UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Una nueva clase de problemas cuasi convexos con gap de dualidad cero

Filip Agustín Thiele Guerrero

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción para optar al Título profesional de Ingeniero Civil Matemático

Profesor guía: Fabián Flores-Bazán

27 de Septiembre de 2019

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi profesor guía, Fabián Flores-Bazán, gracias a quien debo mi interés en la teoría de optimización y el análisis convexo, también le agradezco por la paciencia que tuvo conmigo, lo mucho que me guió a la hora de escribir y, finalmente, por los conocimientos que me transmitió.

A los profesores del Departamento de Ingeniería Matemática, por el apoyo que me han entregado durante todos estos años y la buena disposición que siempre tuvieron conmigo.

También agradezco la beca entregada por los proyectos FONDECYT 1181316 y Grant PAI AFB-170001, que financió el material de investigación usado en esta tesis.

Finalmente, nada de esto sería posible sin el apoyo incondicional de mi familia, es gracias a ellos que pude llegar dónde estoy ahora.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

Existen problemas en diversas áreas como ingeniería, economía o manejo de recursos, entre otras, que pueden ser modelados como el problema de minimización:

$$
\begin{aligned}
\mu = \min \quad & f(x) \\
& g_i(x) \leq 0,\ \forall i \in J \doteq \{1, \ldots, m\} \\
& x \in C,
\end{aligned}
\tag{P}
$$

una forma de tratar dichos problemas es por medio de la teoría de dualidad Lagragiana, una poderosa herramienta para tratar problemas de optimización que consiste en estudiar el problema original, que se llamará primal, a través de un problema auxiliar llamado dual. A partir de esto se han desarrollado diversos métodos duales o primales-duales para resolver el problema primal a través de los multiplicadores de Lagrange que definen el problema dual, quizás el ejemplo más conocido es el método Simplex-dual para problemas lineales que se explica en [2]. Otro ejemplo se presenta en [3, Sección 6.6], donde se estudia el problema dual para para un problema cuadrático particular.

Sin embargo para hacer uso de métodos de este tipo, es necesario que el problema dual tenga el mismo valor óptimo que el problema primal, esto se conoce como gap de dualidad cero.

Para el caso en que tanto f como las g_i son convexas y C es convexo, se ha estudiado de forma extensa que condiciones son suficientes para que se cumpla esta propiedad. Posiblemente el resultado más famoso al respecto fue propuesto por K. Fan, I. Glicksberg y A. Hoffman en [4], que asegura que para un problema con funciones convexas a valores reales con C convexo, si existe un $\bar{x} \in C$ tal que $g_i(\bar{x}) < 0$ para todas las g_i con $i \in J$ (esto se conoce como condición de Slater), entonces hay gap de dualidad cero y el problema dual tiene solución.

Este resultado se ha extendido en [3] para permitir además restricciones de tipo igualdad cuando éstas están definidas por funciones afines y en [6] pidiendo una condición más débil que convexidad, que un conjunto relacionado a (P) sea almost-convex (esta noción se describirá en el Capítulo 4).

Pese a que el problema convexo está bastante estudiado, aún se continua trabajando, por ejemplo, en [16] donde se incluyen varios resultados para el caso convexo, además del resultado principal del paper. Los recientes trabajos [6, 8] han estudiado el problema para casos no convexos, considerando una clase de funciones cuasi convexas y utilizando técnicas de análisis asintótico para estudiar el comportamiento de las funciones que definen el problema a través de funciones asintóticas. Un problema con tratar el problema a travéz de propiedades asintóticas, es que estas técnicas pasa por alto propiedades locales como la condición de Slater.

Es por esto que existen problemas convexos simples a los que no se les puede aplicar estos resultados, en particular en la Sección 5.3 se presenta un ejemplo muy simple en que no se pueden aplicar los resultados de [8], que fue la motivación con la que comenzó este trabajo. Por otro lado, se conocen resultados para el problema convexo en que se separa las restricciones del problema entre aquellas que pueden ser satisfechas de forma estricta y aquellas que no [1, 13], donde se piden otra condición sobre las restricciones que no se pueden satisfacer de forma estricta.

El objetivo de este trabajo es unificar estos resultados, de forma de tratar un problema no convexo haciendo la separación entre las restricciones que pueden ser satisfechas de forma estricta y las que no, para luego buscar hipótesis adicionales de forma que se tenga gap de dualidad cero.

Este trabajo sigue la siguiente estructura: El Capítulo 2 presenta la notación básica y definiciones que se usarán. En el Capítulo 3 se presentan resultados preliminares junto con notación y definiciones que han sido introducidos en trabajos recientes, que no son el estándar. El Capítulo 4 introduce de la teoría de dualidad Lagrangiana formulada para el problema de interés, junto con introducir la función valor óptimo y su relación con la propiedad de gap de dualidad cero, para luego dar una caracterizan sobre cuando la función valor es sci en cero y otros resultados sobre dualidad que se necesitaran más adelante. El Capítulo 5 presenta los resultados principales de este trabajo, haciendo la separación para el caso convexo y para casos especiales donde algunas de las funciones que definen el problema pertenecen a alguna clase particular de funciones cuasi convexas (y no son necesariamente convexas). También en el Capítulo 5, en la última sección, se hace la comparación entre los resultados obtenidos, además de compararlos con los resultados ya conocidos para comprobar que todos entregan nueva información y que ninguno generaliza a los demás. El Capítulo 6 presenta las conclusiones obtenidas sobre estos resultados y los objetivos a futuro.

Capítulo 2

Notación y definiciones básicas

A lo largo de este trabajo se usará la siguiente notación:

- $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales.
- $\overline{\mathbb{R}} \doteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ es el conjunto de los números reales extendidos.
- $\mathbb{R}^n$ es el espacio euclidiano n-dimensional.
- $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$.
- $||x||$ denota la norma euclidiana de x para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, es decir, $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Cuando $x \in \mathbb{R}$, se usará $|x|$ que corresponde al valor absoluto.
- Dado un conjunto I, se denota por $|I|$ al cardinal de I, que corresponde a la cantidad de elementos de I.
- Dados 2 elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$, $]x, y[$ denota el segmento de recta que une a x e y, pero al que no pertenecen ni x ni y.

Definición 2.1. *Sea un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que A es convexo si para todo par de elementos $x, y \in A$ y todo $\lambda \in [0, 1]$, se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.*

Definición 2.2. *Sea un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que A es un cono si para todo $t \geq 0, \ tA \subseteq A$.*

Definición 2.3. *Sea una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$:*

(i) Se define el epigrafo de f como el conjunto

$$\mathrm{epi}f \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \ f(x) \leq t\}.$$

(ii) Se define el subnivel λ de f, como el conjunto

$$S_\lambda(f) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \leq \lambda\}.$$

En el caso en que la función esté definida en un subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, de la forma $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, se considera que f toma el valor $+\infty$ fuera de D.

Definición 2.4. *Sea una sucesión (x_k), se define el limite inferior de x_k por*

$$\liminf_{k\to+\infty} x_k = \underline{\lim}_{k\to+\infty} x_k = \lim_{k\to+\infty} \left(\inf_{m\geq k} x_m \right).$$

De forma similar se define el límite superior de (x_k) como

$$\overline{\lim}_{k\to+\infty} x_k = - \underline{\lim}_{k\to+\infty} -x_k.$$

Definición 2.5. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, se define el límite inferior de f en $\bar{x}$ por*

$$\liminf_{x\to\bar{x}} f(x) = \underline{\lim}_{x\to\bar{x}} f(x) \doteq \sup_{\epsilon>0} \inf_{x\in\mathbb{B}(\bar{x};\epsilon)} f(x).$$

Como $\inf\limits_{x\in\mathbb{B}(\bar{x},\epsilon_1)} f(x) \geq \inf\limits_{x\in\mathbb{B}(\bar{x},\epsilon_2)} f(x)$ para todo $\epsilon_2 > \epsilon_1 > 0$, el límite inferior de f en $\bar{x}$ se puede escribir de forma equivalente como

$$\underline{\lim}_{x\to\bar{x}} f(x) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \inf_{x\in\mathbb{B}(\bar{x},\epsilon)} f(x).$$

De forma similar se define el límite superior de f en $\bar{x}$ como

$$\overline{\lim}_{x\to\bar{x}} f(x) = - \underline{\lim}_{x\to\bar{x}} -f(x).$$

Definición 2.6. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, se dice que f es semicontinua inferiormente (sci) en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si $f(x_0) = -\infty$ o si para cada $t \in \mathbb{R}$ tal que $t < f(x_0)$, existe una vecindad N de x_0 tal que para todo $x \in N$ se cumple $t < f(x)$.*

De forma equivalente se puede decir que f es sci en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si

$$\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0),$$

o de forma secuencial

$$\underline{\lim}_{k \to +\infty} f(x_k) \geq f(x_0) \; \forall x_k \to x_0.$$

Se dice que la función f es sci si es sci en cada punto $x \in \mathbb{R}^n$. Se conoce que una función f es sci si y solo si $S_\lambda(f)$ es cerrado para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ si, y solo si $\mathrm{epi} f$ es cerrado.

Estas caracterizaciones se pueden encontrar demostradas en [1, Capítulo 1].

Se dice que f es semicontinua superiormente (scs) en x_0, si $-f$ es sci en x_0. De igual forma, se dice que f es scs si es scs en cada punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.7. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, se dice que f es:*

(i) convexa si $\mathrm{epi} f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ es convexo, o equivalentemente si para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $f(x) < +\infty,\ f(y) < +\infty$ y todo $t \in [0,1]$, se cumple

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

(ii) estrictamente convexa si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$ y todo $t \in]0,1[$, se cumple

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

(iii) cuasi convexa si para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $f(tx+(1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$ para todo $t \in]0,1[$. Esto es equivalente a decir que $S_\lambda(f)$ es convexo para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iv) semiestrictamente cuasi convexa si para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ que cumplan $f(x) \neq f(y)$ se tiene que $f(tx + (1-t)y) < \max\{f(x), f(y)\}$ para todo $t \in]0, 1[$.

Estos conceptos aparecen explicados en [13], con la salvedad de que ahí llaman estrictamente cuasi convexas a las funciones semiestrictamente cuasi convexas.

Toda función convexa es también cuasi convexa y semiestrictamente cuasi convexa. Por otro lado no hay relación entre cuasi convexidad y semiestricta cuasi convexidad, pero, si una función f es semiestrictamente cuasi convexa y sci, entonces es también cuasi convexa.

Definición 2.8. (Envolventes de conjuntos) *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se definen los siguientes conjuntos:*

(i) $\mathrm{co}A$, llamada la envolvente convexa de A, como el menor conjunto convexo que contiene a A.

(ii) $\overline{\mathrm{co}}A$, llamada la envolvente convexa cerrada de A, como el menor conjunto convexo y cerrado que contiene a A.

Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, es directo que A es:

- convexo si y solo si $\mathrm{co}A = A$,
- convexo y cerrado si y solo si $\overline{\mathrm{co}}A = A$.

Definición 2.9. (Envolventes de funciones) *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, se definen las siguientes envolventes de f:*

(i) $\mathrm{co}f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ la envolvente convexa de f, que es la función convexa más grande por debajo de f. En otras palabras, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{co}f(x) \leq f(x)$ y si $h : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es convexa y cumple que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $h(x) \leq f(x)$, entonces $h(x) \leq \mathrm{co}f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ la envolvente sci de f, que es la función sci más grande por debajo de f.

(iii) $\overline{\text{co}}f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *la envolvente convexa y sci de f, que es la función convexa y sci más grande por debajo de f.*

Nuevamente es directo verificar que f es convexa si y solo si $f = \text{co}f$, lo mismo para sci y convexa sci.

Se puede demostrar que $\text{epi}\overline{f} = \overline{\text{epi}f}$, (por esto $\overline{f}$ es a veces llamada clausura de f) y $\overline{\text{co}}(\text{epi}f) = \text{epi}(\overline{\text{co}}f)$. Esto aparece demostrado en el primer capítulo de [1], dónde también se demuestran las siguientes caracterizaciones para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$\overline{f}(u) = \begin{cases} \inf\{a \in \mathbb{R} | \ (u,a) \in \overline{\text{epi}f}, & \text{si } (\{u\} \times \mathbb{R}) \cap \overline{\text{epi}f} \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

$$\text{co}f(u) = \begin{cases} \inf\{a \in \mathbb{R} | \ (u,a) \in \text{co}(\text{epi}f), & \text{si } (\{u\} \times \mathbb{R}) \cap \text{co}(\text{epi}f) \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

$$\overline{\text{co}}f(u) = \begin{cases} \inf\{a \in \mathbb{R} | \ (u,a) \in \overline{\text{co}}(\text{epi}f), & \text{si } (\{u\} \times \mathbb{R}) \cap \overline{\text{co}}(\text{epi}f) \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Definición 2.10. *Para un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$, se define su cono asintótico como el cono cerrado*

$$C^\infty \doteq \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \ \exists t_k \to +\infty, \ \exists x_k \in C, \ \frac{x_k}{t_k} \to v \right\},$$

con la convención $\emptyset^\infty = \emptyset$.

Cuando C es convexo, se obtiene:

$$C^\infty = \{v \in \mathbb{R}^n : \ x + v \in C, \forall x \in C\} = \bigcap_{t>0} t(C - \bar{x}),$$

donde la ultima expresión es independiente de $\bar{x} \in C$. De esto, si C es convexo, C^∞ también lo es.

Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es propia si existe al menos un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_0) < +\infty$ y $f(x) > -\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

A partir de la definición del cono asintótico se define la siguiente función asintótica:

Definición 2.11. *Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propia. Se define la función asintótica de f, $f^\infty : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ como la función que satisface $\mathrm{epi} f^\infty = (\mathrm{epi} f)^\infty$.*

Cuando f es convexa y sci, $f^\infty(v)$ se conocen las siguientes caracterizaciones que aparecen demostradas en [1, Sección 2.5]:

$$f^\infty(v) = \sup_{t>0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} = \sup_{x\in\mathrm{dom} f} \{f(x + v) - f(x)\}$$

donde las primeras dos son independientes de $\bar{x} \in \mathrm{dom} f$.

Con esta función asintótica se puede describir el cono asintótico de los subniveles de una función sci, convexa y propia:

Proposición 2.1. [1] *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sci, convexa y propia y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $S_\lambda(f) \neq \emptyset$, entonces*

$$\{x \in \mathbb{R}^n |\ f(x) \leq \lambda\} = \{v \in \mathbb{R}^n |\ f^\infty(v) \leq 0\}.$$

Y en consecuencia se tiene el siguiente corolario:

Corolario 2.1. [1] *Sean $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, con $i \in I$ una colección de funciones sci, convexas y propias, y $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y cerrado. Entonces*

$$\{x \in C |\ g_i(x) \leq 0\ \forall i \in I\}^\infty = \{v \in C^\infty |\ (g_i)^\infty(v) \leq 0\ \forall i \in I\}.$$

En el siguiente capítulo se introducirán otras funciones asintóticas que resultan mejores para tratar funciones cuasiconvexas.

Capítulo 3

Resultados Preliminares

En este capítulo se presentan varios resultados y definiciones que no son usadas habitualmente.

Definición 3.1. *Dado un mapeo $S : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ (S mapea desde $\mathbb{R}^n$ al conjunto de las partes de $\mathbb{R}^m$), se dice que S es sci en $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si para cada conjunto abierto N tal que $N \cap S(\bar{x}) \neq \emptyset$, existe una vecindad $U(\bar{x})$ tal que*

$$x \in U(\bar{x}) \Rightarrow S(x) \cap N \neq \emptyset.$$

Proposición 3.1. [1] *Sea $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y sean S un mapeo $S : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$. Definiendo la función $\varphi(x) = \inf\{\Phi(x,u)|\ u \in S(x)\}$. Si S es sci en $\bar{x}$ y Φ scs en $\{\bar{x}\} \times S(\bar{x})$, entonces la función φ es scs en $\bar{x}$.*

La siguiente proposición entrega una propiedad geométrica sobre las funciones cuasi convexas, que describe el comportamiento de estas funciones cuando no están acotadas en una dirección.

Proposición 3.2. [8] *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ cuasi convexa, sci y propia. Entonces, si*

$$\sup_{t \geq 0}(f(x_0 + tv) - f(x_0)) = +\infty$$

para algún $x_0 \in \mathrm{dom} f$, entonces

$$\sup_{t \geq 0}(f(x + tv) - f(x)) = +\infty,\ \forall x \in \mathrm{dom} f.$$

Definimos la siguiente clase de funciones $\mathcal{C}$ introducida en [9]:

Definición 3.2. *Se dice que f pertenece a $\mathcal{C}$ si para todo $x \in \mathrm{dom} f$ y todo $v \in (\mathrm{dom} f)^\infty, v \neq 0$, se tiene una de las siguientes opciones:*

(i) $0 \leq t \mapsto f(x + tv)$ *es monótona decreciente, o*

(ii) $f(x + tv) \to +\infty$ *cuando* $t \to +\infty$.

Esta clase será de mucha importancia, pues los resultados obtenidos en los capítulos siguientes estan formulados para funciones cuasi convexas que pertenescan a $\mathcal{C}$.

Se conoce que las funciones convexas y las funciones coercivas (i.e. $f(x) \to +\infty$, cuando $||x|| \to +\infty$) están en $\mathcal{C}$. La demostración de que las funciones convexas cumplen con esta definición se remonta a [13], donde se presenta como una propiedad de las funciones convexas.

En [6] se estudio esta propiedad para las funciones $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, de la forma

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{a^\top x + \alpha}{b^\top x + \beta}, & \text{si } x \in K \\ +\infty, & x \notin K, \end{cases}$$

con $a,\ b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ y $K \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo cerrado tal que $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n |\ b^\top x + \beta > 0\}$. En este caso, h es semiestrictamente cuasi convexa, y $h \in \mathcal{C}$ si y solo si, para todo $u \in K^\infty$, se tiene:

- $b^\top u = 0$, o
- $b^\top u > 0 \Rightarrow h(x) \geq \dfrac{a^\top u}{b^\top u} \quad \forall x \in K$.

También se verificó para las funciones cuadráticas $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definidas por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^\top A x + a^\top x + \alpha, & \text{si } x \in K \\ +\infty, & x \notin K \end{cases}$$

con $K \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y cerrado. En este caso $h \in \mathcal{C}$ si y solo si para todo $u \in K^\infty$

- $u^\top Au \geq 0$, o
- $u^\top Au < 0 \Rightarrow \nabla h(x)^\top u \leq 0 \; \forall x \in K$.

Parte del análisis que se hará en los capítulos siguientes requiere las siguientes definiciones de funciones asintóticas que se han introducido en trabajos recientes. Para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propia se definen:

Definición 3.3. *La función q-asintótica de f, introducida en [7], aunque ya aparece en [5] de forma no explicita. Se define $f_q^\infty : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ como:*

$$f_q^\infty(v) \doteq \sup_{x \in \mathrm{dom} f} \sup_{t>0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

Se conoce que f_q^∞ es siempre convexa, y cuando f es sci, f_q^∞ también lo es ([7, Proposición 3.28]). Además, por la representación de f^∞ para convexas y sci, en ese caso se cumple $f^\infty = f_q^\infty$.

Otra función asintótica de interés, es la función f^{qx} introducida en [12]:

Definición 3.4. *Cuando f es cuasi convexa y sci, se define $f^{qx} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ por la expresión:*

$$f^{qx}(v) \doteq \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \; v \in (S_\lambda(f))^\infty\}$$

con la convención que el ínfimo sobre el conjunto vacío es $+\infty$.

Esto es equivalente a:

$$f^{qx}(v) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{t \geq 0} f(x+tv).$$

Tal como se menciona en [8, Definición 4.1], se puede definir de forma equivalente a la clase $\mathcal{C}$ para funciones cuasiconvexas y sci usando la función f^{qx} y la función $f_{0,q}^\infty$; $f \in \mathcal{C}$ si y solo si para todo $v \in (\mathrm{dom} f)^\infty, \; v \neq 0$, o se tiene $f_{0,q}^\infty(v) = 0$ o $f^{qx}(v) = +\infty$, esto es también equivalente a decir $f^{qx}(v) = f^{qx}(0)$ o $f^{qx}(v) = +\infty$.

En este trabajo se utilizará principalmente la función asintótica de escala cero introducida en [8].

Definición 3.5. *La función asintótica de escala cero,* $f^{\infty}_{0,q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *dada por la expresión*

$$f^{\infty}_{0,q}(v) \doteq \sup_{x \in \mathrm{dom} f} \sup_{t>0} (f(x+tv) - f(x)).$$

De esta definición es directo que $f^{\infty}_{0,q}(\alpha v) = f^{\infty}_{0,q}(v)$ para todo $\alpha > 0$, además si f es propia $f^{\infty}_{0,q}(v) \geq 0$, esto se encuentra en [8, Proposición 3.1]. El valor $f^{\infty}_{0,q}(v)$ representa la mayor diferencia de valores a lo largo de las rectas con dirección v, es decir, el mayor salto en la dirección v.

De la caracterización del cono asintótico para conjuntos convexos, es claro que si $v \notin (\mathrm{dom} f)^{\infty}$, con f cuasi convexa, entonces para todo $x \in \mathrm{dom} f$ existe un $t_0 > 0$ tal que $x + t_0 v \notin (\mathrm{dom} f)^{\infty}$, y por lo tanto $f^{\infty}_{0,q}(v) = +\infty$.

Proposición 3.3. [8] *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *propia, sci y cuasi convexa. Asumiendo que* $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*, entonces*

$$f^{\infty}_{0,q}(v) = f^{\infty}_{0,q}(-v) = 0 \iff f(x+tv) = f(x) \quad \forall x \in \mathrm{dom} f,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Como $f^{\infty}_{0,q}(v) = 0$, se tiene que $f(x+tv) \leq f(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \mathrm{dom} f$, luego $x + tv \in \mathrm{dom} f$, además, como es para todo $x \in \mathrm{dom} f$ y $f^{\infty}_{0,q}(-v) = 0$, se tiene $f(x) = f(x + tv - tv) \leq f(x+tv)$, y f debe ser constante en la recta $x + tv$ con $t \in \mathbb{R}$. □

Teniendo esta proposición, consideramos el problema de minimización sin restricciones:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

con f como en la proposición y definimos el siguiente cono:

$$R_q \doteq \{v \in \mathbb{R}^n |\ f^{\infty}_{0,q}(v) = 0\},$$

como se menciono antes, este cono contendría las direcciones en que f decrece independiente del punto inicial.

Entonces, si $R_q \subseteq -R_q$, se tendría, por la proposición anterior, que las direcciones donde f decrece son en realidad las direcciones en que f es constante, es decir, f no decrece estrictamente en ninguna dirección, y en ese caso se cumple que

$$\operatorname*{argmin}_{\mathbb{R}^n} f \neq \emptyset.$$

Para una demostración completa referirse a [8].

Por otro lado, al definir el problema (P):

$$\begin{aligned} \mu \doteq \min \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \ \forall i \in J \doteq \{1, \ldots, m\} \\ & x \in C, \end{aligned} \tag{P}$$

con f y las g_i sci, cuasi convexas y propias, y C convexo y cerrado, (P) es equivalente a

$$\mu = \min_{x \in K} f(x),$$

con $K = \{x \in C | \ g_i(x) \leq 0 \ \forall i \in J\}$, y se puede tratar este problema es a través de la función indicatriz de K:

$$\iota_K(x) = \begin{cases} 0, \ \text{si } x \in K \\ +\infty, \quad x \notin K \end{cases}$$

y formulamos el problema equivalente

$$\mu = \min_{x \in \mathbb{R}^n} (f(x) + \iota_K(x)),$$

que es un problema sin restricciones y por tanto se puede aplicar el resultado anterior para verificar si hay solución. Para esto necesitaríamos calcular la función asintótica de escala cero de $f + \iota_K$ y verificar que si $(f + \iota)^{\infty}_{0,q}(v) = 0$, entonces también se cumple $(f + \iota_K)^{\infty}_{0,q}(-v) = 0$.

En [8] se obtuvo que cuando las funciones f y g_i con $i \in J$, pertenecen a la clase $\mathcal{C}$ y son cuasi convexas y sci, se puede caracterizar dicho conjunto de la siguiente forma:

$$\{v \in \mathbb{R}^n |\ (f + \iota_K)^{\infty}_{0,q}(v) = 0\} = \{v \in C^{\infty} |\ f^{\infty}_{0,q}(v) = 0,\ (g_i)^{\infty}_{0,q}(v) = 0\} \doteq R_0,$$

y con la definición de R_0 se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 3.1. *Para el problema* (P)*, si R_0 es subespacio, entonces* $\operatorname*{argmin}_K f \neq \emptyset$*.*

Como se mencionó anteriormente, dadas funciones $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con $i = 0, \ldots, m$ definidas por

$$g_i(x) = \begin{cases} \dfrac{a_i^\top x + \alpha_i}{b_i^\top + \beta_i}, \text{ si } x \in K_i \\ +\infty, \quad x \notin K_i, \end{cases}$$

con K_i convexo y cerrado contenido en $\{x \in \mathbb{R}^n |\ b_i^\top x + \beta_i > 0\}$ y C convexo y cerrado tal que

$$C \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} K_i.$$

Entonces las funciones g_i están en $\mathcal{C}$ cuando para todo $u \in K_i^{\infty}$

- $b_i^\top u = 0$, o
- $b_i^\top u > 0 \Rightarrow g_i(x) \geq \dfrac{a_i^\top u}{b_i^\top u}\ \forall x \in K_i$.

En ese caso, con $f = g_0$, se ha verificado en [6] que $R_0 \subseteq -R_0$ (donde se le llama L), si y solo si

$$R_0 = \{v \in C^{\infty} \cap (-C)^{\infty} :\ a_i^\top v = 0,\ \forall i = 0, \ldots, m\}.$$

Para este resultado sólo son necesarios los vectores v en que se anulan las funciones asintóticas de escala cero, pero estas direcciones se pueden obtener usando la función q-asintótica, tal como muestra la siguiente proposición:

Proposición 3.4. *Cuando f es propia*

$$f_q^\infty(v) \leq 0 \iff f_{0,q}^\infty(v) = 0.$$

Demostración. Dado $v \in (\mathrm{dom} f)^\infty$ tal que $f_q^\infty(v) \leq 0$, entonces se tiene que

$$\sup_{x \in \mathrm{dom} f} \sup_{t>0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \leq 0$$

lo cual implica que para todo $x \in \mathrm{dom} f$ y para todo $t > 0$, $f(x+tv) \leq f(x)$ y por lo tanto $f_{0,q}^\infty(v) = 0$.

Para probar el recíproco, basta notar que si

$$\sup_{x \in \mathrm{dom} f} \sup_{t>0} \{f(x+tv) - f(x)\} = 0,$$

necesariamente para cada $x \in \mathrm{dom} f$ y todo $t > 0$, se tiene $f(x+tv) \leq f(x)$, y por lo tanto para todo $t > 0$ fijo

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \leq 0, \ \forall x \in \mathrm{dom} f,$$

luego

$$f_q^\infty(v) = \sup_{x \in \mathrm{dom} f} \sup_{t>0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \leq 0.$$

$\square$

Luego para una familia de funciones $(h_i)_{i \in I}$, cualquier conjunto de la forma

$$R \doteq \{x \in D : \ (h_i)_{0,q}^\infty(v) = 0, \ \forall i \in I\}$$

para algún conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, se puede escribir de forma equivalente usando la función q-asintótica:

$$R \doteq \{x \in D : \ (h_i)_q^\infty(v) \leq 0, \ \forall i \in I\},$$

en particular

$$R_0 = \{v \in C^\infty :\ f_q^\infty(v) \le 0,\ (g_i)_q^\infty(v) \le 0\ \forall i \in J\}.$$

En este trabajo se empleará el conjunto R_0 definido anteriormente, pero también otros con una estructura similar. La proposición 3.4 nos da otra forma de trabajar con dichos conjuntos.

Capítulo 4

Teoría de Dualidad Lagrangiana: Un Repaso

En este capítulo se da un resumen de los conceptos principales y algunos resultados de la Teoría de Dualidad Lagrangiana, además se entregan algunas definiciones para el problema que nos interesa; para un caso más general revisar el Capítulo 3 de [6] o se puede revisar [11], donde se presentan algunos resultados para problemas en $\mathbb{R}^n$ con restricciones de tipo igualdad y desigualdad.

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Dadas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ para cada $i \in J \doteq \{1, \dots, m\}$, recordamos el problema de minimización:

$$\mu \doteq \min_{x \in K} f(x)$$

donde el conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, llamado factible, corresponde a

$$K = \{x \in C : \ g_i(x) \leq 0 \ \forall i \in J\}.$$

Se supondrá $K \neq \emptyset$ y se mantendrá la siguiente representación del problema:

$$\begin{aligned} \mu = \min \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \ \forall i \in J \\ & x \in C, \end{aligned} \tag{P}$$

llamaremos a este problema, problema primal. Para el problema (P) se define el siguiente problema auxiliar, llamado problema dual (Lagrangiano):

$$\nu \doteq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} \inf_{x \in C} \{f(x) + \sum_{i \in J} \lambda_i g_i(x)\}. \tag{D}$$

Las dos nociones más importantes para nuestro estudio sobre la relación entre (P) y (D) se presentan a continuación:

Se dice que no hay gap de dualidad, o el gap de dualidad es cero (o nulo), entre (P) y (D) cuando $\mu = \nu$.

Se dice que (P) tiene la propiedad de dualidad fuerte dual cuando $\mu = \nu$ y el problema (D) tiene solución (i.e., existe un $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ que maximiza (D)).

Al problema (P) le asociamos el Lagrangiano

$$L(\gamma, \lambda, x) \doteq \gamma f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x),$$

donde $\gamma \geq 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ son los llamados multiplicadores de Lagrange. Así, podemos reescribir (D) de la siguiente forma:

$$\nu = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} \inf_{x \in C} L(1, \lambda, x).$$

Se verifica trivialmente que

$$\inf_{x \in C} L(\gamma, \lambda, x) \leq \inf_{x \in K} L(\gamma, \lambda, x) \leq \gamma \inf_{x \in K} f(x) = \gamma \mu, \ \ \forall \gamma \geq 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \tag{4.1}$$

pues $g_i(x) \leq 0$ para todo $x \in K$. Al considerar $\gamma = 1$, se obtiene $\nu \leq \mu$ (esto se conoce como dualidad débil). En particular, si $\mu = -\infty$, necesariamente $\nu = -\infty$, luego, hay dualidad fuerte y cualquier $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ es solución de (D). Por esto solo nos preocuparemos del caso en que $\mu \in \mathbb{R}$.

Teniendo esto en mente, es de interés encontrar condiciones sobre (P) con tal de obtener la igualdad entre μ y ν, pues esto es necesario para poder aplicar algoritmos que resuelven el problema (P) a través de los multiplicadores de Lagrange λ. Un caso donde se sabe que $\mu = \nu$ es cuando existe $\bar{x} \in C$ tal que $g_i(\bar{x}) < 0$ para todas las $i \in J$

y además todas las funciones involucradas son convexas y C es convexo y cerrado, en este caso hay dualidad fuerte. El caso de interés en este trabajo será cuando C es convexo y cerrado, y las funciones involucradas son cuasi convexas.

Para obtener la igualdad para algún par $(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m_+$ se tendría que verificar la desigualdad contraria a (4.1), es decir:

$$\gamma\mu \leq \inf_{x \in C} L(\gamma, \lambda, x),$$

que es equivalente a

$$\gamma\mu \leq L(\gamma, \lambda, x), \quad \forall x \in C,$$

de la definición de L, esto se puede reordenar de la forma

$$0 \leq \gamma(f(x) - \mu) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \quad \forall x \in C.$$

Entonces se tendría dualidad fuerte cuando $\gamma > 0$.

Denotando $F \doteq (f, g_1, \ldots, g_m)$, definimos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{F} \doteq F(C) + \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m_+, \; \mathcal{E}_\rho \doteq \mathcal{F} - \rho(0, 1), \quad \rho \in \mathbb{R},$$

Estos conjuntos serán importantes para el análisis siguiente.

Ahora definimos el conjunto factible perturbado para el problema (P):

$$K(a) \doteq \{x \in C |\; g_i(x) \leq a_i, \; \forall i \in J\}$$

y el conjunto factible del problema (P) resulta $K = K(0)$.

Con esto podemos definir la función valor óptimo $\psi : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ para (P):

$$\psi(a) = \inf_{x \in K(a)} f(x),$$

con la convención que el ínfimo de una función sobre el conjunto vacío es $+\infty$.

Se han establecido varias relaciones entre estas definiciones y las propiedades de gap de dualidad cero y dualidad fuerte.

El siguiente resultado surge de [10, Teorema 3.1], se presenta de la forma siguiente para evitar tratar con la conjugada de Fenchel.

Teorema 4.1. *Si $K \neq \emptyset$ y $\overline{\text{co}}\psi(0) > -\infty$. Entonces $\nu = \overline{\text{co}}\psi(0)$.*

Otro resultado extraído de [10], nos muestra una forma de usar el conjunto $\mathcal{E}_\mu$.

Teorema 4.2. *Si $\mu \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{E}_\mu$ es convexo, entonces*

$$\nu = \overline{\psi}(0),$$

en consecuencia, si además $\psi(0) = \overline{\psi}(0)$, se tiene $\nu = \mu$.

Teniendo este resultado en consideración, resulta interesante que podemos tratar de probar que un problema tiene gap de dualidad cero verificando de forma separada que $\mathcal{E}_\mu$ sea convexo y que ψ sea sci en cero.

Teorema 4.3. [6] *Sea F como antes, se cumple lo siguiente:*

(i) $(r, a) \in \text{epi}\psi \iff \left(r + \frac{1}{k}, a\right) \in \mathcal{F}, \forall k \in \mathbb{N}.$

como consecuencia, si $\mathcal{F}$ es convexo entonces ψ es convexa.

(ii) $\mathcal{F} \subseteq \text{epi}\psi \subseteq \overline{\mathcal{F}}$.

De (ii) del teorema anterior, se tiene que si ψ es sci y $\mu \in \mathbb{R}$, entonces se verifica que $\text{epi}\psi = \overline{\text{epi}\psi} = \overline{\mathcal{F}}$ y para comprobar que $\nu = \overline{\text{co}}\psi = \psi(0) = \mu$, es suficiente verificar la convexidad de $\overline{\mathcal{F}}$.

Un caso donde se cumple que $\mathcal{F} = (f, g_1, \ldots, g_m)(C) + \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^m$ es convexo (y por tanto también su clausura), es cuando las funciones $f, g_1, \ldots, g_m$ son convexas y C es convexo. Por lo tanto, para un problema convexo, el problema tiene gap de dualidad cero siempre que ψ es sci en cero.

En particular tenemos la siguiente caracterización sobre cuando ψ es sci en cero:

Teorema 4.4. [6] *Para el problema* (P)*, suponiendo $\mu \in \mathbb{R}$. Entonces $\overline{\psi}(0) = \psi(0)$ si y solo si para cada $i_0 \in J$,*

$$\left.\begin{array}{l} x_k \in C,\ ||x_k|| \to +\infty,\ g_i(x_k) + q_k^i \to 0,\ q_k^i \geq 0, \\ i \in J,\ i \neq i_0;\ 0 < g_{i_0}(x_k) \to 0,\ f(x_k) < \mu \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{\lim_k} f(x_k) = \mu.$$

Los siguientes resultados presentan casos donde (P) tiene dualidad fuerte o ψ es sci en cero, estos resultados serán usados más adelante.

Para el siguiente resultado, necesitaremos la siguiente definición:

Definición 4.1. *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que A es almost-convex si $\overline{A}$ es convexo y $\operatorname{ri}\overline{A} \subseteq A$, donde $\operatorname{ri}\overline{A}$ es el interior relativo de la clausura de A.*

Se mantendrá el nombre en inglés para evitar confusión entre casi convexo y cuasi convexo.

Teorema 4.5. [6] *Para el problema* (P)*, si $\mu = \psi(0) \in \mathbb{R}$, se tiene dualidad fuerte dual si existe algún $\bar{x} \in C$ tal que $g_i(\bar{x}) < 0$ para todos los $i \in J$ y $\mathcal{F}$ es almost-convex.*

La condición existe algún $\bar{x} \in C$ tal que $g_i(\bar{x}) < 0$ para todos los $i \in J$, se conoce como condición de Slater.

Este teorema en su forma original se formuló para un problema con restricciones de la forma $g(x) \in -P$, con P un cono convexo, donde $g : Y \to X$, con X un espacio de Hausdorff e Y normado, pero para nuestro caso particular se tiene $g = (g_1, \ldots, g_m) : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^m$ y $P = \mathbb{R}^m_+$, por lo que $F(C) + \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}_+$ tiene interior no vacío, y se puede cambiar $\operatorname{ri}\mathcal{F}$, por $\operatorname{int}\mathcal{F}$.

Este resultado fue inicialmente propuesto en [11], pero sin utilizar el concepto de conjunto almost-convex, por lo cual su expresión ahí es más compleja.

Este teorema es una generalización directa del resultado clásico de Fan, Glicksberg y Hoffman de [4], que estipula que para un problema con restricciones convexas, C convexo y que satisface la condición de Slater, posee la propiedad de dualidad fuerte, en este caso, se cumple siempre que $F(C) + \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}_+$ es convexo y por tanto almost-convex, luego es un caso particular del Teorema 4.5.

Otro resultado que se usará más adelante, se obtuvo usando la definición de la función asintótica de escala cero, con la cual se define el cono R_0 mencionado en el capítulo anterior:[1]

$$R_0 \doteq \{v \in C^\infty :\ f_{0,q}^\infty(v) = 0, (g_i)_{0,q}^\infty(v) = 0,\ \forall i \in J\}. \tag{4.2}$$

Recordando la definición de $f_{0,q}^\infty$:

$$f_{0,q}^\infty(v) = 0 \iff \sup_{x \in \mathrm{dom} f} \sup_{t>0} (f(x+tv) - f(x)) = 0.$$

Con este conjunto es válido el siguiente teorema:

Teorema 4.6. [8] *Sea el problema* (P) *con* $\mu \in \mathbb{R}$, $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *es convexo y cerrado, y las funciones* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i \in J$ *todas sci, cuasi convexas y en* $\mathcal{C}$. *Si* $R_0 \subseteq -R_0$, *entonces la función valor* ψ *es sci en cero.*

Luego, si además $\overline{\mathcal{F}}$ es convexo, (P) tiene gap de dualidad cero.

[1] Por la Proposición 3.4, $h_{0,q}^\infty(v) = 0$ si y solo si $h_q^\infty(v) \leq 0$, luego se puede reescribir R_0 como $R_0 \doteq \{v \in \mathcal{C}^\infty :\ f_q^\infty(v) \leq 0, (g_i)_q^\infty(v) \leq 0,\ \forall i \in J\}$.

Capítulo 5

Resultados Principales

En este capítulo se presentan los resultados principales del trabajo. Los primeros dos resultados consisten en extensiones de resultados anteriores para el problema (P), el primero permitiendo que las funciones involucradas tomen el valor $+\infty$ y el segundo permitiendo que algunas de las funciones involucradas ya no sean convexas, sino pertenecientes a una clase de funciones cuasi convexas; los demás resultados consisten en nuevas formas de estudiar conjuntos similares a R_0 para probar que los problemas tienen función valor sci en cero.

El capítulo se divide en tres secciones, la primera donde se trata el problema convexo siguiendo un desarrollo similar al realizado por R. Rockafellar en [14], extendiendo dicho resultado para permitir que las funciones tomen valor $+\infty$ y dando más claridad sobre la condición de regularidad pedida.

La segunda sección consiste en estudiar el problema cuando algunas de las funciones involucradas son cuasi convexas o semiestrictamente cuasi convexas.

La sección final está dedicada a mostrar la relación entre los resultados, para comprobar que ninguno generaliza totalmente a los demás por medio de ejemplos, y además comparándolos con los resultados similares ya conocidos.

Se utilizará la siguiente descomposición del conjunto de índices J:

$$I_= \doteq \{i \in J|\ g_i(x) = 0,\ \forall x \in K\},$$

$$I_- \doteq \{i \in J|\ \exists x \in K \text{ tal que } g_i(x) < 0\},$$

que cumplen $J = I_- \cup I_=$. Con esto, dado $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, se pueden definir los siguientes conjuntos:

$$K_=(a) \doteq \{x \in C | \ g_i(x) \leq a_i, \ \forall i \in I_=\},$$

$$K_-(a) \doteq \{x \in C | \ g_i(x) < a_i, \ \forall i \in I_-\},$$

y $K_= \doteq K_=(0), \ K_- \doteq K_-(0)$. Si I_- o $I_=$ son vacíos se tendrá $K_-(a) = C$ o $K_=(a) = C$ respectivamente, para cualquier $a \in \mathbb{R}^m$.

5.1. Caso convexo

En esta sección se tratará el problema convexo. En lo que sigue se se mantendrán las siguientes hipótesis: tanto $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como las funciones $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con $i \in J$ son funciones convexas sci que pueden tomar el valor $+\infty$, además $\mathrm{dom} f = \mathrm{dom} g_i$ para todo $i \in J$ y $C = \mathbb{R}^n$.

Se busca probar que una clase de problemas tiene la propiedad de gap de dualidad cero, para esto se introduce la siguiente condición sobre las funciones que definen el problema:

Definición 5.1. **($\mathfrak{C}$)** *Se dirá que una función cumple la condición $\mathfrak{C}$ si no es constante con valor finito en ningún rayo a menos que sea constante a lo largo de toda la recta que contiene dicho rayo.*

Una clase de funciones que satisfacen la condición $\mathfrak{C}$ son las funciones *débilmente analíticas*:

Definición 5.2. *Una función a valores reales $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es llamada débilmente analítica si cuando la función f es constante en un segmento abierto no vacío, entonces f es constante en toda la recta que contiene dicho segmento.*

Esta definición se usará en la sección siguiente.

Es directo verificar que una función débilmente analítica cumple $\mathfrak{C}$, pues si f es constante en un rayo, entonces es constante en cualquier segmento contenido en dicho rayo y por tanto, si es débilmente analítica, f sería constante en la recta que contiene dicho segmento, que es la misma recta que contiene el rayo.

A continuación se mencionan algunos ejemplos de funciones débilmente analíticas:

Las funciones estrictamente convexas son siempre débilmente analíticas, pues no son constantes en ningún segmento. Para verificar esto, sean dos elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que los elementos de $]x, y[$ toman la forma $tx+(1-t)y$ para algún $t \in]0,1[$, luego $f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$, y si $f(x) = f(y)$, se tiene $f(tx + (1-t)y) < f(x)$ es decir no puede ser constante.

Cualquier función cuadrática $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^\top Ax + a^\top x + \alpha$ con A una matriz simétrica y $a \in \mathbb{R}^n$ es débilmente analítica, pues f solo puede ser constante en segmentos $x_0 + tv_0$ con $T > t > 0$, para algún $T > 0$, si $v_0 \in \ker A$ y $a^\top v_0 = 0$, luego $-v \in \ker A$ y $a^\top(-v_0) = 0$, con lo que f es constante en toda la recta $\{x_0 + tv,\ t \in \mathbb{R}\}$.

Otro ejemplo de funciones débilmente analíticas son las funciones *fielmente convexas* introducidas en [15], que son aquellas funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que se puedes escribir de la forma

$$f(x) = h(Ax + b) + c^\top x + \beta,$$

con $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa, $A \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ una matriz que define una transformación lineal, $b \in \mathbb{R}^p,\ c \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}$. Como se menciona en [15], la definición de función fielmente convexa es equivalente a decir que cuando la función es afín en un segmento de recta, entonces es afín en toda la recta que contiene dicho segmento, luego toda función fielmente convexa es también débilmente analítica y por tanto cumple $\mathfrak{C}$.

Sin embargo, es fácil ver que hay funciones que cumplen $\mathfrak{C}$ pero no son débilmente analíticas, por ejemplo consideramos la función

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \in [-1, 1] \\ |x| - 1, \text{ en otros casos,} \end{cases}$$

g es constante en $]-1,1[$ pero no en $\mathbb{R}$, sin embargo no es constante en ningún rayo, por lo tanto g cumple $\mathfrak{C}$.

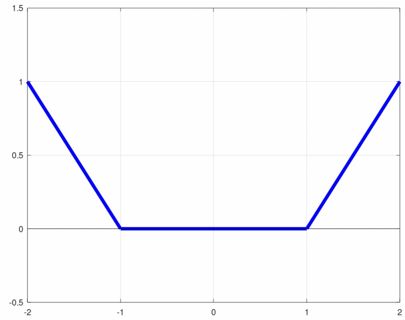

Figura 5.1: Función que cumple $\mathfrak{C}$, pero no es débilmente analítica.

Los siguientes lemas entregan propiedades sobre los conjuntos K_- y $K_=$:

Lema 5.1. *Si $I_- \neq \emptyset$, entonces existe una solución $\bar{x} \in K$ que cumple $g_i(\bar{x}) < 0$, para todo $i \in I_-$.*

Demostración. De la definición de I_-, para cada $i \in I_-$ existen $x_i \in K$ tal que $g_i(x_i) < 0$, luego es suficiente considerar la combinación convexa

$$\bar{x} \doteq \frac{1}{|I_-|}\sum_{i\in I_-} x_i$$

(se recuerda que $|I_-|$ corresponde a la cantidad de elementos de I_-) y se tiene lo deseado. En efecto, sea $j \in I_-$, haciendo uso del hecho que $x_i \in K$ para todo $i \in I_-$ y por ende $g_j(x_i) \leq 0$, se obtiene lo siguiente:

$$g_j(\bar{x}) = g_j\Big(\frac{1}{|I_-|}\sum_{i\in I_-} x_i\Big),$$

luego de la convexidad de g_j se verifica

$$g_j(\bar{x}) \leq \frac{1}{|I_-|}\sum_{i\in I_-} g_j(x_i),$$

ahora separamos la sumatoria

$$g_j(\bar{x}) \leq \frac{1}{|I_-|}\sum_{\substack{i\in I_-\\ i\neq j}} g_j(x_i) + \frac{1}{|I_-|} g_j(x_j)$$

y como $x_i \in K$, entonces $g_j(x_i) \leq 0$ para todo $i \in I_-$ y

$$g_j(\bar{x}) \leq \frac{1}{|I_-|} g_j(x_j) < 0,$$

que es lo que se buscaba. $\square$

El siguiente lema da una caracterización del conjunto $K_=$ bajo las hipótesis con que estamos trabajando. Este resultado es nuevo y mejora la parte (a) de [1, Corolario 5.4.1], permitiendo ahora que las funciones tomen el valor $+\infty$.

Lema 5.2. *El conjunto $K_=$ se puede reescribir de la siguiente manera:*

$$K_= = \{x \in \mathbb{R}^n |\; g_i(x) = 0 \; \forall \; i \in I_=\},$$

Demostración. Por contradicción, supongamos que esto es falso, es decir, que existe $\tilde{x} \in K_=$ tal que $g_k(\tilde{x}) < 0$ para algún $k \in I_=$. Ahora, sea $\lambda \in]0, 1[$ y consideramos la combinación convexa $x_\lambda \doteq \lambda\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}$, con $\bar{x}$ elegido como en el lema anterior. Ahora verificamos cuando x_λ cumple las restricciones $g_i(x) \leq 0$ y cuando puede hacerlo con desigualdad estricta:

- **Si** $i \in I_=$**:** Como $K \subseteq K_=$ y $K_=$ es convexo, necesariamente $x_\lambda \in K_=$ y por lo tanto $g_i(x_\lambda) \leq 0$ para todo $\lambda \in]0, 1[$.
- **Si** $i = k$**:** Por el punto anterior necesariamente $g_k(x_\lambda) \leq 0$, pero además

$$\begin{aligned} g_k(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}) &\leq \lambda g_k(\bar{x}) + (1-\lambda) g_k(\tilde{x}) \\ &\leq (1-\lambda) g_k(\tilde{x}) \\ &< 0. \end{aligned}$$

- **Si** $i \in I_-$**:** Por la convexidad de g_i, verificamos directamente que

$$g_i(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}) \leq \lambda g_i(\bar{x}) + (1-\lambda) g_i(\tilde{x})$$

y estudiamos el lado derecho considerando dos casos:

Si $g_i(\tilde{x}) \leq 0$, entonces para cualquier $\lambda \in]0,1[$ se satisface la restricción, pues $g_i(\bar{x}) < 0$.

Por otro lado, si $g_i(\tilde{x}) > 0$, como $g_k(\tilde{x}) < 0$ necesariamente $g_i(\tilde{x})$ es finito, y por lo tanto basta elegir λ tal que

$$1 > \lambda \geq 1 + \frac{g_i(\bar{x})}{g_i(\tilde{x}) - g_i(\bar{x})} > 0$$

donde se cumple que

$$-1 < \frac{g_i(\bar{x})}{g_i(\tilde{x}) - g_i(\bar{x})} < 0,$$

pues $g_i(\bar{x}) < 0$ y por lo tanto $g_i(\tilde{x}) - g_i(\bar{x}) > -g_i(\bar{x}) > 0$.

Entonces verificamos que dado λ elegido de esta forma se obtiene

$$\begin{aligned}
& \lambda - 1 \geq \frac{g_i(\bar{x})}{g_i(\tilde{x}) - g_i(\bar{x})} \\
\iff\quad & (\lambda - 1)(g_i(\tilde{x}) - g_i(\bar{x})) \geq g_i(\bar{x}) \\
\iff\quad & (1 - \lambda)(g_i(\tilde{x}) - g_i(\bar{x})) + g_i(\bar{x}) \leq 0 \\
\iff\quad & (1 - \lambda)g_i(\tilde{x}) - (1 - \lambda)g_i(\bar{x}) + g_i(\bar{x}) \leq 0 \\
\iff\quad & \lambda g_i(\bar{x}) + (1 - \lambda)g_i(\tilde{x}) \leq 0.
\end{aligned}$$

De lo anterior, para cada $i \in I_-$ existe un $t_i \in]0,1[$ tal que al elegir $\lambda \in [t_i, 1[$ se cumple $g_i(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}) < 0$, luego es suficiente elegir λ como el máximo entre estos t_i y entonces $x_\lambda \in K$, sin embargo con esta elección se tendría también que $g_k(x_\lambda) < 0$, de donde necesariamente $k \in I_-$ lo que es una contradicción. $\square$

El Lema 5.2 nos dice que al quitar restricciones con índice en I_-, si bien el conjunto factible crece, no se generan nuevas soluciones que satisfagan las restricciones con índice en $I_=$ con desigualdad estricta.

Con este lema y haciendo uso de la condición $\mathfrak{C}$ se verifica el siguiente lema que da una idea de la forma geométrica del conjunto $K_=$.

Lema 5.3. *Si las funciones g_i con $i \in I_=$ satisfacen $\mathfrak{C}$, entonces el cono $K_=^\infty$ es en realidad un subespacio.*

Demostración. Como las funciones g_i son convexas, también son cuasi convexas y por lo tanto los subniveles $S_0(g_i)$ son convexos, por lo que $K_= = \bigcap_{i \in I_=} S_0(g_i)$ también es convexo, además como las g_i son sci $K_=$ es cerrado. Luego $K_=^\infty$ es un cono convexo, y es suficiente verificar que $K_=^\infty \subseteq -K_=^\infty$.

Para esto, por la caracterización de $K_=^\infty$ para convexos cerrados, se tiene que dado $v \in K_=^\infty$ y $x \in K_=$, entonces $x + tv \in K_=$ para todo $t \geq 0$ y por lo tanto

$$g_i(x + tv) \leq 0,\ \forall t \geq 0,\ \forall i \in I_=,$$

lo que en realidad corresponde, por el Lema 5.2, a:

$$g_i(x + tv) = 0,\ \forall t \geq 0,\ \forall i \in I_=.$$

Esto significa que las funciones g_i con $i \in I_=$ son constantes en los rayos con dirección v, y por la condición $\mathfrak{C}$, necesariamente son constantes en las rectas $\{x + tv : t \in \mathbb{R}\}$ para todo $x \in K_=$. Esto es

$$g_i(x + tv) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall i \in I_=,$$

por lo que $-v \in K_=^\infty$.

□

Este punto es el único en que se usa $\mathfrak{C}$, y es por esto que solo es necesario pedir que las restricciones g_i con $i \in I_=$ satisfagan $\mathfrak{C}$.

Teniendo en cuenta las propiedades sobre los conjuntos K_- y $K_=$ entregadas por los lemas anteriores, podemos proceder a demostrar que el problema (P) tiene gap de dualidad cero bajo las hipótesis dadas.

Teorema 5.1. *Suponiendo que las funciones g_i con $i \in I_=$ cumplen la condición $\mathfrak{C}$. Si* (P) *es consistente, i.e. hay una solución $x \in K$ tal que $f(x) < +\infty$, entonces* (P) *no tiene gap de dualidad.*

Demostración. Primero notamos que si $I_= = \emptyset$, entonces $I_- = J$ y por el Lema 5.1, (P) cumple la condición de Slater, con lo que se tiene dualidad fuerte (y por lo tanto no hay gap de dualidad) y por esto solo falta el caso $I_= \neq \emptyset$.

Usando las definiciones dadas al principio del capítulo podemos reescribir el problema (P) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mu = \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & g_i(x) \leq 0,\ \forall i \in I_- \\ & x \in K_=, \end{aligned} \tag{P0}$$

este problema auxiliar conserva el valor óptimo pues no ha cambiado el conjunto factible K ni la función objetivo, además tenemos que $K_=$ es convexo y por el Lema 5.1 existe un elemento $\bar{x} \in K$ tal que $g_i(\bar{x}) < 0\ \forall i \in I_-$, lo que junto con la convexidad de las restricciones asegura que $(f, G_-)(\mathbb{R}^{|I_-|}) + \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{|I_-|}$ es convexo, donde G_- es la función vectorial cuyas componentes son las funciones g_i con $i \in I_-$, lo que nos permite aplicar el Teorema 4.5, que aseguran que el problema (P0) tiene dualidad fuerte, es decir, existen $\bar{\lambda}_i \geq 0$ para cada $i \in I_-$ tales que

$$\mu = \inf_{x \in K_=} f(x) + \sum_{i \in I_-} \bar{\lambda}_i g_i(x)$$

y podemos reescribir esto descomponiendo el conjunto $K_=$ para obtener el siguiente problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \mu = \inf \quad & f_0(x) \\ \text{s.a} \quad & g_i(x) \leq 0,\ \forall i \in I_= \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{P1}$$

donde $f_0(x) \doteq f(x) + \sum_{i \in I_-} \bar{\lambda}_i g_i(x)$.

Notar que cuando $I_- = \emptyset$, (P) corresponde a (P1) y se trabaja tal como sigue.

Notamos que el conjunto factible de (P1) corresponde a $K_=$, luego del Lema 5.3 sabemos que $K_=^\infty$ es un subespacio vectorial y al considerar la siguiente definición:

$$\tilde{f}_0(x) \doteq \inf_{v\in K_{=}^{\infty}} f_0(x+v),$$

se asegura que $\tilde{f}_0(x+y) = \tilde{f}_0(x),\ \forall y \in K_{=}^{\infty}$.

Con esta función definimos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} \doteq \inf \quad & \tilde{f}_0(x) \\ \text{s.a} \quad & g_i(x) \leq 0,\ \forall i \in I_{=} \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{$\tilde{P}$}$$

y verificamos que se cumple $\tilde{\mu} = \mu$.

En efecto, teniendo en cuenta que el conjunto factible para estos problemas corresponde a $K_{=}$, como $0 \in K_{=}^{\infty}$

$$\inf_{v\in K_{=}^{\infty}} f_0(x+v) \leq f_0(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

es decir, $\tilde{f}_0(x) \leq f_0(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ y por lo tanto

$$\inf_{x\in K_{=}} \tilde{f}_0(x) \leq \inf_{x\in K_{=}} f_0(x).$$

Por otro lado, si $v \in K_{=}^{\infty}$, se tiene que $x+v \in K_{=}$ para todo $x \in K_{=}$, de donde

$$\inf_{x\in K_{=}} f_0(x) \leq f_0(x+v),\ \forall x \in K_{=},\ \forall v \in K_{=}^{\infty}.$$

Luego

$$\inf_{x\in K_{=}} f_0(x) \leq \inf_{v\in K_{=}^{\infty}} f_0(x+v),\ \forall x \in K_{=}$$

y por tanto

$$\inf_{x\in K_{=}} f_0(x) \leq \inf_{x\in K_{=}} \inf_{v\in K_{=}^{\infty}} f_0(x+v) = \inf_{x\in K_{=}} \tilde{f}_0(x),$$

que es lo que se quería.

Ahora queremos utilizar el Teorema 4.6 para el problema $\tilde{P}$. Para esto necesitamos el siguiente cono asociado al problema $\tilde{P}$:

$$\tilde{R}_0 \doteq \{v \in \mathbb{R}^n :\ (\tilde{f}_0)^\infty_{0,q}(v) = 0,\ (g_i)^\infty_{0,q}(v) = 0,\ \forall i \in I_=\}.$$

Y gracias a la definición de $\tilde{f}_0$, ocurre que

$$\tilde{R}_0 = K^\infty_=.$$

Para verificar esto, primero notamos que como las funciones involucradas son convexas y semi continuas inferiormente, por el Corolario 2.1 se puede escribir

$$K^\infty_= = \{v \in \mathbb{R}^n :\ (g_i)^\infty_q(v) \le 0,\ \forall i \in I_=\}$$

que es equivalente a

$$K^\infty_= = \{v \in \mathbb{R}^n :\ (g_i)^\infty_{0,q}(v) = 0,\ \forall i \in I_=\}$$

lo que asegura $\tilde{L} \subseteq K^\infty_=$. Por otro lado, sea $v_0 \in K^\infty_=$, entonces al ser $K^\infty_=$ un subespacio, trivialmente se cumple que

$$\inf_{v \in K^\infty_=} f_0(x + v_0 + v) = \inf_{v \in K^\infty_=} f_0(x + v),$$

es decir, $\tilde{f}_0$, es constante a lo largo de las direcciones de $K^\infty_=$ y por lo tanto

$$(\tilde{f}_0)^\infty_{0,q}(v) = 0$$

de donde $v \in \tilde{L}$. Así, $\tilde{L} = K^\infty_=$ el cual es subespacio y se satisface la hipótesis del teorema.

Además, como las funciones son convexas, se tiene que $(\tilde{f}, G_=)(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m_+$ es convexo, con $G_=$ la función vectorial que tiene como componentes a las funciones g_i con $i \in I_=$, por el Teorema 4.6 no hay gap de dualidad para el problema ($\tilde{P}$). Esto es,

$$\tilde{\nu} \doteq \sup_{\substack{\lambda_i \ge 0 \\ i \in I_=}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \tilde{f}_0(x) + \sum_{i \in I_=} \lambda_i g_i(x) = \tilde{\mu}.$$

Finalmente, sabemos que $\tilde{f}_0(x) \le f_0(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ y recordando que se mantiene el valor óptimo μ en todos los problemas auxiliares, se verifica lo siguiente:

$$\mu = \sup_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ i \in I_=}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \tilde{f}_0(x) + \sum_{i \in I_=} \lambda_i g_i(x) \leq \sup_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ i \in I_=}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x) + \sum_{i \in I_=} \lambda_i g_i(x),$$

luego, de la definición de f_0 se reescribe la desigualdad anterior y recordando que $J = I_- \cup I_=$ y $\bar{\lambda}_i \geq 0$ para todo $i \in I_-$, se obtiene

$$\mu \leq \sup_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ i \in I_=}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \sum_{i \in I_-} \bar{\lambda}_i g_i(x) + \sum_{i \in I_=} \lambda_i g_i(x) \leq \sup_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ i \in J}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \sum_{i \in J} \lambda_i g_i(x) = \nu,$$

donde ν es el valor del problema dual asociado al problema original (P), además, por dualidad débil, $\nu \leq \mu$ con lo que se tiene la igualdad que corresponde a gap de dualidad cero.

$\square$

5.2. Caso cuasi convexo

En esta sección se tratara el problema cuando no todas las funciones son convexas, haciendo uso de la separación de $J = I_- \cup I_=$, para obtener resultados donde no se exige que todas las funciones involucradas sean convexas pero se verifica que la función valor asociada al problema es sci en cero.

5.2.1. Funciones a valores reales

Aquí trataremos el problema cuando las funciones f, g_i con $i \in J$ toman solo valores reales.

Este resultado se basa en la demostración de [1, Teorema 5.4.2], originalmente presentado para un problema convexo; aplicando técnicas similares se ha extendido el resultado para tomar casos con algunas restricciones semiestrictamente cuasi convexas.

Para este resultado se consideran las siguiente hipótesis sobre (P):

Hipótesis A.

(i) Las funciones g_i con $i \in I_=$ son débilmente analíticas, semiestrictamente cuasi convexas, sci y están en $\mathcal{C}$.

(ii) Las funciones f y g_i con $i \in I_-$ son convexas.

(iii) $\mu \in \mathbb{R}$.

Recordamos que una función es débilmente analítica sí, cuando es constante en un segmento abierto no vacío de recta, es también constante en toda la recta que contiene dicho segmento.

Será necesaria la siguiente proposición sobre funciones de clase $\mathcal{C}$, que se enuncia para funciones cuasi convexas y sci; pero recordando que una función semiestrictamente cuasi convexa y sci es también cuasi convexa, se puede utilizar para un problema (P) que satisface la Hipótesis A.

Proposición 5.1. *Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cuasi convexa, sci y de clase $\mathcal{C}$, entonces*

(a) Si $x_0, v \in \mathbb{R}^n$ son tales que

$$\sup_{t \geq 0} h(x_0 + tv) - h(x_0) < +\infty,$$

entonces

$$\sup_{t \geq 0} h(x + tv) - h(x) < +\infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(b) Si $x_0, v \in \mathbb{R}^n$ son tales que

$$h(x_0 + tv) = h(x_0), \forall t \in \mathbb{R},$$

entonces

$$h(x + tv) = h(x), \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. **(a)**. Suponiendo que no es verdad, entonces existiría un $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} h(x_1 + tv) - h(x_1) = +\infty,$$

luego por Proposición 3.2 necesariamente

$$\sup_{t\geq 0} h(x + tv) - h(x) = +\infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

lo que es una contradicción.

(b) Primero notamos que si para todo $t \in \mathbb{R}$, $h(x_0 + tv) = h(x_0)$ entonces

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} h(x_0 + tv) - h(x_0) = 0$$

y por (a) necesariamente $\sup\limits_{t\geq 0} h(x \pm tv) - h(x) < +\infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Luego notamos que dado $x \in \mathbb{R}^n$

$$t \mapsto h(x + tv) \nrightarrow +\infty,$$

$$t \mapsto h(x - tv) \nrightarrow +\infty,$$

cuando $t \to +\infty$.

Por lo tanto, como $h \in \mathcal{C}$, necesariamente tanto $t \mapsto h(x + tv)$ como $t \mapsto h(x - tv)$ son decrecientes en $t \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, es decir

$$h^{\infty}_{0,q}(\pm v) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{t\geq 0} (h(x \pm tv) - h(x)) \leq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

y como h es propia,

$$h^{\infty}_{0,q}(\pm v) = 0$$

finalmente por Proposición 5.1 se tiene que $h(x + tv) = h(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in \mathbb{R}$. $\square$

La parte (b) de esta proposición nos dice que si hay una recta $\{x_0 + tv_0 : \ t \in \mathbb{R}\}$ en la cual h es constante, entonces h es constante en todas las rectas $\{x + tv_0 : \ t \in \mathbb{R}\}$ con $x \in \mathbb{R}^n$.

Ahora verificamos el siguiente lema, que describe de forma geométrica al conjunto $K_=$, mostrando que es un espacio afín y entrega una representación del subespacio vectorial que lo describe.

Este resultado mejora [1, Lema 5.4.2], permitiendo que las funciones g_i con $i \in I_=$ sean semiestrictamente cuasi convexas pertenecientes a $\mathcal{C}$ en lugar de convexas.

Lema 5.4. *Si se cumple la Hipótesis A, entonces:*

(a) $K_= = \{x \in \mathbb{R}^n |\ g_i(x) = 0,\ \forall i \in I_=\}$.

(b) $L_1 \doteq \{v \in \mathbb{R}^n |\ (g_i)^\infty_{0,q}(v) = 0,\ \forall i \in I_=\} \subseteq -L_1$.[1]

(c) $K^\infty_= = L_1$.

(d) El conjunto $K^\infty_=$ *es un subespacio vectorial y* $K_=$ *es un espacio afín tal que* $K_= = x + K^\infty_=$ *para* $x \in K_=$.

Demostración. (a): Si suponemos que esto no es válido, entonces existiría $\tilde{x} \in K_=$ tal que para algún $j \in I_=,\ g_j(\tilde{x}) < 0$, por otro lado, sabemos que $K_- \cap K_=$ no es vacío, pues de la definición de I_-, para cada $i \in I_-$ existe un $x_i \in K$ tal que $g_i(x_i) < 0$ y por lo tanto $\bar{x} \doteq \frac{1}{|I_-|}\sum_{i \in I_-} x_i$ cumple $g_i(\bar{x}) < 0$ para todo $i \in I_-$ y $\bar{x} \in K$ pues K es convexo (el detalle de esto es igual a la demostración del Lema 5.1, pues las funciones g_i con $i \in I_-$ siguen siendo convexas). Luego consideramos la combinación convexa $\lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\bar{x} \doteq x_\lambda$ para $\bar{x}$ como antes y $x_\lambda \in K_=$, por otro lado, por semi estricta cuasi convexidad $g_j(x_\lambda) < \max\{g_j(\bar{x}), g_j(\tilde{x})\} \leq 0$ (en el caso en que $g_j(\tilde{x}) = g_j(\bar{x})$ por cuasi convexidad se obtiene $g_j(x_\lambda) \leq g_j(\tilde{x}) < 0$) y además, por la semicontinuidad superior de las funciones g_i, cuando $\lambda \searrow 0$ se tiene $g_i(x_\lambda) < 0$, lo que implica $j \in I_-$ que es una contradicción.

(b): Sea x_0 que pertenece a $K_=$, entonces se tiene que $g_i(x_0 + tv) \leq g_i(x_0) \leq 0$ para todo i en $I_=$, pero entonces $x_0 + tv \in K_=$ y por (a), $g_i(x_0 + tv) = 0$. Luego las funciones g_i son constantes en el rayo $x_0 + tv$ con $t \geq 0$ y por ser débilmente analíticas deben serlo en toda la recta $x_0 + tv$ con $t \in \mathbb{R}$. Y por la Proposición 5.1 se tiene que

[1] Por la Proposición 3.4 se puede reemplazar $(g_i)^\infty_{0,q}(v) = 0$ por $(g_i)^\infty_q(v) \leq 0$ en la definición de L_1.

$$g_i(x+tv) = g_i(x),\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

lo que significa que $(g_i)^\infty_{0,q}(-v) = 0$ y $-v \in L_1$ lo que prueba la inclusión.

(c): Primero notamos que $K_=$ es convexo, pues es intersección de subniveles de funciones cuasi convexas, luego

$$K^\infty_= = \{v \in \mathbb{R}^n |\ x + tv \in K_=,\ \forall t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Para probar $L_1 \subseteq K^\infty_=$ consideramos un elemento $v \in L_1$, de la Proposición 3.3 se tiene que las funciones g_i, con $i \in I_=$ son constantes en la dirección v, luego $g_i(x+tv) = g_i(x) = 0$ para todo $x \in K_=$ lo que prueba la inclusión.

Para probar la otra inclusión, consideramos $x \in K_=$ y $v \in K^\infty_=$, entonces $x+tv \in K_=$, para todo $t > 0$ y por la parte (a), $g_i(x+tv) = 0$, para todo $t > 0$, esto significa que las funciones son constantes en los rayos $x + tv$ y por la definición de débilmente analítica deben ser constantes en toda la recta, es decir, $g_i(x+tv) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$, luego por Proposición 5.1 necesariamente

$$g_i(x+tv) = g_i(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

de donde

$$g_i(x+tv) - g_i(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

y $(g_i)^\infty_{0,q}(v) = 0$. Esto es, $v \in L_1$.

(d): Se tiene que $K^\infty_=$ es un subespacio vectorial, pues es un cono y $K^\infty_= \subseteq -K^\infty_=$. Ahora, sea $x_0 \in K_=$, veamos que $K_= = x_0 + K^\infty_=$.

Para probar que $x_0 + K^\infty_= \subseteq K_=$ es suficiente notar que

$$x_0 + K^\infty_= \subseteq K_= + K^\infty_= \subseteq K_=.$$

Para la otra inclusión, sea $x_1 \in K_=$, de la convexidad de $K_=$ se tiene que el segmento $]x_0, x_1[$ está contenido en $K_=$, luego como las funciones g_i con $i \in I_=$ son débilmente analíticas, junto con la parte (a) implica que toda la recta $\{x_0 + t(x_1 - x_0) |\ t \in \mathbb{R}\} \subseteq K_=$ y por lo tanto $(x_1 - x_0) \in K_=^\infty$, con lo que $x_1 = x_0 + (x_1 - x_0) \in x_0 + K_=^\infty$. $\square$

Recordando el Lema 5.2, notamos que se obtiene un resultado similar a la parte (a) de este lema, esto es gracias a que si bien pedimos solo semiestricta cuasi convexidad y sci sobre las funciones en $I_=$ y convexidad en las funciones en I_-, agregamos la hipótesis que las funciones tomen solo valores reales.

Si solo pedimos semiestricta cuasi convexidad sobre todas las funciones no es válido el lema anterior, para ver esto es suficiente considerar las siguientes funciones:

$$g_1(x) = \begin{cases} -1, \text{ si } x \in (-\infty, 1] \\ x - 1, \text{ si } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

$$g_2(x) = -x + 1,$$

ambas son sci y semi estrictamente cuasi convexas (más aún, g_2 es convexa), el conjunto factible que define con $g_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2$ corresponde a $K = \{1\}$, en el cual solo g_1 puede ser satisfecha con desigualdad estricta ($g_1(1) = -1,\ g_2(x) = 0$), pero para un problema con estas restricciones, se tendría $K_= = [1, +\infty)$, donde g_2 si puede tomar valores negativos (por ejemplo $g_2(2) = -1$), lo que contradice al lema 5.2. A continuación se muestra un gráfico de las restricciones anteriores, en azul g_1, en rojo g_2 y en verde $K_=$:

Esto significa que si no pedimos convexidad, se requiere alguna hipótesis adicional para obtener un resultado similar.

El siguiente es un lema técnico que se necesitará más adelante. Este resultado mejora [1, Lema 5.4.2] permitiendo que las funciones g_i con $i \in I_=$ sean cuasi convexas en $\mathcal{C}$ en lugar de convexas.

Lema 5.5. *Sea $x_k \in K_=(a^k)$ con $a^k \to 0$. Si se cumple la Hipótesis A, entonces existen sucesiones $v_k \to 0$ y $w_k \in K_=$ tales que $x_k = v_k + w_k$.*

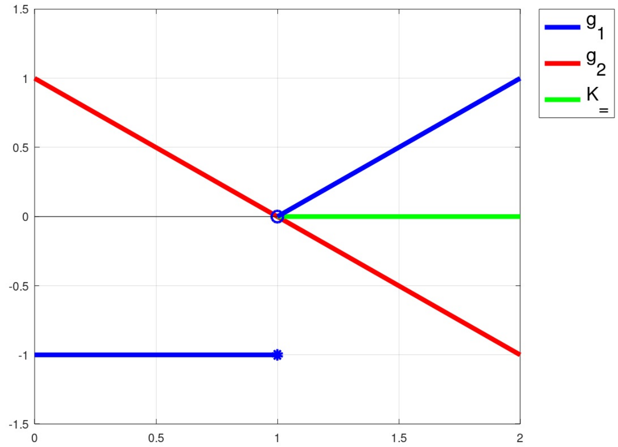

Figura 5.2: Contraejemplo para el Lema 5.2 sin convexidad.

Demostración. Como el conjunto L_1 definido en el Lema 5.4 es un espacio vectorial, para cada k hacemos la descomposición $x_k = x_k^+ + x_k^-$, con $x_k^+ \in L_1$ y $x_k^- \in L_1^\perp$. Además, de $L_1 = K_=^\infty$, se tiene que $x_k^- = x_k - x_k^+ \in K_= + K_=^\infty = K_=$. Del Lema 5.4 y la Proposición 3.3, se sigue que

$$g_i(x_k^-) = g_i(x_k - x_k^+) = g_i(x_k), \quad \forall i \in I_=. \tag{5.1}$$

Ahora veamos que $\{x_k^-\}$ es acotada. Suponiendo lo contrario, es decir, $\sup_k ||x_k^-|| = +\infty$, se tiene que existe una subsucesión x_{k_l} tal que $||x_{k_l}|| \to +\infty$ y $\frac{x_{k_l}}{||x_{k_l}||} \to v$ con $||v|| = 1$. Entonces, como $L_1^\perp$ es cerrado, $v \in L_1^\perp$ y necesariamente $v \notin L_1$. Esto significa que $(g_i)_{0,q}^\infty(v) > 0$ para algún $i \in I_=$, y por lo tanto, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe $t_0 > 0$ tal que $g_i(x_0 + t_0 v) > g_i(x_0)$, luego como $g_i \in \mathcal{C}$ necesariamente

$$\sup_{t>0} g_i(x_0 + tv) = +\infty. \tag{5.2}$$

Por otro lado, para un $t > 0$ fijo y k_l suficientemente grande y usando que $g_i(x_{k_l}) \le u_i^{k_l} \to 0$, de la cuasi convexidad y (5.1), se obtiene

$$g_i\left(\left(1 - \frac{t}{||x_{k_l}^-||}\right) x_0 + \frac{t}{||x_{k_l}^-||} x_{k_l}^-\right) \le \max\{g_i(x_0), g_i(x_{k_l}^-)\},$$

$$= \max\{g_i(x_0), g_i(x_{k_l})\} \le \max\{g_i(x_0), 1\}$$

donde el uno puede ser reemplazado por cualquier número mayor a cero. Ahora, de la semi continuidad inferior de las funciones g_i al pasar al límite implica

$$g_i(x_0 + tv) \leq \max\{g_i(x_0), 1\},$$

lo cual contradice (5.2).

Así necesariamente $\{x_k^-\}$ es acotada y por tanto posee al menos una subsucesión con límite. Sea S el conjunto de dichos límites y sea $s \in S$, entonces al pasar al límite y recordando que $g_i(x_k^-) = g_i(x_k) \leq a_i^k,$ para cada $i \in I_=$ se obtiene $g_i(s) \leq 0$ y $s \in K_=$. Por lo tanto $S \subseteq K_=$. Ahora, sea $\bar{s_k} \in \operatorname{argmin}\{||x - x_k|| \mid x \in S\}$ (S es compacto pues $\{x_k^-\}$ es acotado) y fijamos $v_k \doteq x_k^- - \bar{s_k}, w_k \doteq x_k^+ + \bar{s_k}$. Entonces $v_k \to 0$ y $w_k = x_k^+ + \bar{s_k} \in K_=^\infty + K_= \subseteq K_=$.

$\square$

Este resultado es válido pidiendo solo cuasi convexidad para las funciones g_i con $i \in I_=$, pues en esta demostración solo se usa cuasi convexidad.

Definimos el mapeo $G : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dado por $G(v) \doteq v + K_=$, notamos que como $K_=$ es un subespacio afín (bajo la Hipótesis A), y $G(v)$ es una traslación, $G(v)$ es también un subespacio afín para cualquier $v \in \mathbb{R}^{|I_=|}$.

Con esto definimos la siguiente función $h : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, dada por

$$h(v) \doteq \inf\{f(x) | \; x \in G(v) \cap K_-\}.$$

La función h se asemeja a una función valor, pero con la diferencia que mantiene fijas las restricciones $g_i(x) \leq 0$ para $i \in I_-$ y en lugar de cambiar el conjunto definido por las otras restricciones ($x \in K_=(a)$) traslada el conjunto $K_=$, esto es para hacer uso que $G(v)$ es subespacio afín.

Teniendo estas definiciones se demuestra el lema siguiente que generaliza [1, Lema 5.4.3] permitiendo que las funciones g_i con $i \in I_=$ sean semiestrictamente cuasi convexas en $\mathcal{C}$ en lugar de convexas.

Lema 5.6. *Suponiendo que se satisface la Hipótesis A, entonces* h *es continua en* 0 *y* $h(0) = \psi(0)$.

Demostración. Primero verificamos que el mapeo $v \to G(v) \cap K_-$ es sci en cero, para esto notamos que como $K_=$ es un espacio afín entonces para cualquier $v \in \mathbb{R}^n$ $G(v)$ también es afín y además K_- es abierto, en efecto, sea $x \in K_-$, entonces $g_i(x) < 0$, para todo $i \in I_-$ y por semi continuidad superior existe un entorno de x en el que se conserva la desigualdad.

Sea N un abierto tal que $N \cap G(0) \cap K_- \neq \emptyset$ con $x \in N \cap G(0) \cap K_-$, necesariamente existe una bola $B(x, \epsilon)$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq N \cap K_-$. Y sea $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $||x|| < \epsilon$, se tiene que $x + v \in v + K_= = G(v)$ y además $x + v \in B(x, \epsilon) \subseteq N \cap K_-$, es decir, $x \in N \cap G(0) \cap K_-$ y por lo tanto $N \cap G(v) \cap K_- \neq \emptyset$, para todo $v \in B(0, \epsilon)$; con lo que se prueba la semicontinuidad inferior.

Con esto y ya que f es continua, por la Proposición 3.1 se asegura que h es scs en 0. Para probar la semi continuidad inferior, sea $v_k \to 0$ y $x_k \in G(v_k) \cap K_-$ tal que $f(x_k) - h(x_k) \leq \frac{1}{k}$, como $\frac{1}{k} \to 0$ se tiene que

$$\varliminf_{k \to +\infty} f(x_k) = \varliminf_{k \to +\infty} h(v_k). \tag{5.3}$$

Como h es scs en cero, de la misma forma que antes, se puede construir una sucesión $a_k \in G(-v_k) \cap K_-$ tal que

$$\varlimsup_{k \to +\infty} f(a_k) = \varlimsup_{k \to +\infty} h(-v_k) \leq h(0). \tag{5.4}$$

Ahora fijamos $z_k \doteq \frac{1}{2}(x_k + a_k)$. Entonces, como $x_k, a_k \in K_-$, se tiene que $z_k \in K_-$ y además como $x_k \in K_= + v_k$ y $a_k \in K_= - v_k$, necesariamente existen $y_k^+, y_k^- \in K_=$ tal que $x_k = y_k^+ + v_k, a_k = y_k^- - v_k$, luego $z_k = \frac{1}{2}(y_k^+ + v_k + y_k^- - v_k) = \frac{1}{2}(y_k^+ + y_k^-) \in K_=$ y por lo tanto $z_k \in G(0) \cap K_-$, así $h(0) \leq f(z_k) \leq \frac{1}{2}(f(x_k + f(a_k))$. Esta desigualdad se puede re ordenar de forma que

$$\begin{aligned}
h(0) &\leq \frac{1}{2}(f(x_k + f(a_k)) \\
\Rightarrow 2h(0) &\leq f(x_k) + f(a_k) \\
\Rightarrow h(0) &\leq f(x_k) - (h(0) - f(a_k)).
\end{aligned}$$

Ahora podemos pasar al límite superior

$$\begin{aligned}
h(0) &\leq \overline{\lim_{k\to+\infty}} (f(x_k) - (h(0) - f(a_k))) \\
&\leq \overline{\lim_{k\to+\infty}} f(x_k) - (h(0) - \overline{\lim_{k\to+\infty}} f(a_k))
\end{aligned}$$

y junto con (5.4) se obtiene

$$h(0) \leq \overline{\lim} f(x_k).$$

Para probar que $h(0) = \psi(0)$ solo hace falta probar que dado $x \in K$, existe una sucesión $x_k \in K_= \cap K_-$ tal que $x_k \to x$, entonces por continuidad de f, $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$ y por lo tanto para cualquier sucesión en K hay una sucesión en $K_= \cap K_-$ tal que su límite por f coincide. Para probar que dicha sucesión x_k existe, sea $x \in K$ y $x_0 \in K_= \cap K_-$, por Lema 5.4 para todo $i \in I_=$, $g_i(2^{-1}(x_0 + x)) = 0$ y para $i \in I_-$ de la convexidad de las g_i se tiene:

$$g_i\left(\frac{1}{2}(x_0 + x)\right) \leq \frac{1}{2}\left(g_i(x_0) + g_i(x)\right)$$

con lo que $\frac{1}{2}(x_0 + x) \in K_= \cap K_-$ y podemos construir la sucesión de la forma $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + x)$, que cumple $x_k \to x$.

□

Con estos resultados se procede a demostrar que la función valor es sci en cero. Para esto se comparará con la función h definida anteriormente.

Teorema 5.2. *Suponiendo que la Hipótesis A se cumple. Entonces la función ψ es sci en cero.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, entonces, por el Lema 5.6, existe $x \in K_= \cap K_-$ tal que

$$\psi(0) - f(x) \geq -\epsilon. \tag{5.5}$$

Sea $x_k \in K(a^k)$ con $a^k \to 0$. Como $K(a^k) \subseteq K_=(a^k)$, por Lema 5.5 existen sucesiones $v_k \to 0, w_k \in K_=$ tales que $x_k = v_k + w_k$. Entonces, sea $z_k \doteq \frac{1}{2}(x_k + x)$ veamos que $z_k \in G(\frac{1}{2}v_k)$, en efecto de lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{2}(x + x_k) \\ &= \frac{1}{2}(x + v_k + w_k) \\ &= \frac{1}{2}v_k + \frac{1}{2}(x + x + (w_k - x)), \end{aligned}$$

del hecho que $w_k \in K_= = x + L_1$ y L_1 es un subespacio vectorial se obtiene que $w_k - x = 2l$ para algún $l \in L_1$ y luego

$$z_k = \frac{1}{2}v_k + x + l \in \frac{1}{2}v_k + x + L_1 = \frac{1}{2}v_k + K_= = G(\frac{1}{2}v_k).$$

Y para k suficientemente grande, como $i \in I_-, g_i(x_k) \to 0$ y $g_i(x) < 0$, entonces

$$g_i(z_k) \leq \frac{1}{2}(g_i(x) + g_i(x_k)) < 0,$$

es decir, $z_k \in K_-$. Con esto podemos usar el Lema 5.6 y se sigue que para k suficientemente grande

$$f(z_k) \geq h(\frac{1}{2}v_k) \geq h(0) - \epsilon = \psi(0) - \epsilon. \tag{5.6}$$

Como f es convexa se tiene también que

$$f(z_k) \leq \frac{1}{2}(f(x_k) + f(x))$$

que junto con (5.6) implica

$$\begin{aligned}\psi(0)-\epsilon &\leq \frac{1}{2}f(x_k)+\frac{1}{2}f(x)\\ \Rightarrow 2\psi(0)-2\epsilon-f(x) &\leq f(x_k)\end{aligned}$$

y por (5.5) se obtiene

$$\psi(0)-3\epsilon \leq f(x_k).$$

Como $x_k \in K(a^k)$ es arbitraria, podemos elegir de forma que $f(x_k) \leq \psi(a^k)+\frac{1}{k}$, entonces resulta

$$\psi(0)-3\epsilon-\frac{1}{k} \leq \psi(a^k)$$

y al tomar el límite inferior resulta

$$\psi(0)-3\epsilon \leq \varliminf_{k\to+\infty} \psi(a^k)$$

finalmente como $\epsilon>0$ es arbitrario resulta $\psi(0)- \leq \varliminf_{k\to+\infty} \psi(a^k)$, lo que prueba la semi continuidad inferior en cero.

□

5.2.2. Funciones que pueden tomar valor infinito

En esta sección se trata con problemas definidos por funciones de la forma $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

La primera forma de tratar el problema separando las restricciones con los conjunto I_- e $I_=$ fue propuesta por el profesor guía, que consiste en utilizar una técnica similar a la del Teorema 5.1, tratando con el problema auxiliar con f_0, considerando todas las funciones cuasi convexas a costa de pedir otras hipótesis.

Definimos $f_\lambda = f+\sum_{i\in I_-}\lambda_i g_i$, y fijamos $F_\lambda \doteq (f_\lambda, G_=)$, $F_0 \doteq (f, G_-)$ donde $G_=$ es la función vectorial tal que sus componentes son las funciones g_i con $i\in I_=$ y lo mismo para G_- pero con $i \in I_-$.

Consideramos las siguientes hipótesis (**H**):

- para todo λ que pertenece a $\mathbb{R}_+^{|I_-|}$ se tiene que f_λ es sci y semi estrictamente cuasi convexa.
- para todo λ que pertenece a $\mathbb{R}_+^{|I_-|}$ se tiene que $f_\lambda \in \mathcal{C}$.
- para todo $i \in J$, g_i es sci y semi estrictamente cuasi convexa.
- para todo $i \in I_=$, $g_i \in \mathcal{C}$.
- $F_0(K_=) + \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{|I_-|}$ es almost-convex.
- el conjunto $R_\lambda \doteq \{v \in \mathbb{R}^n |\ (f_\lambda)_{0,q}^\infty(v) = 0, (g_i)_{0,q}^\infty(v) = 0, \forall i \in I_=\}$ es un subespacio.
- para todo λ que pertenece a $\mathbb{R}_+^{|I_-|}$ se tiene que $\overline{F_\lambda(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{|I_=|}}$ es convexo.

Bajo estas hipótesis verificamos que se cumple otra versión del Lema 5.1:

Lema 5.7. *Si se cumple (***H***), entonces existe una solución $\bar{x} \in K$ tal que $g_i(\bar{x}) < 0$ para cada $i \in I_-$.*

Demostración. Primero notamos que como las funciones son cuasi convexas K es convexo.

Igual que en el caso de Lema 5.1 es suficiente considerar

$$\bar{x} \doteq \frac{1}{|I_-|} \sum_{i \in I_-} x_i$$

donde los x_i son tales que $g_i(x_i) < 0$ y $x_i \in K$ (que existen de la definición de I_-). Ahora usamos la semiestricta cuasi convexidad para estudiar el valor de $g_j(\bar{x})$ para un $j \in I_-$.

Primero hacemos la descomposición

$$\bar{x} = \frac{1}{|I_-|} x_j + \left(1 - \frac{1}{|I_-|}\right) \sum_{\substack{i \in I_- \\ i \neq j}} \frac{x_i}{|I_-| - 1}$$

y notamos que $\sum_{\substack{i\in I_-\\ i\neq j}} \frac{x_i}{|I_-|-1}$ es combinación convexa de $|I_-|-1$ elementos de K, por lo que también está en K, ahora estudiamos dos casos, primero si $g_j(x_j) \neq g_j\left(\sum_{\substack{i\in I_-\\ i\neq j}} \frac{x_i}{|I_-|-1}\right)$, entonces

$$g_j(\bar{x}) < \max\left\{g_j(x_j), g_j\left(\sum_{\substack{i\in I_-\\ i\neq j}} \frac{x_i}{|I_-|-1}\right)\right\},$$

donde este máximo es menor o igual a cero, pues $g_j(x_j) < 0$ y $\sum_{\substack{i\in I_-\\ i\neq j}} \frac{x_i}{|I_-|-1}$ es factible por lo que su evaluación por g_j es menor o igual a cero.

Por otro lado, si $g_j(x_j) = g_j(\sum_{\substack{i\in I_-\\ i\neq j}} \frac{x_i}{|I_-|-1})$ entonces de la cuasi convexidad

$$g_j(\bar{x}) \leq \max\left\{g_j(x_j), g_j\left(\sum_{\substack{i\in I_-\\ i\neq j}} \frac{x_i}{|I_-|-1}\right)\right\} = g_j(x_j) < 0,$$

y también se cumple lo deseado.

$\square$

Teorema 5.3. *Si se cumple (***H***) entonces el problema* (P) *tiene gap de dualidad nulo.*

Demostración. De manera análoga a la demostración del Teorema 5.1 consideramos el problema auxiliar (P0) que conserva el valor óptimo

$$\begin{aligned} \mu = \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & g_i(x) \leq 0,\ \forall i \in I_- \\ & x \in K_=, \end{aligned} \tag{P0}$$

como tenemos que $F_0 = (f, g_-)$ y $F_0(K_=) + \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{|I_-|}$ es almost-convex, entonces junto con el Lema 5.7 podemos aplicar el Teorema 4.5 de donde (P0) tiene dualidad fuerte y existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{|I_-|}$ tal que

$$\mu = \inf_{x\in K_=} f(x) + \sum_{i\in I_-} \bar{\lambda}_i g_i(x) = \inf_{x\in K_=} f_{\bar{\lambda}}(x),$$

que se puede descomponer para obtener el problema (P1):

$$
\begin{aligned}
\mu = \min \quad & f_{\bar{\lambda}}(x) \\
\text{s.a} \quad & g_i(x) \leq 0,\ \forall i \in I_= \\
& x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}
\tag{P1}
$$

ahora, al intentar aplicar el Teorema 4.6 a (P1), notamos que el conjunto R_0 correspondiente es en realidad $R_{\bar{\lambda}}$ el cual es subespacio por hipótesis, es decir la función valor asociada a (P1) es sci en cero. Por último, como $\overline{F_{\bar{\lambda}}(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{|I_=|}}$ es convexo se tiene que el problema (P1) tiene gap de dualidad nulo. Con esto podemos proceder a demostrar que (P) no tiene gap de dualidad. Para esto primero escribimos el dual de (P1) que conserva el valor óptimo μ y

$$\mu = \sup_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ i \in I_=}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f_{\bar{\lambda}}(x) + \sum_{i \in I_=} \lambda_i g_i(x) = \sup_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ i \in I_=}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \sum_{i \in I_-} \bar{\lambda}_i g_i(x) + \sum_{i \in I_=} \lambda_i g_i(x)$$

y como $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^{|I_-|}$

$$\mu \leq \sup_{\substack{\lambda_i \geq 0 \\ i \in J}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \sum_{i \in J} \lambda_i g_i(x) = \nu,$$

donde ν corresponde al dual de (P) y por ende se tiene la desigualdad deseada $\mu \leq \nu$.

□

El principal problema con este resultado son las hipótesis, pues resulta complicado verificar que se satisfagan, en particular pedir que para todo λ que pertenece a $\mathbb{R}_+^{|I_-|}$ se tenga que $\overline{F_{\lambda}(\mathbb{R}^n) + \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{|I_=|}}$ es convexo y que R_λ sea subespacio para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^{|I_-|}$. En realidad como se muestra en la demostración, solo es necesario probar esto para el $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{|I_-|}$ particular que se usa en la definición del problema (P1), pero como este $\bar{\lambda}$ se obtiene resolviendo el problema dual a (P0), el costo de obtenerlo resulta mucho (pues es necesario resolver el problema dual a (P0)).

5.2.3. Estudio del problema a través de la caracterización de la semicontinuidad inferior

Los dos resultados que se presentan a continuación son nuevos y se basan en un lema originalmente presentado en [8] que trata con el conjunto R_0 mencionado en el Capítulo 3, se recuerda la definición de R_0:

$$R_0 \doteq \{v \in C^\infty : \ f_{0,q}^\infty(v) = 0, \ (g_i)_{0,q}^\infty(v) = 0 \ \forall i \in J\}.$$

Se recuerda que dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propia, entonces

$$f_q^\infty(v) \leq 0 \iff f_{0,q}^\infty(v),$$

y de esto podemos escribir el conjunto R_0 de la siguiente forma:

$$R_0 = \{v \in C^\infty : \ f_q^\infty(v) \leq 0, \ (g_i)_q^\infty(v) \leq 0 \ \forall i \in J\}.$$

Las direcciones $v \in (\mathrm{dom} f)^\infty$ tales que $f_{0,q}^\infty(v)$ son aquellas en que f es decreciente independiente del punto de inicio, es decir aquellas que cumplen $f(x + tv) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathrm{dom} f$, y todo $t \geq 0$, por lo que el conjunto R_0 representa las direcciones en que todas las funciones involucradas decrecen simultáneamente.

Otra noción importante es la clase $\mathcal{C}$ mencionada en el Capítulo 4 (Definición 3.2).

El siguiente lema será usado para probar los resultados que siguen:

Lema 5.8. [8] *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \ g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ i \in J$, funciones propias, sci y cuasi convexas pertenecientes a $\mathcal{C}$, y $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y cerrado. Suponiendo que $R_0 \subseteq -R_0$, dada una sucesión (x_k) en C tal que las sucesiones $(f(x_k))$ y $(g_i(x_k)), \ i \in J$, son acotadas por arriba, entonces existe $\bar{x} \in C$ y una subsucesión (x_{k_l}) tal que $f(\bar{x}) \leq \varliminf_l f(x_{k_l})$ y $g_i(\bar{x}) \leq \varliminf_l g_i(x_{k_l}), \ i \in J$.*

La demostración de este lema pasa por descomponer la sucesión x_k de la forma

$$x_k = x_k^+ + x_k^-,$$

con $x_k^+ \in R_0$ y $x_k^- \in R_0^\perp$, luego como $x_k^+ \in R_0$, se cumple $g_i(x_k) = g_i(x_k - x_k^-) = g_i(x_k^-)$, tras los cual se procede a verificar que x_k^- esta acotada y por lo tanto tiene un límite subsecuencial, el cual corresponde a $\bar{x}$, de forma similar a lo que se hizo para probar el Lema 5.5.

Usando este lema procederemos a demostrar los siguientes teoremas, que son nuevos en la literatura, aplicando el Lema 5.8, no a (P), sino a un problema definido por la función objetivo f y solo algunas de las restricciones g_i y las restricciones geométricas (por lo que tiene un conjunto factible más grande); o manteniendo todas las restricciones, pero quitando las restricciones geométricas.

Teorema 5.4. *Suponiendo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y cerrado, $\mathrm{dom} f = \mathrm{dom} g_i$ para todo $i \in J$ y $\mu \in \mathbb{R}$. Si existe un subconjunto de índices $I_0 \subseteq I_-$ tal que al definir $I_1 \doteq J \setminus I_0$ y*

$$\tilde{K} \doteq \{x \in C |\ g_i(x) \leq 0\ \forall i \in I_1,\ g_i(x) < 0\ \forall i \in I_0\}$$

se cumplan:

(i) todas las g_i con $i \in I_0$ son convexas,

(ii) tanto f como las g_i con $i \in I_1$ son sci, pertenecen a $\mathcal{C}$, además f es semi estrictamente cuasi convexa y las funciones g_i son cuasi convexas,

(iii) el siguiente cono[2]

$$R_1 \doteq \{v \in C^\infty |\ f_{0,q}^\infty(v) = 0,\ (g_i)_{0,q}^\infty(v) = 0\ \forall i \in I_1\}$$

cumple $R_1 \subseteq -R_1$,

(iv) $\operatorname*{argmin}_K f \cap \tilde{K} \neq \emptyset$.

Entonces $\overline{\psi}(0) = \psi(0)$.

Demostración. Suponiendo que no es así, del Teorema 4.4 existiría un índice i_0 y una sucesión x_k tal que $||x_k|| \to +\infty,\ x_k \in C,\ g_i(x_k) + q_k^i \to +\infty,\ q_k^i \geq 0,\ i \in J,\ i \neq i_0;$ $0 < g_{i_0}(x_k) \to 0, f(x_k) < \mu$ y tal que $\overline{\lim} f(x_k) \neq \mu$ y como $f(x_k) < \mu$ se tendría

$$\overline{\lim} f(x_k) < \mu. \tag{5.7}$$

[2]Se recuerda que se puede reemplazar $(g_i)_{0,q}^\infty(v) = 0$, por $(g_i)_q^\infty(v) \leq 0$ en esta definición.

De (iii) sabemos que R_1 es subespacio, y como tanto $f(x_k)$ como las $g_i(x_l)$ son acotadas, podemos aplicar el Lema 5.8 reemplazando J por I_1 y R_0 por R_1, entonces existe una subsucesión (x_{k_l}) y $\bar{x} \in C$ tal que $f(\bar{x}) \leq \underline{\lim}_l f(x_{k_l})$ y de (5.7), como para toda subsucesión convergente $\lim\limits_{l} f(x_{k_l}) \leq \overline{\lim\limits_{k}} f(x_k)$, se tiene

$$f(\bar{x}) < \mu \tag{5.8}$$

de igual forma, para cualquier $i \in I_1$ se obtiene

$$g_i(\bar{x}) \leq 0. \tag{5.9}$$

Ahora, sean $\tilde{x} \in \operatorname{argmin}_K f \cap \tilde{K}$ y $\lambda \in]0, 1[$, entonces para todo $i \in I_1$ se tiene $g_i(\tilde{x}) \leq 0$ y luego usando (5.9) de la cuasi convexidad se obtiene

$$g_i(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}) \leq \max\{g_i(\bar{x}), g_i(\tilde{x})\} \leq 0, \tag{5.10}$$

además, de la semiestricta cuasi convexidad de f se tiene

$$f(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}) < \max\{f(\bar{x}), f(\tilde{x})\}, \tag{5.11}$$

que junto con (5.8) y $f(\tilde{x}) \in \operatorname*{argmin}\limits_{K}$ implica

$$f(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}) < \mu. \tag{5.12}$$

Finalmente, usando la convexidad de las g_i con $i \in I_0$ se tiene

$$g_i(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}) \leq \lambda g_i(\bar{x}) + (1-\lambda)g_i(\tilde{x}) \tag{5.13}$$

y como $\tilde{x} \in \tilde{K}$, entonces $g_i(\tilde{x}) < 0$ para todos los $i \in I_0$, y $\bar{x} \in \operatorname{dom} g_i$ para las g_i con $i \in I_0$, luego $g_i(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ para $i \in I_1$ y se puede elegir λ suficientemente cerca de 0 tal que

$$g_i(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}) \leq 0 \tag{5.14}$$

para todo $i \in I_0$. Con esta elección de λ, de (5.14) y (5.10) se tiene que $\lambda\bar{x}+(1-\lambda)\tilde{x} \in K$ y de (5.12) $f(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\tilde{x}) < \mu$ lo cual es una contradicción. $\square$

Este teorema tiene el problema de que es difícil verificar la hipótesis (iv) sin calcular $\operatorname*{argmin}_K f$ (en cuyo caso ya se resolvió el problema). El siguiente corolario entrega una forma de verificar que dicha condición se cumple para algunos problemas.

Corolario 5.1. *Suponiendo* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *convexo y cerrado,* $mu \in \mathbb{R}$ *y tanto* f *como las* g_i *con* $i \in j$ *son propias. Si existe un subconjunto de índices* $I_0 \subseteq I_-$ *y definiendo* $I_1 \doteq J \setminus I_0$ *tal que se cumpla lo siguiente:*

(i) todas las g_i *con* $i \in I_0$ *son convexas,*

(ii) tanto f *como las* g_i *con* $i \in I_1$ *son sci, pertenecen a* $\mathcal{C}$ *y son cuasi convexas; además* f *es semi estrictamente cuasi convexa,*

(iii) el siguiente cono

$$R_1 \doteq \{v \in C^\infty |\ f_q^\infty(v) \leq 0,\ (g_i)_q^\infty(v) \leq 0\ \forall i \in I_1\}$$

cumple $R_1 \subseteq -R_1$*,*

(iv) existe $v \in R_1$ *tal que* $(g_i)_q^\infty(v) < 0$ *para cada* $i \in I_0$*.*[3]

Entonces definiendo $\tilde{K}$ *como en el Teorema 5.4, se cumple* $\min_{x \in K} f(x) = \min\{f(x) : g_i(x) \leq 0\ \forall i \in I_1\}$ *y* $\operatorname*{argmin}_{\tilde{K}} f \neq \emptyset$*, luego* $\overline{\psi}(0) = \psi(0)$*.*

Demostración. Primero notamos que bajo estas hipótesis, el problema $\min\{x \in C : g_i(x) \leq 0\ \forall i \in I_1\}$ tiene solución como consecuencia del Corolario 3.1. Sea $\bar{x}$ una de esas soluciones y sea $v \in R_1$ tal que $(g_i)^\infty(v) < \epsilon < 0$ para cada $i \in I_0$ y algún $\epsilon < 0$. Ahora, como suponemos que todas las funciones tienen el mismo dominio efectivo, necesariamente $g_i(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ para todas las $i \in I_0$, luego como las funciones g_i con $i \in I_0$ son convexas se tiene

$$(g_i)^\infty(v) = \sup_{t>0} \frac{g_i(\bar{x} + tv) - g_i(\bar{x})}{t} < \epsilon,$$

entonces

[3] Para este corolario se utiliza la función q-asintótica, pero, tal como se menciona en la Proposición 3.4, puede ser reemplazada por la función asintótica de escala cero en la definición de R_1; no así para el punto (iv), donde la función q-asintótica entrega información adicional.

$$g_i(\bar{x}+tv) - g_i(\bar{x}) < \epsilon t, \ \forall t > 0,$$

entonces, para algún t_0 suficiente mente grande, se tiene $g_i(\bar{x}+t_0v) < 0$ para cada $i \in I_0$. Más aún, como $v \in R_1$, para $i \in I_1$ se tiene $g_i(\bar{x}+tv) = g_i(\bar{x}) \leq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y también $\bar{x}+tv \in C$ para todo $t \in \mathbb{R}$, en particular $g_i(\bar{x}+t_0v) \leq 0$, luego $\bar{x}+t_0v \in \tilde{K}$ con $\tilde{K}$ definido como en el Teorema 5.4, además

$$f(\bar{x}+t_0v) = f(\bar{x}) = \min\{x \in C : \ g_i(x) \leq 0 \ \forall i \in I_1\} \leq \min\{f(x) : \ x \in K\}$$

y como $\bar{x}+t_0 \in \tilde{K} \subseteq K$, necesariamente $\mu = f(\bar{x}+t_0v)$ y $\bar{x}+t_0v \in \operatorname*{argmin}_K f \cap \tilde{K}$ y luego aplicando el Teorema 5.4 se completa la demostración. $\square$

Para este resultado es necesario utilizar la función q-asintótica (que corresponde a la función asintótica normal para las g_i con $i \in I_0$ pues son convexas), ya que decir que $(g_i)_q^\infty(v) < 0$ es una condición más fuerte que pedir que $(g_i)_{0,q}^\infty(v) = 0$, para verificar esto es suficiente considerar la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$, que al ser constante cumple $h_{0,q}^\infty(v) = 0$ para cualquier $v \in \mathbb{R}$, sin embargo $h_q^\infty(v) = 0$ y por lo tanto no se verifica (iv). Una dirección tal que $h_q^\infty(v) < 0$ corresponde a una dirección donde la función h decrece de forma a lo menos lineal para cualquier punto de partida, lo cual en muchos casos es una condición fuerte.

Un caso donde se puede verificar es para $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cuadrática y convexa, pues dada $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por

$$g_i(x) = x^\top Bx + b^\top x + \beta,$$

entonces si $v \in \ker B$ y $b^\top v < 0$, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$

$$(g_i)_q^\infty(v) = g_i^\infty(v) = \sup_{t>0} \frac{(x+tv)^\top B(x+tv) + b^\top(x+tv) + \beta - (x^\top Bx + b^\top x + \beta)}{t}$$

y como $v \in \ker B$, esto se reduce a

$$g_i^{\infty}(v) = \sup_{t>0} \frac{tb^{\top}v}{t} = b^{\top}v < 0.$$

El Ejemplo 5 de la sección siguiente corresponde a un problema donde se puede aplicar este corolario.

Por otro lado, el Ejemplo 4 de la sección siguiente es un problema donde si bien no se puede aplicar este corolario, si es válido el Teorema 5.4, es decir, este corolario no contiene todos los casos donde es válido el teorema.

Otra aplicación del Lema 5.8 resulta de estudiar el conjunto de restricciones geométricas C, y verificando que ocurre cuando las direcciones v tales que las funciones asintóticas de escala cero se anulan tanto en v como en $-v$ están en C^{∞}. Para el problema (P) con $C \neq \mathbb{R}^n$ como antes, definimos los siguientes conjuntos:

$$K_2 \doteq \{x \in \mathbb{R}^n |\ g_i(x) \leq 0\ \forall i \in J\},$$

$$R_2 \doteq \{v \in \mathbb{R}^n |\ (g_i)_{0,q}^{\infty}(v) = 0\ i \in J\}$$

claramente $K = K_2 \cap C$ y el conjunto R_0 del Teorema 4.6 cumple $R_0 = R_2 \cap C^{\infty}$.

Teorema 5.5. *Consideramos el problema* (P) *con* $f,\ g_i\ i \in J$ *sci, cuasi convexas y en* $\mathcal{C}$*,* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *convexo y cerrado y* $\mu \in \mathbb{R}$*. Si además suponemos que* $K_2 \subseteq K + R_2$ *y* $R_2 \subseteq -R_2$*, entonces la función valor* ψ *de* (P) *es sci en cero,* $\min\limits_{x \in K} f(x) = \min\limits_{x \in K_2} f(x)$ *y* $\operatorname*{argmin}\limits_{K} f \neq \emptyset$*.*

Demostración. Del Teorema 4.4, es suficiente verificar que para cada $i_0 \in J$ y $x_k \in C$ tal que $g_i(x_k) + q_k^i \to 0,\ q_k^i \geq 0,\ i \in J,\ i \neq i_0;\ 0 < g_{i_0}(x_k) \to 0$ y $f(x_k) < \mu$ se tiene $\overline{\lim}_k f(x_k) = \mu$. Vemos que para una sucesión como la anterior $\{f(x_k)\}$ y $\{g_i(x_k)\}$ son acotadas por arriba.

De esto podemos aplicar el Lema 5.8 reemplazando R_0 por R_2 y C por $\mathbb{R}^n$, luego existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\bar{x}) \leq \underline{\lim}_k f(x_k) \leq \overline{\lim}_k f(x_k) \leq \mu$, y $g_i(\bar{x}) \leq \underline{\lim}_k g_i(x_k) \leq \overline{\lim}_k g_i(x_k) \leq 0$, para todo $i \in J$. Sin embargo $\bar{x}$ no necesariamente pertenece a C, pero $g_i(\bar{x}) \leq 0$, para todo $i \in J$, entonces $\bar{x} \in K_2$ y podemos usar $K_2 \subseteq K + R_2$ y $R_2 \subseteq -R_2$, de donde existen $\bar{y} \in K$ y $v \in R_2$ tales que $\bar{x} = \bar{y} + v$, ahora podemos aplicar la Proposición 3.3 y se tiene que $\mu \geq f(\bar{x}) = f(\bar{y}+v) = f(\bar{y}),\ 0 \geq g_i(\bar{x}) = g_i(\bar{y}+v) = g_i(\bar{y})$, de donde $\bar{y} \in K$ y $\mu = f(\bar{y}) = \overline{\lim}_k f(x_k)$, que es lo que se buscaba.

Para verificar que $\min\limits_{x\in K} f(x) = \min\limits_{x\in K_2} f(x)$, es suficiente notar que el problema $\min\limits_{x\in K_2} f(x)$ tiene solución, pues R_2 es subespacio y podemos aplicar el Corolario 3.1. Sea $\bar{x}$ que minimiza f sobre K_2, entonces como $K_2 \subseteq K + R_2$, $\bar{x} = \bar{y} + v$ para algunos $\bar{y} \in K$ y $v \in R_2$, luego $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$, y como $K \subseteq K_2$, necesariamente $f(\bar{y}) = \min\limits_{x\in K} f(x)$.

Para probar que $\operatorname*{argmin}\limits_K f \neq \emptyset$, es suficiente tomar una sucesión minimizante $x_k \in K$ y usar el Lema 5.8 igual que antes con R_2 y K_2, de esta forma se obtiene que existe $\bar{x} \in K_2$ tal que $f(\bar{x}) \leq \mu$ y luego usamos $\bar{x} = \bar{y} + v$ con $\bar{y} \in K,\ v \in R_2$, para obtener $f(\bar{y}) \leq \mu$, $\bar{y} \in K$, lo que prueba $\bar{y} \in \operatorname*{argmin}\limits_K f$.

$\square$

El siguiente ejemplo muestra como se puede aplicar el Teorema 5.5 a problemas con $C \neq \mathbb{R}^n$, usando que si R_2 es subespacio, probar que $K_2 \subseteq K + R_2$ se puede hacer tomando un elemento arbitrario $x \in K_2$ y sumándole un elemento de $v \in R_2$ de forma que $x + v \in K$, entonces $x = x + v - v \in K + R_2$.

Ejemplo 1. *Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ y $g(x) = \sqrt{|x_1 - x_2|} - 1$, para $x = (x_1, x_2)$, f es convexa y $g \in \mathcal{C}$ es semiestrictamente cuasi convexa y continua. Estudiamos el problema*

$$\begin{aligned} \mu = \min \quad & f(x) \\ \textit{s.a} \quad & g(x) \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^2_+. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Vemos que como f es cuadrática homogénea y convexa, $f^\infty_{0,q}(v) = 0$ si y solo sí $v \in \ker A$, con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matriz simétrica tal que $f(x) = x^\top Ax$, dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde $\ker A = \mathbb{R}(1,1)$ y además, dado $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$g(x_1+t,x_2+t)=\sqrt{|x_1+t-x_2-t|}-1=\sqrt{|x_1-x_2|}-1=g(x_1,x_2),\ \forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

con lo que $v=(t,t)\in R_2$ y $R_2=\mathbb{R}(1,1)$ es claramente subespacio, además es directo que $C^\infty=C=\mathbb{R}^2_+$, con lo que $R_0=\mathbb{R}_+(1,1)$. Y notamos que dado $(x_1,x_2)\in K_2$, se tiene que

$$0\geq g(x_1,x_2)=g(x_1+t,x_2+t),\ \forall t\in\mathbb{R},$$

luego para t suficientemente grande $(x_1+t,x_2+t)\in\mathbb{R}^2_+\cap K_2=K$, es decir, $K_2\subseteq K+R_2$, con lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 5.5, y $\operatorname*{argmin}_K f\neq\emptyset$ y $\overline{\psi}(0)=\psi(0)$.

5.3. Comparación de los resultados

En esta sección se comparan los resultados anteriores con el objetivo de mostrar que ninguno generaliza a algún otro, también se compara con el Teorema 4.6 y el Teorema 5.6 mostrado a continuación, con el objetivo de verificar que los resultados obtenidos son realmente nuevos comparándolos con resultados similares anteriores. En lo que respecta al Teorema 5.4, solo nos preocuparemos de su respectivo corolario, el Corolario 5.1, pues en otros casos no se tiene (hasta ahora) una forma eficiente de verificar la hipótesis $\operatorname*{argmin}_K f\cap\tilde{K}\neq\emptyset$, a excepción de encontrar $\operatorname*{argmin}_K f$, en cuyo caso el problema ya está resuelto.

Como se mencionó antes, el Teorema 5.3 presenta problemas en su aplicación, por lo que no se considerará este teorema.

Primero consideramos el Teorema 5.1.

Este resultado mejora el resultado de R. T. Rockafellar del 1971 [13] y sigue una técnica muy similar, otro resultado similar y que mejora [13] se presenta en su forma original a continuación. Este resultado está extraído del libro *Asymptotic cones and functions in optimization and variational inequalities* de los autores Alfred Auslender y Marc Teboulle, pero su versión original se debe a B. Kummer:

Teorema 5.6. [1] *Si las funciones f, g_i con $i \in J$ son convexas a valores reales y se cumplen las siguientes hipótesis:*

(i) Para cada $1 \leq i \leq r$ con $r \geq 1$, las funciones g_i son débilmente analíticas.

(ii) Existe una solución factible $x_0 \in K$ tal que $g_i(x_0) < 0$ para todo $i \in \{r+1, \ldots, m\}$.

(iii) μ es finito.

Entonces la función ψ es sci en cero y por lo tanto no hay gap de dualidad para el problema (P)*.*

Primero veamos que estas hipótesis se pueden simplificar usando la notación introducida en este capítulo. Se puede cambiar (i) y (ii) por g_i con $i \in I_=$ son débilmente analíticas, pues en ese caso del Lema 5.1 se tiene que todas las funciones que no tienen índice en $I_=$ cumplen (ii), y se sabe que $I_=$ es maximal en el sentido que no se pueden agregar índices tales que exista una solución factible que se satisfaga con desigualdad estricta para una nueva restricción, luego al escribir las hipótesis de esta forma se pide que la menor cantidad de funciones g_i deban ser débilmente analíticas.

Es claro que el Teorema 5.1 entrega información nueva, pues permite funciones con valor $+\infty$ mientras todas las funciones involucradas tengan el mismo dominio efectivo, pero además se tiene que la condición $\mathfrak{C}$ es menos que pedir débilmente analítica. Un ejemplo de función que cumple $\mathfrak{C}$ pero no es débilmente analítica se presentó en la Sección 5.1.

Luego cualquier problema (P) que incluya una restricción de la forma $g_i(x) \leq 0$ con g_i definida como en el ejemplo, no puede ser tratado por el Teorema 5.6, pero si todas las funciones que definen (P) son convexas y si las otras funciones g_i con $i \in I_=$ que definen restricciones también satisfacen $\mathfrak{C}$, sí podría ser tratado por el Teorema 5.1.

Se recuerda que las direcciones $v \in \mathbb{R}^n$ tales que $f_{0,q}^{\infty}(v) = 0$, son las direcciones en las que f decrece. Los ejemplos están construidos para que las funciones asintóticas sean fáciles de calcular y en la mayoría de los casos esta noción será suficiente.

Se recuerda las definición de los distintos conos que deben ser subespacios para los distintos resultados:

Para el Teorema 4.6:

$$R_0 = \{v \in C^\infty |\ f_{0,q}^\infty(v) = 0,\ (g_i)_{0,q}^\infty(v) = 0\ \forall i \in J\}.$$

Para el Corolario 5.1:

$$R_1 \doteq \{v \in C^\infty |\ f_{0,q}^\infty(v) = 0,\ (g_i)_{0,q}^\infty(v) = 0\ \forall i \in I_1\}$$

para algún $I_0 \subseteq I_-$ y $I_1 = J \setminus I_0$.

Para el Teorema 5.5:

$$R_2 = \{v \in \mathbb{R}^n |\ f_{0,q}^\infty(v) = 0,\ (g_i)_{0,q}^\infty(v) = 0\ \forall i \in J\}.$$

El primer problema que se muestra fue la motivación de este trabajo, pues pese a su simpleza, no se puede estudiar por el Teorema 4.6.

Ejemplo 2. *Consideramos el problema siguiente*

$$\begin{aligned} \min \quad & 1 \\ & \exp(x) - 1 \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

aquí f es la función constante uno y $g_1(x) = \exp(x) - 1$ es convexa.

Este problema cumple la condición de Slater, pues $g_1(-1) < 1$, por lo que el problema tiene dualidad fuerte. Sin embargo, para este problema no se puede aplicar el Teorema 4.6, ya que al calcular el conjunto R_0 se obtiene

$$R_0 = -\mathbb{R}_+,$$

el cual no es subespacio.

Este problema, pese a ser trivial, muestra que el Teorema 4.6 no rescata todos los casos en que la función valor es sci.

Veamos que ocurre con los nuevos resultados introducidos en el capítulo anterior:

Como la única restricción del problema puede ser satisfecha con desigualdad estricta, entonces $I_- = \{1\}$, luego $I_= = \emptyset$ y por lo tanto se satisfacen las hipótesis del Teorema 5.1 y también las del Teorema 5.2. Sin embargo, no se satisfacen la hipótesis del Corolario 5.1, ya que, como se menciono antes, si consideramos $I_0 = \emptyset$ y $I_1 = \{1\}$, se obtiene $R_1 = R_0$ que no es subespacio, por otro lado si $I_0 = \{1\}$ y $I_1 = \emptyset$, $R_1 = \mathbb{R}$, luego necesitamos encontrar v tal que $(g_1)_q^\infty(v) < 0$, sin embargo g_1 es creciente en x, y si consideramos $v = -1$ (se puede usar cualquier $v < 0$), se tiene

$$(g_1)_q^\infty(v) = \sup_{t>0} \frac{\exp(\bar{x} - t) - \exp(\bar{x})}{t},$$

para cualquier $\bar{x} \in \mathbb{R}$ (pues g es convexa), pero si $\bar{x} = 0$ y $t \to +\infty$, entonces $\exp(\bar{x} - t) = \exp(-t) \to 0$ y $\exp(\bar{x}) = 1$, por lo que $(g_1)_q^\infty(v) = 0$ (no puede ser mayor que cero, pues $\exp(x - t) \leq \exp(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $t > 0$) y no se puede aplicar el corolario.

Como el conjunto geométrico es $\mathbb{R}$ no tiene diferencia aplicar el Teorema 5.4 con el Teorema 4.6, pues $R_0 = R_2$ y $K_2 = K$.

Ahora veamos que existen problemas convexos que pueden ser estudiados por el Teorema 5.1 pero no por los otros resultados mencionados anteriormente.

Se considera el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3. *Sean las siguientes funciones convexas, $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:*

$$f(x) = \begin{cases} x_2^2 - x_1, & \textit{si } (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \\ +\infty, & \textit{en otros casos}, \end{cases}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} \exp(x_1) - 1, & \textit{si } (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \\ +\infty, & \textit{en otros casos}, \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} x_2^2, & \textit{si } (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \\ +\infty, & \textit{en otros casos}, \end{cases}$$

para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, y definimos el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g_1(x) \leq 0 \\ & g_2(x) \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Primero notamos que todas las funciones involucradas tienen el mismo dominio efectivo $\mathbb{R}\times[0,1]$ y procedemos a buscar las direcciones v en que las funciones decrecen (i.e. las direcciones tales que $f_{0,q}^{\infty}(v) = 0$ y $(g_i)_{0,q}^{\infty}(v) = 0,\ i = 1,2$), recordando que estas direcciones deben estar en $(\mathrm{dom} f)^{\infty} = \mathbb{R} \times \{0\}$ y solo nos interesan los v de la forma $v = (v_1, 0)$.

De lo anterior, como f decrece estrictamente como función de x_1, se tiene que $f_{0,q}^{\infty}(v) = 0$ si y solo si $v \in -\mathbb{R}_+ \times \{0\}$.

De forma similar, como g_1 es estrictamente creciente como función de x_1, en conjunto con su dominio efectivo implica $(g_1)_{0,q}^{\infty}(v) = 0$ si y solo si $v \in -\mathbb{R}_+ \times \{0\}$.

Como g_2 no depende de x_1 luego $(g_2)_{0,q}^{\infty}(v) = 0$ si y solo si $v \in \mathbb{R} \times \{0\}$.

Con esto, se conoce el conjunto R_0 del Teorema 4.6:

$$R_0 = -\mathbb{R}_+ \times \{0\},$$

el cual no es subespacio y por tanto no se puede aplicar dicho teorema.

Por otro lado, es directo que si queremos aplicar el Teorema 5.4, se necesitaría un subconjunto de $I_1 \subseteq J = \{1,2\}$ tal que

$$R_1 = \{v \in \mathbb{R}^n |\ f_{0,q}^{\infty}(v) = 0,\ (g_i)_{0,q}^{\infty}(v) = 0\ \forall i \in I_1\}$$

sea subespacio, pero esto no es posible, pues

$$f_{0,q}^{\infty}(-1,0) = (g_1)_{0,q}^{\infty}(-1,0) = (g_2)_{0,q}^{\infty}(-1,0) = 0,$$

sin embargo $f_{0,q}^{\infty}(1,0) = +\infty$, entonces, para cualquier $I_1 \subseteq J$, $v = (-1,0) \in R_1$ y $-v \notin R_1$.

Luego este problema solo puede ser tratado por el Teorema 5.1.

El Teorema 5.2 se puede utilizar para algunos problemas con algunas restricciones cuasi convexas, por lo que directamente no es necesario compararlo con Teorema 5.1, así que solo nos preocuparemos de los otros resultados para problemas cuasi convexos.

Ejemplo 4. *Definimos* $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x) = x_2^2$, $g_1(x) = \sqrt{|x_2|}$ *y* $g_2(x) = \exp(x_1) - 1$*, para* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$*, y consideramos el siguiente problema:*

$$\begin{aligned} \mu = \min \quad & f(x) \\ & g_1(x) \leq 0 \\ & g_2(x) \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{5.18}$$

En este ejemplo se tiene que f y g_2 son convexas, además $\bar{x} = (-1, 0)$ cumple $g_1(\bar{x}) = 0$, $g_2(x) < 0$, además $\sqrt{|x_2|} \geq 0$ para todo $x_2 \in \mathbb{R}$, por lo que $I_= = \{1\}$ y $I_- = \{2\}$. Por otro lado, g_1 es constante solo a lo largo de las direcciones en $\mathbb{R} \times \{0\}$, por lo que g_1 es débilmente analítica, además g_1 es semiestrictamente cuasi convexa. Luego este problema cumple las hipótesis del Teorema 5.2 y ψ es sci en cero.

Por otro lado, buscamos las direcciones de decrecimiento de las funciones involucradas. Al igual que en el ejemplo anterior se tiene que f y g_1 dependen solo de x_2, además si $|x_2| \to +\infty$ entonces $f(x_1, x_2) \to +\infty$ y $g_1(x_1, x_2) \to +\infty$, luego $f_{0,q}^{\infty}(v) = 0$ si y solo si $v \in \mathbb{R} \times \{0\}$, lo mismo para $(g_1)_{0,q}^{\infty}$.

Por otro lado, g_2 solo depende de x_1, y además es creciente estrictamente como función de x_1, luego $(g_2)_{0,q}^{\infty}(v) = 0$ si y solo si $v \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Luego si queremos aplicar el Teorema 4.6, se tiene que

$$R_0 = \mathbb{R}_+ \times \{0\},$$

el cual no es subespacio y no se cumplen las hipótesis.

Por otro lado, si queremos aplicar el Corolario 5.1, ocurre que si $v = (-1, 0)$,

$$(g_2)_q^{\infty}(v) = \sup_{t>0} \frac{g_2(x + tv) - g_2(x)}{t}$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}^2$. En particular usando $\bar{x} = (0, 0)$, se obtiene

$$(g_2)_q^\infty(v) = \sup_{t>0} \frac{\exp(-t) - \exp(0)}{t}$$

y claramente, cuando $t \to +\infty$, $\exp(-t) \to 0$ y $\frac{\exp(-t)-\exp(0)}{t} \to 0$. Por lo que no se puede aplicar el corolario.

Es importante notar que si bien no se puede aplicar el Corolario 5.1, si es válido el Teorema 5.4, pues es suficiente considerar $\bar{x} = (-1, 0)$ y se obtiene que para cualquier $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(\bar{x}) = 0 \leq x_2^2 = f(x)$, por lo que $\bar{x}$ minimiza a f sobre $\mathbb{R}^2$. Además $g_1(\bar{x}) = 0$ y $g_2(\bar{x}) = \exp(-1) - 1 < 0$, con lo que $\bar{x}$ es factible y por tanto óptimo en K. Luego al tomar $I_0 = \{2\}$, se satisface $\bar{x} \in \tilde{K}$. Pero esto solo se puede verificar una vez resulto el problema, en cuyo caso no es importante para verificar si ψ es sci en cero. Esto prueba que el Corolario 5.1 no incluye todos lo casos para los que se cumplen las hipótesis del Teorema 5.4.

Veamos ahora un ejemplo donde se puede aplicar el Corolario 5.1, pero no los otros resultados:

Ejemplo 5. *Consideramos la siguiente función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}$, semiestrictamente cuasi convexa definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x_1}, \ \textit{si}\ x_1 \geq 0, \\ -x_1, \ \textit{si}\ x_1 < 0, \end{cases}$$

para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, y las funciones convexas $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por $g_1(x) = x_1^2 + x_2 - 1$ y $g_2(x) = \exp(x_1) - 1$. Consideramos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \mu = \min \quad & f(x) \\ & g_1(x) \leq 0 \\ & g_2(x) \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Notamos que tanto f como g_2 no dependen de x_2, además ambas son monótonas estrictas en x, f decreciente y g_2 creciente, luego $f_{0,q}^\infty(v) = (g_2)_{0,q}^\infty(v) = 0$ si y solo si

$v = (v_1, v_2) \in \{0\} \times \mathbb{R}$. Por otro lado, g_1 es creciente en la dirección $(0, 1)$, por lo que si quisiéramos aplicar el Teorema 4.6 se tendría $R_0 = \{0\} \times \mathbb{R}_+$ que no es subespacio. Sin embargo, si aplicamos el Corolario 5.1 con $I_0 \doteq \{1\}$ se tiene que $R_1 = \{0\} \times \mathbb{R}$ el cual es subespacio. Además si tomamos $v = (0, -1)$, se tiene

$$(g_1)_q^\infty(v) = g_1^\infty(v) = \sup_{t>0} \frac{g_1((0,0) + t(0,-1)) - g_1(0,0)}{t} = \sup_{t>0} \frac{-t}{t} = -1,$$

luego $v \in R_1$ y $(g_i)_q^\infty(v) < 0$ para todos los $i \in I_0 = \{1\}$. Con esto se verifican las hipótesis del Corolario 5.1 y $\overline{\psi}(0) = \psi(0)$.

Por el hecho que la función objetivo no es convexa, este problema no puede ser tratado por el Teorema 5.2. Por otro lado, como $C = \mathbb{R}^2$, resulta igual tratarlo por el Teorema 4.6 que por el Teorema 5.5.

Para verificar que el Teorema 5.5 se puede aplicar en casos en que los otros resultados no, recordamos el Ejemplo 1

$$\begin{aligned} \mu = \min \quad & x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \\ & \sqrt{|x_1 - x_2|} - 1 \leq 0 \\ & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2, \end{aligned}$$

Anteriormente se mostró usando el Teorema 5.5 que este problema tiene función valor sci en cero, por lo que ahora solo verificaremos que no se satisfacen las hipótesis de los otros resultados.

Como este ejemplo tiene una sola restricción que es semiestrictamente cuasi convexa y se puede satisfacer con desigualdad estricta (por ejemplo en $(0, 0) \in K$), no satisface las hipótesis del Teorema 5.2 y solo podría ser tratado por el Teorema 4.6 o el Corolario 5.1, pero ambas formas resultan iguales, pues para tratarlo por medio del Corolario 5.1, se debe elegir $I_0 = \emptyset$ por la necesidad de que las funciones con índice en I_0 sean convexas. Pero en ese caso, tal como se obtuvo antes, $R_2 = \mathbb{R}(1, 1)$ y además $R_1 = R_0 = C^\infty \cap R_2 = \mathbb{R}_+(1, 1) \nsubseteq -R_0$, luego el problema no cumple las hipótesis del teorema ni del corolario.

Los ejemplos anteriores prueban que ninguno de los resultados generaliza a ningún otro.

Otro aspecto interesante a considerar, es el hecho que los dos últimos resultados y también el Teorema 4.6 tratan casos donde el problema tiene mínimo, no así el Teorema 5.1 y el Teorema 5.2, los cuales pueden ser aplicados a problemas donde no hay mínimo, como el ejemplo siguiente:

Ejemplo 6. *Sean $f, g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \exp(x_1)$ y $g_1(x) = |x_2|$, con $x = (x_1, x_2)$, y definimos el problema*

$$\begin{aligned} \mu = \min \quad & f(x) \\ & g_1(x) \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Este problema resulta trivial de resolver, pues $f(x) = \exp(x_1) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, y si $x_1 \to -\infty$, entonces $f(x_1, 0) \to 0$ y más aún, $g(x_1, 0) = 0 \leq 0$, luego $(x_1, 0) \in K$. Es decir, el ínfimo del problema es cero, pero no se alcanza. Aquí, g_1 es débilmente analítica y tanto f como g_1 son convexas, por lo que se pueden aplicar los teoremas 5.1 y 5.2 para concluir que no hay gap de dualidad (en realidad hay dualidad fuerte), sin embargo para este problema no se pueden aplicar los otros resultados.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusión

A través de los resultados obtenidos se ha logrado probar nuevos casos de problemas en los que se cumple que ψ es sci o hay gap de dualidad cero, lo que continúa mostrando que las técnicas de análisis asintótico son útiles para estudiar las propiedades de dualidad de problemas no necesariamente convexos.

Estos resultados muestran también que separar las restricciones en dos tipos, es una buena forma de incluir más casos en los que la función valor es sci, ya que, tal como muestra el Ejemplo 2, hacer un estudio solo a través de las funciones asintóticas causa que no se aprovechen todas las buenas propiedades, como la condición de Slater, lo que implica que no siempre es la mejor alternativa.

Con el análisis realizado se comprende un poco mejor las ventajas y desventajas de utilizar el análisis asintótico para tratar problemas por medio de la teoría de dualidad Lagrangiana, en particular el Teorema 5.5 nos muestra que puede ser usada para tratar un problema con restricciones geométricas y tratarlas de forma distinta a solo considerar las direcciones en C^{∞}. La técnica de hacer la distinción entre las g_i con $i \in I_{-}$ e $i \in I_{=}$ permite extraer más información y así abordar mejor el problema. A pesar de esto, los resultados que se obtuvieron aquí aún resultan limitados, pues como se explicó, el Teorema 5.4 no logra generalizar del todo al Teorema 4.6, pues requiere que la función objetivo sea semiestrictamente cuasi convexa en lugar de solo cuasi convexa y más aún, no se obtuvo un resultado que sea más general que los demás para unificar todo, y generalizar este teorema era uno de los objetivos.

6.2. Trabajo futuro

Como se discutió anteriormente, no se obtuvo un resultado que generalice a los demás. Por lo que el primer objetivo será tratar de obtener un resultado que implique los demás.

Una forma de expandir los resultados obtenidos sería estudiar más las hipótesis del Teorema 5.4, en particular más casos donde se puede asegurar que $\operatorname*{argmin}_K f \cap \tilde{K} \neq \emptyset$, pues como se muestra en el Ejemplo 3, hay casos que no son cubiertos por el Corolario 5.1.

Por otro lado, el otro punto que no se ha completado es tratar el problema permitiendo que las funciones g_i con $i \in I_-$ sean no convexas, lo cual se sospecha que se podría tratar con funciones semiestrictamente cuasi convexas, pues si las funciones g_i son semiestrictamente cuasi convexa y sci, y existe $\bar{x}$ tal que $g_i(\bar{x}) < 0$ para todos los $i \in I$ relevantes, entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \ g_i(x) < 0 \ \forall i \in I\}$ resulta abierto no vacío, que es uno de los puntos necesarios en la demostración del Teorema 5.2.

Bibliografía

[1] AUSLENDER, A., TEBOULLE, M. *Asymptotic cones and functions in optimization and variational inequalities*, Springer, (2003).

[2] BAZARAA, M., JARVIS, J. AND SHERALI, H. *Linear Programming and network flows (4th edition)*, Wiley, (2009).

[3] BAZARAA, M., SHERALI, H. AND SHETTY, C. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms (3rd edition)*, Wiley-Interscience, (2006).

[4] FAN, K., GLICKSBERG, I. AND HOFFMAN, A. *Systems of inequalities involving convex functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, 8 (1957), pp. 617-622.

[5] FLORES-BAZÁN, F. *Existence theorems for generalized noncoercive equilibrium problems: the quasi-convex case*, SIAM J. Optim., 11 (2000) pp. 675-690.

[6] FLORES-BAZÁN, F., ECHEGARAY, W., FLORES-BAZÁN, F. AND OCAÑA, E. *Primal or dual strong-duality in nonconvex optimization and a class of quasiconvex problems having zero duality gap*, J. Glob. Optim., 69 (2017), pp. 823-845.

[7] FLORES-BAZÁN, F., FLORES-BAZÁN AND F., VERA, C. *Maximizing and minimizing quasiconvex functions: related properties, existence and optimality conditions via radial epiderivatives* J. Glob. Optim., 63 (2015) pp. 99-123.

[8] FLORES-BAZÁN, F. AND HADJISAVVAS, N. *Zero-scale asymptotic functions and quasiconvex optimization*, J. of Convex Analysis, 26 (2019), Por aparecer.

[9] FLORES-BAZÁN, F., HADJISAVVAS, N., LARA, F. AND MONTENEGRO, I. *First and second-order asymptotic analysis with applications in quasiconvex optimization*, J. Optim. Theory Appl., 170 (2016), pp. 372-393.

[10] FLORES-BAZÁN, F., JOURANI, A. AND MASTROENI, G.*On the convexity of the value function for a class of nonconvex variational problems: Existence and optimality conditions* SIAM J. Control Optim., 52 (2014) pp. 3673-3693.

[11] FRENK, J. AND KASSAY, G. *On classes of generalized convex functions. Gordan-Farkas type theorems, and Lagrangian duality*, J. Optim. Theory Appl., 102 (1999), pp. 315-343.

[12] HADJISAVVAS, N., LARA, F. AND MARTÍNEZ-LEGAZ, J. *A quasiconvex asymptotic function with applications in optimization*, J. Optim. Theory Appl., 180 (2019), pp. 170-186.

[13] ROCKAFELLAR, R. *Convex Analysis*, Princeton University Press, (1970).

[14] ROCKAFELLAR, R. *Ordinary convex programs without a duality gap*, J. Optim. Theory Appl., 7 (1971), pp. 143-148.

[15] ROCKAFELLAR, R. *Some convex programs whose duals are linearly constrained*, J. Optim. Theory Appl., 7 (1971), pp. 143-148.

[16] TSENG, P. *Some convex programs without a duality gap*, Math. Program., 116 (2009), pp. 553-578.