UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE MAGISTER EN MATEMÁTICA - ACADÉMICO

Productos Interiores No-Arquimedeanos

Profesor Guía: José Aguayo Garrido
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Tesis para ser presentada a la Dirección de Postgrado de la Universidad de Concepción

DANIEL EDUARDO INZUNZA HERRERA
CONCEPCIÓN-CHILE
2011

Introducción

Desde 1945 se ha intentado definir, de manera apropiada, un producto interior no-arquimedeano y con ello un espacio con producto interior no-arquimedeano. Estos espacios muestran una cercana analogía con los espacios de Hilbert clásicos pero, al contrario de estos, no son ortomodulares: es decir, dado X espacio de Banach y $M \subset X$ subespacio, se tiene

$$M^{\perp\perp} = M \iff X = M \oplus M^{\perp} \tag{1}$$

La existencia de un espacio no arquimedeano de dimensión infinita (no clásico) ortomodular fue una pregunta abierta durante cierto tiempo, hasta que A. Keller dio una respuesta positiva en 1980 [10].
Tales espacios deben ser poco comunes, según el siguiente teorema de M.P. Solér [11]: *"Sea X un espacio ortomodular y supongamos que contiene una sucesión ortonormal $e_1, e_2, \ldots$(en el sentido del producto interior). Entonces el campo de base es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y X es un espacio de Hilbert clásico".*

El objetivo de este trabajo es lograr definir un producto interior sobre un espacio de Banach E, y analizar las condiciones necesarias y suficientes para que los subespacios cerrados de E admitan un complemento normal. En particular, se enfocará el estudio al espacio de Banach $c_0(T)$.

Esta tesis está estructurada de la siguiente forma: en el Capítulo 1 se revisan algunas definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de este trabajo. Así, por ejemplo, se estudian los campos y espacios ultramétricos. Además, de definir los espacios de Banach $c_0(T)$ y $\ell^\infty(T)$ se demuestra que todo espacio que tiene una base es linealmente homeomorfo a algún $c_0(T)$. Por otro lado, con la idea de utilizar conjuntos compactos que también son convexos, se definen los conjunto compactoides, y se muestran algunas propiedades generales sobre éstos.

En el Capítulo 2, se entrega la definición de producto interior no-arquimedeano, y se muestra la relación que existe entre los vectores ortogonales y los productos interios no-arquimedeanos utilizando el concepto de Normalidad. También, dado un espacio de Banach E, se dan condiciones necesarias y suficientes para que éste admita un producto interior no-arquimedeano. Además, se muestra que el espacio $c_0(T)$ admite un producto interior no-arquimedeano, que induce la norma natural de $c_0(T)$ si y sólo si el campo de clases residuales de $\mathbb{K}$ es formalmente real. Sobre $c_0(\mathbb{N})$, o simplemente c_0, se da un teorema del tipo Gram-Schmidt, y se define la propiedad de Riemann-Lebesgue, la cual se utilizará para caracterizar los subespacios espacios ortomodulares existentes en c_0. A tales subespacios se les denominará normalmente complementado.

En el Capítulo 3, se definen lo operadores Proyección Normal, y se relacionan éstos con la propiedad de Riemann-Lebesgue y los subespacios normalmente complementado. Se construyen operadores Proyección Normal a a partir de una sucesión de elementos de c_0 que tienen la propiedad de Reimann-Lebesgue. Posteriormente se estudian los operadores compactos y auto-adjuntos demostrando una análogo no-arquimedeano de un teorema de descomposición espectral.

En el Capítulo 4 y final, se generalizan los resultados de los capítulos anteriores para el espacio de Banach $E_\omega = c_0\left(\mathbb{N}, \mathbb{K}, |\omega_i|^{1/2}\right)$, obtienendo condiciones necesarias y suficientes para que E_ω admita un producto interior no-arquimedeano que induzca su norma. Por otro lado, se muestra que E_ω no es ortomodular y, al mismo tiempo se caracterizan los subespacios que admiten un complemento normal. Se asocian las proyecciones normales a cada subespacio que admite un complemento normal y, al final del capítulo, se caracterizan las proyecciones normales sobre E_ω.