



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento de Física

TEORÍAS DE GAUGE EN EL ESPACIO-TIEMPO DE SNYDER

Tesis para optar al grado académico
de Magíster en Ciencias con Mención en Física

Por: *César Riquelme Durán*
Director de Tesis: *Patricio Salgado*

Abril de 2021
Concepción, Chile

© 2021, César Riquelme Durán

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento

A la memoria de mi querida abuela y segunda madre
Josefina Del Carmen Riquelme Muñoz (1943-2017)

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis es resultado de muchos años de estudios e investigación pero sobre todo muchos años recibiendo el apoyo incondicional de mis cercanos.

Primero que todo quisiera agradecer a mi grupo más cercano, que en tiempos de pandemia hicieron del encierro un lugar donde sentirme vivo, brindandome tranquilidad, compañía, y apoyo en todas mis decisiones. Quiero agradecer a mi madre Lidia, mi padre Sebastian y a mi tía Albertina, que me han brindado su apoyo desde siempre, y espero poder hacer justicia a todo su esfuerzo. Además agradecer a mis hermanos Abelor y Sebastian cuya compañía ha traído mucha felicidad y lo seguirá trayendo. Y por supuesto quiero agradecer a mi pareja Josef cuyo amor y comprensión llena de alegría mi cotidianidad.

Por otra parte quisiera agradecer a quienes me han apoyado en el maravilloso mundo de la física, siempre disponibles a debatir sobre problemáticas, siempre motivandome a aprender más y que marcaron permanentemente mi formación profesional y personal. Deseo agradecer a mi tutor, Dr. Patricio Salgado de la Universidad de Arturo Prat, por su tiempo y disposición para guiar mi Tesis, dictarme curso tras curso siempre planteando inquietudes para resolver y un excelente colaborador con quien tengo el gusto de trabajar. Él me encaminó en el maravilloso mundo de las estructuras algebraicas detrás de la física, lo cual fue fundamental en el desarrollo de esta tesis y de mi formación como investigador, lo cual siempre llevaré conmigo. En la Universidad de Concepción quisiera agradecer al Dr. Fernando Izaurieta, el cual me guió en mi camino de exploración de la bella rama que es la Geometría y su importancia en el cómo vemos la realidad a través de ésta, dandome la oportunidad de llegar a un nivel de comprensión superior de la Gravedad y las Teorías de Gauge que complementan los apartados sobre mi te-

sis y por sobre todo complementan mi visión del mundo, siempre acompañado de una grata charla y un excelente café. Asimismo quisiera agradecer al Dr. Julio Oliva por su enorme disposición y entrega a la hora de enseñarme sobre Gravedad y Teoría Cuántica de campos, permitirme participar y organizar escuelas donde compartir conocimiento con investigadores y estudiantes de todo el mundo y aún más importante el siempre cuidar activamente de cada uno de sus estudiantes a nivel profesional y personal.

Han pasado ya 6 años desde que ingresé a la Universidad de Concepción y me siento afortunado de haber compartido con tantas personas maravillosas y aún más de poder tener el honor de ser amigo de éstas. En todos estos años, han sabido siempre proponer conversaciones cognitivamente estimulantes, profundas, dándoles un sentido a todo lo que aprendíamos siempre manteniendo la curiosidad por saber más aún. Estas personas son D. Concha, P. Rodríguez, R. Stuardo, M. Yañez, J. Figueroa, E. Arratia, J. Echeverría, G. Barriga, P. Escalona, I. Obreque y L. Sanhueza. Muchas gracias por ser parte de mi vida, trayendo tanto conocimiento, empatía, comprensión y amistad a ésta.

Quisiera agradecer por supuesto a quienes han sido nuestros salvadores en muchísimas ocasiones en nuestra vida estudiantil, las secretarías del Departamento de Física Soledad Daroch y Julia Herrera, así como a los Jefes de Carrera Joaquín Díaz de Valdes y Hernán Astudillo por todo lo que han hecho por los estudiantes de pregrado y posgrado en la carrera Ciencias físicas.

Por último, quisiera agradecer a las instituciones que hicieron esta investigación posible: la Universidad de Concepción y la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile ANID (ex CONICYT). Quisiera agradecer su apoyo económico financiando mis estudios de posgrado a través de las becas de Articulación (2019-2020) y la beca de Magister Nacional (2019-2020).

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Motivación	2
1.2. Plan de Tesis	1
2. Estructuras no-asociativas y dónde encontrarlas	3
2.1. El problema del Monopolo magnético	3
2.1.1. Cuantización de Dirac	5
2.1.2. El 3-cociclo nulo	8
2.2. Modelo de R -flujo	12
2.3. Producto estrella y la cuantización	13
3. Espacio-tiempo y Álgebra de Snyder	16
3.1. Introducción	16
3.2. Espacio-tiempo cuantizado de Snyder	17
3.3. Underlying Space	21
3.4. Espacio de momentum	23
3.5. Álgebras de Heisenberg deformadas	24
4. Algebras y algebroides y cuasi-estructuras	27
4.1. Introducción	27

4.2. Estructura algebraicas	28
4.2.1. Álgebras, Biálgebras y Algebras de Hopf	28
4.2.2. Bialgebroides y Algebroides de Hopf	36
4.2.3. Cuasi-estructuras	40
5. Producto Estrella y Deformaciones	42
5.1. Producto Estrella asociativo	43
5.1.1. Producto Estrella	43
5.1.2. Producto de Moyal	44
5.1.3. Cuantización por deformación de Álgebra de Hopf vía Twist	46
5.2. Producto Estrella no-asociativo	47
6. Álgebra (algebroid) de Hopf del Espacio-tiempo cuantizado	50
6.1. Estructura algebraica y co-algebraica del Álgebra de Heisenberg \mathcal{H}	50
6.2. Estructura algebraica del Álgebra de Heisenberg deformada $\hat{\mathcal{H}}$. .	54
6.2.1. Algebroides de Hopf <i>Twisted</i>	54
6.2.2. Estructura de algebroides de Hopf de $\hat{\mathcal{H}}$	58
6.3. Estructura algebraica del Espacio-tiempo de Snyder	59
7. Estructuras Algebraicas en Teoría de Cuerdas	68
7.1. Introducción	68
7.2. Álgebra de Lie Fuertemente Homotópica	70
7.3. Álgebra L_∞	77
7.3.1. L_∞ y el Jacobiador de Gauge	78
7.3.2. Álgebras L_∞ en el cuadro de ℓ y teoría de campos	90
7.3.3. Teorías de Gauge no-abelianas y álgebras L_∞	104
7.4. <i>Bootstrap</i> de teorías No-conmutativas de Gauge	107

8. Teoría de Gauge de Snyder	109
8.1. Producto de Moyal y Corchete Deformado de Snyder	110
8.2. Construcción de álgebra L_∞	112
8.2.1. Teoría tipo Yang-Mills Abeliانو	114
8.3. Electrodinámica modificada en el espacio-tiempo de Snyder	118
8.3.1. Ecuaciones del Movimiento	118
8.3.2. Principio de Acción y Lagrangiano	120
9. Comentarios finales y Conclusión	122
A. Cohomología, asociatividad y no-conmutatividad	125
A.1. La no-conmutatividad y la no-asociatividad	125
A.1.1. Conceptos básicos de Cohomología	125
A.1.2. Cohomología de Álgebras de Lie y Teorías de Gauge	126
Bibliografía	130

Resumen

Esta tesis trata sobre la construcción de una generalización de una teoría de Gauge no-conmutativa y no-asociativa basada en la estructura de Algebroides de Hopf del Espacio-tiempo de Snyder. La teoría será contruida a través de una generalización del mecanismo de *Bootstrap* de Teorías de Gauge no-conmutativas mediante la estructura de Álgebra L_∞ .

Para realizar ésto, comenzaremos estudiando la estructura de Algebroides de Hopf del espacio-tiempo de Snyder (Capítulo 6) con la intención de construir el producto estrella que codifique toda la información de no-conmutatividad y no-asociatividad del espacio-tiempo de Snyder en términos de variables conmutativas. Posteriormente construiremos una Teoría de Gauge por medio del mecanismo de *Bootstrap* de Teorías no-conmutativas de Gauge considerando un parámetro de no-conmutatividad generalizado. Considerando la conjetura Blumenhagen-Brunner-Kupriyanov-Lüst de que toda teoría de Gauge consistente debe poseer una estructura L_∞ remanente, resolveremos las identidades L_∞ con lo cual encontraremos su principio de Acción, ecuaciones del Movimiento y principio de Gauge modificado bajo el cual la teoría será invariante a orden s^1 para una teoría de Gauge basada en el grupo $U(1)$ (Capítulo 8).

Finalmente compararemos estos resultados con los obtenidos mediante métodos alternativos e interpretaremos esta nueva Teoría de Gauge $U(1)$ con correcciones cuánticas basada en el espacio-tiempo de H. Snyder.

Abstract

This thesis deals with the construction of a generalization of a non-commutative and non-associative Gauge theory based on Hopf Algebroid structure of Snyder Spacetime. The theory is built through a generalization of the Bootstrap mechanism of non-commutative Gauge Theories through the L_∞ Algebra structure .

In order to accomplish this, we will start studying the Hopf Algebroid structure of Snyder's space-time (Chapter 6) with the intention of constructing the star product that encodes all the information of non-commutativity and non-associativity of Snyder spacetime in terms of commutative variables. Later we will build a Gauge Theory through the *Bootstrap* mechanism of non-commutative Gauge Theories considering an generalized non-commutativity parameter. Considering the conjecture of Blumenhagen-Brunner-Kupriyanov-Lüst that every consistent Gauge theory must have an underlying L_∞ structure, we will solve the L_∞ identities with which we will find its principle of Action, equations of Motion and modified Gauge principle under which the theory will be invariant up to order s^1 for a Gauge theory based on the group $U(1)$ (Chapter 8).

Finally we will compare these results with those obtained by alternative methods and we will interpret this new Gauge Theory $U(1)$ with Quantum Gravity corrections based on the space-time of H. Snyder.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

La física "no-conmutativa" ha adquirido con el tiempo una presencia inesperada en modelos relativamente recientes en física de altas energías.

Una modificación de la estructura del espacio-tiempo emerge naturalmente al introducir una longitud mínima, dada por la longitud de Plack l_{pl} [1], y aparece en dos modelos actualmente relevantes.

El primero aparece en *loop quantum gravity* en la cual la longitud de Planck juega un rol muy importante, debido a que en el proceso de cuantización los operadores (observables) de área y volumen no solo tienen espectro discreto sino que los autovalores de estos operadores son proporcionales a la longitud de Planck al cuadrado y al cubo respectivamente [2] [3].

Otro interesante resultado emerge de Teoría de Cuerdas. En el límite de bajas energías, la dinámica de la cuerda abierta moviéndose en un campo de Gauge 2-forma (*Kalb-Rammond field*, o *B-field*) no-nulo puede ser descrita como una teoría de Gauge (supersimétrica) con acoplamiento minimal en una variedad no-

conmutativa, trabajo realizado por N. Seiberg y E. Witten en la década de los 90 [4], donde además discutieron las correcciones alejadas de este límite. De este análisis emerge una correspondencia entre campos de Gauge y campos de Gauge no-conmutativos. En éste contexto, el parámetro de no-conmutatividad es una constante y sugiere que el marco de trabajo correcto para la formulación de una teoría cuántica de la gravedad sea a través de una Geometría no-conmutativa debido a una nueva estructura algebraica que converge en éstas [5] [6].

Un factor a considerar es que una teoría no-conmutativa origina inconsistencias con la simetría de Lorentz usual [7]. De todas formas, debemos mencionar que no todos los espacio-tiempos no-conmutativos propuestos son incompatibles con la simetría de Lorentz. H. Snyder construyó un espaciotiempo compatible con esta simetría en coordenadas discretas (operadores posición de autovalores discretos).

Más aún, los trabajos de G.'t Hooft en Gravedad Cuántica en 2+1 dimensiones sugieren que estos modelos precisan ser formulados en un espacio-tiempo tipo Snyder [8]. Éste resultado motivó que una teoría cuántica en otras dimensiones puede implicar un espacio no-conmutativo de este tipo.

En la actualidad los físicos y matemáticos centran su mira en dos espacio-tiempo no-conmutativos: el espacio-tiempo de Snyder y sus generalizaciones [9], y en el llamado κ -Minkowski [10][11][12].

Las teorías en espacios no-conmutativos pueden ser entendidos como modificaciones a la estructura algebraica de su contraparte conmutativa; así como el álgebra de Heisenberg es un álgebra de Lie no acotada cuya base son los elementos $\{x^i, p_j\}$, un espaciotiempo del tipo Snyder deforma las estructura de Alge-

bra de Lie a una más general. La longitud mínima en un espaciotiempo de Snyder actúa como un parámetro de deformación para el álgebra de Heisenberg, originando una estructura de Algebra de Hopf (más rigurosamente un algebroide de Hopf), las cuales corresponden a la familia conocida como *Álgebras cuánticas*. En la presente tesis buscamos identificar las estructuras algebraicas emergentes en el espacio-tiempo de Snyder, la estructura que debe respetar una teoría de Gauge coherente en este espacio finalizando con su construcción.

1.2. Plan de Tesis

Comenzaremos estudiando las propiedades cuánticas del espacio-tiempo de Snyder, entendiendo la noción de discretización del espacio-tiempo y la preservación de la invariancia de Lorentz de los operadores que la definen en el **Capítulo 3**. Teniendo claro la violación a la identidad de Jacobi procedemos a estudiar generalizaciones a las nociones básicas de álgebras, empleados en el contexto de las teorías no-conmutativas y no-asociativas en el **Capítulo 4** para encontrar el marco de trabajo correcto con el cual tratar al Álgebra de Snyder. Buscando codificar la noción de no-conmutatividad y no-asociatividad de los operadores, buscamos las diferentes posibles deformaciones del producto en el **Capítulo 5**, y luego de este estudio empleamos la correcta estructura para deformar el espacio de funciones considerando el caso del espacio-tiempo de Snyder. En el **Capítulo 6**, reconstruimos su estructura de algebroide, y también su producto de Moyal generalizado, habiendo logrado codificar al espacio-tiempo de Snyder en la forma que se multiplican las funciones.

En el **Capítulo 7** abordamos el formalismo para poder construir un modelo basado en Teoría de Cuerdas y las conocidas Teorías de Campos. Gracias a esto,

entendemos que construir una teoría de Gauge para el espacio-tiempo de Snyder necesita seguir unas reglas, como la asociatividad homotópica o también conocida como Álgebra L_∞ . Tomando el mecanismo de *Bootstrap* de teorías de Gauge no-conmutativas de Blumenhagen-Brunner-Kupriyanov-Lüst logramos extender el mecanismo a espacio-tiempos con parámetro de no-conmutatividad dependientes del momentum en el **Capítulo 8**, finalmente se encuentran las ecuaciones del movimiento, un principio de Gauge generalizado y se discuten las soluciones clásicas del Electromagnetismo en este espacio.

Capítulo 2

Estructuras no-asociativas y dónde encontrarlas

2.1. El problema del Monopolo magnético

A finales de la década de los años 30 el físico, ingeniero y matemático Paul Dirac sugiere que la existencia de los monopolos magnéticos en la naturaleza da lugar a la cuantización de la carga eléctrica [13] [14], lo cual daría origen a una extensa búsqueda e investigación sobre la posibilidad de encontrar dichas partículas en la naturaleza.

El proceso de simetrización de las ecuaciones de Maxwell trajo consigo la in-

corporación de fuentes magnéticas, de la forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m \quad (2.2)$$

$$-\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}_m \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}_e \quad (2.4)$$

donde ρ_m, \vec{j}_m corresponden a la densidad de carga magnética monopolar y la densidad de corriente magnética monopolar respectivamente. En este contexto, las cantidades electricas y magnéticas adoptan una nueva simetria.

Consideremos ahora un caso particular. Sea una partícula puntual sin espín, con carga eléctrica e y masa m puesta en un fondo de campo magnético $\vec{B}(\vec{x})$, ésta poseerá las siguientes relaciones de conmutación entre sus coordenadas y la velocidad (en unidades de $m = c = 1$),

$$[x^i, v^j] = i\hbar\delta^{ij}, \quad [x^i, x^j] = 0, \quad [v^i, v^j] = i\hbar e \epsilon^{ijk} B_k(\vec{x}), \quad p^i = v^i + eA^i \quad (2.5)$$

originando una no-conmutatividad en el espacio de los momentas en el contexto de la teoría de Maxwell generalizada, lo cual lleva también a una pérdida de la asociatividad, pues

$$[[v^i, v^j], v^k] + [[v^j, v^k], v^i] + [[v^k, v^i], v^j] = -e\hbar^2 \epsilon^{ijk} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0 \quad (2.6)$$

lo cual muestra que la aparición de distribuciones formadas por fuentes magnéticas monopulares originan no-conmutatividad y no-asociatividad en el espacio de configuración.

2.1.1. Cuantización de Dirac

Como sabemos, los campos electricos y magnéticos en la teoría de Maxwell están relacionados a potenciales escalares y vectoriales, los cuales presentan una redundancia en su definición através de la simetría de Gauge que estas expresiones poseen:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f \quad (2.8)$$

Dado los potenciales electromagnéticos particulares, sabemos que en la teoría cuántica el Hamiltoniano para una partícula de carga electrica e y masa m es dado por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{q}{c} \hat{A} \right)^2 + q\hat{\phi} \quad (2.9)$$

por lo tanto si un estado $|\psi(t)\rangle$ satisface la ecuación de Schrödinger con éste Hamiltoniano, entonces también lo hará:

$$\exp\left(\frac{iqf}{\hbar c}\right) |\psi(t)\rangle \quad (2.10)$$

bajo la transformación de Gauge anteriormente descrita.

De modo que los monopolos magnéticos introducen regiones de divergencia no-nula en el campo magnético. Ésto entra en directo conflicto con la descripción del campo magnético como el rotor de un potencial vectorial, que necesariamente tiene divergencia nula. Dicho ésto, consideraremos a los campos alrededor de los monopolos magnéticos, donde sí sea válida esta descripción de los campos magnéticos.

Consideremos un monopolo magnético de carga g en el origen. Ésta produce un campo magnético de la forma:

$$\vec{B}(\vec{r}) = k_m \frac{g}{r^2} \hat{r} \quad (2.11)$$

Por la libertad de Gauge, éste campo magnético posee multiples potenciales vectoriales, entre ellos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = k_m \frac{g(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \hat{\phi} \quad (2.12)$$

Lo que notamos respecto a este potencial vectorial, y todos aquellos que procedan del campo magnético producido por un monopolo magnético, es la aparición de una singularidad sobre la línea $\theta = \pi$, la cual es llamada la *Cuerda de Dirac*.

La condición de Cuantización del monopolo magnético, como fue planteada por Dirac, consiste en interpretar a un monopolo magnético como un Solenoide semi-infinito, pidiendo además que no hubiese corrimiento en la fase en el efecto Bohm-Aharonov.

Actualmente la forma más clara de deducirla es a través de la invariancia de Gauge. Consideremos primero el siguiente resultado: si tenemos un monopolo magnético en el origen, no existe ningún Gauge para el cual el potencial vectorial es singular excepto en el origen [15]. Así la existencia de la cuerda de Dirac se encontrará en todo Gauge. Consideremos ahora dos Gauge, los cuales serán no singulares en la región que están definidas, e intentemos solaparlas. Dependiendo de la elección del Gauge, la cuerda de Dirac apuntará en una u otra dirección desde el origen, por lo mismo solaparemos ambas regiones, con sus respectivos Gauge, de forma de que la región a su alrededor esté bien definida, y no existan más singularidades salvo la trivial. Sean las regiones y sus respectivos potenciales vectoriales:

$$\vec{A}_1 = k_m \frac{g(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \hat{\phi}, \quad R_1 : \theta \in [0, \pi/2 + \delta) \quad (2.13)$$

$$\vec{A}_2 = k_m \frac{-g(1 + \cos \theta)}{r \sin \theta} \hat{\phi}, \quad R_2 : \theta \in (\pi/2 - \delta, \pi] \quad (2.14)$$

Las regiones son solapadas en $\pi/2 - \delta < \theta < \pi/2 + \delta$, y en cada Gauge el rotor de \vec{A} arroja el campo magnético del monopolo. Ahora incorporemos una partícula de carga eléctrica e en presencia del monopolo magnético, y resolvamos el factor de fase $S_{1 \rightarrow 2}$ entre ambas regiones.

$$\vec{\nabla} f = \vec{A}_1 - \vec{A}_2 \quad (2.15)$$

$$= k_m \frac{2g}{r \sin \theta} \hat{\phi} \quad (2.16)$$

$$\implies f = 2k_m g \phi \quad (2.17)$$

$$\implies \exp\left(\frac{ief}{\hbar c}\right) = \exp\left(\frac{i2ek_m g \phi}{\hbar c}\right) = S_{1 \rightarrow 2} \quad (2.18)$$

Con lo cual, al pedir que la fase no esté multivaluada:

$$\begin{aligned} S_{1 \rightarrow 2}|^{\phi=0} &= S_{1 \rightarrow 2}|^{\phi=2\pi} \\ \Leftrightarrow \frac{2k_m g e}{\hbar c} &\in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (2.19)$$

La última expresión es una versión alterna (con factores de normalización adecuados) de la llamada *Condición de cuantización de Dirac*, que trae consigo el hecho de que en una electrodinámica generalizada, la existencia de la cuantización de la carga magnética induce la cuantización de la carga eléctrica.

La condición de cuantización de Dirac explicó la naturaleza de los monopolos magnéticos a nivel cuántico, explicando la intensidad que sienten éstos entre si, y dando una razón para que éstos no puedan ser fácilmente encontrados en la naturaleza debido a su vida media. Pero no sería hasta el año 1985 que se comprendería la verdadera naturaleza de ésta condición, una a nivel cohomológico y que llevaría a la necesidad de formular modelos en términos de estructuras no-asociativas.

2.1.2. El 3-cociclo nulo

Para poder explicar la noción de Cuantización de Dirac en un contexto cohomológico, exploraremos algunas nociones de Cohomología aplicadas a grupos actuando sobre el espacio de funciones sobre una variedad. Para más detalle ver [Apéndice A](#).

Consideremos un grupo G actuando sobre una variedad \mathcal{M} como el grupo de transformaciones: $x \rightarrow xg$, $x \in \mathcal{M}, g \in G$. Para un conjunto de mapeos $\alpha_n(x; g_1, \dots, g_n)$ llamados n -cocadenas, el *Operador de Coborde* δ es definido como:

$$\begin{aligned} (\delta\alpha_n)(x; g_1, g_2, \dots, g_{n+1}) &= \alpha_n(xg_1; g_2, \dots, g_{n+1}) + \dots \\ &+ (-1)^i \alpha_n(x; g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + \dots \\ &+ (-1)^{n+1} \alpha_n(x; g_1, \dots, g_n) \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde podemos verificar que $\delta^2 = 0$. Una cocadena $\alpha_n = \delta\alpha_{n-1}$ se llamará un *Coborde*, y si $\delta\alpha_n = 0$ diremos que es un *Cociclo*. Un cociclo será no-trivial si no es un coborde. Debemos tener en cuenta que una n -cocadena puede ser asociada con una n -forma diferencial ω_n de la forma:

$$\alpha_n(x; g_1, \dots, g_n) = \int_{\Sigma_n} \omega_n \quad (2.21)$$

donde Σ_n corresponde a un n -simplex con vértices $(x, xg_1, \dots, xg_1 \dots g_n)$.

La 1-cocadena $\alpha_1(x; g)$ aparece en la representación U_g del grupo G en el espacio de las funciones $\Psi(x)$ en \mathcal{M} :

$$U_g \Psi(x) = e^{i\alpha_1(x; g)} \Psi(xg) \quad (2.22)$$

Si $\alpha_1(x; g)$ es un cociclo trivial entonces

$$\alpha_1(x; g) = \delta\alpha_0(x; g) = \alpha_0(xg) - \alpha_0(x) \quad (2.23)$$

y la representación se reduce a la usual

$$U_{g_1}U_{g_2}\Psi(x) = U_{g_1g_2}\Psi(x) \quad (2.24)$$

a través de la transformación unitaria $\Psi(x) \mapsto \exp(i\alpha_0(x))\Psi(x)$.

Un 2-cociclo $\alpha_2(x; g_1, g_2)$, obtenido de una 1-cocadena α_1 por:

$$\begin{aligned} \alpha_2(x; g_1, g_2) &= \delta\alpha_1(x; g_1, g_2) \\ &= \alpha_1(xg_1; g_2) - \alpha_1(x; g_1g_2) + \alpha_1(x; g_1) \end{aligned} \quad (2.25)$$

aparece en el producto de dos operadores:

$$U_{g_1}U_{g_2}\Psi(x) = e^{i\alpha_2(x;g_1,g_2)}U_{g_1g_2}\Psi(x) \quad (2.26)$$

Cuando el 2-cociclo no depende de las coordenadas, ésto entrega una representación proyectiva del grupo:

$$U_{g_1}U_{g_2} = e^{i\alpha_2(g_1,g_2)}U_{g_1g_2} \quad (2.27)$$

Sea $\alpha_2(x; g_1, g_2)$ una 2-cocadena, entonces un 3-cociclo $\alpha_3 = \delta\alpha_2$ es dado por:

$$\begin{aligned} \alpha_3(x; g_1, g_2, g_3) &= \alpha_2(xg_1; g_2, g_3) - \alpha_2(x; g_1g_2, g_3) \\ &+ \alpha_2(x; g_1, g_2g_3) - \alpha_2(x; g_1, g_2) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Finalmente los 3-cociclos entran en los productos triples de forma similar a como aparecen en el producto de dos operadores, a través de:

$$(U_{g_1}U_{g_2})U_{g_3} = e^{i\alpha_3(x;g_1,g_2,g_3)}U_{g_1}(U_{g_2}U_{g_3}) \quad (2.29)$$

La condición de asociatividad en este caso se corresponde con $\alpha_3 = \delta\alpha_2 = 0$, y si α_2 es un 2-cociclo trivial entonces se vuelve una representación ordinaria.

Entendemos entonces que si $\alpha_3 = 0 \pmod{2\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$ entonces el producto de

operadores será asociativo, por lo tanto α_3 mide el grado de asociatividad del producto.

En 1985, D. Boulware, S. Deser y B. Zumino discuten sobre el significado de la condición de cuantización de Dirac, y como se relacionaba con la asociatividad de la teoría [16]. Bajo multiples consideraciones respecto a la representación y los cociclos definidos, los que más información entregaban sobre el monopolo correspondió a la que presentaremos.

Consideremos una generalización del grupo de traslaciones asociado con los cociclos y el *Grupo de cuerdas* (String Group). El grupo de Cuerdas, denotado por $\text{String}\mathcal{M}$ es el grupo de todos los caminos $\gamma : [0, 1] \mapsto \text{Diff}\mathcal{M}$, donde $\text{Diff}\mathcal{M}$ denota al grupo de difeomorfismos en $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3/\{0\}$, de forma que $\vec{r} \mapsto \vec{r}(t) = \vec{r}(\gamma(t)), t \in [0, 1]$ y $\gamma(0)$ es la identidad. La regla de composición del grupo es definida por $\gamma_{12}(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$.

En presencia de un monopolo magnético definimos la 1-cocadena como:

$$\alpha_1(\vec{r}; \gamma) = e \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} \vec{A}(\vec{\xi}) \cdot d\vec{\xi} \quad (2.30)$$

donde la integración se realiza a lo largo de la curva γ conectando un punto \vec{r} con un punto $\vec{r}' = \vec{r}(\gamma(1))$, y $\vec{A}(\vec{r})$ es el potencial vectorial. Si la integral no depende del camino, entonces encontramos:

$$\alpha_1 = \delta\alpha_0 = \alpha_0(\vec{r}') - \alpha_0(\vec{r}) \quad (2.31)$$

y entonces α_1 corresponde a un 1-cociclo trivial.

Continuamos con:

$$\alpha_2(\vec{r}; \gamma_1, \gamma_2) = e \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = e\Phi|_{\Sigma} \quad (2.32)$$

donde $\Phi|_{\Sigma}$ es el flujo magnético a través del simplex bidimensional Σ definido por: una superficie parametrizada como $\vec{r}(t, s) = \vec{r}(\gamma_1(t), \gamma_2(s))$ con $0 \leq s \leq 1$ y con

vértices $(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$, donde $\vec{r}_1 = \vec{r}(\gamma_1(1))$ y $\vec{r}_2 = \vec{r}(\gamma_2(1))$.

Para que el potencial vectorial \vec{A} sea compatible con un campo magnético $\vec{B} = g\vec{r}/r^3$ del monopolo magnético debe tener una singularidad, la cuerda de Dirac. Ésto implica que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ localmente, pero no globalmente, por lo que α_2 es una 2-cocadena y no un 2-cociclo. Así podemos escribir:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{h} \quad (2.33)$$

donde \vec{h} corresponderá al campo magnético de la cuerda de Dirac \mathcal{C} . Si introducimos esta descripción del campo magnético en la de α_2 , seremos capaces de usar el Teorema de Stokes para obtener:

$$\alpha_2(\vec{r}; \gamma_1, \gamma_2) = \delta\alpha_1(\vec{r}; \gamma_1, \gamma_2) + \sigma(\mathcal{C}, \Sigma) \quad (2.34)$$

donde:

$$\delta\alpha_1 = \alpha_1(\vec{r}_1; \gamma_2) - \alpha_1(\vec{r}; \gamma_1\gamma_2) + \alpha_1(\vec{r}; \gamma_1) \quad (2.35)$$

y la contribución $\sigma = e \int_{\Sigma} \vec{h} \cdot d\vec{S}$ es no-nula sí y solo sí la cuerda \mathcal{C} cruza Σ .

Dado ésto, podemos por fin calcular el 3-cociclo de la teoría:

$$\begin{aligned} \alpha_3(\vec{r}; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &= \delta\alpha_2 \\ &= \alpha_2(\vec{r}_1; \gamma_2, \gamma_3) - \alpha_2(\vec{r}; \gamma_1\gamma_2, \gamma_3) + \alpha_2(\vec{r}; \gamma_1, \gamma_2\gamma_3) - \alpha_2(\vec{r}; \gamma_1, \gamma_2) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ésto arroja finalmente el siguiente resultado:

$$\alpha_3 = \begin{cases} 4\pi eg \bmod(2\pi n) & , \text{ Si el monopolo es encerrado por } \Sigma \\ 0 & , \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2.37)$$

en unidades de $\hbar = c = 1$. Es decir, la condición de cuantización de Dirac corresponde a la trivialización del 3-cociclo de la teoría. El problema surge al momento de emplear la integral de Volumen que ignora el hecho de que el origen no pertenece a nuestro espacio. De esta forma, la condición de cuantización de Dirac

se encarga de que una teoría modelada a través de objetos asociativos ignoren el lugar donde la no-asociatividad ocurre. Ésto lleva directo a la discusión de la forma en la cual considerar regiones no-asociativas de la teoría, cuya sugerencia empieza por una base mucho más abstracta: las álgebras no-asociativas.

2.2. Modelo de R -flujo

La aparición de la no-asociatividad no radica sólo en la existencia de monopolos magnéticos, aunque ciertamente es de las más llamativas. La aparición de álgebras no-asociativas en la física ha sido muy importante al aparecer en el contexto de gravedad cuántica, más específicamente en la Teoría de cuerdas.

En teoría de Cuerdas bosónicas existe un fenómeno en el cual las cuerdas son compactificadas en un círculo de radio r se vuelven físicamente equivalentes a que si lo hiciese en un círculo de radio $\frac{1}{r}$ (en las unidades correctas), la cual corresponde a un ejemplo de las dualidades T en Teoría de Cuerdas y Supercuerdas. La dualidad T en el contexto de Teoría de Supercuerdas permite el intercambio entre teorías de tipo IIA y IIB , así como Heterótica $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$. De esta forma estas dos compactificaciones y dos configuraciones describen como resultado la misma física.

Por otro lado, existen configuraciones en teoría de cuerdas que no pueden ser descritas en término de la geometría Riemanniana, donde existen sectores en los cuales cuerdas cerradas moviéndose en sentidos contrarios manifiestan comportamientos diferentes, y que precisan de una dualidad T para definir correctamente el fondo. Más información en [17].

En años recientes se estableció que los fondos no-geométricos de cuerdas cerradas manifiestan una no-conmutatividad y no-asociatividad entre sus coordenadas. El principal ejemplo es el llamado *Modelo de R-flujo*, obtenido tras una secuencia de dualidades T a lo largo de las coordenadas de un todo T^3 con el flujo de la 3-forma *Field Strength* de componentes constantes . En éste caso, las relaciones de conmutación entre las coordenadas y las momenta adoptan la siguiente forma:

$$[x^i, x^j] = iR\epsilon^{ijk}p_k, \quad [x^i, p^j] = i\delta^{ij}, \quad [p^i, p^j] = 0 \quad (2.38)$$

donde R es una constante determinada por el flujo de la 3-forma. Como resultado, la identidad de Jacobi de las coordenadas de las cuerdas son no-nula:

$$[[x^1, x^2], x^3] + [[x^2, x^3], x^1] + [[x^3, x^1], x^2] = -3R \quad (2.39)$$

lo cual entendemos como una no-asociatividad. Por supuesto existen aún más ejemplos de cuerdas cerradas en fondos no-geométricos que exhiben estructuras no-conmutativas y no-asociativas, las cuales pueden ser revisitadas en los trabajos de I. Bakas y D. Lüst [18].

2.3. Producto estrella y la cuantización

En el artículo *3-cocycles, non-associative star-products and the magnetic paradigm of R-flux string vacua* de I. Bakas y D. Lüst en 2014 y en *Aspects of non-associative structures in physics* de I. Bakas en 2015, se discute a profundidad la necesidad de nuevas estructuras algebraicas emergentes de un producto de Moyal-Weyl generalizado, como alternativa a la prescripción de cuantización canónica, debido a la pérdida de correspondencia entre variables clásicas y operadores autoadjuntos de Weyl.

La obstrucción en la no-asociatividad se debe a la aparición de un 3-cociclo en la Cohomología del álgebra de Lie abeliana asociada a las traslaciones en el espacio de fase. Alternativamente, la obstrucción puede ser escrita en término de los elementos del Grupo asociado, los que corresponden a:

$$U(a, b) = e^{i(a \cdot x + b \cdot p)} \quad (2.40)$$

satisfaciendo la Ley de composición de elementos:

$$U(a_1, b_1)U(a_2, b_2) = e^{-\frac{i}{2}(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)} e^{-i\frac{R}{2}(b_1 \times b_2) \cdot x} U(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad (2.41)$$

. Dejando una asociatividad de la forma:

$$(U_1 U_2) U_3 = e^{-i\frac{R}{2}(b_1 \times b_2) \cdot b_3} U_1 (U_2 U_3) \quad (2.42)$$

Si R fuese cero, sería válida una representación proyectiva del Grupo y estaríamos en el caso de la mecánica cuántica tradicional. Es decir, cuando $R = 0$, todos los observables clásicos $f(x, p)$ en el espacio de Fase son asignados a operadores $\hat{F}(\hat{x}, \hat{p})$ actuando sobre un espacio de Hilbert. Su producto es no-conmutativo pero asociativo. Si hacemos un análisis en Fourier, y utilizamos la correspondencia de cuantización de Weyl:

$$f(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 a d^3 b \tilde{f}(a, b) e^{i(a \cdot x + b \cdot p)}, \quad \hat{F}(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 a d^3 b \tilde{f}(a, b) \hat{U}(a, b)$$

La conclusión es una correspondencia entre operadores y el mapeo exponencial:

$$\hat{U}(a, b) = e^{i(a \cdot x + b \cdot p)}, \quad \hat{U}(a_1, b_1) \hat{U}(a_2, b_2) = e^{-\frac{i}{2}(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)} \hat{U}(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Luego el 2-cociclo $\varphi_2(a_1, b_1; a_2, b_2) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$ se encarga que el producto en el espacio de fase sera no-conmutativo pero asociativo. En términos del producto de Moyal (ver [Subsección 5.1.2](#)), encontramos que:

$$(f_1 \star f_2)(x, p) = e^{\frac{i}{2}(\partial_{x_1} \cdot \partial_{p_2} - \partial_{x_2} \cdot \partial_{p_1})} f_1(x_1, p_1) f_2(x_2, p_2) \Big|_{x_1=x_2=x; p_1=p_2=p} \quad (2.43)$$

Originando que la dinámica de la mecánica cuántica sea equivalente al Corchete de Moyal:

$$\begin{aligned}\{\{f_1, f_2\}\} &= -i(f_1 \star f_2 - f_2 \star f_1) = \{f_1, f_2\} + \text{D.S.}, \\ \{\{f_1, f_2 \star f_3\}\} &= f_2 \star \{\{f_1, f_3\}\} + \{\{f_1, f_2\}\} \star f_3\end{aligned}$$

Ya que $R \neq 0$, las reglas de cuantización canónica ya no son válidas, pero aún es posible definir un producto de Moyal no-conmutativo y no-asociativo. Si usamos la regla de composición general, encontramos que:

$$U(a_1, b_1)U(a_2, b_2) = e^{-\frac{i}{2}(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)} e^{-i\frac{R}{2}(b_1 \times b_2) \cdot x} U(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Y como resultado, obtenemos un producto estrella que es no-asociativo y no-conmutativo, que a su vez depende de x :

$$(f_1 \star_x f_2)(x, p) = e^{i\frac{R}{2}x \cdot (\partial_{p_1} \times \partial_{p_2})} e^{\frac{i}{2}(\partial_{x_1} \cdot \partial_{p_2} - \partial_{x_2} \cdot \partial_{p_1})} f_1(x_1, p_1) f_2(x_2, p_2) \Big|_{x_1=x_2=x; p_1=p_2=p}$$

En éste caso no hay operadores asignados a sus observables clásicos $f(x, p)$, sino sólo objetos $F(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3a d^3b \tilde{f}(a, b) U(a, b)$ que interactúan a través de la anterior ley de composición. Entonces, en el contexto de la dinámica de la mecánica cuántica, esta ahora será formulada en términos del corchete:

$$\begin{aligned}\{\{f_1, f_2\}\}_x &= -i(f_1 \star_x f_2 - f_2 \star_x f_1), \\ \{\{f_1, f_2 \star_x f_3\}\}_x &\neq f_2 \star_x \{\{f_1, f_3\}\}_x + \{\{f_1, f_2\}\}_x \star_x f_3\end{aligned}$$

Capítulo 3

Espacio-tiempo y Álgebra de Snyder

3.1. Introducción

Hartland S. Snyder, en 1946, propone, en la búsqueda de la solución al problema de interacción campo-materia, un novedoso acercamiento. Hoy en día, sabemos que los trabajos en gravedad cuántica en los 80 sugerían que el espacio-tiempo debería estar cuantizado. Además, en un límite de bajas energías de la teoría de Cuerdas se sugiere que las relaciones de conmutación entre los observables de posición son no-nulos, es decir, éstos no pueden ser medidos (observados) simultáneamente. Así, la descripción matemática del espacio podría verse comprometida, al no poder representar a los observables de posición como operadores multiplicativos. Yendo en contra de la arbitrariedad de los mecanismos para eliminar divergencias ultravioleta de la teoría cuántica de campos, Snyder concluye que quizás el espacio-tiempo continuo cuadri-dimensional no es un marco de trabajo donde poder describir estas interacciones, idea propuesta por Heisenberg [19]. Más aún, con los años descubrieron que existían muchísimos más espacios de este tipo, llegando a varias familias de espacios con coordena-

das no-conmutativas. A éstos les llamaron *espacios tipo-Snyder* y puede adoptar muchas formas, entre ellas, la propuesta por Snyder, que pasa a ser llamada la Realización de Snyder del espacio de Snyder”.

3.2. Espacio-tiempo cuantizado de Snyder

La teoría de la relatividad especial está basada en la invariancia de la forma cuadrática

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (3.1)$$

para transformaciones desde un marco inercial a otro. En ésta se asume que las variables x, y, z y t pueden asumir valores continuos y que éstos pueden ser tomados simultáneamente (es decir, conmutan). Nosotros asumimos que el espectro de los operadores de coordenadas espaciotemporales son invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Es evidente que el espacio-tiempo continuo satisface la definición, pero Snyder asegura que no es la única solución para un espaciotiempo invariante de Lorentz, donde existirá una longitud natural (que Snyder tenía la esperanza de eliminar divergencias del caso continuo). La introducción de una longitud mínima en el espaciotiempo arroja por consecuencia que la noción de conmutatividad de las variables x, y, z y t se deseche. Por otro lado, si asumimos que conmutan, necesariamente el espectro de los operadores debe ser continuo.

Definamos un espacio De Sitter embebido en un espacio 5-dimensional, con la forma cuadrática homogénea

$$-\eta = \eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 - \eta_4^2 \quad (3.2)$$

donde los η_i son reales. Éste no es el espacio físico en el que vivimos, pero puede ser interpretado como el espacio de coordenadas proyectivas (coordenadas ho-

mogeenas; interpretación de W. Pauli) de un espacio cuadri-dimensional real de curvatura constante. Éste espacio es llamado el *Underlying Space* \mathcal{U} . Ésta no es la única forma cuadrática que permite un espacio-tiempo invariante de Lorentz, ya que, a modo de ejemplo, Snyder propone que $\eta = \eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 + \eta_4^2$ también sirve. Definimos, los operadores diferenciales posición y tiempo

$$\hat{x}_i = ia \left(\eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial}{\partial \eta_4} \right) \quad (3.3)$$

$$\hat{t} = \frac{ia}{c} \left(\eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_0} + \eta_0 \frac{\partial}{\partial \eta_4} \right) \quad (3.4)$$

donde $i = 1, 2, 3$. Aquí a es la unidad natural de longitud, c es la velocidad de la luz. Los operadores \hat{x}_i, \hat{t} deben ser considerador hermíticos, para tener autovalores reales. Éstos operadores actuan sobre funciones univaluadas de las coordenadas, que además son invariantes izquierdos salvo cambios en sus argumentos. Consideremos a las funciones ψ_i dadas por:

$$\psi_i = e^{-i\beta\varphi_i}, \quad \text{con } \varphi_i = \arctan \left(\frac{\eta_i}{\eta_4} \right) \quad (3.5)$$

Luego verificamos que:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i \psi_i &= ia \left(\eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial}{\partial \eta_4} \right) e^{-i\beta\varphi_i} \\ &= ia \left(\eta_4 e^{-i\beta\varphi_i} (-i\beta) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta_i} - \eta_i e^{-i\beta\varphi_i} (-i\beta) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta_4} \right) \\ &= a\beta e^{-i\beta\varphi_i} \frac{1}{1 + (\eta_i/\eta_4)^2} \left(\eta_4 \frac{\partial(\eta_i/\eta_4)}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial(\eta_i/\eta_4)}{\partial \eta_4} \right) \\ &= a\beta e^{-i\beta\varphi_i} \frac{1}{1 + (\eta_i/\eta_4)^2} (1 + \eta_i^2/\eta_4^2) \\ &= a\beta e^{-i\beta\varphi_i} = a\beta \psi_i \end{aligned}$$

Por lo que ψ_i son autofunciones de \hat{x}_i con autovalores $a\beta$. Además, debido a que la tangente es de periodo 2π , encontramos que $\varphi_i + 2\pi = \arctan(\eta_i/\eta_4)$, con lo que para evitar que ψ_i sea una función multivaluada, deberemos restringir los valores

de β a valores enteros m [20]. Así:

$$\hat{x}_i \psi_i = m a \psi_i \quad (3.6)$$

Luego el espectro de la posición adopta valores discretos, múltiplos de a , con $m \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, consideremos a la función ψ_0 , dada por:

$$\psi_0 = e^{-i\lambda\varphi_0}, \quad \text{con } \varphi_0 = \operatorname{arctanh} \left(\frac{\eta_0}{\eta_4} \right) \quad (3.7)$$

Luego verificamos que:

$$\begin{aligned} \hat{t}\psi_0 &= \frac{ia}{c} \left(\eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_0} + \eta_0 \frac{\partial}{\partial \eta_4} \right) e^{-i\lambda\varphi_0} \\ &= \frac{ia}{c} \left(\eta_4 e^{-i\lambda\varphi_0} (-i\lambda) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta_0} - \eta_0 e^{-i\lambda\varphi_0} (-i\lambda) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta_4} \right) \\ &= \frac{a\lambda}{c} e^{-i\lambda\varphi_0} \frac{1}{1 - (\eta_0/\eta_4)^2} \left(\eta_4 \frac{\partial(\eta_0/\eta_4)}{\partial \eta_0} - \eta_0 \frac{\partial(\eta_0/\eta_4)}{\partial \eta_4} \right) \\ &= \frac{a\lambda}{c} e^{-i\lambda\varphi_0} \frac{1}{1 - (\eta_0/\eta_4)^2} (1 - \eta_0^2/\eta_4^2) \\ &= \frac{a\lambda}{c} e^{-i\lambda\varphi_0} = \frac{a\lambda}{c} \psi_0 \end{aligned}$$

Entonces, debido a que no hay restricciones para λ , entonces ψ_0 es autofunción del operador \hat{t} con autovalores $\frac{a\lambda}{c}$ donde su espectro es continuo. Ésta formulación es invariante de Lorentz por construcción [20], por lo que dada una transformación de Lorentz entre las coordenadas (operadores) \hat{x}'_i, \hat{t}' y las coordenadas (operadores) \hat{x}_i, \hat{t} ésta preservará la forma S^2 (3.1) y en *Underlying Space* preservará la forma cuadrática de DeSitter (3.2). Por otro lado, definamos a los operadores de energía y momentum, que tienen las propiedades de operadores de desplazamiento temporales o espaciales

$$\hat{p}_i = \begin{pmatrix} \hbar \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_i \\ \eta_4 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\hat{p}_t = \begin{pmatrix} c\hbar \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_4 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

con $i=1,2,3$. La forma más general de los operadores de energía-momentum con las correctas propiedades de transformación son:

$$\hat{p}_i = \frac{\hbar \eta_i}{a \eta_4} f\left(\frac{\eta_4}{\eta}\right) \quad (3.10)$$

$$\hat{p}_t = \frac{c\hbar \eta_0}{a \eta_4} f\left(\frac{\eta_4}{\eta}\right) \quad (3.11)$$

donde $f(\eta_4/\eta)$ es una función adimensional de su argumento. La elección anterior es por simplicidad.

Dadas estas definiciones, se nos es fácil definir nuevos operadores: Momentum angular (\hat{L}_k) y a los generadores de los Boost (\hat{M}_i)

$$\hat{L}_k = \epsilon_{ijk} \hat{x}_i \hat{p}_j \quad (3.12)$$

$$\hat{M}_i = \frac{1}{c} \hat{x}_i \hat{p}_t + ct \hat{p}_i \quad (3.13)$$

Estos operadores son elementos infinitesimales del grupo de Lorentz cuatridimensional. Puede demostrarse que, dadas las definiciones anteriores para x, y, z y t , éstos conmutan con la forma cuadrática S^2 . Las definiciones anteriores no involucran dependencia de η_4 (la demostración es directa), lo que es una consecuencia de que la transformación de Lorentz que deja la forma cuadrática del Underlying Space y a η_4 invariantes, también deja a S^2 invariante. Ahora, las relaciones de conmutación entre momentum y posición quedan de la forma

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \alpha \hat{p}_i \hat{p}_j) \quad (3.14)$$

$$[\hat{t}, \hat{p}_t] = i\hbar(1 - \alpha \hat{p}_t^2) \quad (3.15)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_t] = c^2 \quad (3.16)$$

$$[\hat{P}_i, \hat{t}] = i\hbar \alpha \hat{p}_i \hat{p}_t \quad (3.17)$$

donde $\alpha = (a/\hbar)^2$. Y en términos de \hat{L}_k, \hat{M}_i , los conmutadores entre \hat{x}_i y \hat{t} quedan de la forma:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\alpha\epsilon_{ijk}\hat{L}_k \quad (3.18)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{t}] = \frac{i\hbar}{c}\alpha\hat{M}_i \quad (3.19)$$

lo que nos evidencia la no-conmutatividad de los observables de posición, y que tomando el límite $a \rightarrow 0$ recuperamos la mecánica cuántica convencional.

3.3. Underlying Space

Todo cálculo realizado en el espacio de Snyder puede ser hecho en el Underlying Space o en la representación en el espacio de momentum, por lo que hay dos niveles de corroboración. Consideremos el caso unidimensional sin tiempo $-\eta^2 = -\eta_1^2 - \eta_4^2$. Sus correspondientes operadores son

$$\hat{x} = ia \left(\eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_1} - \eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_4} \right) \quad (3.20)$$

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{a} \left(\frac{\eta_1}{\eta_4} \right) \quad (3.21)$$

Si nos pasamos a coordenadas polares, empleando una variable periódica ϕ

$$\left. \begin{array}{l} \eta_1 = \eta \sin \phi \\ \eta_4 = \eta \cos \phi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{x} = ia \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \hat{p} = \frac{\hbar}{a} \tan \phi \end{array} \quad (3.22)$$

de donde notamos que η no aparece en la definición de los operadores. η define la curvatura del Underlying space. Los resultados en el Underlying Space son independientes de η . El espectro discreto del operador de posición, ahora, en la base de ϕ , considerando al autoestado del operador posición $|m\rangle$, con m entero

$$\langle \phi | m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\phi} \quad (3.23)$$

Así, la descomposición de la función de onda tradicional admite como base a las autofunciones del operador de posición, cosa que no ocurrirá en el caso bidimensional.

En dos dimensiones, $-\eta^2 = -\eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_4^2$

$$\hat{x} = ia \left(\eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_1} - \eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_4} \right) \quad (3.24)$$

$$\hat{y} = ia \left(\eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_2} - \eta_2 \frac{\partial}{\partial \eta_4} \right) \quad (3.25)$$

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{a} \left(\frac{\eta_1}{\eta_4} \right) \quad (3.26)$$

$$\hat{p}_y = \frac{\hbar}{a} \left(\frac{\eta_2}{\eta_4} \right) \quad (3.27)$$

$$\hat{L}_z = i\hbar \left(\eta_2 \frac{\partial}{\partial \eta_1} - \eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_2} \right) \quad (3.28)$$

donde x , y , L_z representan a los generadores de las rotaciones respecto a los tres ejes η_2 , η_1 y η_4 respectivamente. Consideremos el cambio de variables a coordenadas esféricas:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \eta \sin \theta \cos \phi \\ \eta_2 &= \eta \sin \theta \sin \phi \\ \eta_4 &= \eta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \hat{x} &= ia \left(-\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \hat{y} &= ia \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \Rightarrow \hat{p}_x &= \frac{\hbar}{a} \tan \theta \cos \phi \\ \hat{p}_y &= \frac{\hbar}{a} \tan \theta \sin \phi \\ \hat{L}_z &= i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Los cuales podemos usar para definir a la energía cinética no relativista

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \tan^2 \theta}{2ma^2} \quad (3.31)$$

Ya que \hat{L}_z sólo actúa sobre ϕ , es fácil ver que la energía cinética conmuta con el momento angular. Definimos ahora el operador posición radial

$$\hat{r}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \quad (3.32)$$

Operador que también conmuta con \hat{L}_z . Así, el momento angular conmutará con cualquier hamiltoniano radialmente simétrico. Así \hat{H} y \hat{L}_z representan un conjunto completo de observables. Empleando el operador \hat{L}_z es posible demostrar que los autovalores de \hat{r}^2 son na^2 , con n un entero no negativo.

En una dimensión, podemos expandir cualquier función de onda en la base de autofunciones de posición, lo cual no se puede hacer en dos dimensiones, ya que \hat{x} y \hat{y} no conmutan, por lo que no se les puede asignar autovalores a los observables simultáneamente, por lo que las bases no pueden ser construidos mediante producto tensorial de las bases \hat{x} y \hat{y} .

3.4. Espacio de momentum

En general, el Underlying space no es el marco ideal para realizar cálculos. Abusando del hecho que los operadores momentum son operadores multiplicativos en \mathcal{U} , trabajar en el espacio de los momentum puede hacer más intuitivo el cálculo.

De las relaciones de conmutación entre x , y , z y t y los momentos correspondientes, es posible escribir a x , y , z , y t como operadores diferenciales actuando

sobre el espacio de los momentum, de la forma

$$\hat{x} = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial p_x} + \alpha p_x \left(p_x \frac{\partial}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial}{\partial p_y} + p_z \frac{\partial}{\partial p_z} + p_t \frac{\partial}{\partial p_t} \right) \right] \quad (3.33)$$

$$\hat{y} = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial p_y} + \alpha p_y \left(p_x \frac{\partial}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial}{\partial p_y} + p_z \frac{\partial}{\partial p_z} + p_t \frac{\partial}{\partial p_t} \right) \right] \quad (3.34)$$

$$\hat{z} = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial p_z} + \alpha p_z \left(p_x \frac{\partial}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial}{\partial p_y} + p_z \frac{\partial}{\partial p_z} + p_t \frac{\partial}{\partial p_t} \right) \right] \quad (3.35)$$

$$\hat{t} = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial p_t} - \alpha p_t \left(p_x \frac{\partial}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial}{\partial p_y} + p_z \frac{\partial}{\partial p_z} + p_t \frac{\partial}{\partial p_t} \right) \right] \quad (3.36)$$

En esta representación, los operadores pueden no parecer hermíticos, pero puede ser demostrado que con el correcto elemento de volumen del espacio de grupo (el grupo es el grupo de transformaciones que deja la forma cuadrática del Underlying Space invariante) sí lo es. Así, un elemento de volumen infinitesimal $d\tau$, del espacio de grupo está dado en términos de p_x , p_y , p_z y p_t por la fórmula

$$d\tau = \frac{\hbar dp_x dp_y dp_z dp_t}{ac(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \alpha - (p_t/c)^2)^{5/2}} \quad (3.37)$$

3.5. Álgebras de Heisenberg deformadas

Consideremos ahora un espaciotiempo $(n + 1)$ -dimensional de Minkowski tal que el conmutador entre sus coordenadas está dado por una estructura no-trivial:

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = sM_{\mu\nu} \quad (3.38)$$

donde \hat{x}_μ denota a las coordenadas no-conmutativas y $s \in \mathbb{R}$ es el parámetro de deformación, el cual tiene dimensión de longitud². Pediremos que las simetrías del espacio sean descritas el álgebra de Poincaré sin deformar, lo que significa que los generadores de Lorentz $M_{\mu\nu} = i(\hat{x}_\mu \hat{p}_\nu - \hat{x}_\nu \hat{p}_\mu)$ y los de las traslaciones p_μ satisfagan las relaciones de conmutación usuales

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} \quad (3.39)$$

$$[p_\mu, p_\nu] = 0 \quad (3.40)$$

Y también asumiremos que los momenta y las coordenadas no-conmutativas transforman como vectores bajo el álgebra de Lorentz, lo que significa:

$$[M_{\mu\nu}, p_\rho] = \eta_{\nu\rho} p_\mu - \eta_{\mu\rho} p_\nu \quad (3.41)$$

$$[M_{\mu\nu}, \hat{x}_\rho] = \eta_{\nu\rho} \hat{x}_\mu - \eta_{\mu\rho} \hat{x}_\nu \quad (3.42)$$

Entonces, la cantidad $p^2 = \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ es invariante de Lorentz.

Éstas relaciones definen la geometría del espaciotiempo de Snyder, pero no fijan el conmutador entre \hat{x}_μ y p_μ . De hecho, hay infinitas posibilidades para el conmutador entre \hat{x}_μ y p_μ compatibles con éstas relaciones de conmutación (compatibles en el sentido de que el álgebra cierra en virtud de las identidades de Jacobi). Ésto nos lleva al concepto de realización. Una realización en un espacio no-conmutativo es definido como un reescalamiento de las coordenadas del espacio no-conmutativo \hat{x}_μ en términos de las variables del espacio de fase (x_μ, p_ν) como:

$$\hat{x}_\mu = \Phi_{\mu\nu}(p) x_\nu \quad (3.43)$$

De aquí, la realización covariante de $SO(n, 1)$ más generales de la geometría de Snyder es de la forma:

$$\hat{x}_\mu = x_\mu \varphi_1(A) + s x \cdot p p_\mu \varphi_2(A) \quad (3.44)$$

donde φ_1, φ_2 son dos funciones dependientes de un parámetro adimensional $A = sp^2$. La función φ_2 depende de las φ_1 a través de:

$$\varphi_2 = \frac{1 + 2 \frac{d\varphi_1}{dA} \varphi_1}{\varphi_1 - 2A \frac{d\varphi_1}{dA}} \quad (3.45)$$

Luego, la realización más general queda completamente determinada por φ_1 , con la condición de borde $\varphi_1(0) = 1$ para asegurar que se recupere la conmutatividad cuando $s = 0$. El conmutador entre \hat{x}_μ y p_μ queda, entonces:

$$[\hat{x}_\mu, p_\nu] = i(\eta_{\mu\nu} \varphi_1 + s p_\mu p_\nu \varphi_2) \quad (3.46)$$

Ésta es la relación que describe un álgebra deformada de Heisenberg. Es muy interesante escribir una realización inversa, de la forma:

$$x_\mu = \frac{1}{\varphi_1} \left(\hat{x}_\mu - \frac{1}{\varphi_1 + A\varphi_2} s\hat{x} \cdot pp_\mu \varphi_2 \right) \quad (3.47)$$

debido a que nos permitirá construir invariantes en el cuadro no-conmutativo a partir de uno conmutativo. Sólo tenemos que pedir que los invariantes en las coordenadas (x_μ, p_ν) sean enviados a partir de (3.47) a las coordenadas no-conmutativas (\hat{x}_μ, p_ν) .

La primera realización fue originalmente sugerida por Snyder (por lo que lleva por nombre *la realización de Snyder*), la cual es recuperada cuando:

$$\varphi_1 = 1 \Rightarrow \varphi_2 = 1 \quad (3.48)$$

La cual adopta la forma:

$$[\hat{x}_\mu, p_\nu] = i(\eta_{\mu\nu} + sp_\mu p_\nu) \quad (3.49)$$

Los generadores $(\hat{x}_\mu, p_\mu, M_{\mu\nu})$ forman un álgebra definida por los conmutadores (3.38), (3.39), (3.40), (3.41), (3.42) y (3.46), pero éstos no forman un álgebra de Hopf. Sin embargo, $(p_\mu, M_{\mu\nu})$ generan un grupo de Poincaré deformado tipo Snyder \mathcal{P}_S cuya álgebra es una generalización del álgebra de Hopf: un álgebra de Hopf no-coasociativa [21], o también llamado Algebroide de Hopf [22].

Capítulo 4

Algebras y algebroides y cuasi-estructuras

4.1. Introducción

Si bien las estructuras algebraicas como las álgebras de Hopf son construcciones muy bien estudiadas y aplicadas en física y matemática, su definición es muy restrictiva, y debe ser generalizada para incluir a casos de gran interés. El álgebra de Heisenberg del espacio de fase cuántico si bien posee una estructura de álgebra de Lie, ésta no posee una estructura de Álgebra de Hopf debido a que la definición de Δx_μ no puede ser incluido de forma satisfactoria [12]. Así es necesario generalizar esta estructura para poder modelar correctamente al espacio de fase cuántico. Existen varios tipos de generalizaciones: Álgebras cuasi-Hopf, Álgebra de Hopf multiplicadora y álgebras de Hopf débiles. Los trabajos de S. Meljanac, T. Juric y D. Kovacevic [11] sugieren que la construcción de la estructura algebraica para el álgebra de Heisenberg (Weyl) y sus deformaciones son similares a la estructura de Algebroides de Hopf definida por Lu en [23].

Podemos estudiar analizar la estructura de las Álgebras de Hopf a través de sus *Twist*, que elementos invertibles que viven en el producto tensorial de las algebras. Considerando ésto, P. Xu [22] aplica el formalismo de Twist a la estructura de bialgebroides (estructura análoga a la definida por Lu), empleandolos elementos centrales en el proceso de deformación de una estructura de Algebroide de Hopf en otra. Además incluyó una visión de cuantización como deformación en un contexto algebraico de mayor estructura.

Éste capítulo busca introducir nociones de estas nuevas estructuras y sus propiedades, además de motivar al Twist como el elemento central en la estructura, debido a que no sólo nos brindará la estructura completa de Heisenberg deformado, sino que nos podrá conectar con la matriz mediadora de no conmutatividad \mathcal{R} de la geometría no-conmutativa.

Comenzaremos haciendo una introducción a las álgebras de Hopf y el operador *twist*, para posteriormente explicar la estructura de algebroide de Hopf del espaciotiempo no-conmutativo, recuperando el espacio de Snyder posteriormente.

4.2. Estructura algebraicas

4.2.1. Álgebras, Biálgebras y Algebras de Hopf

Introduzcamos un poco de notación: para $i = 1, 2$, sean V_i y W_i espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathbb{K} , y $\varphi_i : V_i \rightarrow W_i$ un mapeo lineal. Ya que el mapeo

$$(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \mapsto \varphi_1(v_1) \otimes \varphi_2(v_2) \in W_1 \otimes W_2 \quad (4.1)$$

es bilineal, existe un único mapeo $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ tal que

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2) : V_1 \otimes V_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2, \quad \varphi_1 \otimes \varphi_2(v_1 \otimes v_2) = \varphi_1(v_1) \otimes \varphi_2(v_2) \quad (4.2)$$

id_V denota al mapeo identidad en V . Si V es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , tenemos los isomorfismos naturales $\mathbb{K} \otimes V \simeq V$ y $V \otimes \mathbb{K} \simeq V$ dado por los únicos mapeos:

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \otimes V &\rightarrow V & V \otimes \mathbb{K} &\rightarrow V \\ k \otimes v &\mapsto kv & v \otimes k &\mapsto kv \end{aligned} \quad (4.3)$$

Un **álgebra asociativa unital** sobre un campo \mathbb{K} es el triplete (A, m, u) , donde A es un espacio vectorial, $m : A \otimes A \rightarrow A$ y $u : \mathbb{K} \rightarrow A$ son mapeos lineales tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

- Asociatividad:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{id_A \otimes m} & A \otimes A \\ m \otimes id_A \downarrow & & \downarrow m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

$$m(a \otimes m(a' \otimes a'')) = m(m(a \otimes a') \otimes a''), \quad \forall a, a', a'' \in A \quad (4.4)$$

- Unitaridad:

$$\begin{array}{ccccc} & & A \otimes A & & \\ & \nearrow u \otimes id_A & \downarrow & \nwarrow id_A \otimes u & \\ \mathbb{K} \otimes A & & m & & A \otimes \mathbb{K} \\ & \searrow \simeq & \downarrow & \swarrow \simeq & \\ & & A & & \end{array}$$

$$m(u(k) \otimes a) = ka = m(a \otimes u(k)), \quad \forall k \in \mathbb{K}, \forall a \in A \quad (4.5)$$

Luego, si (A, m, u) satisfacen los diagramas, el mapeo

$$* : A \times A \rightarrow A \quad a * a' = m(a \otimes a'), \quad a, a' \in A \quad (4.6)$$

dota a A con la estructura de un álgebra asociativa, y el elemento unidad $u(1_{\mathbb{K}})$ de A es el elemento unidad para $*$. Viceversa, siendo $(A, *)$ una álgebra asociativa unital (UAA o UA algebra) se determinará un único mapeo $m : A \otimes A \rightarrow A$ tal que $m(a \otimes a') = a * a', \forall a, a' \in A$, y si consideramos el mapeo $u : \mathbb{K} \rightarrow A$ definido por $u(k) = k1_A$, entonces (A, m, u) satisface los diagramas. Aquí Sweedle sugiere que la clave para entender las álgebras de Hopf es dualizando estos diagramas, y así obtendremos una definición natural de una coálgebra.

Una **coálgebra coasociativa y counital** sobre un campo \mathbb{K} es el triplete (C, Δ, ε) , donde C es un espacio vectorial, $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ y $\varepsilon : C \rightarrow \mathbb{K}$ son mapeos lineales tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

- Coasociatividad

$$\begin{array}{ccc} C \otimes C \otimes C & \xleftarrow{id_C \otimes \Delta} & C \otimes C \\ \Delta \otimes id_C \uparrow & & \uparrow \Delta \\ C \otimes C & \xleftarrow{\Delta} & C \end{array}$$

$$(\Delta \otimes id_C)\Delta C = (id_C \otimes \Delta)\Delta C, \quad \forall c \in C \quad (4.7)$$

■ Counitaridad

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C \otimes C & & \\
 & \swarrow \varepsilon \otimes id_C & \uparrow & \searrow id_C \otimes \varepsilon & \\
 \mathbb{K} \otimes C & & \Delta & & C \otimes \mathbb{K} \\
 & \swarrow \cong & \uparrow & \searrow \cong & \\
 & & C & &
 \end{array}$$

$$(id_C \otimes \varepsilon)\Delta(c) = (\varepsilon \otimes id_C)\Delta(c) = c, \forall c \in C \quad (4.8)$$

El mapeo Δ es llamado **coproducto**, y ε es llamado **counidad**. Así llamamos **coálgebra co-AU** a la coálgebra coasociativa y counital.

Sea (C, Δ, ε) una co-UA coálgebra sobre \mathbb{K} . Sea $(A, *)$ cualquier UAA sobre \mathbb{K} , por las propiedades universales del producto \otimes , existe un único mapeo lineal:

$$m_* : A \otimes A \rightarrow A, m_*(a \otimes a') = a * a', \forall a, a' \in A \quad (4.9)$$

Para definir a las álgebras de Hopf necesitaremos introducir otra definición. Una **biálgebra** sobre un campo \mathbb{K} es el quintuplete $(A, *, 1_A, \Delta, \varepsilon)$ donde $(A, *, 1_A)$ es una UAA y (A, Δ, ε) es una co-UA co-álgebra sobre \mathbb{K} tal que sean **compatibles**, es decir:

- El coproducto $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ es un morfismo de UAA, donde $A \otimes A$ es naturalmente equipado con la estructura de una UAA $(A \otimes A, \cdot)$, donde

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (a * a') \otimes (b * b'), \forall a, a', b, b' \in A$$

- La counidad $\varepsilon : \mathbb{K} \rightarrow A$ es un morfismo de UUA, donde \mathbb{K} tiene estructura de UA trivial dado por el producto usual en \mathbb{K} .

Introduzcamos la siguiente notación:

$$\Delta(a) = \sum_{i \in \mathcal{F}(a)} f_{i,1}(a) \otimes f_{i,2}(a), \quad f_{i,1}(a), f_{i,2}(a) \in A \quad (4.10)$$

Donde, para cada $a \in A$ existe un conjunto finito $\mathcal{F}(a) \subset \mathbb{N}$ y elementos $f_{i,j}(a)$ de A (para $j = 1, 2$ y $i \in \mathcal{F}(a)$) tal que $\Delta(a)$ es descompuesta, pero se debe hacer énfasis en que $f_{i,j}(a)$ no están únicamente definidas, posiblemente. Empleando la notación convenida, la condición de compatibilidad del coproducto es equivalente a:

$$\Delta(1_A) = 1_A \otimes 1_A \quad \Delta(a * a') = \sum_{i,i'} (f_{i,1}(a) * f_{i',1}(a')) \otimes (f_{i,2}(a) * f_{i',2}(a')), \quad \forall a, a' \in A \quad (4.11)$$

Mientras que la condición de compatibilidad para la counidad es equivalente a:

$$\varepsilon(1_A) = 1_{\mathbb{K}} \quad \varepsilon(a * a') = \varepsilon(a)\varepsilon(a'), \quad \forall a, a' \in A \quad (4.12)$$

O su equivalente diagramático:

■ Compatibilidad del Coproducto

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes A & \xrightarrow{m_*} & A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\ \Delta \otimes \Delta \downarrow & & & & \uparrow m_* \otimes m_* \\ A \otimes A \otimes A \otimes A & \longrightarrow & id_A \otimes \sigma \otimes id_A & \longrightarrow & A \otimes A \otimes A \otimes A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{K} \\ u \otimes u \downarrow & & \downarrow u \\ A \otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A \end{array}$$

donde $u : \mathbb{K} \rightarrow A$ es un mapeo lineal definido por $u(k) = k1_A$, $k \in \mathbb{K}$, y $\sigma : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ es un único mapeo lineal (a veces denotado con τ) tal que $\sigma(a \otimes a') = a' \otimes a$, también llamado **flip operator**.

- **Compatibilidad de la counidad**

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{m_*} & A & \mathbb{K} & \xrightarrow{\quad} & id_{\mathbb{K}} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K} \\
 \varepsilon \otimes \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon & \searrow u & & \nearrow \varepsilon & & \\
 \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{K} & & & & & A
 \end{array}$$

Si $(A, *, 1_A, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra, un elemento $a \in A$ es llamado:

- **Primitivo** en A si $\Delta(a) = a \otimes 1_A + 1_A \otimes a$
- **Tipo grupo** (grouplike) en A si $a \neq 0$ y $\Delta(a) = a \otimes a$

Un conjunto $G(A) \subset A$ de elementos tipo grupo contiene, por ejemplo, a 1_A . Además, si $a \in G(A)$, entonces $\varepsilon(a) = 1_{\mathbb{K}}$. Más aún, $G(A)$ es cerrado bajo la multiplicación $*$, lo cual se sigue de que Δ es un morfismo de UAA. En efecto, sean $x, y \in G(A)$:

$$\begin{aligned}
 \Delta(x * y) &= \Delta(x) \cdot \Delta(y) = (x \otimes x) \cdot (y \otimes y) = (x * y) \otimes (x * y) \\
 &\Rightarrow x * y \in G(A) \qquad (4.13)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, el conjunto $P(A) \subset A$ de elementos primitivos en A es un subálgebra de Lie con el conmutador de A : Sean $p_1, p_2 \in P(A)$

$$\begin{aligned}
 \Delta([p_1, p_2]_*) &= \Delta(p_1 * p_2 - p_2 * p_1) = \Delta(p_1) \cdot \Delta(p_2) - \Delta(p_2) \cdot \Delta(p_1) \\
 &= ([p_1, p_2]_*) \otimes 1_A + 1_A \otimes ([p_1, p_2]_*) \qquad (4.14)
 \end{aligned}$$

donde usamos el hecho que Δ es un morfismo de UAA de $(A, *)$ en $(A \otimes A, \cdot)$. Así, una biálgebra A se dice **primitivamente generada** si es generado, como álgebra respecto a $*$, por un conjunto de elementos primitivos $P(A)$ junto con 1_A . Una **biálgebra primitivamente generada** A es coconmutativa, es decir, satisface

el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes A & \longrightarrow & \sigma & \longrightarrow & A \otimes A \\
 & & & & \\
 & \swarrow \Delta & & \nearrow \Delta & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

con $\sigma(a \otimes a') = a' \otimes a$, $\forall a, a' \in A$. Notemos que σ también es un morfismo de UAA. Para demostrarlo, basta con verificar que A es generado como álgebra por $\{1_A\} \cup P(A)$, por lo que:

$$\sigma(\Delta(1_A)) = \sigma(1_A \otimes 1_A) = 1_A \otimes 1_A = \Delta(1_A) \quad (4.15)$$

$$\sigma(\Delta(p)) = \sigma(p \otimes 1_A + 1_A \otimes p) = 1_A \otimes p + p \otimes 1_A = \Delta(p), \quad \forall p \in P(A) \quad (4.16)$$

Un *Bi-álgebra Cuasi-triangular* es un par (H, \mathcal{R}) donde H es una bi-álgebra, y $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{(1)} \otimes \mathcal{R}_{(2)} \in H \otimes H$ es un elemento invertible que obedece:

$$(\Delta \otimes \text{id}_H)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}, \quad (\text{id}_H \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}, \quad (\tau \circ \Delta)(h) = \mathcal{R}\Delta(h)\mathcal{R}^{-1} \quad (4.17)$$

para todos $h \in H$, donde $\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{(1)} \otimes \mathcal{R}_{(2)} \otimes 1_H$, $\mathcal{R}_{13} = \mathcal{R}_{(1)} \otimes 1_H \otimes \mathcal{R}_{(2)}$, $\mathcal{R}_{23} = 1_H \otimes \mathcal{R}_{(1)} \otimes \mathcal{R}_{(2)}$ donde 1_H es la unidad de H , y abreviamos el producto $\mu : H \otimes H \rightarrow H$ por $\mu(h \otimes h') = hh'$ para todo $h, h' \in H$. Donde definimos el mapeo de transposición $\tau : H \otimes H \rightarrow H \otimes H$ como:

$$\tau(h \otimes h') := h' \otimes h \quad (4.18)$$

para todo $h, h' \in H$.

A través del mapeo de transposición definimos el *Coproducto co-opuesto* $\Delta^{op} : H \rightarrow H \otimes H$ de la forma:

$$\Delta^{op}(h) := (\tau \circ \Delta)(h) = h_{(2)} \otimes h_{(1)} \quad (4.19)$$

Entonces H es una coálgebra coconmutativa si $\Delta^{op}(h) = \Delta(h)$ para todo $h \in H$. Si (H, \mathcal{R}) es una biálgebra cuasi-triangular entonces la coconmutatividad simplemente significa que $\Delta(h)\mathcal{R} = \mathcal{R}\Delta(h)$ para todo $h \in H$.

Un **álgebra de Hopf** sobre un campo \mathbb{K} es la sextupla $(H, *, 1_H, \Delta, \varepsilon, S)$ donde $(H, *, 1_H, \Delta, \varepsilon)$ es una biálgebra, y $S : H \rightarrow H$ es un mapeo lineal llamado **antípoda** tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H \otimes H & \longrightarrow & S \otimes id_H & \longrightarrow & H \otimes H \\
 & \nearrow \Delta & & & & & \searrow m_* \\
 H & \longrightarrow & \varepsilon & \longrightarrow & \mathbb{K} & \longrightarrow & u & \longrightarrow & H \\
 & \searrow \Delta & & & & & \nearrow m_* & & \\
 & & H \otimes H & \longrightarrow & id_A \otimes S & \longrightarrow & H \otimes H
 \end{array}$$

Debido a la notación convenida ésto implica el siguiente requisito:

$$\sum_i S(f_{i,1}(h)) * f_{i,2}(h) = \sum_i f_{i,1}(h) * S(f_{i,2}(h)) = \varepsilon(h)1_A, \forall h \in H \quad (4.20)$$

o equivalentemente:

$$m_* \circ (id_H \otimes S) \circ \Delta = u_{1_H} \circ \varepsilon = m_* \circ (S \otimes id_H) \circ \Delta \quad (4.21)$$

Un *Álgebra de Hopf cuasi-triangular* (H, \mathcal{R}) consiste en una estructura cuasi-triangular \mathcal{R} en la biálgebra remanente de H .

Una álgebra de Hopf H puede actuar sobre un espacio vectorial V sobre el cuerpo \mathbb{K} para originar una representación de H en V . En particular, diremos que una *Acción izquierda de H sobre V* es un par (λ, V) , donde $\lambda : H \otimes V \rightarrow V$ es un mapeo lineal, $\lambda(h \otimes v) =: \lambda_h(v)$ tal que $\lambda_{hg}(v) = \lambda_h(\lambda_g(v))$ y $\lambda(1_H \otimes v) = v$, donde $g, h \in H$ y $v \in V$.

Es común denotar la acción de H en V por \triangleright y escribir las relaciones de la forma:

$$h \triangleright v \in V, \quad (hg) \triangleright v = h \triangleright (g \triangleright v), \quad 1_h \triangleright v = v \quad (4.22)$$

Dicho espacio vectorial es llamado un H -módulo izquierdo. Si V posee estructuras adicionales, por ejemplo si fuese un álgebra (A, m_*) donde m_* es el producto en A , o una coálgebra (C, Δ_C) donde Δ_C es el coproducto en C , entonces necesitamos pedir que la acción de H sea covariante en el sentido que preserve la estructura adicional de V . Así diremos que un álgebra unital (A, m_*) sobre \mathbb{K} es un *Álgebra de H -módulo izquierdo* si A es un H -módulo izquierdo y

$$h \triangleright (m_*(a \otimes b)) = h \triangleright m_*(a \otimes b) = m_*(\Delta(h) \triangleright (a \otimes b)) = (h_{(1)} \triangleright a)(h_{(2)} \triangleright b) \quad (4.23)$$

donde $h \in H$ y $a, b \in A$. Por otro lado una Coalgebra counital (C, Δ_C) es una *coálgebra H -módulo izquierda* si C es H -módulo izquierda y

$$(h \triangleright c)_{(1)} \otimes (h \triangleright c)_{(2)} = \Delta_C(h \triangleright c) = \Delta(h) \triangleright \delta_C(c) = (h_{(1)} \triangleright c_{(1)}) \otimes (h_{(2)} \triangleright c_{(2)}) \quad (4.24)$$

donde $h \in H$ y $c \in C$. Definiciones similares y completamente análogas se mantienen para H -módulos derechos de álgebras y coálgebras. Así entendemos que ya sea H -módulos izquierdos o derechos, son simplemente representaciones debido a un álgebra o coálgebra del álgebra de Hopf H .

4.2.2. Bialgebroides y Algebroides de Hopf

Definamos ahora a un **bialgebroide** [23]. Un bialgebroide consiste en la siguiente estructura:

- Un álgebra H llamada el **álgebra total**
- Un álgebra A llamada el **álgebra base**

- Un mapeo llamado **mapeo fuente** (o Source map), el cual es un homomorfismo de álgebras:

$$\alpha : A \rightarrow H$$

y un mapeo llamado **mapeo objetivo** (o target map), el cual es un anti-homomorfismo de álgebras

$$\beta : A \rightarrow H$$

tal que las imágenes de α y β conmutan en H , es decir, $\forall a, b \in A$

$$\alpha(a)\beta(b) = \beta(b)\alpha(a) \quad (4.25)$$

Donde naturalmente emerge la siguiente estructura (A, A) -bimodular en H dada por:

$$\lambda : A \otimes H \rightarrow H : a \otimes h \mapsto \alpha(a)h \quad (4.26)$$

$$\rho : H \otimes A \rightarrow H : h \otimes a \mapsto \beta(a)h \quad (4.27)$$

Usando la estructura bimodular, podemos construir el producto (A, A) -bimodular $H \otimes_A H$ de H consigo mismo. Como espacio vectorial sobre algún cuerpo k , es simplemente el cociente de $H \otimes H$ por el subespacio

$$I_2 := \{\beta(a)h_1 \otimes h_2 - h_1 \otimes \alpha(a)h_2 = (\beta(a) \otimes 1 - 1 \otimes \alpha(a))(h_1 \otimes h_2), h_1, h_2 \in H, a \in A\} \quad (4.28)$$

Notemos que en este caso I_2 es el ideal derecho de $H \otimes H$ generado por el subconjunto

$$\{\beta(a) \otimes 1 - 1 \otimes \alpha(a) : a \in A\}$$

- El coproducto, que es un mapeo (A, A) -bimodular

$$\Delta : H \rightarrow H \otimes_A H : h \mapsto h_{(1)} \otimes h_{(2)}$$

con $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ satisfaciendo la co-asociatividad usual:

$$(\Delta \otimes_A id_H)\Delta = (id_H \otimes_A \Delta)\Delta : H \rightarrow H \otimes_A H \otimes_A H$$

Aquí el coproducto **debe** ser compatible con la estructura de álgebra en H , en el sentido de que el kernel del siguiente mapeo

$$\Phi : H \otimes H \otimes H \rightarrow H \otimes_A H : h_1 \otimes h_2 \otimes h_3 \mapsto (\Delta h_1)(h_2 \otimes h_3) \quad (4.29)$$

es un ideal izquierdo de $H \otimes H^{op} \otimes H^{op}$, donde H^{op} denota a H con el producto opuesto. Aquí estamos usando el hecho que $H \otimes H$ actúa en $H \otimes_A H$ desde la derecha por multiplicación derecha.

- La counidad, que es un mapeo (A, A) -bimodular $\epsilon : H \rightarrow A$ satisfaciendo $\epsilon(1_H) = 1$ además, debido a $\epsilon\beta = \epsilon\alpha = id$, satisfecerá la importante propiedad:

$$\lambda(\epsilon \otimes id)\Delta = \rho(id \otimes \epsilon)\Delta = id : H \rightarrow H \quad (4.30)$$

donde λ y ρ son respectivamente los mapeos A -modulo izquierdo y derecho respectivamente. También es necesario (como con el co-producto) que sea compatible respecto a la estructura algebraica de H en el sentido de que el kernel de ϵ sea un ideal izquierdo de H . Como consecuencia de sus propiedades, también tiene las siguientes:

$$\epsilon(\alpha(a)h) = a\epsilon(h), \quad \epsilon(\beta(a)h) = \epsilon(h)a \quad (4.31)$$

Asumamos que H es un bi-algebroid sobre el álgebra A con mapeos de estructura $\alpha, \beta, \Delta, \epsilon$. Entonces, ya que $\epsilon\alpha = id_A$, el mapeo ϵ es subjetivo, por lo que podemos identificar a A con el espacio cociente $H/\ker \epsilon$. Ya que $\ker \epsilon \subset H$ es un ideal izquierdo de H , entonces existe una acción izquierda inducida de H sobre

A. Ya que $\alpha : A \rightarrow H$ es una sección de ϵ , podemos identificar a A con el subespacio $\alpha(A) \subset H$. La acción izquierda de H en A puede ser ahora explícitamente escrita como:

$$T_1 : H \rightarrow \text{End}_k(A) : h(a) := \epsilon(h\alpha(a)) \quad (4.32)$$

entonces llamamos a T_1 dado por (4.32) la **acción izquierda de H en A asociada a la estructura de bi-algebroides en H sobre A** . Entre las propiedades más importantes de este mapeo, está que la composición $T_1 \circ \alpha$ (o respectivamente $T_1 \circ \beta$): $A \rightarrow \text{End}_k(A)$ entrega la acción izquierda (o derecha) de A sobre si misma por multiplicación izquierda (derecha). Esto se sigue del hecho que $\epsilon : H \rightarrow A$ es un mapeo (A, A) -bimodular, es decir, para todo $a \in A, h \in H$,

$$\epsilon(\alpha(a)h) = a\epsilon(h), \quad \epsilon(\beta(a)h) = \epsilon(h)a$$

. Finalmente llegamos a la definición más importante, y la estructura que nos podrá establecer las relaciones entre Heisenberg deformado y el tradicional.

Un **Algebroides de Hopf** (*Lu's Hopf Algebroid*) es un bialgebroides H sobre un álgebra V con los mapeos de estructura α, β, Δ and ϵ juntos con un mapeo extra $S : H \rightarrow H$ llamado antípoda el cual tiene las siguientes propiedades:

- S es un anti-isomorfismos de álgebras para H
- $S\beta = \alpha$
- $m_H(S \otimes id)\Delta = \beta\epsilon S : H \rightarrow H$, donde m_H es la multiplicación de H
- Existe un mapeo lineal $\gamma : H \otimes_A H \rightarrow H \otimes H$ donde γ es una sección para la proyección $p : H \otimes H \rightarrow H \otimes_A H$ y además $m_H(id \otimes S)\gamma\Delta = \alpha\epsilon : H \rightarrow H$.

De aquí podemos notar que la inclusión del mapeo γ es debido a que si bien $m_H(S \otimes id)\Delta$ está bien definido como un mapeo desde H a H , el mapeo $m_H(id \otimes$

$S)\Delta$ no está bien definido.

Posteriores redefiniciones de los algebroide de Hopf no precisarían de un mapeo γ , aunque para fines de esta investigación, presentamos una estructura fundamental asociada al Álgebra de Snyder.

4.2.3. Cuasi-estructuras

Para finalizar, detallaremos brevemente las estructuras Cuasi-algebraicas, introducidas originalmente por V. G. Drinfeld en 1990 [24]. Comencemos con la noción de *Cuasi-biálgebra*: Sea una biálgebra H , un elemento $h \in H$ y un elemento $\phi = \phi_{(1)} \otimes \phi_{(2)} \otimes \phi_{(3)} \in H \otimes H \otimes H$ un elemento invertible, donde ϕ corresponderá a un 3-cociclo si:

$$(1_H \otimes \phi)[(\text{id}_H \otimes \Delta \otimes \text{id}_H)(\phi)](\phi \otimes 1_H) = [(\text{id}_H \otimes \text{id}_H \otimes \Delta)(\phi)][(\Delta \otimes \text{id}_H \otimes \text{id}_H)(\phi)] \quad (4.33)$$

Diremos que H es una cuasi-biálgebra si H es coasociativa sólo mediante un 3-cociclo ϕ , es decir:

$$(\text{id}_H \otimes \Delta) \circ \Delta(h) = \phi[(\Delta \otimes \text{id}_H) \circ \Delta(h)]\phi^{-1} \quad (4.34)$$

Y diremos que además ϕ es counital si adicionalmente:

$$(\varepsilon \otimes \text{id}_H)(\phi) = (\text{id}_H \otimes \varepsilon \otimes \text{id}_H)(\phi) = (\text{id}_H \otimes \text{id}_H \otimes \varepsilon)(\phi) = 1_H \otimes 1_H \quad (4.35)$$

Estas condiciones sobre ϕ aseguran que todos los reordenamientos posibles de coproductos de orden superior, mediante la introducción de ϕ , den el mismo resultado y sean consistentes con la counitaridad.

La definición de una *cuasi-biálgebra cuasi-triangular* será entonces aquella biálgebra cuasi-triangular, pero con la introducción de ϕ :

$$(\Delta \otimes \text{id}_H)(\mathcal{R}) = \phi_{321} \mathcal{R}_{13} \phi_{132}^{-1} \mathcal{R}_{23} \phi, \quad (\text{id}_H \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \phi_{231}^{-1} \mathcal{R}_{13} \phi_{213} \mathcal{R}_{12} \phi^{-1} \quad (4.36)$$

donde $\phi_{abc} := \phi_{(a)} \otimes \phi_{(b)} \otimes \phi_{(c)}$ mientras que el tercer axioma de una biálgebra cuasi-triangular permanece sin modificaciones.

Una *Cuasi-álgebra de Hopf* $\mathcal{H} = (H, \phi)$ es una cuasi-biálgebra H equipada con una antípoda que consiste en dos elementos $\alpha, \beta \in H$ y un anti-automorfismos del álgebra $S : H \rightarrow H$ tal que obedece:

$$S(h_{(1)})\alpha h_{(2)} = \varepsilon(h)\alpha, \quad h_{(1)}\beta S(h_{(2)}) = \varepsilon(h)\beta, \quad (4.37)$$

$$\phi_{(1)}\beta S(\phi_{(2)})\alpha\phi_{(3)} = 1_H, \quad S(\phi_{(1)}^{-1})\alpha\phi_{(2)}^{-1}\beta S(\phi_{(3)}^{-1}) = 1_H \quad (4.38)$$

para todo $h \in H$. El antípoda es determinada únicamente mediante las transformaciones:

$$S'(h) = uS(h)u^{-1}, \quad \alpha' = u\alpha, \quad \beta' = \beta u^{-1} \quad (4.39)$$

para cualquier elemento invertible $u \in H$ y cualquier $h \in H$. Notemos lo siguiente: si $\phi = 1_H \otimes 1_H \otimes 1_H$ es el 3-cociclo trivial, entonces $\alpha\beta = \beta\alpha = 1_H$, y más aún $\alpha = \beta = 1_H$ sin pérdida de generalidad. Entonces será coasociativo, la antípoda será la usual y una cuasi-álgebra de Hopf \mathcal{H} se convertirá en una álgebra de Hopf coasociativa.

Capítulo 5

Producto Estrella y Deformaciones

Los productos estrella son entendidos actualmente como deformaciones del producto punto a punto entre funciones del espacio de funciones suaves sobre alguna variedad \mathcal{M} . La teoría de productos estrella fue desarrollada generalmente en el contexto de *Cuantización por deformación* [25]. La asociatividad de los productos estrella reflejan la asociatividad de la composición de Operadores en mecánica cuántica. Actualmente, el interés en estos productos ha sido retomado, debido al descubrimiento de que, en Teoría de Cuerdas, las coordenadas de las cuerdas cuyo extremo están sujetos a una brana de Dirichlet en un fondo de campo de Kalb–Ramond (*B-Field*) no conmutan [26] [27], y entonces los productos estrella podrían ser una forma natural de abordar el problema. Años después se encontraría que, para un campo de Kalb-Ramond no-constante, el producto debería ser no solo no-conmutativo sino no-asociativo [28] [29] [30]. Más recientemente, efectos similares han sido descubiertos en el área de *Teoría de Cuerdas Cerradas*, donde fue demostrado que la presencia de un R -flujo no-geométrico origina una torcedura de la estructura Poissoniana, y una no-asociatividad en el correspondiente producto estrella [31] [32] [33]. A pesar de este renovado in-

terés, la situación general con estructuras de Poisson-*Twist* y productos estrella no asociativos sigue siendo mucho menos clara que con su contraparte asociativa. Teniendo ésto en cuenta, podemos hablar sobre el producto estrella en el espacio de fase, las nociones contemporaneas del producto estrella, y el formalismo necesario para definir un producto estrella no-asociativo.

5.1. Producto Estrella asociativo

5.1.1. Producto Estrella

Sea V un espacio vectorial finito-dimensional y sea $\pi \in V \otimes V$ un elemento que vive en el producto tensorial de V (no necesariamente anti-simétrico). Podemos comprender a V como una variedad suave, de forma que π es un tensor constante de rango 2. Así como su acción canónica sobre el producto tensorial de funciones suaves es a través de derivaciones:

$$\pi : C^\infty(V) \otimes C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V) \otimes C^\infty(V) \quad (5.1)$$

Si $\{\partial_i\}$ es una base lineal para V , identificada con una base para $\Gamma(TV)$, entonces en ésta base la operación de actual se lee como:

$$\pi(f \otimes g) = \pi^{ij}(\partial_i f) \otimes (\partial_j g) \quad (5.2)$$

Para enfatizar escribimos:

$$\begin{aligned} C^\infty(V) \otimes C^\infty(V) &\xrightarrow{\text{prod}} C^\infty(V) \\ f \otimes g &\mapsto f \cdot g \end{aligned}$$

Para el producto entre funciones usual.

Definiremos al **Producto estrella inducido por un tensor constante de rango 2** de la siguiente forma:

Sea (V, π) , entonces el producto estrella inducido por π en el álgebra de serie de potencias $C^\infty(V)[[\hbar]]$ en una variable \hbar con coeficientes en el espacio de funciones suaves sobre V como el mapeo lineal:

$$(-) \star_\pi (-) : C^\infty(V)[[\hbar]] \otimes C^\infty(V)[[\hbar]] \rightarrow C^\infty(V)[[\hbar]] \quad (5.3)$$

dado por:

$$(-) \star_\pi (-) := \text{prod} \circ \exp \left(\hbar \pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad (5.4)$$

Por lo tanto:

$$f \star_\pi g := f \cdot g + \hbar \pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^j} + \frac{\hbar^2}{2} \pi^{ij} \pi^{kl} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^j \partial x^l} + \dots \quad (5.5)$$

Dado (V, π) , bajo la definición anterior, el producto estrella es **asociativo** y unital, con elemento unidad a la función constante $1 \in C^\infty(V)$. De esta forma, el espacio vectorial $C^\infty(V)$ equipado con el producto estrella forma un álgebra asociativa y unital.

5.1.2. Producto de Moyal

El Producto de Moyal [34] (también conocido como producto de Groenewold [35]) corresponde a la cuantización por deformación formal de una variedad Poissoniana lineal, es decir, de un espacio vectorial V dotado por un bivector de Poisson $\pi \in V \wedge V$, considerado como un Campo bivectorial constante (invariante de traslación).

El producto estrella de Moyal sobre funciones $C^\infty(V)$ es dado, sobre funciones $f, g \in C^\infty(V)$, por:

$$f \star g := \text{prod} \circ \exp(\hbar\pi)(f, g) \quad (5.6)$$

donde en el exponente entendemos a π como un endomorfismo del producto tensorial $C^\infty(V) \otimes C^\infty(V)$ por diferenciación en cada argumento, por lo que la exponencial denota la correspondiente serie de potencias de aplicaciones iteradas del endomorfismo, y donde $\text{prod} : C^\infty(V) \otimes C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$ es el producto usual de funciones.

Ésto significa que dada una base $\{x^i\}_i$ de V tal que π tiene por componentes $\{\pi^{ij}\}_{ij}$ en esta base, el resultado en potencias del parámetro \hbar (en mecánica cuántica corresponde a la constante de Planck) corresponde a:

$$(f \star g) = f \cdot g + \hbar \sum_{i,j} \pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^j} + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{i,j,k,l} \pi^{kl} \pi^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^l \partial x^j} + \dots \quad (5.7)$$

Si π es antisimétrico e invertible, existirá $\omega \in V^* \otimes V^*$ tal que $\pi^{ij} \omega_{jk} = \delta_k^i$, y si las funciones f, g admiten descomposición en Fourier (es decir, son funciones cuyas derivadas decrecen rápidamente), entonces su correspondiente producto estrella es equivalente a:

$$(f \star_\omega g)(x) = \frac{(\det(\omega))^{2n}}{(2\pi\hbar)^{2n}} \int e^{-\frac{1}{i\hbar}\omega((x-\tilde{y}),(x-y))} f(y)g(\tilde{y})d^{2n}y d^{2n}\tilde{y} \quad (5.8)$$

En un espacio de fase bidimensional (x, p) puede ser definido, para funciones $f(x, p)$ y $g(x, p)$, de la forma:

$$f \star g = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\hbar^s}{2^s s!} \sum_t = 0^s (-1)^t \binom{s}{t} [\partial_x^{s-t} \partial_p^t f][\partial_x^t \partial_p^{s-t} g] \quad (5.9)$$

La primera aparición del corchete de moyal (o conmutador de productos estrella de Moyal) hace aparición en el contexto de la mecánica cuántica, a través de la

ecuación de Moyal para la función de Wigner,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, p, t) = H \star f - f \star H \quad (5.10)$$

con lo que podemos entender que el comportamiento de los operadores en mecánica cuántica se encuentra en una dualidad con la deformación del producto de las funciones en el espacio de fase, haciendo conexión con el concepto de cuantización por deformación. Debido a que por definición, este producto es asociativo, se corresponde en mecánica cuántica con objetos asociativos, lo cual supone un problema para fenomenología no asociativa.

5.1.3. Cuantización por deformación de Álgebra de Hopf vía Twist

En el área de la Teoría de Álgebras y estructuras bi-algebraicas, la formulación de la cuantización por deformación alrededor de un parámetro de deformación \hbar ha sido formulada a través de la introducción de un elemento \mathcal{F} al cual llamaremos *Twist de Drinfel'd*. Sea un álgebra de Hopf H , el Twist de Drinfel es un elemento invertible $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(1)} \otimes \mathcal{F}_{(2)} \in H[[\hbar]] \otimes H[[\hbar]]$, donde $H[[\hbar]]$ corresponded al espacio formado por todas las potencias formales en el parámetro \hbar , tal que dicho elemento satisface dos condiciones:

$$(\mathcal{F} \otimes 1_H)(\Delta \otimes \text{id}_H)(\mathcal{F}) = (1_H \otimes \mathcal{F})(\text{id}_H \otimes \Delta)(\mathcal{F}), \quad (5.11)$$

$$(\varepsilon \otimes \text{id}_H)(\mathcal{F}) = 1_H = (\text{id}_H \otimes \varepsilon)(\mathcal{F}) \quad (5.12)$$

Debido a estas dos condiciones \mathcal{F} es un 2-cociclo counital que puede ser usado para definir una nueva algebra de Hopf $H_{\mathcal{F}}$ con la misma álgebra remanente que $H[[\hbar]]$ pero con una estructura coalgebraica *torcida* (Twisted) dada por:

$$\Delta_{\mathcal{F}}(h) = \mathcal{F} \Delta(h) \mathcal{F}^{-1} \quad (5.13)$$

y antípoda

$$S_{\mathcal{F}}(h) = U_{\mathcal{F}}S(h)U_{\mathcal{F}}^{-1}, \quad \text{donde } U_{\mathcal{F}} = \mu \circ (\text{id}_H \otimes S)(\mathcal{F}) \quad (5.14)$$

para $h \in H$. Esta nueva bialgebra $H_{\mathcal{F}}$ es llamada una *Twisted Hopf Algebra*, que dada las condiciones necesarias del Twist de Drinfel'd (en particular la condición (5.11) llamada condición de 2-cociclo) será coasociativa y counital.

Si consideramos al álgebra H -modular izquierda (A, μ_A) (Definición algebramodularizquierda por añadir), para que el álgebra $H_{\mathcal{F}}$ actúe covariantemente sobre ésta es necesario deformar el producto binario $\mu_A : A \otimes A \rightarrow A$ a un nuevo producto definido por:

$$a \star b = \mu_A(\mathcal{F}^{-1} \triangleright (a \otimes b)) = (\mathcal{F}_{(1)}^{-1} \triangleright a)(\mathcal{F}_{(2)}^{-1} \triangleright b) \quad (5.15)$$

para $a, b \in A$. El producto deformado será llamado el producto estrella, y $(A[[\hbar]], \star)$ es una cuantización por deformación del álgebra (A, μ_A) . Debido a la condición de 2-cociclo del Twist, el producto estrella en esta formulación es asociativa, y la condición de counitaridad establece que ambas estructuras algebraicas comparten el mismo elemento unidad. Entonces, ¿cómo construimos un producto estrella que sea no-asociativo?

5.2. Producto Estrella no-asociativo

En vista que buscamos modelar fenomenos no-asociativos, necesitaremos introducir a un producto estrella que sea no-asociativo. Como veremos próximamente, el espacio-tiempo de Snyder posee una estructura de Algebroides de Hopf, aunque corresponde también a un cuasi-bialgebroides. La estructura de Algebroides de Hopf la emplearemos para obtener el Twist asociado a la deformación del

espacio de fase cuántico, mientras que la estructura de cuasi-bialgebroides nos da una categorización más certera del espacio-tiempo de Snyder, encontrando más información sobre la violación de la asociatividad.

Una manera útil de construir Algebras del tipo cuasi-Hopf es comenzar con un álgebra de Hopf H con un elemento invertible $\mathcal{F} \in H[[\hbar]] \otimes H[[\hbar]]$ que no necesariamente satisfaga la condición de cociclo (5.11). En particular, si (H, ϕ, \mathcal{R}) es una cuasi-Algebra de Hopf cuasi-triangular y \mathcal{F} es un elemento invertible arbitrario en $H[[\hbar]] \otimes H[[\hbar]]$ tal que satisfaga (5.12), entonces $(H_{\mathcal{F}}, \phi_{\mathcal{F}}, \mathcal{R}_{\mathcal{F}})$ definido como se sigue es también una cuasi-algebra de Hopf cuasi-triangular. Tendrá la misma álgebra y counidad que H , con un coproducto twist y una estructura cuasi-triangular definida por las mismas fórmulas (5.13), (5.14), con antípoda:

$$S_{\mathcal{F}} = S, \quad \alpha_{\mathcal{F}} = S(\mathcal{F}_{(1)}^{-1})\alpha F_{(2)}^{-1}, \quad \beta_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{(1)}\beta S(\mathcal{F}_{(2)}) \quad (5.16)$$

y con un 3-cociclo dado por el coborde

$$\phi_{\mathcal{F}} := \mathcal{F}_{23}[(\text{id}_H \otimes \Delta)(\mathcal{F})]\phi[(\Delta \otimes \text{id}_H)(\mathcal{F}^{-1})]F_{12}^{-1} \quad (5.17)$$

donde $\mathcal{F}_{23} = 1_H \otimes \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_{12}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \otimes 1_H$ y $\phi_{\mathcal{F}} \in H[[\hbar]] \otimes H[[\hbar]] \otimes H[[\hbar]]$ es llamado el *Asociador*. Por lo tanto, tenemos los elementos para definir un producto estrella no-asociativo:

Un álgebra H -módulo izquierda (A, μ_A) es entonces *torcida* a un **Álgebra no-asociativa** $(A[[\hbar]], \star)$ de la misma manera que para un álgebra de Hopf, con la nueva aparición del Asociador al momento de reagrupar productos de tres elementos de la forma:

$$(a \star b) \star c = (\phi_{\mathcal{F}_{(1)}} \triangleright a) \star [(\phi_{\mathcal{F}_{(2)}} \triangleright b) \star (\phi_{\mathcal{F}_{(3)}} \triangleright c)], \quad (5.18)$$

para $a, b, c \in A$. La condición de cociclo en $\phi_{\mathcal{F}}$ se asegura de que las distintas formas de reagrupar productos de orden superior mediante insertar $\phi_{\mathcal{F}}$ arrojen los mismos resultados.

Capítulo 6

Álgebra (algebroid) de Hopf del Espacio-tiempo cuantizado

6.1. Estructura algebraica y co-algebraica del Álgebra de Heisenberg \mathcal{H}

El álgebra de Heisenberg \mathcal{H} , es decir el espacio de fase cuántico, es generado por las coordenadas conmutativas x_μ y los momenta p_μ , que satisfacen las siguientes relaciones:

$$[x_\mu, x_\nu] = x_\mu x_\nu - x_\nu x_\mu = 0 \quad (6.1)$$

$$[p_\mu, p_\nu] = p_\mu p_\nu - p_\nu p_\mu = 0 \quad (6.2)$$

$$[p_\mu, x_\nu] = p_\mu x_\nu - x_\nu p_\mu = -i\eta_{\mu\nu}1 \quad (6.3)$$

El espacio de fase cuántico \mathcal{H} es definido como la álgebra generada por x_μ y p_μ . Los elementos base en \mathcal{H} están elegidos de forma que son monomios normalmente ordenados, es decir, las coordenadas x_μ están a la izquierda de las momenta p_μ . \mathcal{H} puede ser simbólicamente escrito como $\mathcal{H} = \mathcal{AT}$, donde \mathcal{A} es el

álgebra conmutativa unital generada por x_μ y \mathcal{T} es el álgebra conmutativa unital generada por p_μ .

Definimos la acción $\triangleright : \mathcal{H} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ de un elemento $h \in \mathcal{H}$ sobre una función $f(x) \in \mathcal{A}$, de la forma:

$$x_\mu \triangleright f(x) = x_\mu f(x), \quad p_\mu \triangleright f(x) = -i \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} \quad (6.4)$$

$$p_\mu \triangleright f = [p_\mu, f] \triangleright 1, \quad \forall f \in \mathcal{A} \quad (6.5)$$

$$p_\mu \triangleright 1 = 0 \quad (6.6)$$

De lo cual se sigue que

$$\mathcal{H} \triangleright 1 = \mathcal{A} \quad (6.7)$$

$$\mathcal{A} \triangleright 1 = \mathcal{A} \quad (6.8)$$

con la propiedad, para dos elementos $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$:

$$h_1 h_2 \triangleright f(x) = h_1 \triangleright (h_2 \triangleright f(x)) \quad (6.9)$$

De aquí vemos que ya que $\mathcal{H} \triangleright \mathcal{A} = \mathcal{A}$ entonces \mathcal{A} es \mathcal{H} -módulo. Debido a que x_μ es multiplicativo, su correspondiente regla de Leibniz es de la forma:

$$x_\mu \triangleright f(x)g(x) = \alpha(x_\mu f(x))g(x) + (1 - \alpha)f(x)(x_\mu g(x)), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (6.10)$$

Ahora, la regla de Leibniz y el coproducto están relacionados de la forma:

$$m((\Delta_0 h) \triangleright (f(x) \otimes g(x))) = h \triangleright (f(x)g(x)), \quad \forall h \in \mathcal{H} \quad (6.11)$$

Lo que nos lleva a verificar que el coproducto de x_μ es:

$$\Delta_0 x_\mu = \alpha x_\mu \otimes 1 + (1 - \alpha)1 \otimes x_\mu = [1 \otimes x_\mu] = [x_\mu \otimes 1] \in A \otimes A/\mathcal{R}_0 \quad (6.12)$$

Usualmente es elegido $\alpha = 0$, pero se pierde el hecho de que x_μ al ser multiplicativo induce una relación $\mathcal{R}_0 = x_\mu \otimes 1 - 1 \otimes x_\mu = 0$ la cual genera clases de equivalencia en $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

Por otro lado, para p_μ al ser derivativo, su correspondiente acción es de la forma:

$$p_\mu \triangleright f(x)g(x) = (p_\mu f(x))g(x) + f(x)(p_\mu(x)) \quad (6.13)$$

lo cual nos evidencia que su coproducto es

$$\Delta_0 p_\mu = p_\mu \otimes 1 + 1 \otimes p_\mu \quad (6.14)$$

Además, $\Delta_0 \mathcal{T} \subset \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ es la imagen de \mathcal{T} en $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. Las álgebras $\Delta_0(\mathcal{T})$ son isomorfas a \mathcal{T} , mientras que se puede mostrar que, ya que \mathcal{R} , genera clases de equivalencia en $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, $\Delta_0(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} / \mathcal{R}_0$ es un álgebra isomorfa a \mathcal{A} . En general el requisito de consistencia es que para todo $h \in \mathcal{H}$, el coproducto $\Delta_0 h$ debe ser consistente con la relación \mathcal{R}_0 , es decir

$$[\Delta_0 h, \mathcal{R}_0] = 0, [(\mathcal{R}_0)_\mu, (\mathcal{R}_0)_\nu] = 0 \quad (6.15)$$

Con lo dicho anteriormente es posible verificar que independiente la elección de α , dada la relación \mathcal{R}_0 , obtenemos:

$$\Delta_0([p_\mu, x_\nu]) = [\Delta_0 p_\mu, \Delta_0 x_\nu] = -i\eta_{\mu\nu} \cdot 1 \otimes 1 \quad (6.16)$$

lo cual nos muestra que el coproducto $\Delta_0 h$, $h \in \mathcal{H}$ es compatible con la relación \mathcal{R}_0 . En consecuencia, $\Delta_0(\mathcal{H}) = \Delta_0(\mathcal{A})\Delta_0(\mathcal{T})$ es isomorfa a \mathcal{H} , por lo que la coálgebra del álgebra de Heisenberg no-deformada son de esta forma compatibles en estructura [12].

El **algebroid de Hopf para Heisenberg no-deformado** [36] es definido por el álgebra total \mathcal{H} (el espacio de fase cuántico), una álgebra base \mathcal{A} , mapeo multiplicación m , coproducto Δ_0 , antípoda S_0 , counidad ε_0 , mapeo fuente (**source map**)

α_0 y mapeo objetivo (**target map**) β_0 .

El coproducto es el mapeo dado por (6.12) y (6.14). Éste es un homomorfismo que satisface la condición de coasociatividad:

$$(\Delta_0 \otimes 1)\Delta_0 = (1 \otimes \Delta_0)\Delta_0 \quad (6.17)$$

Debido a que los elementos del álgebra base conmutan, no precisan de un mapeo que hagan que funciones $f(x)$ de las coordenadas conmuten, lo que nos lleva a verificar que el mapeo objetivo (target map) $\alpha_0 : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{H}$ y el mapeo fuente (source map) $\beta_0 : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{H}$ son iguales para $f(x) \in \mathcal{A}$, y están dados por $\alpha_0(f(x)) = \beta_0(f(x)) = f(x)$, y llevan a que los productos λ y ρ definidos en (4.26) (4.27) coincidan con el usual. Así su estructura de algebroide es trivial. Debido a ésto, y empleando la propiedad $m(S_0 \otimes 1)\Delta x_\mu = m(1 \otimes S_0)\Delta x_\mu$ es fácil verificar que la antípoda S_0 el cual es un mapeo $S_0 : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ y un antihomomorfismo $S_0(h_1 h_2) = S_0(h_2)S_0(h_1)$, $\forall h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ para las coordenadas se obtiene:

$$\begin{aligned} m(S_0 \otimes 1)\Delta x_\mu &= m(S_0 \otimes 1)(x_\mu \otimes 1) \\ &= m(S_0(x_\mu) \otimes 1) \\ &= S_0(x_\mu) \\ m(1 \otimes S_0)\Delta x_\mu &= m(x_\mu \otimes S_0(1)) \\ &= x_\mu \\ \implies S_0(x_\mu) &= x_\mu \end{aligned} \quad (6.18)$$

Por otro lado, para los momenta, debido a que p_μ es del tipo primitivo, obtenemos que una antípoda debe obedecer:

$$S_0(p)p_\mu = p_\mu S_0(p) \wedge (S_0(p) \oplus p) = 0 \quad (6.19)$$

por lo que su antípoda corresponde a:

$$S_0(p_\mu) = -p_\mu \quad (6.20)$$

Debemos recordar que ésta no corresponde a la noción de antípoda de un Álgebra de Hopf sino a una compatible con la de Algebroide de Hopf [22] [23]. Finalmente, la counidad $\varepsilon_0 : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{A}$ es definida por $\varepsilon_0(h) = h \triangleright 1 \in \mathcal{A} \subset \mathcal{H}, \forall h \in \mathcal{H}$. Ésto nos evidencia que:

$$\varepsilon_0(x_\mu) = x_\mu \quad (6.21)$$

$$\varepsilon_0(p_\mu) = 0 \quad (6.22)$$

Realizando un procedimiento análogo, en la representación en el espacio de momentum obtenemos:

$$\varepsilon_0^{mom.}(p_\mu) = p_\mu, \varepsilon_0^{mom.}(x_\mu) = 0 \quad (6.23)$$

$$\Delta_0^{mom.}(p_\mu) = p_\mu \otimes 1, \Delta_0^{mom.}(x_\mu) = x_\mu \otimes 1 + 1 \otimes x_\mu \quad (6.24)$$

$$S_0^{mom.}(p_\mu) = p_\mu, S_0^{mom.}(x_\mu) = -x_\mu \quad (6.25)$$

Ésta correspondería a la estructura de algebra (y algebroide) de Hopf de Heisenberg sin deformar.

6.2. Estructura algebraica del Álgebra de Heisenberg deformada $\hat{\mathcal{H}}$

6.2.1. Algebroide de Hopf *Twisted*

Cuando tratamos con espacios no-conmutativos, el espaciotiempo es generado por un conjunto de coordenadas \hat{x}_μ , las cuales no conmutan, es decir, la relación \mathcal{R}_0 no se mantiene, pero es reemplazada por un conjunto diferente que determina el tipo de espaciotiempo no-conmutativo.

Para un gran número de espaciotiempos es posible encontrar un isomorfismo entre un álgebra no-conmutativa \hat{A} , generado por los \hat{x}_μ , y el álgebra \mathcal{A}_* , que es generada por las coordenadas conmutativas x_μ , pero la multiplicación es reemplazada con el producto estrella (*star product*). El producto estrella entre dos elementos $f(x), g(x) \in \mathcal{A}_*$ es definido por:

$$f(x) \star g(x) = \hat{f}(\hat{x})\hat{g}(\hat{x}) \triangleright 1 \quad (6.26)$$

donde $\hat{f}(\hat{x})$ y $\hat{g}(\hat{x})$ son elementos de \hat{A} . La acción \triangleright fue definida anteriormente en (6.4), y para poder calcular el lado derecho de (6.26) es necesario elegir una realización específica de las coordenadas no-conmutativas \hat{x}_μ en términos de las variables del espacio de fase conmutativo x_μ y p_μ .

El espacio de fase deformado, generado por \hat{x}_μ y p_μ , puede ser denotado como el **álgebra de Heisenberg deformada** $\hat{\mathcal{H}}$. Además, es conveniente definir la acción $\blacktriangleright: \hat{\mathcal{H}} \otimes \hat{A} \mapsto \hat{A}$, donde simbólicamente $\hat{\mathcal{H}} = \hat{A}\mathcal{T}$, \hat{A} siendo el subálgebra de $\hat{\mathcal{H}}$ generado por \hat{x}_μ y \mathcal{T} el subálgebra de $\hat{\mathcal{H}}$ generada por p_μ .

$$\hat{x}_\mu \blacktriangleright \hat{g}(\hat{x}) = \hat{x}_\mu \hat{g}(\hat{x}) \quad (6.27)$$

$$p_\mu \blacktriangleright 1 = 0 \quad (6.28)$$

$$p_\mu \blacktriangleright \hat{x}_\nu = [p_\mu, \hat{x}_\nu] \blacktriangleright 1 = -i\eta_{\mu\nu} \quad (6.29)$$

$$\hat{f} \blacktriangleright \hat{g} = \hat{f}\hat{g}, \forall \hat{f}, \hat{g} \in \hat{A} \quad (6.30)$$

con la propiedad, para dos elementos $\hat{h}_1, \hat{h}_2 \in \hat{\mathcal{H}}$:

$$\hat{h}_1 \hat{h}_2 \blacktriangleright \hat{f} = \hat{h}_1 \blacktriangleright (\hat{h}_2 \blacktriangleright \hat{f}) \quad (6.31)$$

De lo que obtenemos:

$$\hat{\mathcal{H}} \blacktriangleright 1 = \hat{A} \quad (6.32)$$

$$\hat{A} \blacktriangleright 1 = \hat{A} \quad (6.33)$$

Por la regla de Leibniz

$$\hat{x}_\mu \blacktriangleright \hat{f}(\hat{x})\hat{g}(\hat{x}) = \hat{x}_\mu \hat{f}(\hat{x})\hat{g}(\hat{x}) \quad (6.34)$$

se sigue que el coproducto de $\Delta\hat{x}_\mu$ es

$$\Delta\hat{x}_\mu = \hat{x}_\mu \otimes 1 \quad (6.35)$$

La relación entre los coproductos deformados Δ y los sin deformar Δ_0 define los correspondientes operadores *twist*

$$\Delta h = \mathcal{F}\Delta_0 h \mathcal{F}^{-1}, \quad \forall h \in \mathcal{H} \quad (6.36)$$

Por lo tanto

$$\Delta x_\mu = \mathcal{F}\Delta_0 x_\mu \mathcal{F}^{-1}, \quad \Delta p_\mu = \mathcal{F}\Delta_0 p_\mu \mathcal{F}^{-1} \quad (6.37)$$

El producto estrella puede también ser escrito en término del operador *twist*:

$$f(x) \star g(x) = m_\star(f(x) \otimes g(x)) = m(\mathcal{F}^{-1} \triangleright (f \otimes g)) \quad (6.38)$$

donde m es el mapeo multiplicación usual $m(h_1 \otimes h_2) = h_1 h_2$, y m_\star es definido como el mapeo $m_\star(h_1 \otimes h_2) = h_1 \star h_2$.

Puede ser mostrado que, al igual que en caso no-deformado, $\Delta\mathcal{H}$ es isomorfo a \mathcal{H} , y que $\Delta\mathcal{A}$ es isomorfo a \mathcal{A} . Sea $\mathcal{R}_\mu = \mathcal{F}(\mathcal{R}_0)_\mu \mathcal{F}^{-1}$, los elementos \mathcal{R}_μ satisfacen las siguientes propiedades:

$$[\Delta x_\mu, \mathcal{R}] = [\Delta p_\mu, \mathcal{R}] = [\mathcal{R}_\mu, \mathcal{R}_\nu] = 0 \quad (6.39)$$

Ahora, el *twist* \mathcal{F} es un mapeo $\mathcal{F} : \Delta_0\mathcal{H} \mapsto \Delta\mathcal{H}$, mientras que su inverso es un mapeo $\mathcal{F}^{-1} : \Delta\mathcal{H} \mapsto \Delta_0\mathcal{H}$. Es importante notar que hemos establecido una clase de equivalencia \mathcal{R} en $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})_{\mathcal{F}}$ análogo al caso anterior.

El algebroide de Hopf *Twisted* para éste caso será definido por el álgebra total

\mathcal{H} , el álgebra base $\hat{\mathcal{A}}$ (tomados en alguna realización particular), la multiplicación m , el coproducto *twisted* $\Delta_{\mathcal{F}} = \Delta$, la antípoda $S_{\mathcal{F}} = S$, counidad $\varepsilon_{\mathcal{F}} = \hat{\varepsilon}$. Ésta estructura satisface los axiomas de un algebroide de Hopf. Usando el operador \mathcal{F} y su inverso, los cuales satisfacen la condiciones de cociclo y normalización, el coproducto *twisted* es definido como $\Delta h = \mathcal{F}\Delta_0 h\mathcal{F}^{-1}$, para todo elemento de \mathcal{H} , el cual satisface la condición de coasociatividad. Ahora, la antípoda $S : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ es un antihomomorfismo definido por

$$S(h) = \chi S_0 \chi^{-1} \quad (6.40)$$

donde $\chi^{-1} = m((S_0 \otimes 1)\mathcal{F}^{-1})$ La counidad $\hat{\varepsilon} : \mathcal{H} \mapsto \hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H}$ es definido por:

$$\hat{\varepsilon}(h) = m(\mathcal{F}^{-1}(\triangleright \otimes 1)(\varepsilon_0(h) \otimes 1)) = h \blacktriangleright 1 \quad (6.41)$$

donde se hace la identificación $\alpha\varepsilon \mapsto \hat{\varepsilon}$ y $\beta\varepsilon \mapsto S^{-1}\hat{\varepsilon}$. De lo cual se sigue que, $\forall f, g \in \mathcal{A}$ y $\forall \hat{f}, \hat{g} \in \hat{\mathcal{A}}$:

$$\hat{\varepsilon}(f) = \hat{f}, \varepsilon_0(\hat{f}) = f \quad (6.42)$$

$$\hat{\varepsilon}(f \star g) = \hat{f}\hat{g}, \varepsilon_0(\hat{f}\hat{g}) = f \star g \quad (6.43)$$

$$\hat{\varepsilon}(\varepsilon_0(\hat{f})) = \hat{f}, \varepsilon_0(\hat{\varepsilon}(f)) = f \quad (6.44)$$

Respecto al mapeo fuente y objetivo pueden tambien ser reconstruido del operador *twist*. Primero, definimos el mapeo $\alpha : \mathcal{A}_* \mapsto \hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H}$ y $\beta : \mathcal{A}_* \mapsto \mathcal{H}$ por:

$$\alpha(f(x)) = m(\mathcal{F}^{-1}(\triangleright \otimes 1)(\alpha_0(f(x)) \otimes 1)), \alpha_0(f(x)) = f(x) \quad (6.45)$$

$$\beta(f(x)) = m(\hat{\mathcal{F}}^{-1}(\triangleright \otimes 1)(\beta_0(f(x)) \otimes 1)), \beta_0(f(x)) = f(x) \quad (6.46)$$

donde $\hat{\mathcal{F}} = \tau_0 \mathcal{F} \tau_0$, donde τ_0 es el operador *flip*, definido como $\tau_0(h_1 \otimes h_2) = h_2 \otimes h_1$.

Así, los operadores fuente y objetivo están dados por:

$$\hat{\alpha} = \alpha\varepsilon_0|_{\hat{\mathcal{A}}}, \hat{\beta} = \beta\varepsilon_0|_{\hat{\mathcal{A}}} \quad (6.47)$$

El coproducto Δ , la antípoda S y la counidad $\hat{\varepsilon}$ satisfacen las relaciones

$$m(\hat{\varepsilon} \otimes 1)\Delta = m(1 \otimes S^{-1}\hat{\varepsilon}S)\Delta = 1 \quad (6.48)$$

$$m(S \otimes 1)\Delta = S^{-1}\hat{\varepsilon}S \quad (6.49)$$

$$m(1 \otimes S)\Delta = \hat{\varepsilon} \quad (6.50)$$

las cuales son compatibles con la estructura de un algebroide de Hopf. Su construcción formal puede ser revisada en los trabajos de Ping Xu, donde construye una estructura *Twisted* a partir de una estructura de algebroide de Hopf [22].

6.2.2. Estructura de algebroide de Hopf de $\hat{\mathcal{H}}$

El espacio de fase deformado $\hat{\mathcal{H}}$, generado por las coordenadas no-conmutativas \hat{x}_μ y las momenta p_μ también tiene una estructura de algebroide de Hopf, que es definido por el álgebra total $\hat{\mathcal{H}}$, el álgebra base $\hat{\mathcal{A}} \subset \hat{\mathcal{H}}$, la multiplicación m , coproducto Δ , antípoda S , counidad $\hat{\varepsilon}$, mapeo fuente $\hat{\alpha}$ y mapeo objetivo $\hat{\beta}$. La counidad es definida por

$$\hat{\varepsilon}(\hat{h}) = \hat{h} \blacktriangleright 1, \forall \hat{h} \in \hat{\mathcal{H}} \quad (6.51)$$

Es útil introducir a \hat{y}_μ como la multiplicación por la derecha de \hat{x}_μ

$$\hat{y}_\mu \blacktriangleright \hat{f}(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})\hat{x}_\mu \quad (6.52)$$

de lo cual se sigue que

$$\Delta\hat{y}_\mu = 1 \otimes \hat{y}_\mu \quad (6.53)$$

Aquí tenemos la relación $\hat{Q}_\mu = \hat{y}_\mu \otimes 1 - 1 \otimes \hat{x}_\mu$, la cual tiene la propiedad $\hat{Q}_\mu \blacktriangleright \hat{\mathcal{A}} \otimes \hat{\mathcal{A}} = 0$. La antípoda S es definida por $S(\hat{y}_\mu) = \hat{x}_\mu$, y satisface las propiedades:

$$m(\hat{\varepsilon} \otimes 1)\Delta = m(1 \otimes S^{-1}\hat{\varepsilon}S)\Delta = 1 \quad (6.54)$$

$$m(S \otimes 1)\Delta = S^{-1}\hat{\varepsilon}S \quad (6.55)$$

$$m(1 \otimes S)\Delta = \hat{\varepsilon} \quad (6.56)$$

La antípoda para $p_\mu, S(p_\mu)$ se obtiene del que $m(S \otimes 1)\Delta(p_\mu) = m(1 \otimes S)\Delta(p_\mu) = 0$. El mapeo fuente $\hat{\alpha} : \hat{\mathcal{A}} \mapsto \hat{\mathcal{H}}$ es un homomorfismo y el mapeo objetivo $\hat{\beta} : \hat{\mathcal{A}} \mapsto \hat{\mathcal{H}}$ es un antihomomorfismo definido por $\hat{\beta} = S^{-1}\hat{\alpha}$.

6.3. Estructura algebraica del Espacio-tiempo de Snyder

Las estructuras de co-producto y de producto estrella puede ser obtenida de la siguiente forma: Sea 1 el elemento unidad del espacio de funciones conmutativas $\psi(x)$. Pero, debido a (3.44) la acción de funciones no-conmutativas sobre 1 está dado por:

$$\hat{\psi}(\hat{x}) \triangleright 1 = \psi'(x) \quad (6.57)$$

Ésta relación provee un mapeo entre el espacio de funciones no-conmutativas y las funciones conmutativas. Notemos que, en general $\psi'(x)$ y $\psi(x)$ son diferentes. Consideremos ahora una onda plana no-conmutativa $e^{i(k\hat{x})}$, donde \hat{x}_μ depende de la realización y k_μ son los autovalores de $p_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Puede ser demostrado [37] que:

$$e^{i(k\hat{x})} \triangleright 1 = e^{i(Kx)} \quad (6.58)$$

donde $K_\mu = K_\mu(k)$ es el momentum deformado, el cual claramente dependerá de la realización. En el límite conmutativo $s \rightarrow 0$ el momento deformado debe ser tal que $K_\mu = k_\mu$. En consecuencia obtenemos una transformación inversa $K_\mu^{-1} = K_\mu^{-1}$, donde:

$$e^{i(K^{-1}\hat{x})} \triangleright 1 = e^{i(kx)} \quad (6.59)$$

Ahora, consideremos dos ondas planas etiquetadas por los momenta k_μ y q_μ respectivamente. Su acción sobre el elemento unidad estará dado por:

$$e^{i(k\hat{x})} (e^{i(qx)}) = e^{iP(k,q)x} \quad (6.60)$$

Por lo que el momento deformado K_μ es determinado por $K_\mu = P_\mu(k, 0)$, donde $F_\mu(k, q)$ especifica tanto al co-producto como al producto estrella, el cual puede ser obtenido a través de la implementación de Baker-Campbell-Hausdorf.

El producto estrella entre dos ondas planas es definido por $F_\mu(k, q)$:

$$\begin{aligned} e^{i(kx)} \star e^{i(qx)} &= e^{i(K^{-1}(k)\hat{x})} e^{i(K^{-1}(q)\hat{x})} \triangleright 1 \\ &= e^{i(K^{-1}(k)\hat{x})} (e^{i(qx)}) = e^{i(\mathcal{D}(k,q)x)} \end{aligned} \quad (6.61)$$

donde

$$\mathcal{D}_\mu(k, q) = P_\mu(K^{-1}(k), q) \quad (6.62)$$

El producto estrella define, por (6.58) y (6.59), un mapeo de Weyl (es decir, una correspondencia entre operadores en un espacio de Hilbert y funciones del espacio de Fase) desde espacios conmutativos a los no-conmutativos mediante una correspondencia 1 a 1 entre $e^{i(k\hat{x})}$ y $e^{i(Kx)}$. El co-producto para los momenta Δp_μ (y su correspondiente regla de Leibniz) es obtenida por $\mathcal{D}_\mu(k, q)$ como:

$$\Delta p_\mu = \mathcal{D}_\mu(p \otimes 1, 1 \otimes p) \quad (6.63)$$

En particular, la función \mathcal{D}_μ describe la suma no-abeliana en el espaciotiempo no-conmutativo de Snyder:

$$\mathcal{D}_\mu(k, q) = k_\mu \oplus q_\mu \neq k_\mu + q_\mu \quad (6.64)$$

Ésta debe ser tal que en el límite $s \rightarrow 0$ se recupere la regla abeliana de suma $\mathcal{D}_\mu(k, q) = k_\mu + q_\mu$. Podemos obtener el producto estrella entre dos funciones genéricas f y g de las coordenadas conmutativas a partir de (6.61). Adoptando la relación entre ondas planas (6.61), por lo que el resultado general para el producto estrella es:

$$(f \star g)(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ z \rightarrow x}} e^{ix_\mu (\mathcal{D}^\mu(p_y, p_z) - p_y^\mu - p_z^\mu)} f(y)g(z) \quad (6.65)$$

El **producto estrella** \star (o *producto de Moyal*) es una operación binaria actuando sobre el álgebra de funciones definida en el espacio conmutativo usual y codifica características que reflejan la naturaleza no-conmutativa del espaciotiempo de Snyder. Éste está únicamente definido, pero su forma se relaciona directamente a la realización elegida. Cualquiera sea la realización, el producto estrella es no-asociativa. El correspondiente co-producto será no-coasociativo. Toda esta construcción está bien definida y nos permite obtener, a partir de una realización, la estructura de co-producto y el producto estrella subyacentes en el espaciotiempo de Snyder. También es válido el camino inverso, donde se cuenta con un producto estrella o un co-producto y se recupera información de la realización. Para finalizar, debido a las relaciones (3.39)-(3.46), el coproducto $\Delta M_{\mu\nu}$ es trivial [21] :

$$\Delta M_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu} \quad (6.66)$$

La antípoda $S(g)$ para los elementos de Poincaré es definida por la ecuación:

$$\mathcal{D}(g, S(g)) = \mathcal{D}(S(g), g) = 0 \quad (6.67)$$

Como veremos más adelante, las antípodas para $g = (p_\mu, M_{\mu\nu})$ no son deformadas, es decir:

$$S(p_\mu) = -p_\mu \quad S(M_{\mu\nu}) = -M_{\mu\nu}$$

Por otro lado, la co-unidad $\varepsilon(g)$ también serán triviales para cualquier elemento de Poincaré. Finalmente, la relación de conmutación de los co-productos de los generadores de Lorentz y de los momenta satisfacerán idénticamente la álgebra de los momenta y los generadores de Lorentz, por lo que la gran conclusión a sacar es que **la simetría de Lorentz no es deformada ni a nivel algebraico ni co-algebraico**. Las deformaciones quedan codificadas sólo en el co-producto de los momenta el cual es no-co-asociativo. Por otro lado, el producto \star es no-asociativo

y un homomorfismo relaciona estas estructuras. Así, el sector algebraico y el co-algebraico son compatibles, por lo que los generadores $(p_\mu, M_{\mu\nu})$ de Poincaré forman un álgebra generalizada de Hopf, llamada algebroide de Hopf.

Sea la realización de Snyder (3.49). Primero que todo sabemos que para Heisenberg modificado, debido a que \hat{x}_μ actúa multiplicativamente el coproducto $\Delta\hat{x}_\mu$ está dado por (6.35). Por otro lado sabemos, por lo definido anteriormente, sabemos que el hacer actuar una onda plana (no conmutativa) sobre una onda plana conmutativa nos permite determinar la adición de momentum (6.62). Si bien éste calculo puede realizarse, existe una manera mucho más elegante de obtener la adición de momentum deformada. Consideremos a la siguiente familia de operadores:

$$P_\mu(\lambda k, p) = e^{-i\lambda k \cdot \hat{x}} p_\mu e^{i\lambda k \cdot \hat{x}} \quad (6.68)$$

El cual puede actuar sobre una onda plana, obteniendo la expresión:

$$e^{-i\lambda k \cdot \hat{x}} p_\mu e^{i\lambda k \cdot \hat{x}} \triangleright e^{iq \cdot x} = P_\mu(\lambda k, q) e^{iq \cdot x} \quad (6.69)$$

Si derivamos a ambos lados, dada la relación de conmutación (3.49), obtendremos la siguiente ecuación diferencial con su correspondiente condición inicial:

$$\frac{dP_\mu(\lambda k, q)}{d\lambda} = k_\alpha (\delta_\mu^\alpha + s P^\alpha P_\mu) \quad (6.70)$$

$$P_\mu(0, q) = q_\mu \quad (6.71)$$

donde k_μ, q_μ son autovalores de p_μ . La solución a la ecuación diferencial es:

$$P_\mu(k, q) = \frac{q_\mu + \left[\frac{\sin \sqrt{sk^2}}{\sqrt{sk^2}} + \frac{k \cdot q}{k^2} (\cos \sqrt{sk^2} - 1) \right] k_\mu}{\cos \sqrt{sk^2} - \frac{k \cdot q}{k^2} \sqrt{sk^2} \sin \sqrt{sk^2}} \quad (6.72)$$

Ésto lleva a que

$$K_\mu(k) = P_\mu(k, q = 0) = \frac{\tan \sqrt{sk^2}}{\sqrt{sk^2}} k_\mu \Rightarrow K_\mu^{-1}(k) = \frac{\arctan \sqrt{sk^2}}{\sqrt{sk^2}} k_\mu \quad (6.73)$$

Para finalmente obtener la regla de adición de momentas:

$$\mathcal{D}_\mu(k, q) = P_\mu(K^{-1}(k), q) = \frac{1}{1 - sk \cdot q} \left\{ \sqrt{1 + sk^2} q_\mu + \left[1 - \frac{sk \cdot q}{1 + \sqrt{1 + sk^2}} \right] k_\mu \right\} \quad (6.74)$$

donde utilizamos las identidades:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\tan^2 \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos el coproducto para los momenta Δp_μ :

$$\Delta p_\mu = \mathcal{D}_\mu(p \otimes 1, 1 \otimes p) \quad (6.75)$$

$$= \frac{1}{1 - sp_\alpha \otimes p^\alpha} \left\{ p_\mu \otimes 1 + \sqrt{1 + sp^2} \otimes 1 \otimes p_\mu - \frac{sp_\nu p_\mu \otimes p^\nu}{1 + \sqrt{1 + sp^2} \otimes 1} \right\} \quad (6.76)$$

Coproducto que es corroborado con el calculado en [21]. Dado que el coproducto busca ser un morfismo entre Álgebras Asociativas Unitarias, sabemos que, dada la definición de $M_{\mu\nu} = i(\hat{x}_\mu \hat{p}_\nu - \hat{x}_\nu \hat{p}_\mu)$ podemos calcular su coproducto de la forma:

$$\Delta M_{\mu\nu} = i(\Delta \hat{x}_\mu \Delta p_\nu - \Delta \hat{x}_\nu \Delta p_\mu) \quad (6.77)$$

Si consideramos la realización de Snyder:

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + sx \cdot p p_\mu \quad (6.78)$$

Es fácil demostrar que $\Delta M_{\mu\nu} = i(\Delta x_\mu \Delta p_\nu - \Delta x_\nu \Delta p_\mu) = \Delta_0 M_{\mu\nu}$, es decir, el coproducto de los generadores de Lorentz no son deformados. Y, por Leibniz, podemos saber cuánto es, teniendo en consideración (6.4):

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} \triangleright f(x)g(x) &= i(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu) \triangleright f(x)g(x) \\ &= i(x_\mu [(p_\nu f(x))g(x) + f(x)(p_\nu g(x))] - x_\nu [(p_\mu f(x))g(x) + f(x)(p_\mu g(x))]) \\ &= i([(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu) f(x)]g(x) + f(x)[(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu)g(x)]) \\ &= (M_{\mu\nu} f(x))g(x) + f(x)(M_{\mu\nu} g(x)) \end{aligned} \quad (6.79)$$

Por lo que es trivial ver que:

$$\Delta M_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu} \quad (6.80)$$

Ahora, procedamos al cálculo de un objeto muy importante, pues conecta a los coproductos deformados con los sin deformar: el Twist. Sabemos que los coproductos están relacionados, en particular el de p_μ , de la forma:

$$\Delta p_\mu = \mathcal{F} \Delta_0 p_\mu \mathcal{F}^{-1} \quad (6.81)$$

Supongamos que \mathcal{F} es de la forma:

$$\mathcal{F} = e^{\sum_k f_k s^k} \quad (6.82)$$

Debido a que conocemos Δp_μ , podemos expandirlo en potencias de s , de la forma:

$$\begin{aligned} \Delta p_\mu &= \sum_i \Delta^{(i)} p_\mu |_{s=0} \frac{s^i}{i!} = \sum_i \Delta_i p_\mu s^i \\ &= p_\mu \otimes 1 + 1 \otimes p_\mu + \left(\frac{1}{2} p_\mu p_\alpha \otimes p^\alpha + p_\alpha \otimes p^\alpha p_\mu + \frac{1}{2} p^2 \otimes p_\mu \right) \\ &+ \frac{s}{2} \left(p_\mu p_\alpha p_\beta \otimes p^\alpha p^\beta + 2 p_\alpha p_\beta \otimes p^\alpha p^\beta p_\mu + \frac{1}{4} p_\mu p_\alpha p^2 \otimes p^\alpha \right. \\ &\left. - \frac{1}{4} p^4 \otimes p_\mu + p_\alpha p^2 \otimes p^\alpha p_\mu \right) + \mathcal{O}(s^3) \end{aligned} \quad (6.83)$$

donde $\Delta^{(i)} p_\mu = \frac{d^{(i)} \Delta p_\mu}{ds^i}$ y $\Delta_i p_\mu = \frac{1}{i!} \Delta^{(i)} p_\mu |_{s=0}$. Sabemos que:

$$e^{tA} B e^{-tA} = B + t[A, B] + \frac{t^2}{2} [A, [A, B]] + \dots \quad (6.84)$$

Ésto nos lleva a que

$$\begin{aligned} e^{s f_1 + s^2 f_2 + \dots} (\Delta_0 p_\mu) e^{-(s f_1 + s^2 f_2 + \dots)} &= \Delta_0 p_\mu + [s f_1 + s^2 f_2 + \dots, \Delta_0 p_\mu] \\ &+ [s f_1 + s^2 f_2 + \dots, [s f_1 + s^2 f_2 + \dots, \Delta_0 p_\mu]] + \dots \end{aligned} \quad (6.85)$$

Pero, considerando la expansión en serie de Δp_μ podemos igualar órdenes de s y encontrar las siguientes relaciones:

$$\Delta_0 p_\mu = \Delta_0 p_\mu \quad (6.86)$$

$$[f_1, \Delta_0 p_\mu] = \Delta_1 p_\mu \quad (6.87)$$

$$[f_2, \Delta_0 p_\mu] = \Delta_2 p_\mu - \frac{1}{2!} [f_1, [f_1, \Delta_0 p_\mu]] \quad (6.88)$$

$$[f_3, \Delta_0 p_\mu] = \Delta_3 p_\mu - \frac{1}{2!} ([f_1, [f_2, \Delta_0 p_\mu]] + [f_2, [f_1, \Delta_0 p_\mu]]) - \frac{1}{3!} [f_1, [f_1, [f_1, \Delta_0 p_\mu]]] \quad (6.89)$$

y así a todo orden. Para calcular las funciones, es posible ingresar un ansatz general, de productos de p_μ de orden $2i + 1$ contraídos con $(1 \otimes x_\alpha)$ para funciones f_i , aunque un ansatz más acertado, que evidenciará la forma cerrada del Twist, es el siguiente:

$$f_i = \alpha_1^{(i)} p^{2i} \otimes x \cdot p + \alpha_2^{(i)} p_\mu p_\nu p^{2(i-1)} \otimes x^\mu p^\nu + \alpha_3^{(i)} p_\mu p^{2(i-1)} \otimes x \cdot p p^\mu \quad (6.90)$$

La cual, al introducirla en las relaciones obtenidas para los $\Delta_i p_\mu$ nos arrojan:

$$f_1 = -is \left(\frac{1}{2} p^2 \otimes x \cdot p + \frac{1}{2} p_\alpha p_\beta \otimes x^\alpha p^\beta + p_\alpha \otimes x \cdot p p^\alpha \right) \quad (6.91)$$

$$f_2 = \frac{is^2}{2} \left(\frac{1}{2} p^4 \otimes x \cdot p + \frac{1}{2} p_\alpha p_\beta p^2 \otimes x^\alpha p^\beta + p_\alpha p^2 \otimes x \cdot p p^\alpha \right) \quad (6.92)$$

$$f_3 = \frac{-is^3}{3} \left(\frac{1}{2} p^6 \otimes x \cdot p + \frac{1}{2} p_\alpha p_\beta p^4 \otimes x^\alpha p^\beta + p_\alpha p^4 \otimes x \cdot p p^\alpha \right) \quad (6.93)$$

Lo cual, inductivamente nos sugiere que

$$\begin{aligned} f_j &= \frac{-i(-1)^{(j+1)s^{j-1}}}{j} \left(\frac{1}{2} p^{2j} \otimes x \cdot p + \frac{1}{2} p_\alpha p_\beta p^{2(j-1)} \otimes x^\alpha p^\beta + p_\alpha p^{2(j-1)} \otimes x \cdot p p^\alpha \right) \\ &= -i \left(\frac{1}{2} p^2 \otimes x \cdot p + \frac{1}{2} p_\alpha p_\beta \otimes x^\alpha p^\beta + p_\alpha \otimes x \cdot p p^\alpha \right) \left(\frac{(-1)^{j+1}}{j} (sp^2)(j-1) \otimes 1 \right) \end{aligned} \quad (6.94)$$

Si recordamos que:

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} x^i$$

Es fácil verificar que obtenemos una expresión bien determinada para el Twist y para su inverso:

$$\mathcal{F} = \exp \left\{ -i \left(\frac{1}{2} p^2 \otimes x \cdot p + \frac{1}{2} p_\alpha p_\beta \otimes x^\alpha p^\beta + p_\alpha \otimes x \cdot p p^\alpha \right) \left(\frac{\ln(1+sp^2)}{p^2} \otimes 1 \right) \right\} \quad (6.95)$$

$$\mathcal{F}^{-1} =: \exp \left\{ \frac{i}{1-sp_\alpha \otimes p^\alpha} \left[\frac{s\sqrt{1+sp^2}}{1+\sqrt{1+sp^2}} p^\beta p^\gamma \otimes x_\beta p_\gamma + (\sqrt{1+sp^2} - 1) \otimes x \cdot p + sp_\beta \otimes x \cdot p p^\alpha \right] \right\} : \quad (6.96)$$

donde consideramos el ordenamiento $::$ como el ordenamiento con los operadores de posición a la izquierda. El resultado para el Twist inverso puede ser deducido de la expresión $\mathcal{F}^{-1} =: \exp[i(1 \otimes x^\alpha)(\Delta - \Delta_0)p_\alpha] ::$. Se puede hacer una verificación de consistencia calculando $\Delta M_{\mu\nu} = \mathcal{F} \Delta_0 M_{\mu\nu} \mathcal{F}^{-1}$, y obteniendo que efectivamente no es deformado.

Una vez calculada la adición de momentum podemos calcular las antípodas, mediante la relación (6.67). Para el momento p_μ es fácil verificar que:

$$\mathcal{D}_\mu(p_\mu, -p_\mu) = 0 \Rightarrow S(p_\mu) = -p_\mu \quad (6.97)$$

Es posible obtener las counidades de hecho que están definidas como $\hat{\varepsilon}(\hat{h}) = \hat{h} \blacktriangleright 1$, obtener los mapeos α y β de (6.45) y (6.46) respectivamente. Para finalizar, la antípoda de \hat{x}_μ puede ser encontrada con (6.40) a partir del Twist que ya calculamos. En principio, la estructura de algebroide de Hopf de Snyder puede ser obtenida como el Twist de la estructura de algebroide de Hopf construido para Heisenberg. Un cálculo similar puede ser encontrado para la realización Hermítica del espacio-tiempo de Snyder [38] [39].

Empleando la expresión para el producto estrella (6.65) y el resultado obtenido en (6.74), encontramos que el producto deformado, útil en una formulación de teoría de campos en el espacio-tiempo de Snyder [21] [9].

Es importante recalcar que éste método de cálculo no es sólo válido en la realización de Snyder del espacio de Snyder. Los trabajos de S. Meljanac *et al.* en

Twist Jordanianos [40] sugieren que cualquiera sea el punto de partida, ya sea la representación, el producto estrella, la co-estructura algebraica o el operador Twist, cualquier elemento sirve para reconstruir completamente cada realización, cada estructura de algebroide de Hopf o cada producto deformado.

Capítulo 7

Estructuras Algebraicas en Teoría de Cuerdas

7.1. Introducción

Una de las características más llamativas de Teoría de Cuerdas corresponde al hecho que la teoría en D-branas sobre un fondo de 2-forma (Campo de Kalb-Ramond) es dado por una Teoría de Gauge no-conmutativa [4]. Para un flujo constante de 2-forma este resultado puede ser derivado explícitamente al cuantizar la cuerda abierta y calculando las funciones de correlación de la CFT asociada [27]. En este caso, la teoría no-conmutativa es gobernado por el producto estrella de Moyal-Weyl asociativo.

De teoría de cuerdas es sabido que además existe una solución de D-brana de las ecuaciones del movimiento de la cuerda que conllevan a la aparición de un flujo no-constante de 2-forma, originando una estructura no solo no-conmutativa sino también no-constante. Como ejemplo podemos tomar a las Branas en los modelos de WZW, o a los duales holográficos de las deformaciones integrables

de los modelos sigma de AdS_5 . En este ultimo caso, la teoría de Gauge dual holográfica sigue viviendo en un espacio plano y sólo recibe una deformación en la estructura no-conmutativa. Así uno esperaría poder formular una teoría de Gauge no-conmutativa para casos aún más generales. Hasta el día de hoy han sido muchos los intentos por construir una Teoría de Gauge no-conmutativa, todos matemáticamente motivados, como los son el caso del uso del producto estrella general de Kontsevich [41] [42] [43] [44], e incluso utilizando técnicas desde las estructuras de Álgebra de Hopf [45] [46]. Teniendo esto en cuenta, Ralph Blumenhagen, Ilka Brunner, Vladislav Kupriyanov y Dieter Lüst establecen que el principio físico guía que debería originar a las teorías de Gauge no-conmutativas consistentes debería corresponder al principio físico de Teoría de Cuerdas, más precisamente a su estructura de álgebra L_∞ [47]. Teniendo como precursores los casos como que las álgebras \mathcal{W} que describen las simetrías globales de las CFT bidimensionales puedan ser obtenidas a través de la estructura de álgebra L_∞ , además del hecho que el álgebra no-asociativa de R-flujo para la cuerda cerrada así como el álgebra de R-flujo de la teoría M asociada de siete octoniones puede ser extendida a un segundo término vía álgebra L_∞ , entre otros ejemplos físicos, esto llevo a que Blumenhagen, Brunner, Kupriyanov y Lüst desarrollasen no solo un mecanismo para obtener Teorías de Gauge no-conmutativas vía la estructura de álgebra L_∞ , sino también proponen una nueva corriente de metodología, esta vez físicamente motivadas, bajo el principio de que toda teoría de Gauge consistente debe poseer una estructura de álgebra L_∞ remanente.

En éste capítulo profundizaremos en la estructura de álgebra L_∞ , comenzando por su descubrimiento en el contexto de Teoría de campos de Cuerdas cerradas por T. Lada y J. Stasheff [48], su redescubrimiento como las Álgebras L_∞ y

finalizar con el mecanismo de *Bootstrap* desarrollado por Blumenhagen-Brunner-Kupriyanov-Lüst.

7.2. Álgebra de Lie Fuertemente Homotópica

Gran parte de la física de partículas puntuales pueden ser descritas en términos de Álgebras de Lie y sus representaciones. La Teoría de Campos de cuerdas cerradas, por otro lado, da lugar a una generalización de las Álgebras de Lie que emergen naturalmente con la matemática en el estudio de deformaciones de estructuras algebraicas: una *SH Lie Algebra*.

El concepto de Álgebra de Lie puede ser expresado de muchas formas. La más familiar es en términos de los generadores y relaciones y en términos de un corchete bilineal en un espacio vectorial V satisfaciendo la identidad de Jacobi. En notación física, sea X_a una base para V . El corchete $[\cdot, \cdot]$ puede ser especificado por las constantes de estructura C_{ab}^c por la fórmula

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c$$

Las constantes de estructura son anti-simétricas en los índices inferiores a y b .

Una descripción mucho más sutil aparece en el estudio homológico de las álgebras de Lie. Esta descripción es implícita en la forma más familiar de la formulación dual de Chevalley-Eilenberg de complejos de cocadenas para la cohomología de Álgebras de Lie: Una **n -cocadena** es una función n -lineal antisimétrica $\omega : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ y el coborde $d\omega$ es definido por

$$d\omega(v_1, \dots, v_{n+1}) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([v_i, v_j], v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{n+1})$$

donde $\hat{}$ denota a variables que deben ser omitidas. Respecto a la base dual ω^a del espacio vectorial dual V^* , podemos escribir a d como $-\frac{1}{2}\omega^a \omega^b C_{ab}^c \partial_{\omega^c}$.

Así podemos lidiar directamente con los vectores más que con las formas multilineales a expensas de introducir un nuevo punto de vista y consideraciones de los tensores antisimétricos (multivectores).

Un álgebra de Lie es equivalente en la anterior formulación un espacio vectorial V (asumido finito-dimensional por simplicidad de exposición). El producto tensorial antisimétrico de V , denotado por $\bigwedge V = \{\bigwedge^n V\}$ con $\bigwedge^0 V = k$, el campo de escalar, típicamente los reales \mathbb{R} o los números complejos \mathbb{C} . Un mapeo lineal

$$d : \bigwedge^n V \rightarrow \bigwedge^{n-1} V$$

que baja a n en uno y es una coderivación determinada tal que $d^2 = 0$. Éste d es una Coderivación determinada por:

$$d(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} d(v_i \wedge v_j) \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge \hat{v}_j \wedge \cdots \wedge v_n$$

tal que $d^2 = 0$. Por ejemplo,

$$d(X_a \wedge X_b \wedge X_c) = -C_{ab}^e X_e \wedge X_c + C_{ac}^e X_e \wedge X_b - C_{bc}^e X_e \wedge X_a$$

Puede no parecer obvio inmediatamente, pero d restringido a \bigwedge^2 es interpretado como el corchete $d(v_1 \wedge v_2) = [v_1, v_2]$ y $d^2 = 0$ es equivalente a la identidad de Jacobi.

de este punto de vista de las potencias antisimétricas de tensores de V , una *Strongly Homotopy Lie Algebra* es similarmente equivalente a una generalización posterior en que d es reemplazada por una coderivación

$$D = d_1 + d_2 + d_3 + \dots$$

donde d_i baja n en $i - 1$, en particular, $d_n(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \in V$.

Diremos que D es una coderivación para resumir muchas condiciones

$$d_i(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \sum_{j=1}^n \pm d_i(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_j}) \wedge v_{i_{j+1}} \wedge \cdots \wedge v_{i_n}$$

donde la suma es sobre todos los reordenamientos de $\{1, \dots, n\}$, ésto es, todas las permutaciones que preservan i_1, \dots, i_j y i_{j+1}, \dots, i_n en el mismo orden relativo. Un ordenamiento de dos conjuntos ordenados es una permutación de la unión ordenada que preserva el orden de cada subconjunto; un reordenamiento revierte el proceso.

Notar que el antiguo d corresponde a d_2 , ya que $d(v_1 \wedge v_2) = [v_1, v_2] \in V$. Por otro lado, para el nuevo D , el componente d_2 ya no satisface que su cuadrado sea cero por su cuenta y entonces significa que el corchete no necesariamente satisface la identidad de Jacobi. Miremos en detalle qué ocurre en su lugar.

Expandiendo $D^2 = 0$ en sus componentes homogéneas y arreglandolas separadamente igual a cero. Obtenemos entonces:

1.

$$d_1^2 = 0$$

entonces (V, d_1) es un complejo o módulo diferencial gradado. Usualmente V por su cuenta es un módulo gradado y D es una coderivación gradada, que implica los signos apropiados al aplicar D a $x_1 \wedge \dots \wedge x_n$. También d_1 típicamente eleva (o baja) aquel grado interno en 1. Quizás los ejemplos más importantes en física son la derivada exterior en formas diferenciales y el operador BRST en campos que lo admitan, ya sean físicos o *ghost*.

2. $d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0$ entonces, con la convención de signos apropiada, d_2 entrega el corchete $[v_1, v_2] \in V$ para el cuál d_1 es una derivación.

3.

$$d_1 d_3 + d_2 d_2 + d_3 d_1 = 0$$

o equivalentemente

$$d_2 d_2 = -(d_1 d_3 + d_3 d_1)$$

Si adoptamos la notación

$$d_3(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) = [x_1, x_2, x_3]$$

entonces tenemos que

$$[[v_1, v_2], v_3] \pm [[v_1, v_3], v_2] \pm [[v_2, v_3], v_1] = -d_1[v_1, v_2, v_3] \pm [d_1 v_1, v_2, v_3] \pm [v_1, d_1 v_2, v_3] \pm [v_1, v_2, d_1 v_3]$$

De ésto, con el uso de la antisimetría de $[\cdot, \cdot]$, vemos que ahora que la identidad de Jacobi se mantiene módulo el lado derecho. En lenguaje físico, la identidad de Jacobi se mantiene módulo un término BRST exacto. En el lenguaje de álgebras Homológicas, d_3 es una cadena de Homotopías, entonces nosotros decimos que (V, d_2) satisface la Identidad de Jacobi salvo una homotopía o (V, d_1, d_2, d_3) es una **Álgebra de Lie Homotópica**. El adverbio "**Fuertemente**" (strongly) es añadido para referirse a las otras d_i .

En notación física, restringiendo d_3 a $\wedge^3 V$, podemos escribir

$$d_3(X_a \wedge X_b \wedge X_c) = C_{abc}^e X_e$$

donde C_{abc}^e es antisimétrico en los índices inferiores. Similarmente, podemos escribir

$$d_1 X_a = C_a^b X_b$$

Así como la identidad de Jacobi puede ser escrita como una ecuación cuadrática en los C_{ab}^c pueden ser escritas como la ecuación cuadrática en los C_a^b , C_{ab}^c , y C_{abc}^e .

Para trabajar con mapeos de espacios vectorial diferenciales gradados es crucial seguir bien los signos de las expresiones. Primero, existen signos apropiados para todo contexto de gradado. La convención más básica es que dos símbolos cualquiera de grado m y n son intercambiados, un signo de $(-1)^{mn}$ es introducido. En particular, si σ es una permutación actuando sobre una cuerda a la cual

le pertenecen los símbolos, $e(\sigma)$ denotará el signo que resulta de la iteración de dichos símbolos, es decir, $e(\sigma) = (-1)^k$, donde k es el número de intercambios impares de símbolos. También denotamos por $(-1)^\sigma$ al signo de la permutación σ . Es importante notar que $e(\sigma)$ no involucra a $(-1)^\sigma$ como factor. De todas formas, si todos los elementos en cuestión tienen orden 1, entonces $e(\sigma) = (-1)^\sigma$. Siempre consideraremos que el grupo simétrico \mathcal{S}_n actuando en $V^{\otimes n}$ por

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

Un mapeo de vectores gradados $f : V^{\otimes n} \mapsto W$ es llamado

- **Simétrico** si $f(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}) = e(\sigma)f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$
- **Antisimétrico** si $f(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma e(\sigma)f(v_1, \dots, v_n)$

para todo $\sigma \in \mathcal{S}_n$. En términos de una base para V , podemos escribir a f en términos de sus coeficientes $f^{a_1 \dots a_n}$; entonces los conceptos de simétrico y antisimétrico tienen la interpretación usual respecto a las permutaciones de $a_1 \dots a_n$. Ahora, sea $V = \{V^i\}$ un espacio vectorial gradado sobre un campo k . Sea $T^*(V)$ denotando el espacio vectorial tensorial generado por V , es decir, $\{V^{\otimes n}\}$. no consideraremos a $T^*(V)$ como el álgebra de tensores, sino como una *coalgebra* con la estructura usual de coalgebra dada por la diagonal

$$\Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{j=0}^n (v_1 \otimes \cdots \otimes v_j) \otimes (v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_n)$$

Aquí $V^{\otimes 0}$ será identificado con k y los términos con $j = 0$ o $j = n$ son de la forma $1 \otimes (\dots)$ y $(\dots) \otimes 1$ respectivamente. El uso de coalgebras es una herramienta eficiente para algunas de nuestras expresiones, pero es suficiente con seguir el argumento en términos de los tensores ordinarios.

En particular, haremos uso de $\bigwedge V$, el subespacio (de hecho, sub-coálgebra) de

T^*V que permanece fija bajo la acción del grupo simétrico en $V^{\otimes n}$. A pesar de que no necesitaremos la terminología, $\bigwedge V$ es conocida como la **Coálgebra co-conmutativa co-libre** (*cofree cocommutative coalgebra*) generada por V con la diagonal reducida para por

$$\bar{\Delta}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\sigma} e(\sigma)(u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(j)}) \otimes (u_{\sigma(j+1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(n)})$$

donde σ corre sobre todas los desordenamientos de $(j, n-j)$. Primero definiremos a la versión gradada de un álgebra de Lie ordinaria

- **Definición: Una Álgebra de Lie gradada** es un espacio vectorial gradado $V = \bigoplus \{V_p\}$ junto con un corchete gradado anticonmutativo $[\cdot, \cdot] : V \otimes V \mapsto V$ tal que $V_p \otimes V_q \rightarrow V_{p+q}$ satisfaga la identidad de Jacobi gradada:

$$[u, [v, w]] = [[u, v], w] + (-1)^{pq}[v, [u, w]]$$

También consideraremos el espacio vectorial diferenciable gradado sV , que es definido isomórfico a V vía $(sV)_i \approx V_{i-1}$. El uso de un operador de suspensión (*suspension operator*) s es implícito en el complejo de Chevalley-Eilenberg, pero para estructuras SH Lie más complicadas es mejor hacerlas explícitas. Por razones similares, especialmente por la sutileza de los signos, y también por comparación con las correspondientes álgebras SH asociativas, hemos elegido expresar esta sección en términos de los mapeos l_n en vez de los operadores d_n del comienzo.

- **Definición: Una Estructura SH Lie** en V es una colección de mapeos lineales antisimétricos $l_n : \otimes^n V \mapsto V$ de grado $2 - n$ (para un complejo de cocadenas, y $n - 2$ para un complejo de cadenas) tal que:

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma} e(\sigma)(-1)^{\sigma}(-1)^{i(j-1)} l_i(l_j(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(j)}) \otimes v_{\sigma(j+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}) = 0 \quad (7.1)$$

donde σ corre sobre todos los $(j, n - j)$ desordenamientos.

Notemos que el mapeo l_2 puede ser visto como el corchete de Lie (gradado) usual y que cuando $n = 3$ y $l_3 = 0$, la definición lleva a la usual Identidad de Jacobi gradada. En general, l_3 es una Homotopía entre la expresión de Jacobi y 0, mientras que las otras l_n son homotopías de orden superior.

Vale la pena hacer incapie en los grados, ya sea para las formas (por ejemplo, el grado de los ghost en el contexto de BRST) y el grado de las operaciones de N-entradas. La formulación matemática original como la anterior de una SH Lie Algebra (y sus predecesores SH associative algebra) asumían que el producto de dos entradas o corchete tiene grado 0, es decir, el grado del corchete era una suma de los grados de los factores y que el grado de $d = d_1$ era 1 (para Cohomología) o -1 (para Homología). Zwiebach [49] es cuidadoso con este punto, en la teoría de campos de cuerdas cerradas, el grado es dado por la estadística, entonces el grado del corchete de dos entradas es 1. Como él explica en detalle, un simple cambio en el conteo de los grados y apropiados cambios en los signos establecen la equivalencia en los dos conjuntos de convenciones.

En la literatura física reciente, la terminología *Álgebra de Lie Homotópica* está siendo usada para denotar una *SH Lie algebra* como se definió anteriormente junto con el regraduamiento que resulta de que el corchete tenga grado ± 1 .

Ésto, por supuesto, lleva a un diferente conjunto de signos en las ecuaciones que definen todo.

7.3. Álgebra L_∞

En la teoría de campos de cuerdas abiertas bosónicas la interacción de cuerdas es definida por una regla de multiplicación, un producto estrella de campos de cuerdas que es asociativo. Mientras que ésta formulación es ventajosa para encontrar soluciones clásicas de la teoría, la asociatividad no es estrictamente necesaria para la formulación de la teoría de campos de cuerdas; pero **la asociatividad homotópica sí lo es**. Ésta es una estructura más profunda y aparece cuando uno incorpora cuerdas cerradas explícitamente en la teoría de campos de cuerdas abiertas. Las álgebras Homotópicas asociativas A_∞ de Stasheff es la estructura matemática remanente en las versiones más generales de la teoría clásica de campos de cuerdas abiertas.

El producto de campos de cuerdas cerradas es análogo al corchete de Lie en que éste es gradado y conmutativo. Pero estrictamente un álgebra de Lie no aparece para permitir la formulación de la teoría de campos de cuerdas cerradas. En lugar de ésta uno requiere una colección de productos superiores satisfaciendo versiones generalizadas de las identidades de Jacobi. La teoría clásica de campos de cuerdas está así organizada por una Álgebra de Lie Homotópica, una álgebra L_∞ cuyos axiomas e identidades tipo Jacobi. Existen dos formulaciones relacionadas por una "suspensión", una operación donde el grado de todos los espacios vectoriales son corridos en una unidad. Las álgebras L_∞ describen la estructura de una teoría clásica de campos de cuerdas: la colección de productos de campos de cuerdas es todo lo que se necesita para escribir transformaciones de Gauge y las ecuaciones de los campos. Equipando con un producto interno, uno puede escribir una acción. La interacción de las álgebras A_∞ y L_∞ resulta en el estudio de la teoría de campos de cuerdas abiertas-cerradas.

La relevancia de L_∞ a la teoría de campos de cuerdas cerradas, que es una teoría de campos para una cantidad infinita de campos (componentes), sugiere que debe también ser relevante para teorías de campos arbitrarias, y ésto es la motivación para su estudio. En particular, en trabajos recientes se ha mostrado cómo definir un truncado consistente para un conjunto de modos de cuerdas cerradas. Para éstos grados de libertad uno tiene una teoría de campos efectivas organizadas por una álgebra L_∞ que puede ser derivada de la álgebra completa de teoría de campos de cuerdas cerradas.

7.3.1. L_∞ y el Jacobiador de Gauge

Definiremos a los estados de álgebras L_∞ y sus principales identidades, e introduciremos las ecuaciones de campo y la acción.

Producto multilinear e identidad Principal

En una álgebra L_∞ tenemos un espacio vectorial V gradado por un grado, que es un entero. Usualmente trabajamos con elementos $B_i \in V$ de grados fijos (en teoría de campos de cuerdas cerradas el grado es relacionado al número de ghost de la forma $Grad = 2 - Ghost$). El grado entra en el signo del factor donde, por conveniencia, omitiremos la etiqueta *grad*. Así, por ejemplo:

$$(-1)^{B_1 B_2} \equiv (-1)^{grad(B_1)grad(B_2)} \quad (7.2)$$

En los exponentes, los grados son relevantes sólo módulo 2 En una álgebra L_∞ tenemos productos multilineales. En la notación usada para teoría de campos de cuerdas el producto multilinear es denotado por los multicorchetes $[B_1, \dots, B_n]$ y son conmutativos gradados

$$[\dots, B_i, B_j, \dots] = (-1)^{B_i B_j} [\dots, B_j, B_i, \dots] \quad (7.3)$$

Todos los productos están definidos para ser intrínsecamente de grado -1 , significando que el gradado de un producto para cierta cantidad de entradas está dada por

$$\text{grad}([B_1, \dots, B_n]) = -1 + \sum_{i=1}^n \text{grad}(B_i) \quad (7.4)$$

El producto con una sola entrada es llamada el operador Q (para BRST)

$$[B] = QB \quad (7.5)$$

También tenemos un producto $[.]$ sin entradas cuyo valor es sólo algún vector especial en el espacio vectorial.

Las relaciones para L_∞ pueden ser escritas de la forma:

$$\sum_{\substack{l,k \geq 0 \\ l+k=n}} \sum_{\sigma_s} \sigma(i_l, j_k) [B_{i_1}, \dots, B_{i_l}, [B_{j_1}, \dots, B_{j_k}]] = 0, \quad n \geq 0 \quad (7.6)$$

Aquí n es el número de entradas (si $n = 0$ aún obtenemos una identidad no-trivial). Las entradas B_1, \dots, B_n se separan en dos conjuntos: el primero $\{B_{i_1} \dots B_{i_l}\}$ con l elementos y un segundo $\{B_{j_1} \dots B_{j_k}\}$ con k elementos, donde $l + k = n$. El primero conjunto es vacío si $l = 0$ y el segundo es vacío si $k = 0$. Los dos conjuntos no entran en la identidad simétricamente: el segundo conjunto tiene entradas en un producto anidado dentro del producto que relaciona con el primer conjunto. El conjunto de números $\{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_k\}$ es una permutación de la lista $\{1, \dots, n\}$.

Las sumas son sobre separaciones no-equivalentes. Los conjuntos con diferentes valores de l y k son inequivalentes, por lo que debemos sumar sobre todos los posibles valores de k y l . Dos separaciones con el mismo valor de l y k son equivalentes si el primer conjunto $\{B_{i_1} \dots B_{i_l}\}$ contiene los mismos elementos, sin importar el orden. El factor $\sigma(i_l, j_k)$ es el signo necesario para reordenar la lista $\{B_*, B_1, \dots, B_n\}$ en $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_l}, B_*, B_{j_1}, \dots, B_{j_k}\}$:

$$\{B_*, B_1, \dots, B_n\} \rightarrow \{B_{i_1}, \dots, B_{i_l}, B_*, B_{j_1}, \dots, B_{j_k}\} \quad (7.7)$$

usando los grados para conmutar los B de acuerdo a (7.3) y pensando en B_* como un elemento de grado impar. Los elementos B_* son necesarios para tener en cuenta que los productos son impares.

Para la teoría clásica de campos de cuerdas, o para cualquier teoría de campos expandida al rededor de una solución clásica, el valor del cero-ésimo producto $[\cdot]$ será igual al vector cero:

$$[\cdot] \equiv 0 \quad (7.8)$$

Usando las reglas para los factores de signo, podemos escribir las identidades de L_∞ (7.6). Notar que en ausencia de un producto cero-ésimo $k > 0$ y así $n > 0$ para obtener una identidad no-trivial. Para $n = 1, 2, 3$ obtenemos:

$$0 = Q(QB) \quad (7.9)$$

$$0 = Q[B_1, B_2] + [QB_1, B_2] + (-1)^{B_1}[B_1, QB_2] \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} 0 = & Q[B_1, B_2, B_3] + [QB_1, B_2, B_3] + (-1)^{B_1}[B_1, QB_2, B_3] \\ & + (-1)^{B_1+B_2}[B_1, B_2, QB_3] + (-1)^{B_1}[B_1, [B_2, B_3]] \\ & + (-1)^{B_2}(1 + B_1)[B_2, [B_1, B_3]] + (-1)^{B_3(1+B_1+B_2)}[B_3, [B_1, B_2]] \end{aligned} \quad (7.11)$$

Ahora discutiremos cómo definir en éste lenguaje las ecuaciones del movimiento y acción para una teoría de campos. Para éste fin y por abreviación, escribiremos los productos con entradas repetidas como potencias. Cuando no hay forma posible de confusión, también omitiremos las comas entre las entradas:

$$[\Psi^3] \equiv [\Psi, \Psi, \Psi] \quad [B\Psi^3] \equiv [B, \Psi, \Psi, \Psi] \quad (7.12)$$

Aquí Ψ , llamado un campo, es un elemento de grado cero:

$$grad(\Psi) = 0 \quad (7.13)$$

Si Ψ tuviese grado impar, el producto anterior desaparecería por la propiedad de conmutatividad gradada.

Dado un conjunto de productos que satisfagan las condiciones de L_∞ y un Campo de Grassman par Ψ introducimos una ecuación de campo \mathcal{F} de grado menos uno:

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\Psi^n] = Q\Psi + \frac{1}{2}[\Psi^2] + \frac{1}{3!}[\Psi^3] + \dots = Q\Psi + \frac{1}{2}[\Psi, \Psi] + \frac{1}{3!}[\Psi, \Psi, \Psi] + \dots \quad (7.14)$$

Otra vez, usamos que el término con $n = 0$ desaparece. Las ecuaciones de campo \mathcal{F} es de grado menos uno pues Ψ es de grado cero y todos los productos son de grado menos uno. Ciertas sumas infinitas aparecen cuando lidiamos con transformaciones de Gauge y ésto hace conveniente definir un producto modificado (primado):

$$[A_1 \dots A_n]' \equiv \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} [A_1 \dots A_n \Psi^p] \quad n \geq 1 \quad (7.15)$$

Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} [A]' &\equiv Q'A + [A\Psi] + \frac{1}{2}[A\Psi^2] + \dots \\ [A_1 \dots A_n]' &= [A_1 \dots A_n] + [A_1 \dots A_n \Psi] + \frac{1}{2}[A_1 \dots A_n \Psi^2] + \dots \end{aligned} \quad (7.16)$$

La variación de estos productos es bastante simple:

$$\delta[A_1 \dots A_n]' = [\delta A_1 \dots A_n]' + \dots + [A_1 \dots A_n \delta\Psi]' \quad (7.17)$$

La identificación de $[A]'$ con $Q'A$ es natural dado (7.5). La variación de las ecuaciones de campo adopta la forma de un producto modificado. Tenemos que

$$\delta\mathcal{F} = Q'(\delta\Psi) \quad (7.18)$$

que se lee de:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F} &= \delta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [\Psi^k] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} [\Psi^{k-1} \delta\Psi] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [\Psi^k \delta\Psi] = [\delta\Psi]' \end{aligned} \quad (7.19)$$

Producto Interno y Acción: La acción existe si existe un producto interno adecuado $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Uno requiere que

$$\langle A, B \rangle = (-1)^{(A+1)(B+1)} \langle B, A \rangle \quad (7.20)$$

y que la expresión

$$\langle B_1, [B_2, \dots, B_n] \rangle \quad (7.21)$$

para $n \geq 1$ es una función multilineal gradada-conmutativa de todos los argumentos. De lo anterior uno puede mostrar que:

$$\langle QA, B \rangle = (-1)^A \langle A, QB \rangle \quad (7.22)$$

La acción es dada por

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle \Psi, [\Psi^n] \rangle \quad (7.23)$$

Un pequeño cálculo muestra que bajo variaciones $\delta\Psi$ uno tiene

$$\delta S = \langle \delta\Psi, \mathcal{F} \rangle \quad (7.24)$$

Confirmando que $\mathcal{F} = 0$ es la ecuación de campo correspondiente a la acción.

Una familia de Identidades

Estableceremos un número de identidades útiles para calcular el Jacobiador (*Jacobiator*). Los productos $[\dots]'$ pueden ser vistos como un conjunto de productos satisfaciendo una extensión simple de las identidades de L_∞ . Para ver ésto, consideremos los siguientes ejemplos.

Consideremos (7.6) cuando todos los B son de grado par. El factor de signo es entonces siempre igual a +1 y tenemos

$$\sum_{\substack{l,k \geq 0 \\ l+k=n}} \sum_{\sigma_s} [B_{i_1} \dots B_{i_l} [B_{j_1} \dots B_{j_k}]] = 0, \quad n \geq 0, \quad B_k \text{ par } \forall k \quad (7.25)$$

Para l y k fijos hay $n!/(l!k!)$ separaciones inequivalentes de las entradas; ésto es el número de términos en la suma \sum_{σ_s} . Asumamos ahora que todos los B son el mismo: $B_1 = B_2 = \dots = B$, entonces todos los términos serán igual. Así tenemos que

$$\sum_{\substack{l,k \geq 0 \\ l+k=n}} \frac{1}{l!k!} [B^l [B^k]] = 0, \quad n \geq 0 \text{ } B \text{ par} \quad (7.26)$$

Donde sacamos el factor $n!$ del numerador. Ahora si tomamos a $B = \Psi$ entonces toda la suma sobre n se vuelve la identidad

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{l,k \geq 0 \\ l+k=n}} \frac{1}{l!k!} [\Psi^l [\Psi^k]] = 0 \quad (7.27)$$

Reordenando la suma doble, obtenemos

$$\sum_{l,k \geq 0} \frac{1}{l!k!} [\Psi^l [\Psi^k]] = \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l!} [\Psi^l \mathcal{F}] = 0 \quad (7.28)$$

donde sumamos sobre k y usamos (7.14). Llamando a (7.16), la suma sobre l se vuelve

$$Q' \mathcal{F} = 0 \quad (7.29)$$

Si vemos la similitud, Q' es el análogo a la derivada covariante D y \mathcal{F} es el análogo al Field Strength no-abeliano F en la teoría de Yang-Mills, entonces ésta identidad es el análogo a la identidad de Bianchi $DF = 0$.

Consideremos una segunda identidad de L_∞ otra vez basada en (7.6) pero con $n + 1$ entradas

$$B_1 = A, B_2 = \dots = B_{n+1} = B, \text{ } B \text{ par} \quad (7.30)$$

Aquí hay dos clases posibles de separación, donde ambas involucran separar n copias de B en un conjunto de l elementos y un conjunto de k elementos, con $l + k = n$. Ellos son:

$$[AB^l], [B^k] \text{ y } [B^l], [AB^k] \quad (7.31)$$

El signo del factor aparece de reordenar $B_*AB^lB^k$ en $AB^lB_*B^k$ para la primera secuencia, dado un signo $(-1)^A$, y en $B^lB_*AB^k$ para la segunda secuencia, no arrojando signo. Entonces tenemos que

$$\sum_{\substack{l,k \geq 0 \\ l+k=n}} \frac{n!}{l!k!} ((-1)^A [AB^l[B^k]] + [B^l[AB^k]]) = 0 \quad (7.32)$$

Para $n = 0$ todos los términos desaparecen. Ésta es una linda identidad, pero puede adoptar una forma mucho más útil. Si cancelamos los $n!$ y sumamos sobre n :

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{l,k \geq 0 \\ l+k=n}} \frac{1}{l!k!} ((-1)^A [AB^l[B^k]] + [B^l[AB^k]]) = 0 \quad (7.33)$$

que, reorganizando los términos y haciendo $B = \Psi$, se vuelve

$$\sum_{l,k \geq 0} \frac{1}{l!k!} ((-1)^A [A\Psi^l[\Psi^k]] + [\Psi^l[A\Psi^k]]) = 0 \quad (7.34)$$

Haciendo la suma sobre los k nos arroja

$$\sum_{l \geq 0} \frac{1}{l!} ((-1)^A [A\Psi^l \mathcal{F}] + [\Psi^l Q' A]) = 0 \quad (7.35)$$

Haciendo la suma sobre l ahora obtenemos

$$(-1)^A [A\mathcal{F}]' + Q'(Q'A) = 0 \quad (7.36)$$

Ya que \mathcal{F} es impar, el resultado es equivalente a

$$Q'(Q'A) + [\mathcal{F}A]' = 0 \quad (7.37)$$

Otra vez, viendo a Q' y a \mathcal{F} como el análogo de la derivada covariante D y el *Field Strength* F en la teoría de Yang-Mills, entonces ésta relación es el análogo a $D^2 = F$.

Consideremos otra identidad de L_∞ , otra vez basada en (7.6) pero con $n + 2$ entradas, y dos campos de cuerdas A_1, A_2 :

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2, B_3 = \dots = B_{n+2} = \Psi \quad (7.38)$$

Ésta vez el proceso anterior entrega

$$0 = Q'[A_1, A_2]' + [Q'A_1, A_2]' + (-1)^{A_1}[A_1, Q'A_2]' + [\mathcal{F}A_1A_2]' \quad (7.39)$$

Comparando la anterior y (7.37) con las primeras dos ecuaciones en (7.10) el patrón se vuelve claro. Obtuvimos para el producto primado las mismas identidades de L_∞ con un término extra. De hecho, el término extra corresponde al cero-ésimo producto, como en (7.8), que ésta vez es no-nulo:

$$[\cdot]' \equiv \mathcal{F} \quad (7.40)$$

Las identidades (7.6) dadas para $n = 0, 1, 2, 3$ arrojan

$$\begin{aligned} 0 &= Q'\mathcal{F} \\ 0 &= Q'(Q'A) + [\mathcal{F}A]' \\ 0 &= Q'[A_1A_2]' + [Q'A_1A_2]' + (-1)^{A_1}[A_1Q'A_2]' + [\mathcal{F}A_1A_2]' \\ 0 &= Q'[A_1A_2A_3]' + [Q'A_1A_2A_3]' + (-1)^{A_1}[A_1Q'A_2A_3]' + (-1)^{A_1+A-2}[A_1A_2Q'A_3]' \\ &\quad + (-1)^{A_1}[A_1[A_2A_3]]' + (-1)^{A_2(1+A_1)}[A_2[A_1A_3]]' + (-1)^{A_3(1+A_1+A_2)}[A_3[A_1A_2]]' \\ &\quad + [\mathcal{F}A_1A_2A_3]' \end{aligned} \quad (7.41)$$

Entonces, hemos visto que los productos modificados satisfacen una forma extendida de las identidades de las álgebras L_∞ , que incluyen un cero-ésimo producto no-trivial. Éstas identidades permiten estudiar más fácilmente el Jacobiador, y serán necesarias para construir una teoría clásica de campos al rededor de un background que no es solución de las ecuaciones de campo.

El producto interno interactúa de buena forma con el producto modificado. Uno puede rápidamente usar (7.22) y la multilinealidad para mostrar, por ejemplo, que

$$\langle Q'A, B \rangle = (-1)^A \langle A, Q'B \rangle \quad (7.42)$$

Transformaciones de Gauge y álgebra

Ahora describamos las transformaciones de Gauge en su Álgebra de Gauge. Aquí, las identidades "primadas" serán muy útiles.

Transformaciones de Gauge estandar: Éstas toman una forma muy simple en términos del nuevo producto: éstas son simplemente el resultado de Q' actuando en el parámetro de gauge Λ , un elemento de grado +1. De hecho

$$\delta_\Lambda \Psi = [\Lambda]' = Q'\Lambda = Q\Lambda + [\Lambda\Psi] + \frac{1}{2}[\Lambda\Psi^2] + \dots \quad (7.43)$$

El *constraint* clave es que las ecuaciones de campo deben ser covariantes de Gauge. Ésto requiere que la transformación de gauge de \mathcal{F} desaparece cuando $\mathcal{F} = 0$. Con ayuda de los nuevos productos ésto es ahora un cálculo trivial. Usando (7.18) y la segunda ecuación de (7.41)

$$\delta_\Lambda \mathcal{F} = Q'(\delta_\Lambda \Psi) = Q'(Q'\Lambda) = [\Lambda\mathcal{F}]' \quad (7.44)$$

De donde vemos explícitamente que la covariancia se mantiene. Escribiendo ésto más explícitamente,

$$\delta_\Lambda \mathcal{F} = [\Lambda\mathcal{F}] + [\Lambda\mathcal{F}\Psi] + \frac{1}{2}[\Lambda\mathcal{F}\Psi^2] + \dots \quad (7.45)$$

hace más claro que el campo descubierto aparece en el lado derecho. La acción es, por supuesto, invariante de Gauge:

$$\delta S = \langle \delta_\Lambda \Psi, \mathcal{F} \rangle = \langle \mathcal{F}, [\chi, \mathcal{F}] \rangle = \langle \chi, [\mathcal{F}, \mathcal{F}] \rangle = 0 \quad (7.46)$$

debido a que \mathcal{F} es Grassmann-impar. Dos tipos de simetrías de las ecuaciones del movimiento tendrán un rol especial, una parametrizada por un solo campo de cuerdas Grassmann-par χ de número de Ghost cero y otro parametrizado por dos parámetros de gauge Λ_1, Λ_2 . Éstas son:

$$\begin{aligned}\delta_\chi^T \Psi &\equiv [\chi \mathcal{F}]' = -Q'(Q'\chi) \\ \delta_{\Lambda_1, \Lambda_2}^T \Psi &\equiv [\Lambda_1 \Lambda_2 \mathcal{F}]'\end{aligned}\quad (7.47)$$

usando (7.37) en la primera línea. El segundo tipo de simetrías de las ecuaciones del movimiento aparece en el conmutador de dos transformaciones de Gauge.

Álgebra de Gauge: Diremos que las transformaciones de Gauge estandar forman un álgebra que incluye las simetrías de las ecuaciones del movimiento de segundo tipo. De hecho, asumiendo que los parámetros de Gauge Λ_1 y Λ_2 son campos independientes tenemos

$$[\delta_{\Lambda_2}, \delta_{\Lambda_1}] = \delta_{[\Lambda_1 \Lambda_2]'} + \delta_{\Lambda_1, \Lambda_2}^T \quad (7.48)$$

Con la ayuda de las identidades, la demostración de esto es mucho más simplificada. Usando la fórmula de variación (7.17) encontramos

$$\delta_{\Lambda_2} \delta_{\Lambda_1} \Psi = \delta_{\Lambda_2} [\Lambda_1]' = [\Lambda \delta_{\Lambda_2} \Psi]' = [\Lambda_1 Q' \Lambda_2]'\quad (7.49)$$

Así, se sigue que

$$[\delta_{\Lambda_2}, \delta_{\Lambda_1}] \Psi = [\Lambda_1 Q' \Lambda_2]' - [\Lambda_2 Q' \Lambda_1]'\quad (7.50)$$

La tercera identidad en (7.41) arroja

$$0 = Q'[\Lambda_1 \Lambda_2]' + [Q' \Lambda_1 \Lambda_2]' - [\Lambda_1 Q' \Lambda_2]' + [\mathcal{F} \Lambda_1 \Lambda_2]'\quad (7.51)$$

Como resultado

$$[\delta_{\Lambda_2}, \delta_{\Lambda_1}] \Psi = Q'[\Lambda_1 \Lambda_2]' + [\Lambda_1 \Lambda_2 \mathcal{F}]' = \delta_{[\Lambda_1 \Lambda_2]'} \Psi + \delta_{\Lambda_1, \Lambda_2}^T \Psi \quad (7.52)$$

Que es lo que buscábamos probar.

Transformaciones de Gauge extendidas: Éstas son sumas de las transformaciones de Gauge estandar con parámetro Λ y una simetría de una ecuación del movimiento del primero tipo con parámetro χ de número de Ghost cero:

$$\delta_{\Lambda,\chi}^E \Psi \equiv \delta_{\Lambda} \Psi + \delta_{\chi}^T \Psi = Q' \Lambda + [\chi \mathcal{F}]' \quad (7.53)$$

Transformaciones nulas: Éstas son transformaciones extendidas de gauge que no arrojan variación del campo. De hecho, si $\Lambda = Q' \chi$ la transformación $\delta_{\Lambda,\chi}^E$ del campo de cuerdas desaparece:

$$\delta_{Q'\chi,\chi}^E \Psi = \delta_{Q'\chi} \Psi + \delta_{\chi}^T \Psi = Q'(Q'\chi) + [\chi \mathcal{F}]' = 0 \quad (7.54)$$

debido a que χ es Grassmann-par. Diremos entonces que χ genera la transformación nula $\delta_{Q'\chi,\chi}^E$. Debido a que las transformaciones nulas no arrojan variación en los campos diremos que éstas son idénticamente cero: $\delta_{Q'\chi,\chi}^E = 0$.

Jacobiador de Gauge (*Gauge Jacobiator*)

Dado un conjunto de transformaciones de Gauge uno puede considerar el álgebra de Gauge, como lo hicimos anteriormente. Además, uno puede considerar el "Jacobiador de Gauge" \mathcal{J}

$$\mathcal{J}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = \sum_{cyc} [\delta_{\Lambda_3}, [\delta_{\Lambda_2}, \delta_{\Lambda_1}]] \quad (7.55)$$

una definición inspirada en el Jacobiador de un corchete. Aquí la suma cíclica involucra una suma de tres términos en los que permutamos cíclicamente los índices 1,2,3. El Jacobiador \mathcal{J} , si es no-nulo, será una transformación de Gauge, debido a que las transformaciones de Gauge son cerradas. Pero, en lo anterior,

los corchetes son sólo conmutadores, y si las transformaciones de Gauge son bien definidas, después de expandir uno puede ver que todos los términos desaparecen y este Jacobiador de Gauges debería anularse.

Esta anulación es un constraint no-trivial desde el punto de vista de las álgebras L_∞ . Uno puede calcular \mathcal{J} usando el álgebra de Gauge (7.48) y uno encontrará que la anulación requiere de identidades de L_∞ para tres y cuatro entradas. De hecho, encontraremos que el Jacobiador de Gauge es una transformación nula y así se anulará idénticamente.

$$\sum_{cyc} [\delta_{\Lambda_3}, [\delta_{\Lambda_2}, \delta_{\Lambda_1}]] = 0 \quad (7.56)$$

Si el álgebra de Gauge es un campo-independiente y es cerrada *Off-shell*, como en el caso de los Corchetes de Courant, obtenemos:

$$[\delta_{\Lambda_2}, \delta_{\Lambda_1}] = \delta_{[\Lambda_1 \Lambda_2]} \quad (7.57)$$

Ésto requiere que

$$[\Lambda_1 \Lambda_2 \Psi^n] = 0, \quad n \geq 1 \quad \text{y también} \quad [\Lambda_1 \Lambda_2 \mathcal{F} \Psi^n] = 0, \quad n \geq 0 \quad (7.58)$$

entonces el término extra en la álgebra de Gauge (7.48) desaparece. En éste caso el Jacobiador de Gauge es igual a una transformación de Gauge con parámetro igual al Jacobiador estandar:

$$\mathcal{J} = \sum_{cyc} [\delta_{\Lambda_3}, [\delta_{\Lambda_2}, \delta_{\Lambda_1}]] = \sum_{cyc} [\delta_{\Lambda_3}, \delta_{[\Lambda_1 \Lambda_2]}] = \delta_{\sum_{cyc} [[\Lambda_1 \Lambda_2] \Lambda_3]} \quad (7.59)$$

La tercera identidad en (7.10) entonces arroja que

$$\mathcal{J} = -\delta_{Q[\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3] + [Q \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3] - [\Lambda_1 Q \Lambda_2 \Lambda_3] + [\Lambda_1 \Lambda_2 Q \Lambda_3]} \quad (7.60)$$

La transformación en la derecha debe anularse en campos. La forma en que ésto funciona es debido a que no hay un 3-corchete entre los campos $Q\Lambda$ y dos

parámetros de Gauge. Más aún, también tenemos que

$$\delta_{Q\chi} = 0 \quad (7.61)$$

significando que aquel parámetro de Gauge no genera transformación. Estos dos hechos implican con (7.60) que $\mathcal{J} = 0$ es un requisito de consistencia.

7.3.2. Álgebras L_∞ en el cuadro de ℓ y teoría de campos

Hemos trabajado los axiomas de las álgebras L_∞ en la formulación donde todos los productos tienen grado menos uno. Volveremos a esto en una notación ligeramente diferente, con elementos \tilde{x}_i y productos escritos como

$$[\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n] \rightarrow b_n(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \quad (7.62)$$

Llamaremos a esto el *cuadro-b del álgebra L_∞* . Las convenciones de signo que describimos en este cuadro surten en una acción simple, simples ecuaciones de campo y transformaciones de Gauge. Los signos para las identidades tipo-Jacobi, de todas formas, son no-familiares. Los axiomas de las álgebras L_∞ han sido presentadas en una convención diferente. En éste nuevo *cuadro- ℓ* , los productos ℓ_n satisfacen identidades tipo-Jacobi con signos mucho más familiares. La acción, las ecuaciones de campo y las transformaciones de Gauge, de todas formas, tienen signos más complicados. Éstos dos cuadros de las álgebras L_∞ están relacionadas por una "suspension".

Comenzaremos con las identidades para los productos en el cuadro- ℓ . Llamaremos a definiciones análogas a las del cuadro- b y veremos cómo la suspensión las relaciona. Entonces podremos utilizar los resultados del cuadro- b para las ecuaciones de campo, acción y transformaciones de Gauge para obtener la formulación en el cuadro- ℓ .

Identidades de las álgebras L_∞ en el cuadro- ℓ

En una álgebra L_∞ tenemos un espacio vectorial X gradado con una gradados como:

$$X = \bigoplus_n X_n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (7.63)$$

Los elementos del espacio vectorial X_n diremos que tienen grado n . Usaremos la notación x_1, x_2, \dots para denotar vectores arbitrarios en X , pero cada uno teniendo un grado definido; cada x_k pertenece a algún espacio X_p . El grado entra en los factores de signo, donde por conveniencia omitiremos la etiqueta *grad*. Así, por ejemplo:

$$(-1)^{x_1 x_2} \equiv (-1)^{\text{grad}(x_1)\text{grad}(x_2)} \quad (7.64)$$

En exponentes, los grados son relevantes sólo módulo 2.

En una álgebra L_∞ tenemos productos multilineales $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$. El producto multilineal ℓ_k se dice que será de grado $k - 2$:

$$\text{grad} \ell_k = k - 2 \quad (7.65)$$

significando que cuando actúa sobre una colección de entradas encontramos que

$$\text{grad}(\ell_k(x_1, \dots, x_k)) = k - 2 + \sum_{i=1}^k \text{grad}(x_i) \quad (7.66)$$

Así

$$\text{grad}(\ell_1) = -1, \quad \text{grad}(\ell_2) = 0, \quad \text{grad}(\ell_3) = 1, \quad \text{etc} \quad (7.67)$$

Los productos están definidos para ser *Gradados conmutativos*. Por ejemplo ℓ_2 , por ejemplo, satisface,

$$\ell_2(x_1, x_2) = (-1)^{1+x_1 x_2} \ell_2(x_2, x_1) \quad (7.68)$$

Notar el signo ésta añadido en el exponente, cuando es comparado con la fórmula del cuadro-*b*. Más generalmente para cualquier permutación σ de las k etiquetas

tenemos

$$\ell_k(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = (-1)^\sigma \epsilon(\sigma; x) \ell_k(x_1, \dots, x_k) \quad (7.69)$$

Aquí $(-1)^\sigma$ arrojará un más si la permutación es par, y un menos si es impar. El signo de Koszul $\epsilon(\sigma; x)$ es definido considerando un álgebra gradada conmutativa $\Lambda(x_1, x_2, \dots)$ con

$$x_i \wedge x_j = (-1)^{x_i x_j} x_j \wedge x_i \quad (7.70)$$

y es posible leer este valor de la relación

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \epsilon(\sigma; x) x_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge x_{\sigma(k)} \quad (7.71)$$

Las identidades de L_∞ dadas en el lenguaje b pueden ser establecidas en el lenguaje ℓ y serán enumeradas por un numero entero positivo n :

$$\sum_{i+j=n+1} (-1)^{i(j-1)} \sum_{\sigma} (-1)^\sigma \epsilon(\sigma; x) \ell_j(\ell_i(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}), x_{\sigma(i+1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = 0 \quad (7.72)$$

Aquí $n \geq 1$ es el número de entradas. La suma sobre σ es una suma sobre los "desordenamientos", que significan una restricción a las permutaciones en que los argumentos están parcialmente ordenados de la forma

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(l), \quad \sigma(l+1) < \dots < \sigma(n) \quad (7.73)$$

Esquemáticamente, las identidades son de la forma

$$\sum_{i+j=n+1} (-1)^{i(j-1)} \ell_j \ell_i = 0 \quad (7.74)$$

Para $n = 1$ obtenemos

$$\ell_1(\ell_2(x)) = 0 \quad (7.75)$$

Ésto significa que la acción iterada de ℓ_1 arroja cero. En teoría de campos de cuerdas ℓ_1 es identificado con el operador BRST. Para $n = 2$, el constraint es esquemáticamente

$$\ell_1 \ell_2 = \ell_2 \ell_1 \quad (7.76)$$

lo que en detalle arroja

$$\ell_1(\ell_2(x_1, x_2)) = \ell_2(\ell_1(x_1), x_2) + (-1)^1 (-1)^{x_1 x_2} \ell_2(\ell_1(x_2), x_1) \quad (7.77)$$

donde $(-1)^1$ es el signo de σ y $(-1)^{x_1 x_2}$ es el signo de Koszul. Los argumentos en el último término pueden ser intercambiados para encontrar

$$\ell_1(\ell_2(x_1, x_2)) = \ell_2(\ell_1(x_1), x_2) + (-1)^{x_1} \ell_2(x_1, \ell_1(x_2)) \quad (7.78)$$

Reconocemos a ésto como el que ℓ_1 es una derivación del producto ℓ_2 . La siguiente identidad aparece para $n = 3$

$$0 = \ell_1 \ell_3 + \ell_3 \ell_1 + \ell_2 \ell_2 \quad (7.79)$$

y se lee explícitamente

$$\begin{aligned} 0 = & \ell_1(\ell_3(x_1, x_2, x_3)) + \ell_3(\ell_1(x_1), x_2, x_3) + (-1)^{x_1} \ell_3(x_1, x_2, \ell_1(x_3)) \\ & + \ell_2(\ell_2(x_1, x_2), x_3) + (-1)^{(x_1+x_2)x_3} \ell_2(\ell_2(x_3, x_1), x_2) + (-1)^{(x_2+x_3)x_1} \ell_2(\ell_2(x_2, x_3), x_1) \end{aligned} \quad (7.80)$$

Los primeros cuatro términos cuantifican el fallo de ℓ_1 de ser una derivación del producto ℓ_3 . Los últimos tres términos son el Jacobiador para un corchete definido por ℓ_2 . El fallo de ℓ_2 de ser un Corchete de Lie es así relacionado a la existencia de un producto de orden superior ℓ_3 .

Ahora veamos cómo se relaciona el cuadro- b con el cuadro- ℓ .

Desde el cuadro- b al cuadro- ℓ

En el cuadro- b del álgebra L_∞ tenemos un espacio vectorial gradado \tilde{X} gradado de la forma:

$$\tilde{X} = \bigoplus_n \tilde{X}_n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (7.81)$$

Los elementos del espacio vectorial \tilde{X}_n se dice que son de grado n . Usaremos la notación $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots$ para denotar vectores arbitrarios de grado fijo en \tilde{X} . En el cuadro- b todos los productos tienen grado menos uno:

$$\text{grad} b_n = -1 \quad (7.82)$$

Y como se explicó, todos los productos son gradados-conmutativos, sin factores adicionales:

$$b_n(\dots, \tilde{x}_i, \tilde{x}_j, \dots) = (-1)^{\tilde{x}_i \tilde{x}_j} b_n(\dots, \tilde{x}_j, \tilde{x}_i, \dots) \quad (7.83)$$

con exponentes representando grados. El producto interno es completamente gradado conmutativo y tiene una simple simetría bajo intercambio:

$$\langle \tilde{x}_1, b_n(\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \rangle = (-1)^{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2} \langle \tilde{x}_2, b_n(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \rangle \quad (7.84)$$

$$\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \rangle = (-1)^{(\tilde{x}_1+1)(\tilde{x}_2+1)} \langle \tilde{x}_2, \tilde{x}_1 \rangle \quad (7.85)$$

se sigue entonces que

$$\langle b_1(\tilde{x}_1), \tilde{x}_2 \rangle = (-1)^{\tilde{x}_1} \langle \tilde{x}_1, b_1(\tilde{x}_2) \rangle \quad (7.86)$$

En esta nueva notación, las identidades de L_∞ son una simple traslación de aquellas dadas en (7.10) y no necesitan ser repetidas. La transformación de Gauge y ecuaciones de campo, con $\Lambda \mapsto \tilde{\Lambda}$ y los campos denotados por $\tilde{\Psi}$, toman la forma

$$\delta_{\tilde{\Lambda}} \tilde{\Psi} = b_1(\tilde{\Lambda}) + b_2(\tilde{\Lambda}, \tilde{\Psi}) + \frac{1}{2} b_3(\tilde{\Lambda}, \tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}) + \dots \quad (7.87)$$

$$\tilde{\mathcal{F}} = b_1(\tilde{\Psi}) + \frac{1}{2} b_2(\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}) + \dots \quad (7.88)$$

Los grados para los vectores son

$$\text{grad}\tilde{\Lambda} = 1, \quad \text{grad}\tilde{\Psi} = 0, \quad \text{grad}\tilde{\mathcal{F}} = -1 \quad (7.89)$$

Suspensión: La suspensión es un mapeo que comienza con espacio vectorial gradado X y genera un espacio vectorial gradado \tilde{X} . Actuando en X_n la suspensión nos entrega el espacio \tilde{X}_{n+1} . El mapeo simplemente copia los vectores en X_n en \tilde{X}_{n+1} . El grado de los elementos es entonces "suspendido", o incrementado en una unidad. Para seguir apropiadamente a los vectores escribiremos el mapeo suspensión s o a veces \uparrow y diremos que

$$\tilde{x}_i = s x_i = \uparrow x_i \quad (7.90)$$

Arrojando

$$\text{grad}\tilde{x}_i = \text{grad}x_i + 1 \quad (7.91)$$

El mapeo inverso está bien definido y escribiremos

$$x_i = \downarrow \tilde{x}_i \quad (7.92)$$

Para los parámetros de Gauge, campos y ecuaciones de campo escribimos,

$$\tilde{\Lambda} = s\Lambda = \uparrow \Lambda, \quad \tilde{\Psi} = s\Psi = \uparrow \Psi, \quad \tilde{\mathcal{F}} = s\mathcal{F} = \uparrow \mathcal{F} \quad (7.93)$$

Notemos que dado (7.89) tenemos ahora

$$\text{grad}\Lambda = 0, \quad \text{grad}\Psi = -1, \quad \text{grad}\mathcal{F} = -2 \quad (7.94)$$

Los productos en ambos cuadros están relacionados como se sigue. Salvo un signo, $b_n(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ es el mismo que $\ell_n(x_1, \dots, x_n)$. Así tenemos que

$$b_{n+1}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+1}) = (-1)^{x_1 n + x_2(n-1) + \dots + x_n} s \ell_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) \quad (7.95)$$

En lo anterior, los valores x_1, \dots, x_n en el exponente denotarán los grados de los elementos de X . Notar que el grado en el lado derecho de (7.95) es

$$1 + ((n + 1) - 2) + \sum_{k=1}^{n+1} \text{grad}x_k = -1 + \sum_{k=1}^{n+1} (\text{grad}x_k + 1) = -1 + \sum_{k=1}^{n+1} \text{grad}\tilde{x}_k \quad (7.96)$$

mostrando que (7.95) es consistente con los grados de los productos de ℓ y b . Los primeros casos de (7.95) arrojan

$$b_1(\tilde{x}) = s\ell_1(x) \quad (7.97)$$

$$b_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (-1)^{x_1} s\ell_2(x_1, x_2) \quad (7.98)$$

$$b_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (-1)^{x_2} s\ell_3(x_1, x_2, x_3) \quad (7.99)$$

$$b_4(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) = (-1)^{x_1+x_3} s\ell_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (7.100)$$

Uno puede verificar que las identidades tipo-Jacobi de ℓ_n , salvo suspensión se vuelven las correspondientes identidades de b_n .

Se sigue de (7.95), aplicado al parámetro de Gauge y n campos que

$$b_{n+1}(\tilde{\Lambda}, \tilde{\Psi}^n) = (-1)^{(-1)(n-0)+(-1)(n-1)+\dots+(-1)} s\ell_{n+1}(\Lambda, \Psi^n) \quad (7.101)$$

Haciendo la suma en el exponente y aplicando \downarrow encontramos

$$\downarrow b_{n+1}(\tilde{\Lambda}, \tilde{\Psi}^n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ell_{n+1}(\Lambda, \Psi^n) \quad (7.102)$$

Ésta fórmula nos permite trasladar las transformaciones de Gauge desde el cuadro- b al ℓ . Consideremos

$$\delta_{\tilde{\Lambda}} \tilde{\Psi} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}(\tilde{\Lambda}, \tilde{\Psi}^n) \quad (7.103)$$

Aplicando \downarrow a la transformación anterior

$$\downarrow \delta_{\tilde{\Lambda}} \tilde{\Psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \downarrow b_{n+1}(\tilde{\Lambda}, \tilde{\Psi}^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ell_{n+1}(\Lambda, \Psi^n) \quad (7.104)$$

Expandiendo, ésto arroja una serie cuyos signos son alternativos cada dos elementos

$$\delta_{\Lambda}\Psi = \ell_1(\Lambda) + \ell_2(\Lambda, \Psi) - \frac{1}{2}\ell_3(\Lambda, \Psi, \Psi) - \frac{1}{3!}\ell_4(\Lambda, \Psi, \Psi, \Psi) + \dots \quad (7.105)$$

Ahora consideremos a la Acción. Para ésta debemos considerar el producto interior. Las identidades para el producto interior en el cuadro- ℓ emergen de la definición en términos del producto interior del cuadro- b :

$$\langle x_1, x_2 \rangle \equiv \langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \rangle \quad (7.106)$$

Aquí, $x_1, x_2 \in X$ y con un ligero abuso de notación, el producto interior en el lado derecho es en el cuadro- b mientras que el de la izquierda en el cuadro- ℓ . De las propiedades del producto interior del cuadro- b (7.84) y de la definición anterior podemos derivar las propiedades del producto interior del cuadro- ℓ :

$$\langle x, \ell_n(x_1, \dots, x_n) \rangle = (-1)^{xx_1+1} \langle x_1, \ell_n(x, x_2, \dots, x_n) \rangle \quad (7.107)$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle = (-1)^{x_1x_2} \langle x_2, x_1 \rangle \quad (7.108)$$

Y entonces podemos ver que el producto interno es totalmente gradada-simétrica, tal como los productos lo son. Podemos con ésto verificar que

$$\langle \ell_1(x_1), x_2 \rangle = (-1)^{x_1+1} \langle x_1, \ell_1(x_2) \rangle \quad (7.109)$$

$$\langle \ell_2(x_1, x_2), x_3 \rangle = \langle x_1, \ell_2(x_2, x_3) \rangle \quad (7.110)$$

La traslación de la acción

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle \tilde{\Psi}, b_n(\tilde{\Psi}^n) \rangle \quad (7.111)$$

se realiza usando (7.95), que arroja

$$\downarrow b_n(\tilde{\Psi}^n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ell_n(\Psi^n) \quad (7.112)$$

En efecto, junto con (7.106) tenemos una forma cerrada para la expresión para la acción en el cuadro- ℓ :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n+1)!} \langle \Psi, \ell_n(\Psi^n) \rangle \quad (7.113)$$

Otra vez expandiendo encontramos signos alternantes:

$$S = \frac{1}{2} \langle \Psi, \ell_1(\Psi) \rangle - \frac{1}{3!} \langle \Psi, \ell_2(\Psi^2) \rangle - \frac{1}{4!} \langle \Psi, \ell_3(\Psi^3) \rangle + \frac{1}{5!} \langle \Psi, \ell_4(\Psi^4) \rangle + \dots \quad (7.114)$$

Las ecuaciones de campo adoptan la forma

$$\mathcal{F}(\Psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \ell_n(\Psi^n) = \ell_1(\Psi) - \frac{1}{2} \ell_2(\Psi^2) - \frac{1}{3!} \ell_3(\Psi^3) + \frac{1}{4!} \ell_4(\Psi^4) + \dots \quad (7.115)$$

Las transformaciones de Gauge de las ecuaciones de campo pueden ser traducidas a partir de (7.44)

$$\delta \tilde{\mathcal{F}} = [\tilde{\Lambda}, \tilde{\mathcal{F}}]' \quad (7.116)$$

junto con

$$\downarrow b_{n+2}(\tilde{\Lambda}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\Psi}^n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ell_{n+2}(\Lambda, \mathcal{F}, \Psi^n) \quad (7.117)$$

Ésto arroja que

$$\delta_{\Lambda} \mathcal{F}(\Psi) = \ell_2(\Lambda, \mathcal{F}) + \ell_3(\Lambda, \mathcal{F}(\Psi), \Psi) - \frac{1}{2} \ell_4(\Lambda, \mathcal{F}(\Psi), \Psi^2) + \dots \quad (7.118)$$

Ésto expresa la covariancia de Gauge de las ecuaciones de campo en el cuadro- ℓ .

Para el álgebra de Gauge tenemos (7.48) estableciendo que $[\delta_{\tilde{\Lambda}_2}, \delta_{\tilde{\Lambda}_1}]$ es una transformación de Gauge con parámetro

$$\tilde{\Lambda}_{12} \equiv [\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2]' \quad (7.119)$$

como añadido a la transformación de Gauge trivial. En el cuadro- ℓ el conmutador $[\delta_{\Lambda_2}, \delta_{\Lambda_1}]$ es una transformación de Gauge con parámetro

$$\Lambda_{12} = \ell_2(\Lambda_1, \Lambda_2) + \ell_3(\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi) - \frac{1}{2} \ell_4(\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi, \Psi) - \dots \quad (7.120)$$

con los ahora familiares signos alternantes. Ésta traslación se sigue de la identidad

$$\downarrow b_{n+2}(\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2, \tilde{\Psi}^n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ell_{n+2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi^n) \quad (7.121)$$

Observaciones generales en la álgebra L_∞ de las teorías de campos

Hagamos algunas observaciones generales sobre la extracción de productos de una teoría perturbativa de campos invariante de Gauge.

Nos concentraremos en la parte de la teoría que trata con parámetros de Gauge, campos y ecuaciones de Campo. Así consideremos el espacio vectorial gradado

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & X_{-1} & \longrightarrow & X_{-2} \\ & & \Lambda & & \Psi & & E \end{array} \quad (7.122)$$

Las flechas están definidas como el mapeo ℓ_1 . Asumiremos que no hay espacios X_{-d} con $d \geq 3$. Las ecuaciones de campo (7.115), como vimos, toman la forma

$$\ell_1(\Psi) - \frac{1}{2!} \ell_2(\Psi, \Psi) - \frac{1}{3!} \ell_3(\Psi, \Psi, \Psi) + \frac{1}{4!} \ell_4(\Psi, \Psi, \Psi, \Psi) + \cdots = 0 \quad (7.123)$$

Se sigue que el conocimiento de las ecuaciones de campo determinarán a todos los productos

$$\ell_n(\Psi, \dots, \Psi) \in X_{-2}, \quad n \geq 1 \quad (7.124)$$

que involucren campos. Aquí todos los argumentos son idénticos, pero un resultado general (una identidad de polarización) implican que una forma multilineal simétrica es completamente determinada por los valores de la diagonal. Por ejemplo, definiendo $L_2(\Psi) = \ell_2(\Psi, \Psi)$ y $L_3(\Psi) = \ell_3(\Psi, \Psi, \Psi)$ tenemos

$$2\ell_2(\Psi_1, \Psi_2) = L_2(\Psi_1 + \Psi_2) - L_2(\Psi_1) - L_2(\Psi_2) \quad (7.125)$$

$$\begin{aligned} 3!\ell_3(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) &= L_3(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3) - L_3(\Psi_1 + \Psi_2) - L_3(\Psi_1 + \Psi_3) \\ &\quad - L_3(\Psi_2 + \Psi_3) + L_3(\Psi_1) + L_3(\Psi_2) + L_3(\Psi_3) \end{aligned} \quad (7.126)$$

Más generalmente, definiendo $L_n(\Psi) = \ell_n(\Psi, \dots, \Psi)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 n! \ell_n(\Psi_1, \dots, \Psi_n) &= L_n(\Psi_1 + \dots + \Psi_n) - [L_n(\Psi_1 + \dots + \Psi_{n-1}) + \dots] + [\dots] - \dots \\
 &+ (-1)^{n-k} [L_n(\Psi_1 + \dots + \Psi_k) + \dots] + \dots \\
 &+ (-1)^{n-1} [L_n(\Psi_1) + \dots + L_n(\Psi_n)]
 \end{aligned} \tag{7.127}$$

El patrón es claro. Vamos sustrayendo todos los términos con L_n valuados en la suma de los campos dejando uno fuera. Alternamos signos y dejamos dos, tres, cuatro fuera, hasta dejar a todos los campos fuera excepto a uno. Ésto muestra que hemos determinado completamente el producto multilineal actuando en campos arbitrarios.

Consideremos ahora las identidades de L_∞ actuando en sólo campos. La primera es:

$$\ell_1(\ell_1(\Psi)) = 0 \tag{7.128}$$

Ya que $\ell_1(\Psi)$ es un elemento E de X_{-2} podemos fácilmente satisfacer este constraint haciendo

$$\ell_1(E) = 0 \tag{7.129}$$

Para la segunda identidad tenemos

$$\ell_1(\ell_2(\Psi, \Psi)) = 2\ell_2(\ell_1(\Psi), \Psi) \tag{7.130}$$

El lado izquierdo es de la forma $\ell_1(E)$ y debe desaparecer. Así la identidad se mantiene si

$$\ell_2(E, \Psi) = 0 \tag{7.131}$$

Un argumento inductivo muestra que todas las identidades L_∞ actuando sobre campos son satisfechas si tomamos que

$$\ell_{n+1}(E, \Psi_1, \dots, \Psi_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \tag{7.132}$$

Esto no es sorprendente, ya que todo lo anterior es de orden $n + 1 - 2 + (-2) - n = -3$ y no hemos introducido un espacio X_{-3} . Si lo hiciésemos podríamos contemplar configuraciones de estos productos que no son nulos: por ejemplo haciendo que $\ell_1(E)$ sea igual a un valor tal que $\ell_1(\ell_1(\Psi)) = 0$.

Consideremos una transformación de Gauge. De (7.105)

$$\delta_\xi \Psi = \ell_1(\Lambda) + \ell_2(\Lambda, \Psi) - \frac{1}{2}\ell_3(\Lambda, \Psi, \Psi) - \frac{1}{3!}\ell_4(\Lambda, \Psi, \Psi, \Psi) + \dots \quad (7.133)$$

Ahora podemos leer estos productos c

$$\ell_{n+1}(\Lambda, \Psi_1, \dots, \Psi_n) \in X_{-1}, \quad n \geq 0 \quad (7.134)$$

donde podemos usar las identidades de polarización anteriores para deducir el valor del producto de entradas no-diagonales.

Podemos ahora examinar las identidades L_∞ cuando ingresamos una lista de argumentos $(\Lambda, \Psi, \dots, \Psi)$. La identidad $\ell_1(\ell_1(\Lambda)) = 0$ es no-trivial pero debe mantenerse debido a la invariancia de Gauge de las ecuaciones linealizadas de campo. La siguiente identidad es

$$\ell_1(\ell_2(\Lambda, \Psi)) = \ell_2(\ell_1(\Lambda), \Psi) + \ell_2(\Lambda, \ell_1(\Psi)) \quad (7.135)$$

El lado izquierdo ya está determinado así como el primero término del lado derecho. Así ésta identidad determina

$$\ell_2(\Lambda, E) \in X_{-2} \quad (7.136)$$

La siguiente identidad puede ser vista para determinar $\ell_3(\Lambda, E, \Psi)$. Entonces el conjunto de identidades L_∞ actuando en $(\Lambda, \Psi, \dots, \Psi)$ determina los productos

$$\ell_{n+2}(\Lambda, E, \Psi_1, \dots, \Psi_n) \in X_{-2}, \quad n \geq 0 \quad (7.137)$$

Las identidades que dejan determinar ésto son de hecho las relevantes para la covariancia de Gauge (7.45) de las ecuaciones de campo. Ahora podemos iterar

el proceso y considerar las identidades L_∞ en una lista $(\Lambda, E, \Psi, \dots, \Psi)$. Ésta vez vamos a considerar productos $\ell_3(\Lambda, E_1, E_2, \Psi, \dots, \Psi)$. Pero éstos productos son de orden menos tres, y deberían desaparecer si asumimos que X_{-3} no existe. El conmutador del álgebra de Gauge permite determinar los siguientes productos. Para los parámetros de Gauge campo-dependientes se lee

$$\ell_{n+2}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi_1, \dots, \Psi_n) \in X_0, \quad n \geq 0 \quad (7.138)$$

Si tenemos sólo clausura on-shell entonces se lee

$$\ell_{n+3}(\Lambda_1, \Lambda_2, E, \Psi_1, \dots, \Psi_n) \in X_{-1}, \quad n \geq 0 \quad (7.139)$$

Usando las identidades L_∞ para entradas de la forma $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi_1, \dots, \Psi_n)$ obtenemos los constraints en los productos $\ell_3((\Lambda_1, \Lambda_2, E, \Psi_1, \dots, \Psi_n) \in X_{-1}$ determinada por la clausura on-shell. Por el uso de las identidades para entradas de la forma $(\Lambda_1, \Lambda_2, E, \Psi, \dots, \Psi)$ podemos obtener información acerca del producto $\ell_{n+4}(\Lambda_1, \Lambda_2, E_1, E_2, \Psi_1, \dots, \Psi_n) \in X_{-2}$. Notar que los productos desaparecen en las diagonales Λ y en las E .

Queremos enfatizar un punto importante. Hemos visto en detalle el cómo un consistente conjunto de productos L_∞ originan transformaciones de Gauge bajo las cuales las ecuaciones del movimiento transforman covariantemente y a un álgebra de Gauges que es cerrada. Ahora queremos explicar que el reverso también es verdad. Más precisamente:

1. Si tenemos una transformación de Gauge y las propiedades de Covariancia de Gauge de las ecuaciones de campo de cierto tipo, las identidades L_∞ actuando en las entradas (Λ, Ψ, \dots) , con un número arbitrario de Ψ 's son todas satisfechas.
2. Si tenemos una transformación de Gauge del tipo estandar y un álgebra de

Gauge estandar, entonces las identidades L_∞ actuando sobre las entradas $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi, \dots)$, con un número arbitrario de Ψ 's son todas satisfechas.

Consideremos el primer item, y trabajemos por simplicidad en el cuadro- b donde todos los signos son simples. Recordemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\delta_\Lambda \Psi &= Q\Lambda + [\Lambda, \Psi] + \frac{1}{2}[\Lambda, \Psi, \Psi] + \frac{1}{3!}[\Lambda, \Psi, \Psi, \Psi] + \dots \\ \mathcal{F}(\Psi) &= Q\Psi + \frac{1}{2}[\Psi, \Psi] + \frac{1}{3!}[\Psi, \Psi, \Psi] + \frac{1}{4!}[\Psi, \Psi, \Psi, \Psi] + \dots \\ \delta_\Lambda \mathcal{F}(\Psi) &= [\Lambda, \mathcal{F}] + [\Lambda, \mathcal{F}, \Psi] + \frac{1}{2}[\Lambda, \mathcal{F}, \Psi, \Psi] + \dots\end{aligned}$$

La primera ecuación es lo que conocemos como una transformación de Gauge estandar y la última lo que llamamos una covariancia de las ecuaciones de campo del tipo estandar. Pensemos en las primeras dos ecuaciones como definiciones. Entonces, usaremos algunos subconjuntos de identidades L_∞ para mostrar que la última ecuación se satisface. Pero el asunto es que la última ecuación se satisface *si y solo si* ese subconjunto de identidades L_∞ se mantiene. La ecuación es verificada en potencias de Ψ , y por cada potencia Ψ^n una identidad L_∞ es involucrada. También es claro, debido a que \mathcal{F} es una suma de todos los productos de los campos, que las identidades relevantes L_∞ son aquellas con un Λ y un cierto número de Ψ 's.

Para el segundo item ahora consideremos el álgebra de Gauge (7.48) actuando en un campo,

$$[\delta_{\Lambda_2}, \delta_{\Lambda_1}]\Psi = \delta_{[\Lambda_1 \Lambda_2]'}\Psi + [\Lambda_1 \Lambda_2 \mathcal{F}]' \quad (7.140)$$

Llamaremos a ésto la forma estandar del álgebra de Gauge. Hemos verificado antes que usar la transformación de Gauge anterior la álgebra de Gauge anterior se sigue si la colección de identidades L_∞ involucran entradas $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi, \dots)$. De hecho el álgebra de Gauge se mantiene *si y solo si* las identidades L_∞ se mantienen. Otra vez, la ecuación (7.140) es verificada en potencias de Ψ y para cada

potencia Ψ^n hay una identidad L_∞ involucrada con entradas $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Psi^n)$.

La utilidad de las observaciones anteriores son que si identificamos una teoría de campos perturbativa en la cual tenemos las transformaciones de Gauge estándar, covariancia de las ecuaciones de campo, y álgebra de Gauge, tenemos garantizado que los productos pueden ser fácilmente leídos de éstas expresiones satisfacerán gigantes subconjuntos de identidades L_∞ .

7.3.3. Teorías de Gauge no-abelianas y álgebras L_∞

Comenzaremos discutiendo las teorías tipo Yang-Mills como álgebras L_∞ y luego se buscará construir una teoría dinámica basada en la acción de Chern-Simons.

Generalidades en las Teorías de Yang-Mills

Consideremos un álgebra de Lie \mathcal{G} con generadores T_α :

$$[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma \quad (7.141)$$

donde $f_{\alpha\beta}^\gamma$ son las constantes de estructura. También consideraremos los campos de Gauge valuados en el álgebra $A_\mu(x) = A_\mu^\alpha(x)T_\alpha$ y los parámetros de Gauge $\lambda(x) = \lambda^\alpha(x)T_\alpha$. La ley de transformación del campo de Gauge es

$$\delta_\lambda A_\mu^\alpha = \partial_\mu \lambda^\alpha + [A_\mu, \lambda]^\alpha \quad (7.142)$$

y éstas cierran de acuerdo a la estructura del álgebra de Lie:

$$[\delta_{\lambda_1}, \delta_{\lambda_2}] = \delta_{[\lambda_1, \lambda_2]} \quad (7.143)$$

También tenemos el *Field Strength*

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + [A_\mu, A_\nu]^\alpha \quad (7.144)$$

que transforma covariantemente bajo transformaciones de Gauge:

$$\delta_\lambda F_{\mu\nu} = [F_{\mu\nu}, \lambda] \quad (7.145)$$

Debemos determinar el álgebra L_∞ apropiada para una teoría de Chern-Simmons en 3D y para la teoría de Yang-Mills en dimensión arbitraria. Para ambos casos el espacio vectorial gradado total X será tomado para que contenga tres tipos de espacios de graduación fija:

$$\lambda^\alpha \in X_0 \quad A_\mu^\alpha \in X_{-1} \quad E_\mu^\alpha \in X_{-2} \quad (7.146)$$

Los parámetros de Gauge tienen grado cero, los campos de Gauge A tienen grado menos uno y las ecuaciones del movimiento E tienen grado menos dos. Escribiremos ésto como:

$$\text{grad}(\lambda) = 0, \quad \text{grad}(A) = -1, \quad \text{grad}(E) = -2 \quad (7.147)$$

Recordando que $\ell_2(x_1, x_2) = (-1)^{1+x_1x_2}\ell_2(x_2, x_1)$ tenemos que ℓ_2 es antisimétrico para los parámetros de Gauge, como un álgebra de Lie, y simétrico para los campos, como dicta la interacción de campos bosónicos.

Definimos el producto interior que es no-anulado sólo cuando el grado total es menos tres:

$$\langle A, E \rangle \equiv \int dx \, k_{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} A_\mu^\alpha(x) E_\nu^\beta(x) \quad (7.148)$$

donde $k_{\alpha\beta}$ es la forma de Cartan-Killing y $\eta_{\mu\nu}$ es una métrica fija del espacio-tiempo (por decir, Minkowski) e incluye una integración sobre todo el espacio-tiempo, pues el producto interior debería arrojar un número.

El álgebra de Lie homotópica implica un infinito número de identidades. Por supuesto, para teorías de Gauge polinomiales tenemos sólo que verificar un número finito de ellas. Aquí está una tabla de las identidades, ordenadas por el grado total

de la identidad, y mostrando el grado total de las entradas que deben ser verificadas dada la existencia del complejo relevante a grado cero, menos uno y menos dos

$$\begin{aligned}
 & grad = -2, \quad \ell_1 \ell_1 = 0 \{ grad = 0 : \lambda \\
 & grad = -1, \quad \ell_1 \ell_2 - \ell_2 \ell_1 = 0 \left\{ \begin{array}{l} grad = 0 : \lambda \lambda \\ grad = -1 : \lambda A \end{array} \right. \\
 & grad = 0, \quad \ell_3 \ell_1 + \ell_2 \ell_2 + \ell_1 \ell_3 = 0 \left\{ \begin{array}{l} grad = 0 : \lambda \lambda \lambda \\ grad = -1 : \lambda \lambda A \\ grad = -2 : \lambda A A, \lambda \lambda E \end{array} \right. \quad (7.149) \\
 & grad = 1, \quad \ell_1 \ell_4 - \ell_2 \ell_3 + \ell_3 \ell_2 - \ell_4 \ell_1 = 0 \left\{ \begin{array}{l} grad = -1 : \lambda \lambda \lambda A \\ grad = -2 : \lambda \lambda A A, \lambda \lambda \lambda E \\ grad = -3 : \lambda A A A, \lambda \lambda A E \end{array} \right. \\
 & grad = 2, \quad \ell_1 \ell_5 \pm \ell_2 \ell_4 \pm \ell_3 \ell_3 \pm \dots = 0 \{ \dots
 \end{aligned}$$

Para la teoría de Chern-Simons sólo hay un producto ℓ_1 y uno ℓ_2 por lo que las dos primeras identidades deben ser verificadas. Yang-Mills es una teoría que también tiene ℓ_3 y así todas las identidades deben ser verificadas.

La que la estructura de Gauge es la misma para Chern-Simons y Yang-Mills, podemos leer algunos productos básicos. Comparando la transformación de Gauge (7.142) con expresiones

$$\delta_\lambda A = \ell_1(\lambda) + \ell_2(\lambda, A) + \dots \quad (7.150)$$

inferimos que:

$$\ell_1(\lambda) = \partial_\mu \lambda \in X_{-1} \quad (7.151)$$

$$\ell_2(\lambda, A) = [A, \lambda] \in X_{-1} \quad (7.152)$$

Todos los productos involucrando un parámetro de Gauge y dos o más campos deben desaparecer. Podemos escribir los índices en éstas ecuaciones explícita-

mente

$$[\ell_1(\lambda)]_\mu^\alpha = \partial_\mu \lambda^\alpha \in X_{-1} \quad (7.153)$$

$$[\ell_2(\lambda A)]_\mu^\alpha = [A_\mu, \lambda]^\alpha \in X_{-1} \quad (7.154)$$

Notemos que para cumplir con la conmutatividad gradada tambien debemos definir

$$\ell_2(A, \lambda) \equiv -\ell_2(\lambda, A) = -[A, \lambda] \quad (7.155)$$

Podemos ahora usar el álgebra de Gauge para identificar el producto ℓ_2 actuando en los dos parámetros de Gauge. De (7.150) rápidamente encontramos que

$$\begin{aligned} [\delta_{\lambda_1}, \delta_{\lambda_2}]A &= \delta_{\lambda_1}(\ell_1(\lambda_2) + \ell_2(\lambda_2, A)) - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \ell_2(\lambda_2, \delta_{\lambda_1}A) - \ell_2(\lambda_1, \delta_{\lambda_2}A) \\ &= \ell_2(\lambda_2, \ell_1(\lambda_1)) - \ell_2(\lambda_1, \ell_1(\lambda_2)) + \mathcal{O}(A) \\ &= -\ell_2(\ell_1(\lambda_1), \lambda_2) - \ell_2(\lambda_1, \ell_1(\lambda_2)) + \mathcal{O}(A) \end{aligned} \quad (7.156)$$

Entonces usamos $\ell_1\ell_2 = \ell_2\ell_1$ para identificar la transformación de Gauge en el lado derecho:

$$[\delta_{\lambda_1}, \delta_{\lambda_2}]A = \ell_1(-\ell_2(\lambda_1, \lambda_2)) + \mathcal{O}(A) = \delta_{-\ell_2(\lambda_1, \lambda_2)}A \quad (7.157)$$

Los términos dependientes de A en el lado derecho no son necesitados para la identificación. Comparando con (7.143) inferimos que

$$\ell_2(\lambda_1, \lambda_2) = -[\lambda_1, \lambda_2] \in X_0 \quad (7.158)$$

7.4. *Bootstrap* de teorías No-conmutativas de Gauge

La idea principal del *Bootstrap* de Teorías No-conmutativas consiste en representar la teoría de Gauge original sin deformar en conjunto con una deformación

de la teoría que pertenece a una estructura de álgebra L_∞ mucho más grande, fijando los corchetes iniciales de la teoría, es decir los productos ℓ_1, ℓ_2 , etc. El siguiente paso corresponde a la resolución de las identidades $L_\infty, \mathcal{J}_n = 0$, con lo cual procedemos a encontrar los productos de orden superior ℓ_n que son necesarios para cerrar el álgebra L_∞ nueva, preservando la asociatividad homotópica y formulando una deformación consistente de la teoría original.

Los trabajos de Blumenhagen y Kupriyanov han permitido generalizar el mecanismo para estructuras pseudo-Poissonianas, es decir, mediadas por una generalización del Corchete de Poisson como el corchete $\ell_2(f, g)$ inicial.

La idea del mecanismo de *Bootstrap* quedará muchísimo más clara en el siguiente capítulo, a través del cálculo explícito de la teoría de Gauge $U(1)$ para el espacio-tiempo de Snyder.

Capítulo 8

Teoría de Gauge de Snyder

En el artículo [47] R. Blumenhagen conjetura que toda teoría de Gauge consistente debe poder ser escrita en términos de una estructura L_∞ . Bajo esta consideración, buscamos hacer *bootstrap* a través de dicha estructura, para poder construir una teoría de Gauge para el espacio-tiempo propuesto por H. Snyder en 1947, conocido como *El espacio-tiempo de Snyder* [50]. Cabe mencionar que en [47] es explorada esta conjetura en espacio-tiempos que son no-conmutativos, y cuya no conmutatividad sea medida como una función de las coordenadas del espacio. Como veremos a continuación, el espacio-tiempo de Snyder involucra derivadas de orden superior que lo hacen escapar de los casos señalados en dicho artículo. Ésto sugiere una extensión natural del artículo donde no solo $[x^\mu, x^\nu] = \Theta(x)$, sino que dicha función que mide la no-conmutatividad pueda ser dependiendo del momentum, es decir, $\Theta(x, p)$. La necesidad de la extensión del método recae en que las correcciones de gravedad cuántica al principio de indeterminación de Heisenberg en la posición involucran términos adicionales que son proporcionales a la indeterminación del momentum, es decir, conmutadores $[x^\mu, p^\nu]$ proporcionales a p^2 u ordenes superiores [51].

8.1. Producto de Moyal y Corchete Deformado de Snyder

El espacio-tiempo de Snyder puede ser considerado como una deformación del Álgebra de Heisenberg, así como otros espacio-tiempo no-conmutativos (por ejemplo κ -Minkowski). El álgebra de Heisenberg posee un producto \cdot conmutativo y asociativo para el espacio de las funciones definidas sobre el espacio base de la estructura de Algebroide, es decir, el espacio de las posiciones. Es posible entender que la deformación de la estructura algebraica de Heisenberg a Snyder (añadiendo la no-conmutatividad del espacio) puede traducirse a una deformación del producto entre funciones del espacio de las coordenadas (interpretación de no-conmutatividad de Connes).

Sabemos que el producto estrella, en término del operador Twist (inverso) corresponde a la ecuación:

$$f(x) \star g(x) := m(\mathcal{F}^{-1}(\triangleright \otimes \triangleright)(f(x) \otimes g(x))) \quad (8.1)$$

Del proceso de cálculo del operador twist inverso obtuvimos su aproximación a primer orden, por lo que consideremos que:

$$\mathcal{F}^{-1} = 1 \otimes 1 + is \left(\frac{1}{2} p^\alpha p^\beta \otimes x_\alpha p_\beta + \frac{1}{2} p^2 \otimes x \cdot p + p_\alpha \otimes x \cdot p p^\alpha \right) + \mathcal{O}(s^2) \quad (8.2)$$

Recordando que:

$$p_\alpha \triangleright f(x) = -i \partial_\alpha f(x); \quad x_\alpha \triangleright f(x) = x_\alpha f(x)$$

Podemos calcular a orden s^1 :

$$\begin{aligned}
f(x) \star g(x) &\approx m([1 \otimes 1 + is \left(\frac{1}{2} p^\alpha p^\beta \otimes x_\alpha p_\beta + \frac{1}{2} p^2 \otimes x \cdot p \right. \\
&\quad \left. + p_\alpha \otimes x \cdot p p^\alpha \right)] (\triangleright \otimes \triangleright) (f(x) \otimes g(x))) \\
&= m(f \otimes g + is \left(\frac{1}{2} ((-i)^2 \partial^\alpha \partial^\beta f \otimes (-i) x_\alpha \partial_\beta g) + \frac{1}{2} ((-i)^2 \partial_\alpha \partial^\alpha f \otimes (-i) x_\beta \partial^\beta g) \right. \\
&\quad \left. + ((-i) \partial_\alpha f \otimes (-i)^2 x^\beta \partial_\beta \partial^\alpha g) \right) \\
&= f(x) \cdot g(x) - \frac{s}{2} (x_\alpha \partial^\alpha \partial^\beta f(x) \partial_\beta g(x) + x^\beta \partial^\alpha \partial_\alpha f(x) \partial_\beta g(x) \\
&\quad + 2x^\beta \partial_\alpha f(x) \partial_\beta \partial^\alpha g(x))
\end{aligned}$$

Finalmente obteniendo:

$$f \star g = f \cdot g - \frac{s}{2} [\eta^{\mu\nu} x^\beta \partial_\beta + x^\nu \partial^\mu] \{(\partial_\mu f)(\partial_\nu g)\} + \mathcal{O}(s^2)$$

Notemos que a diferencia del caso revisado en [47], aquí $\Theta^{\mu\nu}(x)$ es un operador diferencial con dependencia en las coordenadas.

Definiendo el conmutador deformado como:

$$[f(x), g(x)]_\star := f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x) \quad (8.3)$$

encontramos entonces que:

$$\begin{aligned}
[f(x), g(x)]_\star &= -\frac{s}{2} [\eta^{\mu\nu} x^\beta \partial_\beta + x^\nu \partial^\mu - \eta^{\nu\mu} x^\beta \partial_\beta - x^\mu \partial^\nu] \{(\partial_\mu f)(\partial_\nu g)\} + \mathcal{O}(s^2) \\
&= \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \{(\partial_\mu f)(\partial_\nu g)\} + \mathcal{O}(s^2)
\end{aligned}$$

donde $\Theta^{\mu\nu\lambda} := \frac{s}{2}(x^\mu \eta^{\nu\lambda} - x^\nu \eta^{\mu\lambda})$, con $\Theta^{\mu\nu\lambda} = -\Theta^{\nu\mu\lambda}$. En este punto podemos visualizar una estructura aún más general que las estudiadas en la literatura, por lo que debemos precisar de un estudio mucho dedicado a ésto, debido a que al condensar la estructura no-conmutativa y no-asociativa en una deformación del álgebra de funciones sobre el espacio-tiempo se origina una estructura más general que las estructuras pseudo-Poissonianas estudiadas para el caso no-asociativo por V. G. Kupriyanov y D. V. Vassilevich [52].

8.2. Construcción de álgebra L_∞

Consideremos dos espacios vectoriales no-triviales:

$$\begin{array}{cc} X_0 & X_{-1} \\ f & A_\lambda \end{array} \quad (8.4)$$

Definimos al primer y segundo producto del álgebra L_∞ , de la forma:

$$\ell_1(f) := \partial_\lambda f \in X_{-1} \quad (8.5)$$

$$\ell_2(f, g) := [f, g]_\star \in X_0 \quad (8.6)$$

Consideremos la identidad $\mathcal{J}_2 = \ell_1\ell_2 - \ell_2\ell_1$, de forma que si consideramos como entradas a dos elementos de X_0 , se transforma en la identidad de Jacobi.

$$\ell_1(\ell_2(f, g)) = \ell_2(\ell_1(f), g) + \ell_2(f, \ell_1(g)) \quad (8.7)$$

Esta identidad da información sobre cómo debe ser el producto $\ell_2(f, A_\lambda)$. Por un lado:

$$\begin{aligned} \ell_1(\ell_2(f, g)) &= \partial_\rho (\Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \{(\partial_\mu f)(\partial_\nu g)\}) + \mathcal{O}(s^2) \\ &= (\partial_\rho \Theta^{\mu\nu\lambda}) \partial_\lambda \{(\partial_\mu f)(\partial_\nu g)\} \\ &\quad + \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \{(\partial_\mu(\partial_\rho f))(\partial_\nu g)\} \\ &\quad + \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \{(\partial_\mu f)(\partial_\nu(\partial_\rho g))\} + \mathcal{O}(s^2) \\ &= (\partial_\rho \Theta^{\mu\nu\lambda}) \partial_\lambda \{(\partial_\mu f)(\partial_\nu g)\} \\ &\quad + [\ell_1(f)_\rho, g]_\star + [f, \ell_1(g)_\rho]_\star + \mathcal{O}(s^2) \\ &= \ell_2(\ell_1(f)_\rho, g) + \ell_2(f, \ell_1(g)_\rho) \end{aligned}$$

donde $\ell_1(f), \ell_1(g) \in X_{-1}$. Ésto nos motiva a definir el producto $\ell_2(f, A_\lambda) \in X_{-1}$ como:

$$\ell_2(f, A_\lambda) := [f, A_\lambda]_\star + \frac{1}{2}(\partial_\rho \Theta^{\mu\nu\lambda}) \partial_\lambda \{(\partial_\mu f)(A_\nu)\} \quad (8.8)$$

Podemos continuar obteniendo los productos, en particular para encontrar la violación a la identidad de Jacobi del corchete deformado. Consideremos la relación $\mathcal{J}_3(f, g, h) = 0$:

$$0 = \ell_2(\ell_2(f, g), h) + \ell_2(\ell_2(g, h), f) + \ell_2(\ell_2(h, f), g) \\ + \ell_3(\ell_1(f), g, h) + \ell_3(f, \ell_1(g), h) + \ell_3(f, g, \ell_1(h))$$

donde usamos el que la aparición de un producto $\ell_3(f, g, h) \in X_1$ el cual se escapa de los espacios considerados (y por considerar), por lo que $\ell_3(f, g, h) \equiv 0$. Luego:

$$\begin{aligned} & \ell_2(\ell_2(f, g), h) + \ell_2(\ell_2(g, h), f) + \ell_2(\ell_2(h, f), g) \\ = & ([f, g]_\star, h)_\star + ([g, h]_\star, f)_\star + ([h, f]_\star, g)_\star \\ = & \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \{ \partial_\mu (\Theta^{\alpha\beta\sigma} \partial_\sigma \{ \partial_\alpha f \partial_\beta g \}) \} \partial_\nu h \\ & + \partial_\mu (\Theta^{\alpha\beta\sigma} \partial_\sigma \{ \partial_\alpha g \partial_\beta h \}) \partial_\nu f \\ & + \partial_\mu (\Theta^{\alpha\beta\sigma} \partial_\sigma \{ \partial_\alpha h \partial_\beta f \}) \partial_\nu g \\ = & [\Theta^{\mu\nu\lambda} \Theta^{\alpha\beta\sigma} \partial_\lambda \partial_\mu + \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu \Theta^{\alpha\beta\sigma} \partial_\lambda \\ & + \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \Theta^{\alpha\beta\sigma} \partial_\mu] \{ \partial_\sigma \{ \partial_\alpha f \partial_\beta g \} \} \partial_\nu h \\ & + \partial_\sigma \{ \partial_\alpha g \partial_\beta h \} \partial_\nu f + \partial_\sigma \{ \partial_\alpha h \partial_\beta f \} \partial_\nu g \\ = & \Pi^{\nu\alpha\beta\sigma} \{ \partial_\sigma \{ \partial_\alpha f \partial_\beta g \} \} \partial_\nu h \\ & + \partial_\sigma \{ \partial_\alpha g \partial_\beta h \} \partial_\nu f + \partial_\sigma \{ \partial_\alpha h \partial_\beta f \} \partial_\nu g \\ = & -(\ell_3(\ell_1(f), g, h) + \ell_3(f, \ell_1(g), h) + \ell_3(f, g, \ell_1(h))) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \Pi^{\nu\alpha\beta\sigma} := & \Theta^{\mu\nu\lambda} \Theta^{\alpha\beta\sigma} \partial_\lambda \partial_\mu + \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu \Theta^{\alpha\beta\sigma} \partial_\lambda \\ & + \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \Theta^{\alpha\beta\sigma} \partial_\mu \end{aligned} \quad (8.9)$$

donde $\Pi^{\nu\alpha\beta\sigma}$ es un operador diferencial de segundo orden cuya antisimetría en los índices (α, β) y ciclicidad del argumento aseguran la completa antisimetría bajo intercambios entre (f, g, h) . Dicho ésto, definimos el producto:

$$\begin{aligned} \ell_3(A, f, g) := & \frac{(-1)}{3} \Pi^{\nu\alpha\beta\sigma} \{ \partial_\sigma \{ \partial_\alpha f \partial_\beta g \} A_\nu \\ & + \partial_\sigma \{ \partial_\alpha g A_\beta \} \partial_\nu f + \partial_\sigma \{ A_\alpha \partial_\beta f \} \partial_\nu g \} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Las ecuaciones del movimiento también pueden ser extraídas de la estructura de álgebra L_∞ , pues necesitamos construir una teoría dinámica, que involucre tanto a los campos y campos de Gauge como a sus ecuaciones del movimiento. Para ello consideraremos una teoría de Yang Mills Abelian. Sus posteriores generalizaciones (No-abeliano, espacios curvos, etc) quedarán para futuros trabajos.

8.2.1. Teoría tipo Yang-Mills Abeliano

Consideremos tres espacios vectoriales no-triviales:

$$\begin{array}{ccc} X_0 & X_{-1} & X_{-2} \\ f & A_\lambda & E_\alpha \end{array} \quad (8.11)$$

donde X_{-2} corresponde al espacio vectorial de las ecuaciones del movimiento. Para esta teoría consideremos un producto (que satisface $\mathcal{J}_1 = \ell_1 \ell_1 = 0$) de la forma:

$$\ell_1(A)_\alpha = \square A_\alpha - \partial_\alpha (\partial \cdot A) \quad (8.12)$$

Sea la identidad $\mathcal{J}_2(f, A) = 0$

$$\ell_1(\ell_2(f, A)) = \ell_2(\ell_1(f), A) + \ell_2(f, \ell_1(A)) \quad (8.13)$$

Para definir los productos a traves de esta relación necesitamos saber cuales son las simetrias del producto:

$$\ell_2(A, B) = \ell_2(B, A) \quad (8.14)$$

$$\ell_2(f, E) = -\ell_2(E, f) \quad (8.15)$$

Luego encontramos que:

$$\begin{aligned} \ell_1(\ell_2(f, A)) &= \square \ell_2(f, A)_\alpha - \partial_\alpha(\partial \cdot \ell_2(f, A)) \\ &= \square([f, A_\alpha]_\star + \frac{1}{2}(\partial_\alpha \Theta^{\mu\nu\lambda})\partial_\lambda\{\partial_\mu f A_\nu\}) \\ &\quad - \partial_\alpha(\eta^{\beta\gamma}\partial_\beta([f, A_\gamma]_\star \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_\gamma \Theta^{\mu\nu\lambda})\partial_\lambda\{\partial_\mu f A_\nu\})) \\ &= \Theta^{\mu\nu\lambda}\partial_\lambda\{\partial_\mu f \partial_\nu(\square A_\alpha - \partial_\alpha(\partial \cdot A))\} \\ &\quad + \Theta^{\mu\nu\lambda}\partial_\lambda\{\partial_\mu(\square f)\partial_\nu A_\alpha \\ &\quad + 2\partial_\mu(\partial^\gamma f)\partial_\nu(\partial_\gamma A_\alpha) \\ &\quad - \partial_\mu(\partial_\alpha \partial^\gamma f)\partial_\nu A_\gamma \\ &\quad - \partial_\mu(\partial_\alpha f)\partial_\nu(\partial \cdot A) - \partial_\mu(\partial^\gamma f)\partial_\nu(\partial_\alpha A_\gamma)\} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_\alpha \Theta^{\mu\nu\lambda})(\partial_\lambda \partial_\beta \partial_\gamma\{\partial_\mu f A_\nu\} \\ &\quad - 2\partial_\lambda \partial_\beta\{\partial_\mu f \partial_\nu A_\gamma\}) \\ &\quad - \frac{1}{2}(2\partial_\lambda \partial_\alpha\{\partial_\mu f \partial_\nu A_\beta\} + \partial_\lambda \partial_\alpha \partial_\beta\{\partial_\mu f A_\nu\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\partial \cdot \ell_1(f), A_\alpha]_\star + [\partial \cdot A, \ell_1(f)_\alpha]_\star \\
&\quad + [\ell_1(f)^\beta, \partial_\beta A_\alpha]_\star + [A^\beta, \partial_\beta \ell_1(f)_\alpha]_\star \\
&\quad + [f, \ell_1(A)_\alpha]_\star + [\ell_1(f)^\beta, \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta]_\star \\
&\quad + \frac{1}{2}(\partial_\alpha \Theta^{\mu\nu\lambda})\partial_\lambda \{\partial_\mu(\partial \cdot \ell_1(f))A_\nu \\
&\quad + \partial_\mu(\partial \cdot A)\ell_1(f)_\nu + \partial_\mu f \ell_1(A)_\nu \\
&\quad + 2\partial_\mu(\ell_1(f)^\beta)(\partial_\beta A_\nu - \partial_\nu A_\beta)\} \\
&\quad + \frac{1}{2}(\partial_\beta \Theta^{\mu\nu\lambda})\partial_\lambda \{2(\partial_\mu(\ell_1(f)^\beta)\partial_\nu A_\alpha \\
&\quad + \partial_\mu A^\beta \partial_\nu(\ell_1(f)_\alpha)) \\
&\quad + \ell_1(f)_\mu \partial^\beta(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) \\
&\quad + 2\ell_1(f)_\mu \partial_\nu(\partial^\beta A_\alpha - \partial_\alpha A^\beta) \\
&\quad + \ell_1(f)_\mu \partial_\nu(\partial^\beta A_\alpha) + A_\mu \partial_\nu(\partial^\beta \ell_1(f)_\alpha) \\
&\quad + \partial_\mu(\ell_1(f)^\beta)(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) \\
&\quad + \partial^\beta(\ell_1(f)_\mu)\partial_\nu A_\alpha + \partial^\beta A_\mu \partial_\nu(\ell_1(f)_\alpha)\} \\
&= \ell_2(\ell_1(f), A) + \ell_2(f, \ell_1(A))
\end{aligned}$$

Notemos que existen términos que involucran a A y $\ell_1(f)$ mientras que otros involucran a f y $\ell_1(A)$, los cuales determinarán los productos $\ell_2(A, B)$ y $\ell_2(f, E)$ respectivamente. Hay que mencionar que los términos de la forma $(\partial^\beta A_\alpha - \partial_\alpha A^\beta)$ son nulos cuando $A_\mu = \ell_1(f)_\mu$, por lo que para respetar la simetría del producto hay que añadirlos. Teniendo esto en consideración, el resultado nos sugiere que

los productos son:

$$\begin{aligned}
\ell_2(A, B) &:= [\partial \cdot A, B_\alpha]_\star + [A^\beta, \partial_\beta B_\alpha]_\star \\
&+ [A^\beta, \partial_\beta B_\alpha - \partial_\alpha B_\beta]_\star \\
&+ \frac{1}{2}(\partial_\alpha \Theta^{\mu\nu\lambda})\partial_\lambda \{ \partial_\mu (\partial \cdot A) B_\nu \\
&+ 2\partial_\mu A^\beta (\partial_\beta B_\nu - \partial_\nu B_\beta) \} \\
&+ \frac{1}{2}(\partial_\beta \Theta^{\mu\nu\lambda})\partial_\lambda \{ 2\partial_\mu A^\beta \partial_\nu B_\alpha \\
&+ A_\mu \partial^\beta (\partial_\nu B_\alpha - \partial_\alpha B_\nu) \\
&+ 2A_\mu \partial_\nu (\partial^\beta B_\alpha - \partial_\alpha B^\beta) + A_\mu \partial_\nu (\partial^\beta B_\alpha) \\
&+ \partial_\mu A^\beta (\partial_\nu B_\alpha - \partial_\alpha B_\nu) + \partial^\beta A_\mu \partial_\nu B_\alpha \} \\
&+ (A \leftrightarrow B)
\end{aligned} \tag{8.16}$$

$$\ell_2(f, E_\alpha) := [f, E_\alpha]_\star + \frac{1}{2}(\partial_\alpha \Theta^{\mu\nu\lambda})\partial_\lambda \{ \partial_\mu f E_\nu \} \tag{8.17}$$

Si nuestro objetivo es encontrar la corrección a la electrodinámica a primer orden en el parámetro de longitud fundamental, los productos calculados son suficientes para poder establecerlas. Considerar correcciones a segundo orden (de momento) de serán considerados debido a que nuestro interés contempla deformaciones de las soluciones clásicas de la teoría, para un mayor entendimiento de la deformación. La resolución algebraica a ordenes superiores quedarán para futuros trabajos, en la búsqueda de una recurrencia en las correcciones con la intención de cerrar el álgebra de infinitos productos, como en casos ya calculados [53].

8.3. Electrodinámica modificada en el espacio-tiempo de Snyder

Habiendo calculado los productos fundamentales para primer orden del álgebra L_∞ de la teoría U(1) de Snyder, encontramos una estructura cerrada que nos permitiría estudiar los efectos de Gravedad cuántica sobre la electrodinámica tradicional producidos por la geometría no-conmutativa y no-asociativa del espacio-tiempo de H. Snyder.

8.3.1. Ecuaciones del Movimiento

Como fue presentado durante el [Capítulo 7](#), las ecuaciones del movimiento para el campo A_μ a orden en s^1 son de la forma:

$$\mathcal{F}(A) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ell_n(A^n) = \ell_1(A) - \frac{1}{2} \ell_2(A, A) + \dots$$

Por lo tanto encontramos:

$$\begin{aligned} & \square A_\alpha - \partial_\alpha (\partial \cdot A) - ([\partial \cdot A, A_\alpha]_\star + [A^\beta, \partial_\beta A_\alpha]_\star + [A^\beta, \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta]_\star \\ & \quad + \frac{1}{2} (\partial_\alpha \Theta^{\mu\nu\lambda}) \partial_\lambda \{ \partial_\mu (\partial \cdot A) A_\nu + 2 \partial_\mu A^\beta \partial_\beta A_\nu \} \quad (8.18) \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\beta \Theta^{\mu\nu\lambda}) \partial_\lambda \{ 2 \partial_\mu A^\beta \partial_\nu A_\alpha + A_\mu \partial^\beta (\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) + 2 A_\mu \partial_\nu (\partial^\beta A_\alpha - \partial_\alpha A^\beta) \\ & \quad + A_\mu \partial_\nu (\partial^\beta A_\alpha) + \partial_\mu A^\beta (\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) + \partial^\beta A_\mu \partial_\nu A_\alpha \} = 0 \end{aligned}$$

El nuevo principio de Gauge deformado debido a la deformación de la regla de Leibniz con el nuevo producto \star corresponde a:

$$\delta_f A_\rho = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ell_{n+1}(f, A^n)_\rho = \ell_1(f)_\rho + \ell_2(f, A)_\rho + \dots \quad (8.19)$$

$$= \partial_\rho f + \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \{ \partial_\mu f \partial_\nu A_\rho \} + \frac{1}{2} \partial_\rho \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \{ \partial_\mu f A_\nu \} + \dots \quad (8.20)$$

donde podemos verificar que las ecuaciones de movimiento covarían de forma controlada bajo esta transformación:

$$\delta_f \mathcal{F}_\alpha = [f, \mathcal{F}_\alpha]_* + \frac{1}{2} (\partial_\alpha \Theta^{\mu\nu\lambda}) \partial_\lambda \{ \partial_\mu \mathcal{F}_\nu \} \quad (8.21)$$

Estos corresponden al principal resultado del mecanismo, mostrando que las nociones de Campo Electrico y Campo Magnético dejan de ser válidas, lo cual es consecuencia de contribuciones no-asociativas en la teoría. Esto puede evidenciarse a través del siguiente ejemplo: Consideremos el caso electroestático de la teoría, siempre considerando que es una teoría sin fuentes de carga aún:

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c} \phi(x, y, z), 0, 0, 0 \right) \quad (8.22)$$

Ésto arroja las ecuaciones del movimiento:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (8.23)$$

$$\partial_l \left(\Theta^{jkl} \partial_j \phi \partial_k \partial_l \phi + \frac{1}{2} \partial_0 \Theta^{0jl} (2\phi \partial_j \partial_l \phi - \partial_i \phi \partial_j \phi) \right) = 0, \text{ con } i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (8.24)$$

donde $\Theta^{jkl} = \frac{s}{2} (x^j \delta^{kl} - x^k \delta^{jl})$ mientras que $\partial_0 \Theta^{0jl} = \frac{s}{2} \delta^{jl}$. Aquí hay una gran diferencia respecto a las ecuaciones sin modificar. No sólo la teoría coincide con la electroestática en la componente 0 de las ecuaciones del movimiento sino que son aún más restrictivas, incluyendo una ecuación diferencial vectorial similar a términos de autointeracción incluso en ausencia de magnetismo. La no-asociatividad de la teoría afecta la definición de campo Electrico en el caso más simple, haciendo que lo que conocemos como potencial escalar en el electromagnetismo necesite una redefinición, la cual puede estar intimamente relacionado con una futura redefinición del tensor de Faraday. Entendemos también que el caso del potencial escalar de la electroestática corresponde a un caso **sobre-****terminado**, por lo tanto nos da a entender que realmente no existe un análogo en este régimen.

8.3.2. Principio de Acción y Lagrangiano

Considerando el producto interno de la teoría de Maxwell:

$$\langle A, E \rangle = \int_{\mathcal{M}^{(4)}} d^4x \eta^{\alpha\beta} A_\alpha E_\beta \quad (8.25)$$

donde $A \in X_{-1}$, $E \in X_{-2}$, sabemos que:

$$S = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \langle A, \ell_n(A^n) \rangle = \frac{1}{2} \langle A, \ell_1(A) \rangle - \frac{1}{3!} \langle A, \ell_2(A, A) \rangle + \quad (8.26)$$

Por lo tanto a través del mecanismo sugiere que:

$$\begin{aligned} S[A] = & \int_{\mathcal{M}^{(4)}} d^4x \eta^{\alpha\beta} A_\alpha \left(\frac{1}{2} (\square A_\beta - \partial_\beta (\partial \cdot A)) - \frac{1}{3!} (2\Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \{ \partial_\mu (\partial \cdot A) \partial_\nu A_\beta \right. \\ & + \partial_\mu A^\gamma \partial_\nu (\partial_\gamma A_\beta - \partial_\beta A_\gamma) \} + \partial_\beta \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \{ \partial_\mu (\partial \cdot A) A_\nu + 2\partial_\mu A^\gamma \partial_\gamma A_\nu \} \\ & + \partial_\gamma \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda \{ 2\partial_\mu A^\gamma \partial_\nu A_\beta + A_\mu \partial^\gamma (\partial_\nu A_\beta - \partial_\beta A_\nu) + 2A_\mu \partial_\nu (\partial^\gamma A_\beta - \partial_\beta A^\gamma) \\ & \left. + A_\mu \partial_\nu \partial^\gamma A_\beta + \partial_\mu A^\gamma (\partial_\nu A_\beta - \partial_\beta A_\nu) + \partial^\gamma A_\mu \partial_\nu A_\beta \} \right) \quad (8.27) \end{aligned}$$

El problema principal del método de Bootstrap es que lo que el método ofrece como el principio de acción del cual proceden las ecuaciones del movimiento es sólo válido para parametros de no-conmutatividad constantes $[x^\mu, x^\nu] = \Theta^{\mu\nu}$, como es verificado en [47] [53].

En resultados recientes se ha verificado que si bien las ecuaciones del movimiento son correctas, el principio de acción correcto para que la teoría sea Lagrangiana puede ser obtenida a través de la deformación de la medida de integración más que del método mismo. Ejemplo de esto es el caso de κ -Minkowski U(1) obtenido por V. Kupriyanov [54]. Esto significa que un posterior paso para trabajar en esta teoría es la deformación del tensor de Faraday con la intención de construir una teoría tipo Yang-Mills con la medida de integración correcta para que las ecuaciones anteriormente presentadas correspondan a una teoría Lagrangiana. El tensor de Faraday-Snyder debería respetar alguno de los siguientes principios

variacionales:

$$\delta_f \mathcal{F}_{\alpha\beta}^{Snyder} = [f, \mathcal{F}_{\alpha\beta}^{Snyder}]_{\star} \quad (8.28)$$

$$\delta_f \mathcal{F}_{\alpha\beta}^{Snyder} = [f, \mathcal{F}_{\alpha\beta}^{Snyder}]_{\star} + \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_{\lambda} \{ \partial_{\mu} f \mathcal{F}_{\nu\beta}^{Snyder} \} - \frac{1}{2} \partial_{\beta} \Theta^{\mu\nu\lambda} \partial_{\lambda} \{ \partial_{\mu} f \mathcal{F}_{\alpha\nu}^{Snyder} \} \quad (8.29)$$

Estos principios permiten que el Lagrangiano de la teoría pueda ser escrito como un invariante efectivo de la teoría.

Buscamos construir un Lagrangiano de la forma:

$$\mathcal{L}(A, \partial A, \partial\partial A) = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{Snyder} \mathcal{F}_{Snyder}^{\mu\nu} \quad (8.30)$$

donde:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{Snyder} = F_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu}(x, A, \partial A, \partial\partial A) \quad (8.31)$$

donde $\Omega_{\mu\nu}$ es antisimétrico. A través de la teoría clásica de campos encontramos que:

$$\mathcal{F}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^{\alpha}} - \partial_{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\rho} A^{\alpha})} \right) + \partial_{\rho} \partial_{\sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\rho} \partial_{\sigma} A^{\alpha})} \right) \quad (8.32)$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha} = & \partial^{\rho} \mathcal{F}_{\rho\alpha}^{Snyder} + \left(\partial^{\rho} \left(\frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial (\partial^{\rho} A^{\alpha})} \right) - \partial^{\rho} \partial^{\sigma} \left(\frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial (\partial^{\rho} \partial^{\sigma} A^{\alpha})} \right) \right) \partial^{\mu} A^{\nu} \\ & - 2 \partial^{\rho} \left(\frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial (\partial^{\rho} \partial^{\sigma} A^{\alpha})} \right) \partial^{\sigma} \partial^{\mu} A^{\nu} - \left(\frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial (\partial^{\rho} \partial^{\sigma} A^{\alpha})} \right) \partial^{\rho} \partial^{\sigma} \partial^{\mu} A^{\nu} \end{aligned} \quad (8.33)$$

La obtención del Tensor de Faraday-Snyder así como el Lagrangiano para la teoría quedarán para futuros trabajos. Establecer una completa teoría Lagrangiana nos permitiría pasarnos al formalismo Hamiltoniano para estudiar los vínculos de la teoría. A través del estudio de vinculos podremos estudiar la noción de fijado de Gauge para posteriores soluciones de la teoría.

Capítulo 9

Comentarios finales y Conclusión

En la presente tesis hemos tenido la oportunidad de estudiar el espacio-tiempo de Snyder a nivel algebraico para poder construir el Twist en el [Capítulo 6](#) con la intención de deformar el espacio de funciones sobre el espacio de fase de forma coherente. Posteriormente, en el [Capítulo 7](#) estudiamos la estructura algebraica emergente en la gravedad cuántica, más específicamente en el contexto de Teoría de campos de cuerdas donde apareció como necesidad fundamental el preservar la asociatividad homotópica al momento de deformar una teoría de Gauge. Teniendo esto en consideración empleamos el mecanismo de cuasi-morfismos de Algebras L_∞ (*Bootstrap*) para obtener una teoría de Gauge a primer orden en el parámetro de longitud fundamental en [Capítulo 8](#). Estudiamos el caso particular de la electrostática verificando que las correcciones de gravedad cuántica impone además de la ecuación de Laplace una segunda ecuación, mostrando el grado de restricción de la teoría. Ante esto hay varios puntos que discutir:

- Hemos visto que el mecanismo de *Bootstrap* es posible de extrapolar a aquellos espacio-tiempos que no solo son función del tiempo, sino que algebrai-

camente permite encontrar correcciones para aquellos de la forma $\Theta^{\mu\nu}(x, p)$. Estos productos mantienen similitudes con aquellos espacio-tiempos de la forma $\Theta^{\mu\nu}(x)$ con la principal diferencia de la variación de las ecuaciones del movimiento ante el nuevo principio de Gauge, es decir, a los productos $\ell_2(f, E)$.

- Existe una evidente desconexión entre la teoría deformada y la teoría sin deformar: debido a que la teoría deformada es más restrictiva, no es recuperar la solución electrostática de la solución a las ecuaciones del movimiento para Snyder U(1). Ésto ha ocurrido con teorías aún más sencillas en construcción, como lo es el caso de κ -Minkowski, donde sólo en bajas dimensiones se logra recuperar soluciones clásicas.
- La deformación del principio de Gauge trae consigo la pérdida de la estructura de Fibrado que posee la teoría, y con ello surge la necesidad de encontrar los análogos geométricos de la electrodinámica. Una de las principales dudas que pueden surgir es la capacidad de fijar un Gauge para un principio de Gauge poco convencional como el trabajado en esta tesis. Lo cierto es que sólo la matemática elemental nos lo puede decir, a través de la demostración de los **Teoremas de existencia** de las ecuaciones diferenciales emergentes al fijar un Gauge, es decir, que no haya perdida libertad remanente a la hora de establecer una condición. Estas libertades podrían ser explícitas en el formalismo Hamiltoniano de la teoría Snyder U(1).
- Es necesario encontrar el principio de Acción correcto para el cual las ecuaciones del movimiento son compatibles con una formulación Lagrangiana. Ésto es realizado a través de la construcción de un nuevo artefacto, que en el límite de longitud mínima nula permita recuperar el Tensor de Fara-

day, al cual llamaremos el Tensor de Faraday-Snyder. Dicho tensor es importante en la formulación, debido a que puede dar indicios sobre posibles invariantes topológicos de la teoría, y nos permita encontrar la medida de integración correcta para el espacio-tiempo de Snyder. Dicho artefacto será obtenido en futuros trabajos.

Apéndice A

Cohomología, asociatividad y no-conmutatividad

A.1. La no-conmutatividad y la no-asociatividad

Introduzcamos algunos conceptos básicos de Cohomología para estudiar su aparición al formular una Teoría de Gauge basada en un álgebra de Lie.

A.1.1. Conceptos básicos de Cohomología

Consideremos una variedad suave \mathcal{M} y una *Cobertura* abierta y contraíble, es decir, una Cobertura $\{U_i\}$ de abiertos tal que cualquier intersección finita sea vacía o suavemente contraíble a un punto. Queremos que esta cobertura tenga una triangularización con vértices x_i tal que U_i es la vecindad estrellada ¹ de x_i , luego $U = \{U_i | i \in \Lambda\}$, etiquetado por el conjunto Λ . Un k -simplex es una $(k + 1)$ -tupla $(i_0, i_1, \dots, i_k) \in \Lambda^{k+1}$ tal que $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k} \neq \emptyset$. Estos pueden ser visualizados como triángulos de vértices x_i . Dado un grupo abeliano A , una

¹Es decir, que todo punto del abierto U_i sea conexo por una recta al vértice x_i .

k -cocadena, α_k es un mapeo en A :

$$\alpha_k : (i_0, i_1, \dots, i_k) \rightarrow \alpha_k(i_0, \dots, i_k) \in A \quad (\text{A.1})$$

El conjunto de k -cocadenas es denotado por $C^k(U, A)$ y forma un grupo abeliano bajo la suma usual. También existe una secuencia de homomorfismos de grupos, llamado *Operación de coborde* $\delta : C^k(U, A) \rightarrow C^{k+1}(U, A)$

$$\delta\alpha_k(i_0, \dots, i_{k+1}) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \alpha_k(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{k+1}) \quad (\text{A.2})$$

donde la notación \hat{i} denota omisión.

Si $\delta\alpha_k = 0$ para $\alpha_k \in C^k(U, A)$, entonces α_k es un k -cociclo. El conjunto de los k -cociclos es denotado por $Z^k(U, A)$. Si adicionalmente, $\alpha_k = \delta\alpha_{k-1}$ para algún $\alpha_{k-1} \in C^{k-1}(U, A)$, α_k es un k -coborde. El conjunto de los k -cobordes es un subgrupo de Z^k . El k -ésimo grupo de la Cohomología de Čech es $H^k = Z^k / \delta(C^{k-1})$. Finalmente, establecemos que dada sus propiedades podemos asociar una k -cocadena con una k -forma diferencial. Éste mapeo es definido de la siguiente forma: sea α una k -forma compleja. Entonces α define una cocadena por:

$$\alpha(i_0, \dots, i_k) = \int_{x_{i_0} \dots x_{i_k}} \alpha \quad (\text{A.3})$$

donde $x_{i_0} \dots x_{i_k}$ es el k -simplex con vértices x_{i_0}, \dots, x_{i_k} definido por la triangulación. Por el teorema de Stokes, $(d\alpha)(i_0, \dots, i_k) = \delta\alpha(i_0, \dots, i_k)$. Esta asociación establece un isomorfismo entre el k -ésimo complejo de la Cohomología de Rham (el conjunto de k -formas cerradas módulo las k -formas exactas bajo adición) y $H^k(U, C)$.

A.1.2. Cohomología de Álgebras de Lie y Teorías de Gauge

La aparición de la Cohomología en las teorías de Gauge es a menudo ignorada pero lo cierto es que esta estructura muestra aspectos que dan un profundo

significado a cosas como la condición de Cuantización, y el que se pueda establecer una correspondencia entre Operadores en un espacio de Hilbert con funciones en el espacio de Fase cuántico.

La primera cocadena, α_1 , aparece en la representación unitaria de rayo de la acción de un elemento g de un grupo de transformación G que actúa sobre la variedad remanente \mathcal{M} . Dado un punto $x \in \mathcal{M}$ (transformando como $g : x \rightarrow gx$) y una función $\Psi(x)$ (o más generalmente, una sección del fibrado de líneas sobre \mathcal{M}), la acción de g en Ψ es representada por

$$U(g)\Psi(x) = e^{i\alpha_1(x;g)}\Psi(gx) \quad (\text{A.4})$$

En el caso de una teoría de Gauge con una corriente de Gauge anómala, existe un primer cociclo no-trivial, indicando que Ψ es una sección de un fibrado de líneas no-trivial sobre \mathcal{A}/\mathcal{G} (el conjunto de potenciales vectoriales módulo el conjunto de transformaciones de Gauge) con

$$\mathcal{A} : \{S^{2n} \rightarrow A\}, \quad \mathcal{G} : \{S^{2n} \rightarrow G\} \quad (\text{A.5})$$

y $\alpha_1 \in H^1(\cdot)$.

La operación de coborde, en este contexto, está definida por:

$$\begin{aligned} \delta\alpha_n(x; g_1, \dots, g_{n+1}) &= \alpha_n(g_1x; g_2, \dots, g_{n+1}) - \alpha_n(x; g_1g_2, g_3, \dots, g_{n+1}) + \dots \\ &+ (-1)^n\alpha_n(x; g_1, \dots, g_n g_{n+1}) + (-1)^{n+1}\alpha_n(x; g_1, g_2, \dots, g_n) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Por lo tanto, dada una cocadena α_1 podemos definir un 2-cociclo, α_2 , mediante:

$$\alpha_2(x; g_1, g_2) = \delta\alpha_1 = \alpha_1(x; g_1) + \alpha_1(g_1x; g_2) - \alpha_1(x; g_1g_2) \quad (\text{A.7})$$

$$U(g_1)U(g_2)\psi(x) = e^{i\alpha_2(x;g_1,g_2)}U(g_1g_2)\psi(x) \quad (\text{A.8})$$

así los $U(g)$ definen la representación proyectiva. Si $\alpha_2 = \delta\alpha_1 = 0$, entonces $U(g_1)U(g_2) = U(g_1g_2)$. También, dado un grupo de Lie generado por T^a tal que

$$[T^a, T^b] = f^{abc}T^c, \quad g(\theta) = e^{\theta^a T^a} \quad (\text{A.9})$$

$$U(g) = e^{\theta^a G^a} = 1 + \theta^a G^a + \dots, \quad (\text{A.10})$$

Podemos escribir

$$\alpha_2(x; g_1, g_2) = \frac{1}{2} S^{ab}(x) \theta_1^a \theta_2^b + \dots \quad (\text{A.11})$$

Un 2-cociclo no-trivial α_2 aparece en la teoría cuántica de campos como el conmutador anómalo de los generadores, G^a , de transformaciones locales de Gauge:

$$[G^a, G^b] = f^{abc}G^c + S^{ab} \quad (\text{A.12})$$

Entonces podemos apreciar que α_2 mide la falla de los generadores al intentar formar una representación y S^{ab} mide la falla al intentar formar una representación del Álgebra de Lie. Si α_2 es cohomologicamente trivial, entonces es posible redefinir el álgebra de generadores para formar una representación.

Si tenemos una cocadena α_2 , podemos definir:

$$\alpha_3(x; g_1, g_2, g_3) = \delta\alpha_2 \quad (\text{A.13})$$

Entonces

$$\alpha_3 = \alpha_2(x; g_2, g_3) + \alpha_2(x; g_1, g_2g_3) - \alpha_2(x; g_1g_2, g_3) - \alpha_2(g_3x; g_1, g_2) \quad (\text{A.14})$$

y α_3 será un tercer cociclo.

Usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff encontramos

$$\alpha_3(x; g_1, g_2, g_3) = \frac{1}{3!} A^{abc}(x) \theta_1^a \theta_2^b \theta_3^c + \dots \quad (\text{A.15})$$

$$[[G^a, G^b], G^c] + \text{cycl.} = \frac{1}{3!} A^{[abc]} \quad (\text{A.16})$$

donde $[abc]$ denota antisimetrización.

Así comprendemos que el grado de asociatividad puede ser medido por la violación de la identidad de Jacobi.

Bibliografía

- [1] S. Hossenfelder, “Minimal Length Scale Scenarios for Quantum Gravity,” *Living Rev. Rel.*, vol. 16, pág. 2, 2013. DOI: [10.12942/lrr-2013-2](https://doi.org/10.12942/lrr-2013-2). arXiv: [1203.6191 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1203.6191).
- [2] C. Rovelli, *Quantum gravity*, ép. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge, UK: Univ. Pr., 2004. DOI: [10.1017/CBO9780511755804](https://doi.org/10.1017/CBO9780511755804).
- [3] T. Thiemann, “Lectures on loop quantum gravity,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 631, D. J. W. Giulini, C. Kiefer y C. Lammerzahl, eds., págs. 41-135, 2003. DOI: [10.1007/978-3-540-45230-0_3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-45230-0_3). arXiv: [gr-qc/0210094](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0210094).
- [4] N. Seiberg y E. Witten, “String theory and noncommutative geometry,” *JHEP*, vol. 09, pág. 032, 1999. DOI: [10.1088/1126-6708/1999/09/032](https://doi.org/10.1088/1126-6708/1999/09/032). arXiv: [hep-th/9908142](https://arxiv.org/abs/hep-th/9908142).
- [5] A. Connes, *Noncommutative geometry*. 1994, ISBN: 978-0-12-185860-5.
- [6] V. G. Drinfeld, “Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation,” *Sov. Math. Dokl.*, vol. 32, págs. 254-258, 1985.
- [7] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane y T. Okamoto, “Noncommutative field theory and Lorentz violation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, pág. 141 601, 2001. DOI: [10.1103/PhysRevLett.87.141601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.141601). arXiv: [hep-th/0105082](https://arxiv.org/abs/hep-th/0105082).

- [8] G. 't Hooft, "Quantization of point particles in (2+1)-dimensional gravity and space-time discreteness," *Class. Quant. Grav.*, vol. 13, págs. 1023-1040, 1996. DOI: [10.1088/0264-9381/13/5/018](https://doi.org/10.1088/0264-9381/13/5/018). arXiv: [gr-qc/9601014](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9601014).
- [9] S. Meljanac, D. Meljanac, S. Mignemi y R. Strajn, "Quantum field theory in generalised Snyder spaces," *Phys. Lett. B*, vol. 768, págs. 321-325, 2017. DOI: [10.1016/j.physletb.2017.02.059](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.02.059). arXiv: [1701.05862 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1701.05862).
- [10] S. Meljanac, D. Meljanac, A. Samsarov y M. Stojic, "Kappa Snyder deformations of Minkowski spacetime, realizations and Hopf algebra," *Phys. Rev. D*, vol. 83, pág. 065 009, 2011. DOI: [10.1103/PhysRevD.83.065009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.065009). arXiv: [1102.1655 \[math-ph\]](https://arxiv.org/abs/1102.1655).
- [11] T. Juric, D. Kovacevic y S. Meljanac, " κ -Deformed Phase Space, Hopf Algebroid and Twisting," *SIGMA*, vol. 10, pág. 106, 2014. DOI: [10.3842/SIGMA.2014.106](https://doi.org/10.3842/SIGMA.2014.106). arXiv: [1402.0397 \[math-ph\]](https://arxiv.org/abs/1402.0397).
- [12] S. Meljanac, A. Samsarov y R. Strajn, "Kappa-deformation of Heisenberg algebra and coalgebra: generalized Poincare algebras and R-matrix," *JHEP*, vol. 08, pág. 127, 2012. DOI: [10.1007/JHEP08\(2012\)127](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2012)127). arXiv: [1204.4324 \[math-ph\]](https://arxiv.org/abs/1204.4324).
- [13] P. A. M. Dirac, "Quantised singularities in the electromagnetic field," *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 133, n.º 821, págs. 60-72, 1931. DOI: [10.1098/rspa.1931.0130](https://doi.org/10.1098/rspa.1931.0130).
- [14] P. A. M. Dirac, "The Theory of magnetic poles," *Phys. Rev.*, vol. 74, págs. 817-830, 1948. DOI: [10.1103/PhysRev.74.817](https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.817).
- [15] T. T. Wu y C. N. Yang, "Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields," *Phys. Rev. D*, vol. 12, J.-P. Hsu y D. Fine, eds., págs. 3845-3857, 1975. DOI: [10.1103/PhysRevD.12.3845](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.12.3845).

- [16] D. G. Boulware, S. Deser y B. Zumino, “ABSENCE OF THREE COCYCLES IN THE DIRAC MONOPOLE PROBLEM,” *Phys. Lett. B*, vol. 153, págs. 307-310, 1985. DOI: [10.1016/0370-2693\(85\)90554-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)90554-4).
- [17] E. Plauschinn, “Non-geometric backgrounds in string theory,” *Physics Reports*, vol. 798, 1–122, 2019, ISSN: 0370-1573. DOI: [10.1016/j.physrep.2018.12.002](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2018.12.002). dirección: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2018.12.002>.
- [18] I. Bakas y D. Lüst, “3-Cocycles, Non-Associative Star-Products and the Magnetic Paradigm of R-Flux String Vacua,” *JHEP*, vol. 01, pág. 171, 2014. DOI: [10.1007/JHEP01\(2014\)171](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2014)171). arXiv: [1309.3172 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1309.3172).
- [19] *Letter of Heisenberg to Peierls*. Scientific Correspondence, Vol. II, p. 15., 1930.
- [20] J. M. Romero, J. D. Vergara y J. A. Santiago, “Noncommutative spaces, the quantum of time and the Lorentz symmetry,” *Phys. Rev. D*, vol. 75, pág. 065 008, 2007. DOI: [10.1103/PhysRevD.75.065008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.065008). arXiv: [hep-th/0702113](https://arxiv.org/abs/hep-th/0702113).
- [21] M. V. Battisti y S. Meljanac, “Scalar Field Theory on Non-commutative Snyder Space-Time,” *Phys. Rev. D*, vol. 82, pág. 024 028, 2010. DOI: [10.1103/PhysRevD.82.024028](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.024028). arXiv: [1003.2108 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1003.2108).
- [22] P. Xu, “Quantum groupoids,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 216, págs. 539-581, 2001. DOI: [10.1007/s002200000334](https://doi.org/10.1007/s002200000334). arXiv: [math/9905192](https://arxiv.org/abs/math/9905192).
- [23] J.-H. LU, “HOPF ALGEBROIDS AND QUANTUM GROUPOIDS,” *International Journal of Mathematics*, vol. 07, n.º 01, págs. 47-70, 1996. DOI: [10.1142/S0129167X96000050](https://doi.org/10.1142/S0129167X96000050). eprint: <https://doi.org/10.1142/S0129167X96000050>. dirección: <https://doi.org/10.1142/S0129167X96000050>.
- [24] V. G. Drinfel’d, “Quasi-Hopf algebras,” English, *Leningr. Math. J.*, vol. 1, n.º 6, 1419-1457, 1990, ISSN: 1048-9924.

- [25] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz y D. Sternheimer, “Deformation Theory and Quantization. 1. Deformations of Symplectic Structures,” *Annals Phys.*, vol. 111, pág. 61, 1978. DOI: [10.1016/0003-4916\(78\)90224-5](https://doi.org/10.1016/0003-4916(78)90224-5).
- [26] C.-S. Chu y P.-M. Ho, “Noncommutative open string and D-brane,” *Nucl. Phys. B*, vol. 550, págs. 151-168, 1999. DOI: [10.1016/S0550-3213\(99\)00199-6](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(99)00199-6). arXiv: [hep-th/9812219](https://arxiv.org/abs/hep-th/9812219).
- [27] V. Schomerus, “D-branes and deformation quantization,” *JHEP*, vol. 06, pág. 030, 1999. DOI: [10.1088/1126-6708/1999/06/030](https://doi.org/10.1088/1126-6708/1999/06/030). arXiv: [hep-th/9903205](https://arxiv.org/abs/hep-th/9903205).
- [28] L. Cornalba y R. Schiappa, “Nonassociative star product deformations for D-brane world volumes in curved backgrounds,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 225, págs. 33-66, 2002. DOI: [10.1007/s002201000569](https://doi.org/10.1007/s002201000569). arXiv: [hep-th/0101219](https://arxiv.org/abs/hep-th/0101219).
- [29] M. Herbst, A. Kling y M. Kreuzer, “Star products from open strings in curved backgrounds,” *JHEP*, vol. 09, pág. 014, 2001. DOI: [10.1088/1126-6708/2001/09/014](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2001/09/014). arXiv: [hep-th/0106159](https://arxiv.org/abs/hep-th/0106159).
- [30] ———, “Cyclicity of nonassociative products on D-branes,” *JHEP*, vol. 03, pág. 003, 2004. DOI: [10.1088/1126-6708/2004/03/003](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/03/003). arXiv: [hep-th/0312043](https://arxiv.org/abs/hep-th/0312043).
- [31] R. Blumenhagen y E. Plauschinn, “Nonassociative Gravity in String Theory?” *J. Phys. A*, vol. 44, pág. 015401, 2011. DOI: [10.1088/1751-8113/44/1/015401](https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/1/015401). arXiv: [1010.1263 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1010.1263).
- [32] D. Lust, “T-duality and closed string non-commutative (doubled) geometry,” *JHEP*, vol. 12, pág. 084, 2010. DOI: [10.1007/JHEP12\(2010\)084](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2010)084). arXiv: [1010.1361 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1010.1361).

- [33] R. Blumenhagen, A. Deser, D. Lust, E. Plauschinn y F. Rennecke, “Non-geometric Fluxes, Asymmetric Strings and Nonassociative Geometry,” *J. Phys. A*, vol. 44, pág. 385 401, 2011. DOI: [10.1088/1751-8113/44/38/385401](https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/38/385401). arXiv: [1106.0316 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1106.0316).
- [34] J. E. Moyal, “Quantum mechanics as a statistical theory,” *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 45, págs. 99-124, 1949. DOI: [10.1017/S0305004100000487](https://doi.org/10.1017/S0305004100000487).
- [35] H. J. Groenewold, “On the Principles of elementary quantum mechanics,” *Physics*, vol. 12, págs. 405-460, 1946. DOI: [10.1016/S0031-8914\(46\)80059-4](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(46)80059-4).
- [36] T. Juric, S. Meljanac y R. Strajn, “Twists, realizations and Hopf algebroid structure of kappa-deformed phase space,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 29, n.º 5, pág. 1 450 022, 2014. DOI: [10.1142/S0217751X14500225](https://doi.org/10.1142/S0217751X14500225). arXiv: [1305.3088 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1305.3088).
- [37] S. Meljanac, A. Samsarov, M. Stojić y K. S. Gupta, “-Minkowski spacetime and the star product realizations,” *The European Physical Journal C*, vol. 53, n.º 2, 295–309, 2007, ISSN: 1434-6052. DOI: [10.1140/epjc/s10052-007-0450-0](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-007-0450-0). dirección: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-007-0450-0>.
- [38] S. Meljanac, D. Meljanac, S. Mignemi y R. Strajn, “Quantum field theory in generalised Snyder spaces,” *Phys. Lett. B*, vol. 768, págs. 321-325, 2017. DOI: [10.1016/j.physletb.2017.02.059](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.02.059). arXiv: [1701.05862 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1701.05862).
- [39] D. Meljanac, S. Meljanac, S. Mignemi, D. Pikutić y R. Štrajn, “Twist for Snyder space,” *The European Physical Journal C*, vol. 78, n.º 3, 2018, ISSN: 1434-6052. DOI: [10.1140/epjc/s10052-018-5657-8](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5657-8). dirección: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5657-8>.

- [40] S. Meljanac, D. Meljanac, A. Pachoł y D. Pikutić, “Remarks on simple interpolation between Jordanian twists,” *J. Phys. A*, vol. 50, n.º 26, pág. 265 201, 2017. DOI: [10.1088/1751-8121/aa72d7](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa72d7). arXiv: [1612.07984 \[math-ph\]](https://arxiv.org/abs/1612.07984).
- [41] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp y J. Wess, “Gauge theory on noncommutative spaces,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 16, págs. 161-167, 2000. DOI: [10.1007/s100520050012](https://doi.org/10.1007/s100520050012). arXiv: [hep-th/0001203](https://arxiv.org/abs/hep-th/0001203).
- [42] B. Jurco, S. Schraml, P. Schupp y J. Wess, “Enveloping algebra valued gauge transformations for nonAbelian gauge groups on noncommutative spaces,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 17, págs. 521-526, 2000. DOI: [10.1007/s100520000487](https://doi.org/10.1007/s100520000487). arXiv: [hep-th/0006246](https://arxiv.org/abs/hep-th/0006246).
- [43] B. Jurco, L. Moller, S. Schraml, P. Schupp y J. Wess, “Construction of nonAbelian gauge theories on noncommutative spaces,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 21, págs. 383-388, 2001. DOI: [10.1007/s100520100731](https://doi.org/10.1007/s100520100731). arXiv: [hep-th/0104153](https://arxiv.org/abs/hep-th/0104153).
- [44] W. Behr y A. Sykora, “Construction of gauge theories on curved noncommutative space-time,” *Nucl. Phys. B*, vol. 698, págs. 473-502, 2004. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2004.07.024](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2004.07.024). arXiv: [hep-th/0309145](https://arxiv.org/abs/hep-th/0309145).
- [45] M. Dimitrijevic, F. Meyer, L. Moller y J. Wess, “Gauge theories on the kappa Minkowski space-time,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 36, págs. 117-126, 2004. DOI: [10.1140/epjc/s2004-01887-0](https://doi.org/10.1140/epjc/s2004-01887-0). arXiv: [hep-th/0310116](https://arxiv.org/abs/hep-th/0310116).
- [46] M. Dimitrijevic y L. Jonke, “A Twisted look on kappa-Minkowski: U(1) gauge theory,” *JHEP*, vol. 12, pág. 080, 2011. DOI: [10.1007/JHEP12\(2011\)080](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2011)080). arXiv: [1107.3475 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1107.3475).
- [47] R. Blumenhagen, I. Brunner, V. Kupriyanov y D. Lust, *Bootstrapping Non-commutative Gauge Theories from L_∞ algebras*, 2018. arXiv: [1803.00732 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1803.00732).

- [48] T. Lada y J. Stasheff, “Introduction to SH Lie algebras for physicists,” *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 32, págs. 1087-1104, 1993. DOI: [10.1007/BF00671791](https://doi.org/10.1007/BF00671791). arXiv: [hep-th/9209099](https://arxiv.org/abs/hep-th/9209099).
- [49] B. Zwiebach, “Closed string field theory: Quantum action and the B-V master equation,” *Nucl. Phys. B*, vol. 390, págs. 33-152, 1993. DOI: [10.1016/0550-3213\(93\)90388-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90388-6). arXiv: [hep-th/9206084](https://arxiv.org/abs/hep-th/9206084).
- [50] H. S. Snyder, “Quantized space-time,” *Phys. Rev.*, vol. 71, págs. 38-41, 1947. DOI: [10.1103/PhysRev.71.38](https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.38).
- [51] Farag Ali, Ahmed and Das, Saurya and Vagenas, Elias C., “The Generalized Uncertainty Principle and Quantum Gravity Phenomenology,” *The Twelfth Marcel Grossmann Meeting*, 2012. DOI: [10.1142/9789814374552_0492](https://doi.org/10.1142/9789814374552_0492). dirección: http://dx.doi.org/10.1142/9789814374552_0492.
- [52] V. G. Kupriyanov y D. V. Vassilevich, “Nonassociative Weyl star products,” *JHEP*, vol. 09, pág. 103, 2015. DOI: [10.1007/JHEP09\(2015\)103](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2015)103). arXiv: [1506.02329 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1506.02329).
- [53] V. G. Kupriyanov, “ L_∞ -Bootstrap Approach to Non-Commutative Gauge Theories,” *Fortsch. Phys.*, vol. 67, n.º 8-9, pág. 1910010, 2019. DOI: [10.1002/prop.201910010](https://doi.org/10.1002/prop.201910010). arXiv: [1903.02867 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1903.02867).
- [54] V. G. Kupriyanov, M. Kurkov y P. Vitale, “-Minkowski-deformation of U(1) gauge theory,” *JHEP*, vol. 01, pág. 102, 2021. DOI: [10.1007/JHEP01\(2021\)102](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2021)102). arXiv: [2010.09863 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2010.09863).