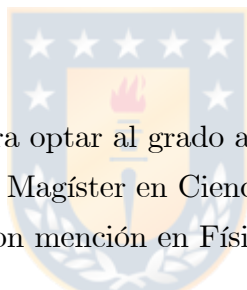




UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

# Aspectos geométricos del procedimiento de S-expansión



Tesis para optar al grado académico  
de Magíster en Ciencias  
con mención en Física

por

Marcelo Javier Calderón Ipinza

Director de Tesis : Dr. Patricio Salgado Arias

Comisión : Dr. Ricardo Caroca Lisboa.  
: Dr. Fernando Izaurieta Aranda.  
: Dr. Patricio Salgado Arias.

Concepción, Chile

Marzo 2015

# Capítulo 1

## 1.1 Introducción

En 1951 [1], Segal introdujo la noción de "contracción de álgebras de Lie" en los terrenos de la física : Si dos teorías físicas (como la mecánica relativista y la clásica) están relacionadas mediante un proceso de límite, entonces los grupos de invarianza asociados (como el grupo de Poincaré y el de Galileo) deberían estar también relacionados por algún proceso de límite. Esta idea fue estudiada mas a fondo por Inönü y Wigner [4] en 1953 quienes introdujeron la renombrada contracción de Inönü-Wigner.

Entre 1953 y 1990 han aparecido muchos métodos de contracción en la literatura. En 1991 Evelyn Weimar-Wood [5], motivada por la literatura existente y su trabajo en el contexto de la contracción de representaciones, introdujo una definición para contracciones de Inönü-Wigner generalizadas and mostró que cualquier contracción de un álgebra de Lie 3-dimensional es equivalente a una contracción I-W generalizada. El año 2000 Weimar-Wood extendió la definición de contracción y mostró en el teorema 3.1 de la referencia [5] que cualquier contracción es equivalente a una contracción de I-W generalizada.

En el año 2003 M. Hatsuda y M. Sakaguchi [7] estudiaron un termino de Wess-Zumino escrito en forma de corriente super invariante bilineal, para una supercuerda en un espacio anti-de Sitter ( $AdS$ ) y derivaron en un procedimiento para obtener el límite plano correcto. Ellos encontraron que la contracción de I-W estándar no les proporcionaba el límite plano correcto. Este resultado erróneo tiene su origen en el hecho de que la métrica fermiónica del supergrupo de Poincaré es degenerada. Para resolver este problema Hatsuda y Sakaguchi propusieron una nueva generalización a la contracción de I-W desde la cual se podía obtener un super grupo de Poincaré "no degenerado" a partir del supergrupo AdS. Este nuevo proceso de contracción conduce al límite plano correcto del término W-Z. La idea de Hatsuda y Sakaguchi, consiste en estudiar el álgebra  $\mathcal{G}$  descrita por la forma de Maurer-Cartan ( $MC$ ) de la variedad del grupo  $G$  asociado y, después de reescalar algún

parámetro del grupo por un factor  $\lambda$  expandirla como una serie de potencias de  $\lambda$ . Este nuevo procedimiento de "contracción de I-W" permite obtener nuevas álgebras de dimensiones mayores.

En el mismo año 2003, J. de Azcárraga, J. Izquierdo, M. Picón, O. Varela (*dAIPV*) [6] estudiaron este nuevo método de contracción y discutieron cómo esto puede ser aplicado cuando el parámetro de reescalamiento está subordinado a la separación de  $\mathcal{G}$  en términos de una suma de subespacios vectoriales. El procedimiento resultante es conocido como "método de expansión", este es diferente al de I-W aunque, para el caso en que la dimensión del álgebra no cambia debido al proceso, este puede conducir a la contracción de I-W simple o a la contracción de I-W generalizada (i.e., una que reescala los generadores del álgebra usando diferentes potencias de  $\lambda$ ) en el sentido de Weimar-Wood, pero no en todos los casos. Aun más, las álgebras a las cuales este método conduce son de mayor dimensión que la original, en cuyos casos no pueden ser relacionadas a esta mediante ningún proceso de contracción o deformación. Las álgebras obtenidas son denominadas "álgebras expandidas". El procedimiento de expansión *dAIPV* [6] consiste en considerar el álgebra original descrita en términos de la forma de Maurer-Cartan definida en la variedad del grupo. Algunos de los parámetros del grupo son reescalados por un factor  $\lambda$  y la forma de MC es expandida como una serie de potencias de  $\lambda$ . Esta serie es finalmente truncada de tal forma que se preserve la propiedad de clausura del álgebra expandida.

El año 2006 F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado [8] propusieron una ampliación del método *dAIPV*, el cual se basa en combinar las constantes de estructura del álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  con la ley de composición interna de un semigrupo abeliano y discreto  $S$  con el propósito de definir los corchetes de Lie de un álgebra expandida nueva. Este método de expansión basado en el uso de un semigrupo abeliano y discreto, "S-expansión", reproduce los resultados de la expansión en serie de potencias de la forma de Maurer-Cartan para una elección particular del semigrupo  $S$ , pero está formulado usando los generadores del álgebra en lugar de la forma de Maurer-Cartan asociada. Por esta razón, en el contexto de la S-expansión se observa claramente cuál debería ser la estructura de un tensor invariante para el álgebra expandida, y por ello, este esquema resulta ser especialmente adecuado para la construcción de Chern-Simons y formas de Transgresión para el álgebra expandida.

Sin embargo, en los últimos años, ha surgido la pregunta acerca de si es posible establecer la ley de composición interna del semigrupo en forma sistemática y analítica de tal forma que no sea propuesta sin condiciones concretas, y que sirvan como reglas de selección que nos conduzcan naturalmente a esta ley binaria interna. Además, se ha querido establecer la conexión que existe entre el mecanismo de S-expansión y los fenómenos geométricos locales (sobre la variedad del grupo) que se producen al hacer uso de este.

En el presente trabajo se muestra la manera en que justamente al estudiar el mecanismo de

S-expansión desde un punto de vista geométrico podemos construir reglas de selección sobre la tabla del semigrupo, basándonos en particular en propiedades invariantes de la variedad del grupo  $G$ .

