetidos en una expresión representa una suma sobre dichos índices.

Con la métrica, se define el elemento de línea

$$ds^2 := g_{ab} dx^a dx^b \tag{A.1}$$

Se considerará que la métrica es “no degenerada”, es decir, que $g := \det(g_{ab}) \neq 0$, de tal forma que exista la **métrica inversa** $g^{ab}(x)$ tal que:

$$g^{ab}(x) g_{bc}(x) = \delta_c^a. \tag{A.2}$$

donde δ_k^a es la delta de Kronecker.

¹Esta convención es contraria a la usual, como la usada en [12] o en [15].

A.1.1. Conexión y derivados

La conexión está dada por los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{ab}{}^c := \frac{1}{2}g^{ce}(\partial_a g_{eb} + \partial_b g_{ae} - \partial_e g_{ab}). \quad (\text{A.3})$$

Esta conexión nos permite definir el concepto de derivada de una manera covariante (es decir, independiente del sistema coordenado usado). Por ejemplo, para un 4-tensor $T^{ab}{}_{cd}$ cualquiera se puede definir su *derivada covariante* como

$$\nabla_e T^{ab}{}_{cd} := \partial_e T^{ab}{}_{cd} + \Gamma_{fe}{}^a T^{fb}{}_{cd} + \Gamma_{fe}{}^b T^{af}{}_{cd} - \Gamma_{ce}{}^f T^{ab}{}_{fd} - \Gamma_{de}{}^f T^{ab}{}_{cf}. \quad (\text{A.4})$$

Puesto que la conexión está dada por los símbolos de Christoffel, se cumple que la derivada covariante de la métrica es idénticamente nula, es decir,

$$\nabla_c g_{ab} \equiv 0. \quad (\text{A.5})$$

Esta identidad se conoce como *condición de metricidad*.

Por otro lado, con la conexión también podemos definir la *derivada covariante total* como

$$\frac{Dv^a}{d\tau} := \frac{dv^a}{d\tau} + \Gamma_{bc}{}^a v^b u^c \quad (\text{A.6})$$

que corresponde a la derivada covariante del vector v^a a lo largo de una curva $Y(\tau)$ parametrizada por su tiempo propio τ , con $u^c = dY/d\tau$ la 4-velocidad de la curva, y $\Gamma_{bc}{}^a$ la conexión evaluada sobre dicha curva.

A.2. Tensor de curvatura, propiedades y derivados

Con nuestras convenciones, se define el **tensor de curvatura** como

$$R_{abc}{}^d := \partial_a \Gamma_{cb}{}^d - \partial_b \Gamma_{ca}{}^d + \Gamma_{ea}{}^d \Gamma_{cb}{}^e - \Gamma_{eb}{}^d \Gamma_{ca}{}^e, \quad (\text{A.7})$$

a partir de la conexión definida en (A.3). Si consideramos las componentes totalmente covariantes del tensor de curvatura, $R_{abcd} := g_{de} R_{abc}{}^e$, es posible probar que, para el caso que estamos discutiendo, el tensor de curvatura de Riemann posee las siguientes (anti-)simetrías:

$$R_{abcd} \equiv -R_{bacd}, \quad (\text{A.8})$$

$$R_{abcd} \equiv -R_{abdc}, \quad (\text{A.9})$$

$$R_{abcd} \equiv R_{cdab}, \quad (\text{A.10})$$

y, además,

$$R_{abcd} + R_{bcad} + R_{cabd} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{[abc]d} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Debido a estas simetrías, las *componentes completamente covariantes linealmente independientes* del tensor de curvatura de una variedad con geometría riemanniana de dimensión n se reducen a “sólo” $n^2(n^2 - 1)/12$. De esta manera, en RG, donde el espaciotiempo tiene dimensión $n = 4$ tenemos 20 componentes linealmente independientes del tensor de Riemann.

A partir del tensor de Riemann se define el **tensor de Ricci** como

$$R_{ab} := R_{cab}{}^c, \quad (\text{A.12})$$

el cual, en un espacio con geometría riemanniana, es simétrico, $R_{ij} = R_{ji}$, en virtud de (A.10).

Por su parte, se define el **escalar de curvatura** como la “traza del tensor de Ricci”, esto es,

$$R := g^{ab} R_{ab}. \quad (\text{A.13})$$

Con estas dos definiciones se define el **tensor de Einstein** como

$$G_{ij} := R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R \quad (\text{A.14})$$

el cual, en un espacio con geometría riemanniana, también es simétrico. Este tensor de Einstein es el que va al lado izquierdo de la ecuación de campo de Einstein (2.5).

Apéndice B

Forma completamente resuelta de la solución de la curvatura

En este apéndice se repasarán las soluciones para las componentes de la curvatura encontradas en el capítulo 3.5. En este caso, se mostrará el mismo resultado pero en su versión “completamente resuelta”, es decir, que cada componente de la curvatura será mostrada en función de cantidades medibles de relojes, las cuales son su distancia al centro de coordenadas, velocidad, y razón de tiempo medida entre dicho reloj y el reloj central.

$$R_{0110} = -\frac{{}^{(1,0)}B_3}{y^2}, \quad (\text{B.1})$$

$$R_{0220} = -\frac{{}^{(2,0)}B_3}{y^2}, \quad (\text{B.2})$$

$$R_{0330} = -\frac{{}^{(3,0)}B_3}{y^2}, \quad (\text{B.3})$$

$$R_{0120} = \frac{1}{2y^2} \left({}^{(1,0)}B_3 + {}^{(2,0)}B_3 - {}^{(4,0)}B_3 \right), \quad (\text{B.4})$$

$$R_{0130} = \frac{1}{2y^2} \left({}^{(1,0)}B_3 + {}^{(3,0)}B_3 - {}^{(6,0)}B_3 \right), \quad (\text{B.5})$$

$$R_{0230} = \frac{1}{2y^2} \left({}^{(2,0)}B_3 + {}^{(3,0)}B_3 - {}^{(5,0)}B_3 \right), \quad (\text{B.6})$$

$$R_{1210} = \frac{3}{8v_{22}y^2} \left({}^{(1,2)}B_3 - {}^{(1,-2)}B_3 \right), \quad (\text{B.7})$$

$$R_{1310} = \frac{3}{8v_{33}y^2} \left({}^{(1,3)}B_3 - {}^{(1,-3)}B_3 \right), \quad (\text{B.8})$$

$$R_{2320} = \frac{3}{8v_{33}y^2} \left({}^{(2,3)}B_3 - {}^{(2,-3)}B_3 \right), \quad (\text{B.9})$$

$$R_{1212} = -\frac{3}{2v_{22}^2y^2} \left(2{}^{(1,0)}B_3 - {}^{(1,2)}B_3 - {}^{(1,-2)}B_3 \right), \quad (\text{B.10})$$

$$R_{1313} = -\frac{3}{2v_{33}^2y^2} \left(2{}^{(1,0)}B_3 - {}^{(1,3)}B_3 - {}^{(1,-3)}B_3 \right), \quad (\text{B.11})$$

$$R_{2323} = -\frac{3}{2v_{33}^2y^2} \left(2{}^{(2,0)}B_3 - {}^{(2,3)}B_3 - {}^{(2,-3)}B_3 \right), \quad (\text{B.12})$$

$$R_{1220} = \frac{3}{8v_{11}v_{22}^2y^2} \left(2v_{22}^2({}^{(2,0)}B_3 - {}^{(2,1)}B_3) + v_{11}^2(-2{}^{(1,0)}B_3 + {}^{(1,2)}B_3 + {}^{(1,-2)}B_3) \right), \quad (\text{B.13})$$

$$R_{1330} = \frac{3}{8v_{11}v_{22}^2y^2} \left(2v_{33}^2({}^{(3,0)}B_3 - {}^{(3,1)}B_3) + v_{11}^2(-2{}^{(1,0)}B_3 + {}^{(1,3)}B_3 + {}^{(1,-3)}B_3) \right), \quad (\text{B.14})$$

$$R_{2330} = \frac{3}{8v_{22}v_{33}^2y^2} \left(2v_{33}^2({}^{(3,0)}B_3 - {}^{(3,1)}B_3) + v_{22}^2(-2{}^{(2,0)}B_3 + {}^{(2,3)}B_3 + {}^{(2,-3)}B_3) \right), \quad (\text{B.15})$$

$$R_{1213} = -\frac{3}{4v_{22}^2v_{33}^2v_{52}v_{53}y^2} \left(2(v_{22}^2v_{33}^2 - v_{22}^2v_{53}^2 - v_{33}^2v_{52}^2) {}^{(1,0)}B_3 \right. \\ \left. + (v_{22}v_{33}^2v_{52} + v_{33}^2v_{52}^2) {}^{(1,2)}B_3 - (v_{22}v_{33}^2v_{52} - v_{33}^2v_{52}^2) {}^{(1,-2)}B_3 \right. \\ \left. + (v_{22}^2v_{33}v_{53} + v_{22}^2v_{53}^2) {}^{(1,3)}B_3 - (v_{22}^2v_{33}v_{53} - v_{22}^2v_{53}^2) {}^{(1,-3)}B_3 \right. \\ \left. - 2v_{22}^2v_{33}^2 {}^{(1,5)}B_3 \right), \quad (\text{B.16})$$

$$R_{1223} = \frac{3}{4v_{11}v_{22}^2v_{33}^2v_{61}v_{63}y^2} \left(2(v_{11}^2v_{33}^2v_{61} - v_{11}v_{33}^2v_{61}^2) {}^{(1,0)}B_3 \right. \\ \left. + 2(v_{11}v_{22}^2v_{33}^2 - v_{11}v_{22}^2v_{63}^2 - v_{22}^2v_{33}^2v_{61}) {}^{(2,0)}B_3 \right. \\ \left. - (v_{11}^2v_{33}^2v_{61} - v_{11}v_{33}^2v_{61}^2) {}^{(1,2)}B_3 - (v_{11}^2v_{33}^2v_{61} - v_{11}v_{33}^2v_{61}^2) {}^{(1,-2)}B_3 \right. \\ \left. + 2v_{22}^2v_{33}^2v_{61} {}^{(2,1)}B_3 \right. \\ \left. + (v_{11}v_{22}^2v_{33}v_{63} + v_{11}v_{22}^2v_{63}^2) {}^{(2,3)}B_3 - (v_{11}v_{22}^2v_{33}v_{63} - v_{11}v_{22}^2v_{63}^2) {}^{(2,-3)}B_3 \right. \\ \left. - 2v_{11}v_{22}^2v_{33}^2 {}^{(2,6)}B_3 \right), \quad (\text{B.17})$$

$$R_{1323} = -\frac{3}{4v_{11}v_{22}v_{33}^2v_{41}v_{42}y^2} \left(2(v_{11}^2v_{22}v_{41} - v_{11}v_{22}v_{41}^2) {}^{(1,0)}B_3 \right. \\ \left. + 2(v_{11}v_{22}^2v_{42} - v_{11}v_{22}v_{42}^2) {}^{(2,0)}B_3 \right. \\ \left. + 2(v_{11}v_{22}v_{33}^2 - v_{11}v_{33}^2v_{42} - v_{22}v_{33}^2v_{41}) {}^{(3,0)}B_3 \right. \\ \left. - (v_{11}^2v_{22}v_{41} - v_{11}v_{22}v_{41}^2) {}^{(1,3)}B_3 - (v_{11}^2v_{22}v_{41} - v_{11}v_{22}v_{41}^2) {}^{(1,-3)}B_3 \right. \\ \left. - (v_{11}v_{22}^2v_{42} - v_{11}v_{22}v_{42}^2) {}^{(2,3)}B_3 - (v_{11}v_{22}^2v_{42} - v_{11}v_{22}v_{42}^2) {}^{(2,-3)}B_3 \right)$$

$$+ 2v_{22}v_{33}^2v_{41}^{(3,1)}B_3 + 2v_{11}v_{33}^2v_{42}^{(3,2)}B_3 - 2v_{11}v_{22}v_{33}^2^{(3,4)}B_3), \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} R_{1230} = & -\frac{3}{8v_{11}v_{22}v_{33}v_{41}v_{42}y^2} \left(2(v_{11}^2v_{22}v_{41} - v_{11}v_{22}v_{41}^2 + v_{11}v_{22}v_{41}v_{42})^{(1,0)}B_3 \right. \\ & + 2(v_{11}v_{22}^2v_{42} + v_{11}v_{22}v_{41}v_{42} - v_{11}v_{22}v_{42}^2)^{(2,0)}B_3 \\ & + 2(v_{11}v_{22}v_{33}^2 - v_{11}v_{33}^2v_{42} - v_{22}v_{33}^2v_{41})^{(3,0)}B_3 \\ & - 2v_{11}v_{22}v_{41}v_{42}^{(4,0)}B_3 \\ & - (v_{11}^2v_{22}v_{41} - v_{11}v_{22}v_{41}^2 + 2v_{11}v_{22}v_{41}v_{42})^{(1,3)}B_3 \\ & - (v_{11}^2v_{22}v_{41} - v_{11}v_{22}v_{41}^2)^{(1,-3)}B_3 \\ & - (v_{11}v_{22}^2v_{42} + 2v_{11}v_{22}v_{41}v_{42} - v_{11}v_{22}v_{42}^2)^{(2,3)}B_3 \\ & - (v_{11}v_{22}^2v_{42} - v_{11}v_{22}v_{42}^2)^{(2,-3)}B_3 \\ & + 2v_{22}v_{33}^2v_{41}^{(3,1)}B_3 + 2v_{11}v_{33}^2v_{42}^{(3,2)}B_3 - 2v_{11}v_{22}v_{33}^2^{(3,4)}B_3 \\ & \left. + 2v_{11}v_{22}v_{41}v_{42}^{(4,3)}B_3 \right), \quad (\text{B.19}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{2310} = & \frac{3}{8v_{11}v_{22}^2v_{33}^2v_{52}v_{53}y^2} \left(2(v_{11}^2v_{22}^2v_{33}^2 - v_{11}^2v_{22}^2v_{53}^2 - v_{11}^2v_{33}^2v_{52}^2)^{(1,0)}B_3 \right. \\ & + 2v_{22}^2v_{33}^2v_{52}v_{53}^{(2,0)}B_3 \\ & + 2v_{22}^2v_{33}^2v_{52}v_{53}^{(3,0)}B_3 \\ & - 2v_{22}^2v_{33}^2v_{52}v_{53}^{(5,0)}B_3 \\ & + (v_{11}^2v_{22}v_{33}^2v_{52} + v_{11}^2v_{33}^2v_{52}^2)^{(1,2)}B_3 \\ & - (v_{11}^2v_{22}v_{33}^2v_{52} - v_{11}^2v_{33}^2v_{52}^2)^{(1,-2)}B_3 \\ & + (v_{11}^2v_{22}v_{33}v_{53} + v_{11}^2v_{22}v_{53}^2)^{(1,3)}B_3 \\ & - (v_{11}^2v_{22}v_{33}v_{53} - v_{11}^2v_{22}v_{53}^2)^{(1,-3)}B_3 \\ & - 2v_{22}^2v_{33}^2v_{52}v_{53}^{(2,1)}B_3 - 2v_{22}^2v_{33}^2v_{52}v_{53}^{(3,1)}B_3 - 2v_{11}^2v_{22}^2v_{33}^2^{(1,5)}B_3 \\ & \left. + 2v_{22}^2v_{33}^2v_{52}v_{53}^{(5,1)}B_3 \right). \quad (\text{B.20}) \end{aligned}$$

Apéndice C

Expresiones analíticas para el error propagado

En esta sección se muestra una derivación analítica para el error en la estimación de la curvatura. Este resultado puede ser usado para definir límites superiores para el error de las variables que entran en la expresión para el valor de la curvatura, dependiendo del error con el que se quiere estimar dicha curvatura. Este tipo de resultado analítico simple ha sido útil para el ajuste de parámetros en nuestras simulaciones.

La forma general de una componente de la curvatura como $R = R_{0110}$ es $R = -(\bar{C} + v^2)/y^2$ (ver ecuación (3.58)). Con esto, se puede inferir que

$$\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 \approx \left(\frac{\sigma_{\bar{C}}}{\bar{C} + v^2}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{2v\sigma_v}{\bar{C} + v^2}\right)^2. \quad (\text{C.1})$$

Si se quiere tener un error fraccional más bajo que cierto valor, esta expresión se transforma en una desigualdad,

$$\left(\frac{\sigma_{\bar{C}}}{\bar{C} + v^2}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{2v\sigma_v}{\bar{C} + v^2}\right)^2 < \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2, \quad (\text{C.2})$$

la cual requiere que

$$\left(\frac{\sigma_{\bar{C}}}{\bar{C} + v^2}\right)^2 < \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2, \quad (\text{C.3})$$

$$\left(\frac{2\sigma_y}{y}\right)^2 < \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2, \quad (\text{C.4})$$

y

$$\left(\frac{2v\sigma_v}{\bar{C} + v^2}\right)^2 < \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2. \quad (\text{C.5})$$

A partir de esto, se derivan las siguientes condiciones necesarias

$$\sigma_{\bar{C}} < \left| \frac{\sigma_R}{R} \right| |\bar{C} + v^2|, \quad (\text{C.6})$$

$$\sigma_y < \left| \frac{\sigma_R}{R} \right| \frac{y}{2}, \quad (\text{C.7})$$

y

$$\sigma_v < \left| \frac{\sigma_R}{R} \frac{\bar{C} + v^2}{2v} \right|. \quad (\text{C.8})$$

Las expresiones aquí mostradas permiten además conocer la variación de los errores con respecto a las demás variables, como se mencionó en la sección [4.3.5](#).



Bibliografía

- [1] P. Szekeres. The gravitational compass. *Journal of Mathematical Physics*, 6(9): 1387–1391, 1965. doi: 10.1063/1.1704788. URL <https://doi.org/10.1063/1.1704788>.
- [2] C. W. Chou, D. B. Hume, J. C. J. Koelemeij, D. J. Wineland, and T. Rosenband. Frequency comparison of two high-accuracy al^+ optical clocks. *Phys. Rev. Lett.*, 104:070802, Feb 2010. doi: 10.1103/PhysRevLett.104.070802. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.070802>.
- [3] N. Huntemann, M. Okhapkin, B. Lipphardt, S. Weyers, C. Tamm, and E. Peik. High-accuracy optical clock based on the octupole transition in $^{171}\text{Yb}^+$. *Phys. Rev. Lett.*, 108:090801, Feb 2012. doi: 10.1103/PhysRevLett.108.090801. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.090801>.
- [4] J. Guéna, M. Abgrall, D. Rovera, P. Laurent, B. Chupin, M. Lours, G. Santarelli, P. Rosenbusch, M. Tobar, L. Ruoxin, K. Gibble, A. Clairon, and S. Bize. Progress in atomic fountains at In-syrte. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 59:391–410, 03 2012. doi: 10.1109/TUFFC.2012.2208.
- [5] S. Falke, N. Lemke, C. Grebing, B. Lipphardt, S. Weyers, V. Gerginov, N. Huntemann, C. Hagemann, A. Al-Masoudi, S. Häfner, S. Vogt, U. Sterr, and C. Lisdat. A strontium lattice clock with 3×10^{17} inaccuracy and its frequency. *New Journal of Physics*, 16(7):073023, jul 2014. doi: 10.1088/1367-2630/16/7/073023. URL <https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/7/073023>.
- [6] B. J. Bloom, T. L. Nicholson, J. R. Williams, S. L. Campbell, M. Bishof, X. Zhang, W. Zhang, S. L. Bromley, and J. Ye. An optical lattice clock with accuracy and stability at the 10^{-18} level. *Nature*, 506(7):71–75, 2014. doi: 10.1038/nature12941. URL <https://doi.org/10.1038/nature12941>.
- [7] M. Schioppo, R. C. Brown, W. F. McGrew, N. Hinkley, R. J. Fasano, K. Beloy, T. H. Yoon, G. Milani, D. Nicolodi, J. A. Sherman, N. B. Phillips, C. W. Oates, and A. D. Ludlow. Ultrastable optical clock with two cold-atom ensembles.

- Nature Photonics*, 11:48–52, 2017. doi: 10.1038/nphoton.2016.231. URL <https://doi.org/10.1038/nphoton.2016.231>.
- [8] D. Puetzfeld, Y. N. Obukhov, and C. Lämmerzahl. Gravitational clock compass in general relativity. *Phys. Rev. D*, 98:024032, Jul 2018. doi: 10.1103/PhysRevD.98.024032. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.024032>.
- [9] Y. N. Obukhov and D. Puetzfeld. Measuring the gravitational field in General Relativity: From deviation equations and the gravitational compass to relativistic clock gradiometry. “*Relativistic Geodesy: Foundations and Applications*”, D. Puetzfeld et. al. (eds.), *Fundamental Theories of Physics, Springer (Cham)*, 196:87, 2019. doi: 10.1007/978-3-030-11500-5_3.
- [10] P. A. Hogan and D. Puetzfeld. Gravitational clock compass and the detection of gravitational waves. *Phys. Rev. D*, 101:044012, 2020. doi: 10.1103/PhysRevD.101.044012.
- [11] J. L. Synge. *Relativity: the general theory*. Series in physics. North-Holland Pub. Co., 1960. URL <https://books.google.cl/books?id=CqoNAQAIAAJ>.
- [12] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Princeton University Press, 1 edition, 2017. ISBN 9780691177793. URL <https://books.google.cl/books?id=zAAuDwAAQBAJ>.
- [13] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, New York, 1972. ISBN 0471925675, 9780471925675. URL <http://www-spires.fnal.gov/spires/find/books/www?cl=QC6.W431>.
- [14] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004. ISBN 9780805387322. URL <https://books.google.cl/books?id=1SKFQgAACAAJ>.
- [15] G. F. Rubilar. *Teoría General de la Relatividad, Tópicos en Relatividad General*. Apunte curso Teoría General de la Relatividad, Universidad de Concepción. Última versión y código fuente disponible en <https://github.com/gfrubi/RG>.
- [16] A. Einstein. Über das relativitätsprinzip und die aus demselben gezogene folgerungen. *Jahrbuch der Radioaktivitaet und Elektronik*, 4:411–492, 1907.
- [17] K. Schwarzschild. On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein’s Theory. *Abh. Konigl. Preuss. Akad. Wissenschaften Jahre 1906,92, Berlin,1907*, 1916:189–196, January 1916. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1916AbhKP1916..189S>. Traducción al Inglés por S. Antoci and A. Loinger (1999) disponible en <https://arxiv.org/abs/physics/9905030>.
- [18] A. Einstein. Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lich-

- tes. *Annalen der Physik*, 340(10):898–908, Jan 1911. doi: 10.1002/andp.19113401005.
- [19] R. V. Pound and G. A. Rebka. Apparent weight of photons. *Phys. Rev. Lett.*, 4:337–341, Apr 1960. doi: 10.1103/PhysRevLett.4.337. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.4.337>.
- [20] R. V. Pound and J. L. Snider. Effect of gravity on nuclear resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 13:539–540, Nov 1964. doi: 10.1103/PhysRevLett.13.539. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.539>.
- [21] R. V. Pound and J. L. Snider. Effect of gravity on gamma radiation. *Phys. Rev.*, 140:B788–B803, Nov 1965. doi: 10.1103/PhysRev.140.B788. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.140.B788>.
- [22] J. L. Snider. New measurement of the solar gravitational red shift. *Phys. Rev. Lett.*, 28:853–856, Mar 1972. doi: 10.1103/PhysRevLett.28.853. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.28.853>.
- [23] J. C. Hafele and R. E. Keating. Around-the-world atomic clocks: Predicted relativistic time gains. *Science*, 177(4044):166–168, 1972. ISSN 0036-8075. doi: 10.1126/science.177.4044.166. URL <https://science.sciencemag.org/content/177/4044/166>.
- [24] J. C. Hafele and R. E. Keating. Around-the-world atomic clocks: Observed relativistic time gains. *Science*, 177(4044):168–170, 1972. ISSN 0036-8075. doi: 10.1126/science.177.4044.168. URL <https://science.sciencemag.org/content/177/4044/168>.
- [25] C. W. Chou, D. B. Hume, T. Rosenband, and D. J. Wineland. Optical clocks and relativity. *Science*, 329(5999):1630–1633, 2010. ISSN 0036-8075. doi: 10.1126/science.1192720. URL <https://science.sciencemag.org/content/329/5999/1630>.
- [26] N. Ashby. Relativity in the global positioning system. *Living Reviews in Relativity*, 6(1), jan 2003. doi: 10.12942/lrr-2003-1. URL <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-1>.
- [27] W. T. Ni and M. Zimmermann. Inertial and gravitational effects in the proper reference frame of an accelerated, rotating observer. *Phys. Rev. D*, 17:1473–1476, Mar 1978. doi: 10.1103/PhysRevD.17.1473. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.17.1473>.
- [28] F. A. E. Pirani. On the Physical significance of the Riemann tensor. *Acta Phys. Polon.*, 15:389–405, 1956. doi: 10.1007/s10714-009-0787-9.
- [29] D. Sivia and J. Skilling. *Data Analysis: A Bayesian Tutorial*. Oxford science

- publications. OUP Oxford, 2006. ISBN 9780198568315. URL <https://books.google.cl/books?id=LYMSDAAAQBAJ>.
- [30] T. Bayes. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 53:330–418, 1763. doi: 10.1098/rstl.1763.0053.
- [31] D. J. C. MacKay. *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. Cambridge University Press, 2003. URL <http://www.inference.org.uk/mackay/itila/p0.html>.
- [32] D. Foreman-Mackey, D. W. Hogg, D. Lang, and J. Goodman. emcee: The mcmc hammer. *PASP*, 125:306–312, 2013. doi: 10.1086/670067.
- [33] J. Goodman and J. Weare. Ensemble samplers with affine invariance. *Comm. App. Math. Comp. Sci.*, 5:65–80, 2010. doi: 10.2140/camcos.2010.5.65.
- [34] J. VanderPlas. Frequentism and bayesianism: A practical introduction, 2014. URL <http://jakevdp.github.io/blog/2014/03/11/frequentism-and-bayesianism-a-practical-intro/>.
- [35] D. Bini, A. Geralico, and R. T. Jantzen. Kerr metric, static observers and fermi coordinates. *Classical and Quantum Gravity*, 22(22):4729–4742, oct 2005. doi: 10.1088/0264-9381/22/22/006. URL <https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/22/006>.
- [36] D. Foreman-Mackey. corner.py: Scatterplot matrices in python. *The Journal of Open Source Software*, 24, 2016. doi: 10.21105/joss.00024. URL <http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.45906>.
- [37] C. Lisdat and et al. A clock network for geodesy and fundamental science. *Nature Communications*, 7:12443, 2016. doi: 10.1038/ncomms12443.
- [38] Boulder Atomic Clock Optical Network (BACON) Collaboration, K. Beloy, et al. Frequency ratio measurements with 18-digit accuracy using a network of optical clocks, 2020.
- [39] F. Riehle. Optical clock networks. *Nature Photonics*, 11:25, 2017. doi: 10.1038/nphoton.2016.235.
- [40] A. Bauch. Time and frequency metrology in the context of relativistic geodesy. “*Relativistic Geodesy: Foundations and Applications*”, D. Puetzfeld et. al. (eds.), *Fundamental Theories of Physics, Springer (Cham)*, 196:1, 2019. doi: 10.1007/978-3-030-11500-5_1.