



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

# Estudio de la pre-expansividad en una familia de autómatas celulares en dimensión 2

*Memoria para optar al título de Ingeniera Civil Matemática*

Isabel Camila Donoso Leiva

24 de junio de 2021  
CONCEPCIÓN, CHILE



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>4</b>
2.1. Definiciones y propiedades básicas . . . . .	4
2.2. Pre-expansividad . . . . .	7
2.3. Álgebra de las operaciones <i>mod</i> y <i>floor</i> . . . . .	9
<b>3. Autómata de Multiplicación y Propiedades</b>	<b>10</b>
3.1. Definición en dos dimensiones . . . . .	11
3.2. Propiedades del AC . . . . .	12
<b>4. Simulaciones</b>	<b>15</b>
4.1. $k = 3$ y $k' = 2$ . . . . .	15
4.2. $k = 5$ y $k' = 2$ . . . . .	19
4.3. $k = 7$ y $k' = 2$ . . . . .	20
4.4. $k = 5$ y $k' = 3$ . . . . .	22
4.5. $k = 9$ y $k' = 4$ . . . . .	24
<b>5. En dirección hacia la Pre-expansividad</b>	<b>28</b>
5.1. Generalización de resultados en una dimensión . . . . .	28
5.2. Caso $ \text{diff}^0(c, d)  = 1$ . . . . .	32
5.3. $k' = 2$ , $k$ impar. . . . .	39
5.4. Estudio del caso $k = 3$ y $k' = 2$ . . . . .	43
<b>6. Conclusiones</b>	<b>50</b>
<b>7. Referencias</b>	<b>51</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Un Autómata Celular (AC) es un sistema dinámico discreto y su evolución a lo largo del tiempo está definida por una regla local. Su dinámica se desarrolla sobre un espacio discreto (también llamado espacio subyacente), compuesto por celdas (o células) que conforman una red. Partiendo de una configuración inicial, todas las celdas tienen un estado, el cual puede tomar cualquier valor dentro de un conjunto finito.

La regla local aplicada a una celda considera un conjunto de células vecinas a dicha celda, llamada Vecindad. Por lo general, la vecindad se compone de las células más cercanas a la celda y su tamaño y distribución puede variar de un autómata a otro. Esto es, diferentes redes inducen a distintas vecindades.

En la década de 1940 John Von Neumann introdujo los autómatas celulares, con el objetivo de encontrar un modelo computacional capaz de auto-reproducirse. Su AC era bidimensional con vecindad de tamaño 4 y contaba con 29 estados, y era capaz de simular y reproducir cualquier máquina de Turing.[4]

Desde entonces se ha seguido desarrollando la teoría sobre autómatas celulares [2, 3, 5, 6] encontrándose relaciones con diferentes áreas de la matemática. Desde el punto de vista de sistemas dinámicos y sistemas simbólicos, se encuentra que los AC son ejemplos de sistemas caóticos que coinciden con nociones desarrolladas en un contexto más general. Además, las características propias que pueden tener los autómatas lleva a querer refinar más la teoría.

Es así como, por ejemplo, la estructura del espacio donde viven los autómatas naturalmente permite definir la noción de pares de configuraciones asintóticas, esto es, dos configuraciones que sólo difieren en un número finito de puntos. La línea de investigación que sigue este trabajo de tesis busca averiguar cómo cambia el comportamiento de un autómata cuando se hacen cambios sobre su configuración inicial. Por ejemplo, determinar si un AC cuenta con la propiedad de expansividad positiva.

Existe mucha teoría sobre la expansividad positiva en una dimensión [8, 3], y un resultado general de no-existencia para cualquier otro caso [9,10]. En el caso unidimensional, la expansividad positiva es equivalente a ser conjugado a un one-sided subshift de tipo finito [11]; pero sucede que fuera de ejemplos lineales y bi-permutativos, se conocen pocas técnicas de construcción que produzcan AC positivamente expansivos [12]. Además, hasta el momento no se sabe si la expansividad positiva es una propiedad decidible, si bien lo es para algunos AC algebraicos [13,14]. Más aun, la expansividad positiva es una noción muy fuerte, que no existe para autómatas que son reversibles [15].

Gajardo, Nesme y Theysier definieron una generalización de la propiedad de expansividad de Autómatas Celulares [1]. Esta generalización es llamada pre-expansividad y consiste en la propiedad de ser positivamente expansivo cuando las configuraciones que se consideran sólo se diferencian en un número finito de celdas. Cuando definieron esta propiedad, dieron como ejemplo una familia de

autómatas en una dimensión que lo cumple.

Los resultados mostraron que la pre-expansividad es diferente a la expansividad en dimensión uno, sin embargo, los resultados no son válidos para dimensiones superiores. Por ejemplo, si un autómata es lineal, entonces no es pre-expansivo, y hasta la fecha no se ha podido encontrar un autómata en dos dimensiones (o más) que sea pre-expansivo.

La familia de autómatas que fue usada en una dimensión se basa en la idea de multiplicar por un entero  $k$  en la base  $m = k \cdot k'$ . Esta familia contiene ejemplos de autómatas expansivos a la izquierda, y que además generan todos los patrones posibles en su traza, lo que conecta su dinámica con problemas de teoría de números y de calculabilidad.

En el capítulo 2 se comenzará introduciendo los conceptos básicos, así como los resultados previos que sirven como base de esta memoria. Con el fin de comprender la dinámica de estos AC, en el capítulo 3 se describirán sus propiedades algebraicas clásicas, en particular, la no-linealidad y la biyectividad.

En el capítulo 4 se mostrarán distintos resultados de simulaciones que grafican los conceptos que estamos trabajando, así como también ayudan a caracterizar el comportamiento del Autómata. Finalmente, sabiendo que ningún autómata en dos dimensiones (o que sea reversible) puede ser expansivo, en el capítulo 5 se estudiará la pre-expansividad, y las direcciones de propagación para así estar más cerca de demostrar que existen AC pre-expansivos en dos dimensiones.



# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo se introducirán definiciones básicas asociadas a Autómatas Celulares y algunas propiedades y teoremas relevantes para el desarrollo de esta memoria.

Además, se definirá el autómata alrededor del cual gira el trabajo, primero en su versión en una dimensión y luego en dos versiones que corresponden a su generalización a dos dimensiones.

### 2.1. Definiciones y propiedades básicas

**Definición 2.1** (Nociones topológicas). Las siguientes son definiciones útiles para trabajar con SDS en general.

- Un *espacio de Cantor* es cualquier espacio métrico *compacto* (todas las sucesiones tienen una subsucesión que converge), *totalmente desconexo* (puntos distintos están separados por conjuntos abiertos y cerrados), y *perfecto* (no tiene puntos aislados).
- Un *espacio simbólico* es cualquier subespacio cerrado de un espacio de Cantor, esto es, cualquier espacio métrico compacto totalmente desconexo.
- Un *sistema dinámico simbólico* (SDS), es un par  $(X, F)$  donde  $X$  es un espacio simbólico y  $F : X \rightarrow X$  es un mapeo continuo. La  $n$ -ésima *iteración* de  $F$  se denota por  $F^n$ .
- Un *homomorfismo*  $\phi : (X, F) \rightarrow (Y, G)$  de un SDS es un mapeo continuo  $\phi : X \rightarrow Y$  tal que  $\phi \circ F = G \circ \phi$ .
- Una *conjugación* es un homomorfismo biyectivo. Y los sistemas  $(X, F)$  e  $(Y, G)$  son *conjugados a través de*  $\phi$ , si existe  $\phi$  tal que  $F \circ \phi = \phi \circ G$ .

**Notación.** Se denota por  $\Delta : X \times X \rightarrow [0, \infty[$  a la métrica y por  $\mathcal{B}_\delta(x) = \{y \in X : \Delta(x, y) \leq \delta\}$  a la bola con centro  $x$  y radio  $\delta$ .

**Definición 2.2.** Sea  $(X, F)$  un SDS. Se definen las relaciones *órbita* ( $\mathcal{O}_F$ ) y *nonwandering* ( $\mathcal{N}_F$ )

$$(x, y) \in \mathcal{O}_F \Leftrightarrow \exists n > 0, y = F^n(x)$$
$$(x, y) \in \mathcal{N}_F \Leftrightarrow \forall \varepsilon, \delta > 0, \exists n > 0, \exists z \in \mathcal{B}_\delta(x), \Delta(F^n(z), y) < \varepsilon$$

La *órbita de una configuración*  $x \in X$  es  $\mathcal{O}_F(x) := \{F^n(x) : n > 0\}$ . Éste es un conjunto invariante, por lo que su cerrado  $(\overline{\mathcal{O}_F(x)}, F)$  es un subsistema de  $(X, F)$ . Un punto  $x \in X$  es *periódico* con periodo  $n > 0$ , si  $F^n(x) = x$ , es decir, si  $x$  pertenece a su propia órbita.

El conjunto de *puntos transitivos* es  $\mathcal{T}_F := \{x \in X : \overline{\mathcal{O}_F(x)} = X\}$ . Un sistema es *transitivo*, si  $\mathcal{N}_F = X \times X$ , es decir, si para cualquier  $U, V \subseteq X$  no vacíos y abiertos, existe  $n > 0$  tal que  $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . Un sistema es transitivo si y sólo si tiene un punto transitivo, es decir, si  $\mathcal{T}_F \neq \emptyset$ . En este caso, el conjunto de puntos transitivos  $\mathcal{T}_F$  es *residual*, es decir, contiene una intersección contable de conjuntos densos abiertos.

Un sistema finito es *caótico*, si es transitivo y tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

**Notación.** Durante este trabajo, se denotará por  $\mathbb{N}$  al conjunto de los naturales, incluyendo al cero, y por  $\mathbb{N}^+$  cuando no lo incluya.

**Definición 2.3.** La tupla  $(Q^{\mathbb{Z}^n}, F)$  es un *Autómata Celular* es un sistema dinámico discreto donde  $Q$  un conjunto finito (llamado *conjunto de estados*),  $n \in \mathbb{N}^+$ , y  $F : X \rightarrow X$  está dada por una función local.

En otras palabras, un autómata celular es un sistema dinámico discreto, donde  $Q$  determina los posibles estados de las celdas que componen  $\mathbb{Z}^n$ ,  $F : X \rightarrow X$  está definida por una función local, y en cada paso la función local asigna un valor a cada celda de  $\mathbb{Z}^n$  según los valores de su vecindad  $N \subset \mathbb{Z}^n$ .

Se puede definir una métrica sobre el conjunto de configuraciones y así analizar los Autómatas Celulares como funciones en un espacio métrico.

**Definición 2.4.** *Distancia de Cantor.* Para cualquier par de configuraciones  $c, d \in Q^{\mathbb{Z}^n}$ , se define la *distancia* como

$$\Delta(c, d) = \begin{cases} 2^{-\min\{\|z\| : c_z \neq d_z\}} & \text{si } c \neq d \\ 0 & \text{si } c = d \end{cases}$$

Donde  $\|\cdot\|$  corresponde a la norma 1.

Esto significa que se puede hablar de continuidad en este espacio discreto.

**Proposición 2.1.**  $(Q^{\mathbb{Z}^n}, \Delta)$  es un espacio métrico

*Demostración.* Se deben probar las tres propiedades de los espacios métricos.

1. Para todo  $x, y \in Q^{\mathbb{Z}^n}$ ,  $\Delta(x, y) \geq 0$  y  $\Delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

Por definición de distancia.

2. Para todo  $x, y \in Q^{\mathbb{Z}^n}$ ,  $\Delta(x, y) = \Delta(y, x)$ .

Si  $\Delta(x, y) = 0$ , entonces  $x = y \Leftrightarrow y = x$ , entonces  $\Delta(y, x) = 0$

Si  $\Delta(x, y) \neq 0$  Entonces existe  $n \in \mathbb{N}^+ : n = \min\{\|z\| : x_z \neq y_z\} = \min\{\|z\| : y_z \neq x_z\} = \Delta(y, x)$ .

3.  $\Delta(x, z) \leq \Delta(x, y) + \Delta(y, z)$

Sean  $x, y, z \in Q^{\mathbb{Z}^n}$  y  $\Delta(x, y) = 2^{-i}$ ,  $\Delta(y, z) = 2^{-j}$ . Así,

$$|k| < i \Rightarrow x_k = y_k$$

$$|k| < j \Rightarrow y_k = z_k$$

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que  $i \leq j$ , entonces  $|k| \leq i \Rightarrow |k| \leq j$ . De donde  $x_k = y_k = z_k$ , y así

$$\begin{aligned} & \min\{|k| : x_k \neq z_k\} \geq i \\ \Rightarrow & -\min\{|k| : x_k \neq z_k\} \leq -i \\ \Rightarrow & 2^{-\min\{|k| : x_k \neq z_k\}} \leq 2^{-i} \\ & \Rightarrow \Delta(x, z) \leq \Delta(x, y) \\ & \Rightarrow \Delta(x, z) \leq \Delta(x, y) + \Delta(y, z) \end{aligned}$$

**Observación 2.1.** Se observa que en realidad lo que se ha demostrado es

$$\forall x, y, z \in Q^{\mathbb{Z}^n}, \Delta(x, z) \leq \min\{\Delta(x, y), \Delta(y, z)\}$$

Lo que significa que la métrica dada por la distancia de Cantor corresponde a una ultramétrica.

Habiendo definido la distancia y demostrado que el espacio de trabajo es métrico, cabe preguntarse cómo son las bolas en éste.

**Definición 2.5.** Sea  $\delta \in \mathbb{R}$ , para todo  $c, d \in Q^{\mathbb{Z}^n}$  se dice que  $c \in \mathcal{B}_\delta(d)$  si  $\Delta(d, c) \leq \delta$ . Es decir

$$\mathcal{B}_\delta(d) = \{c | \Delta(d, c) \leq \delta\}$$

**Observación 2.2.** Notar que si se tienen  $x, y \in Q^{\mathbb{Z}^n}$  y  $2^{-m} > 0$ , tales que  $x \in \mathcal{B}_{2^{-m}}(y)$  entonces  $x_z = y_z$  para todo  $z$  tal que  $\|z\| < m$ . Con lo que  $\mathcal{B}_{2^{-m}}(y) = \mathcal{B}_{2^{-m}}(x)$ . Dicho de otra forma, todos los elementos que pertenecen a una bola son el centro de ésta.

**Definición 2.6.**  $F$  es continuo si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in Q^{\mathbb{Z}^n} \exists \delta > 0 : (\Delta(x, y) < \delta \Rightarrow \Delta(F(x), F(y)) < \varepsilon)$$

**Proposición 2.2.**  $(Q^{\mathbb{Z}^n}, \Delta)$  es un espacio métrico compacto.

*Demostración.* Sea  $F$  continua en  $Q^{\mathbb{Z}^n}$ . Sea  $x \in Q^{\mathbb{Z}^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $\varepsilon = 2^{-n}$ . Sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$F(\mathcal{B}_{2^{-m}}(x)) \subseteq \mathcal{B}_{2^{-n}}(F(x))$$

Partiendo con  $n = 0$ , se define  $m_x$  constante. Si la sucesión  $\{m_x\}_{x \in Q^{\mathbb{Z}^n}}$  es acotada en  $Q^{\mathbb{Z}^n}$ , entonces  $\{m_x\}_{x \in Q^{\mathbb{Z}^n}} \subseteq [-\|r\|, \|r\|]$  para algún  $r$ , entonces  $N = \|r\|$ .

Si  $\{m_x\}_{x \in Q^{\mathbb{Z}^n}}$  no es acotada. Sea  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de configuraciones tal que  $m_{x^{(k)}} > k$ . Considerando  $(x_0^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ , se sabe que existe una subsucesión  $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que existe  $q_0 \in Q^{\mathbb{Z}^n}$  para todo  $j \in \mathbb{N}$   $x_0^{k_j} = q_0$ .

Así mismo, para cada  $m$  se puede encontrar una subsucesión  $(x^{(k_{j_i})})_{i \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\mathcal{B}_{2^{-m}}(x^{(k_{j_i})}) = \mathcal{B}_{2^{-m}}(x^{(k_{j_0})})$$

Así, para cualquier sucesión se puede encontrar una subsucesión que converge. Es decir,  $(Q^{\mathbb{Z}^n}, \Delta)$  es compacto. ■

**Definición 2.7.** Dados dos AC  $A$  y  $B$  con funciones globales  $F_A$  y  $F_B$ , se define la composición de  $A$  con  $B$  como el AC  $A \circ B$  que tiene como función global la función  $F_A \circ F_B$ . Así mismo, se define  $A^1 = A$  y  $A^n = A^{n-1} \circ A$ .

**Notación.** Se utilizarán  $c(z)$  y  $c_z$ ,  $z \in \mathbb{Z}^n$  para denotar el valor de  $c$  en la celda  $z$ .

**Definición 2.8.** Se define la función shift o traslación  $\sigma$  como:

$$\begin{aligned} \sigma^z : Q^{\mathbb{Z}^n} &\longrightarrow Q^{\mathbb{Z}^n} \\ c &\longmapsto \sigma^z(c) \end{aligned}$$

Donde  $\sigma^z(c)_x = c_{z+x}$  para todo  $x \in \mathbb{Z}^n$ .

**Ejemplo 2.1.** En el caso de dos dimensiones, se definen  $\sigma^{(1,0)}(c)_{i,j} = c_{i+1,j}$  y  $\sigma^{(0,1)}(c)_{i,j} = c_{i,j+1}$ . El AC  $\sigma^{(1,1)}$  traslada la configuración de la grilla una celda a la izquierda y hacia abajo, esto es,  $\sigma^{(0,1)} \circ \sigma^{(1,0)}(c)_{i,j} = \sigma^{(1,1)}(c)_{i,j} = c_{i+1,j+1}$ .

De esta manera,  $\sigma^{(n,m)}$  traslada la configuración de la grilla  $n$  celdas a la izquierda y  $m$  celdas hacia abajo.



**Teorema 2.1** (Curtis-Hedlund-Lyndon 2).  $(Q^{\mathbb{Z}^n}, F)$  es un autómata celular si y sólo si  $F$  es continuo en  $Q^{\mathbb{Z}^n}$  y para todo  $z \in \mathbb{Z}^n$ ,  $F \circ \sigma^z = \sigma^z \circ F$ .

**Corolario 2.1** (Curtis-Hedlund-Lyndon). Si  $(Q^{\mathbb{Z}^n}, F)$  es un autómata celular con función global  $F$  biyectiva, entonces  $(Q^{\mathbb{Z}^n}, F^{-1})$  también es un autómata.

*Demostración.* Notar que  $Q^{\mathbb{Z}^n}$  es compacto. Entonces cualquier cerrado  $C \subset Q^{\mathbb{Z}^n}$  también es compacto, y como  $F$  es un autómata celular, es continuo y por lo tanto,  $F(C)$  también es compacto. Luego,  $F(C) = (F^{-1})^{-1}(C)$  es compacto y por lo tanto cerrado, o sea que  $F^{-1}$  es continua. Evidentemente, si  $F \circ \sigma(x) = \sigma \circ F(x) = y$  entonces  $x = \sigma^{-1} \circ F^{-1} = F^{-1} \circ \sigma^{-1}$ , por lo tanto,  $F^{-1}$  es la también un AC. ■

Teniendo definidas estas propiedades, se puede comenzar el análisis del comportamiento dinámico de los autómatas, es decir, las propiedades que se cumplen a lo largo del tiempo.

**Definición 2.9.** Un punto  $x \in Q^{\mathbb{Z}^n}$  de un sistema  $(Q^{\mathbb{Z}^n}, F)$  es *equicontinuo* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathcal{B}_\delta, \forall n \geq 0, \Delta(F^n(y), F^n(x)) < \varepsilon$$

Es decir, si se cumple que en todas las iteraciones se puede encontrar una bola de tamaño  $\delta$  tal que la distancia entre las imágenes de los elementos de la bola con centro  $x$  siempre es menor a  $\varepsilon$ . El conjunto de los puntos equicontinuos se denota por  $\mathcal{E}_F$ .

**Definición 2.10.** Un sistema se dice *equicontinuo* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall c, d \in Q^{\mathbb{Z}^n} \forall n \in \mathbb{N} : [\Delta(c, d) \leq \delta \Rightarrow \Delta(F^n(c), F^n(d)) < \varepsilon]$$

Equivalentemente, un sistema es *equicontinuo* si  $\mathcal{E}_F = Q^{\mathbb{Z}^n}$ .

**Definición 2.11.** Un sistema es *sensitivo* si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall c \in Q^{\mathbb{Z}^n}, \forall \delta > 0, \exists d \in \mathcal{B}_\delta(c), \exists n \geq 0, \Delta(F^n(d), F^n(c)) \geq \varepsilon$$

Entonces se tiene que un sistema es equicontinuo cuando cualquier par de configuraciones que están “cerca” permanecen “cerca”, mientras que es sensitivo si existen configuraciones que por muy “cerca” que estén, acabarán alejándose después de un número finito de iteraciones. Además, hay autómatas que no cumplen con ninguna de las características recién mencionadas.

**Definición 2.12.** Un autómata celular  $F$  se denomina *Expansivo Positivo* (o  $\mathbb{N}$ -expansivo) si existe un número  $\delta > 0$  (llamada constante de expansividad), tal que para todo  $c, d \in Q^{\mathbb{Z}^n}$ ,  $c \neq d$  existe un tiempo  $t \in \mathbb{N}$  tal que  $\Delta(F^t(c), F^t(d)) \geq \delta$ .

## 2.2. Pre-expansividad

Expansividad es una forma más fuerte de pensar sobre sensibilidad, y por lo mismo son escasos los autómatas que lo cumplen y no existe en autómatas reversibles y/o en dos dimensiones. Por esta razón, se define una noción más débil que Expansividad: *Pre-Expansividad*, la cual es la propiedad de expansividad positiva si sólo se consideran pares de configuraciones asintóticas.

**Notación.** Dadas dos configuraciones asintóticas  $c, d \in Q^{\mathbb{Z}^n}$ , se denota por  $\text{diff}^t(c, d)$  al conjunto  $\{z \in \mathbb{Z}^n : F^t(c)_z \neq F^t(d)_z\}$ , con  $t \in \mathbb{N}$ . Es decir,  $\text{diff}^t(c, d)$  es el conjunto de celdas en las que  $c$  y  $d$  son diferentes, para cada tiempo  $t$ . Llamaremos a éste *conjunto diferencia*.

**Definición 2.13** (Configuraciones Asintóticas). Dos configuraciones  $c, d \in Q^{\mathbb{Z}^n}$  son *asintóticas* (denotado  $c \stackrel{\infty}{\equiv} d$ ) si difieren en un número finito de celdas, es decir, si el conjunto  $\text{diff}^0(c, d)$  es finito.

**Definición 2.14.** Sea  $F$  un AC sobre  $Q^{\mathbb{Z}^n}$ .  $F$  se denomina *Pre-expansivo* si

$$\exists \delta > 0 : \forall c, d \in Q^{\mathbb{Z}^n}, c \neq d \text{ y } c \stackrel{\infty}{\cong} d \Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}, \Delta(F^t(c), F^t(d)) > \delta.$$

El valor  $\delta$  se llama constante de pre-expansividad.

Esto significa que un autómata será pre-expansivo si, para cualquier par de configuraciones asintóticas entre sí, al aplicar la función la suficiente cantidad de veces, sus imágenes están a una distancia  $\delta$ .

La pre-expansividad es invariante sobre conjugados. Esto es, si un AC  $F$  y  $F'$  sobre  $Q^{\mathbb{Z}^n}$  son conjugados a través de  $\phi$ , entonces  $F$  es pre-expansivo si y sólo si  $F'$  lo es. En efecto,  $c \stackrel{\infty}{\cong} d$  es equivalente a  $\phi(c) \stackrel{\infty}{\cong} \phi(d)$  y para todo  $\varepsilon$  existe un  $\delta$  tal que  $\Delta(\phi(c), \phi(d)) > \varepsilon$  implica que  $\Delta(c, d) > \delta$ .

Se puede refinar el concepto de pre-expansividad si se consideran pares de configuraciones con un número fijo finito de celdas que son distintas.

**Definición 2.15.** Sea  $F$  un AC sobre  $Q^{\mathbb{Z}^n}$ , y sea  $k > 0$ .  $F$  es *k-expansivo* si:

$$\exists \delta > 0 : \forall c, d \in Q^{\mathbb{Z}^n}, |\text{diff}^0(c, d)| = k \Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}, \Delta(F^t(c), F^t(d)) > \delta$$

La siguiente proposición deja establecida la relación entre expansividad, pre-expansividad, k-expansividad y otras propiedades que usualmente se estudian en los sistemas dinámicos.

**Proposición 2.3** ([1]). *Sea  $F$  cualquier AC sobre  $Q^{\mathbb{Z}^n}$ . Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1.  $F$  es  $\delta$ -pre-expansivo si y sólo si para todo  $k > 0$ ,  $F$  es  $\delta$ -k-expansivo.
2. Si  $F$  es k-expansivo, entonces  $F$  es sensitivo a configuraciones iniciales.
3.  $F$  expansivo positivo  $\Rightarrow F$  pre-expansivo  $\Rightarrow F$  sobreyectivo.

Observar que en general, k-expansividad no implica sobreyectividad.

Puede ser que la diferencia entre configuraciones no se extienda en todas direcciones, en cuyo caso se habla de direcciones de pre-expansividad. En [1] se introduce esta definición para el caso en una dimensión y ahora se extenderá esa definición a  $\mathbb{Z}^n$ .

**Definición 2.16.** Sea  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ . Se dice que un AC  $F$  es pre-expansivo en *dirección*  $\alpha$  si existe  $\delta > 0$  tal que

$$\forall c, d \in Q^{\mathbb{Z}^n}, c \neq d \text{ y } c \stackrel{\infty}{\cong} d \Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}, \Delta(\sigma^{\lceil t\alpha \rceil} \circ F^t(c), \sigma^{\lceil t\alpha \rceil} \circ F^t(d)) > \delta$$

donde  $\lceil \cdot \rceil$  se aplica al vector componente a componente.

En particular, que un AC sea pre-expansivo en dirección  $\theta$  (con  $\theta \in \mathbb{Z}^n$  el vector nulo) es equivalente a que el autómata sea pre-expansivo.

Ahora se introduce un nuevo concepto, el cual se refiere a las direcciones en que se propagación de la diferencia para pares específicos de configuraciones asintóticas.

**Definición 2.17.** Sean  $c, d \in Q^{\mathbb{Z}^n}$  distintos y asintóticos. Se dice que  $x \in \mathbb{R}^n$  es una *dirección de propagación* si existen  $l \in \mathbb{N}$  y  $z \in \text{diff}^0(c, d)$  tales que

$$\forall m, \exists t : \mathcal{B}_l(z + mx) \cap \text{diff}^t(c, d) \neq \emptyset$$

**Observación 2.3.** *Es claro que las direcciones de pre-expansividad son direcciones de propagación, pero lo inverso no es cierto.*

*En primer lugar, porque para que una dirección sea de pre-expansividad, debe serlo para todo  $c, d$  tales que  $c \neq d$ ,  $c \stackrel{\infty}{\cong} d$ , mientras que las direcciones de propagación están definidas sólo con respecto a un par de configuraciones asintóticas.*

*Y en segundo lugar, las direcciones de propagación sólo piden que  $\text{diff}^t(F(c), F(d))$  se propague en dirección  $x \in \mathbb{R}^n$ , mientras que las de pre-expansividad piden que si  $F$  es pre-expansivo en dirección  $\alpha$ , entonces  $\text{diff}(\sigma^\alpha \circ F^t(c), \sigma^\alpha \circ F^t(d))$  debe ampliarse en todas direcciones.*

### 2.3. Álgebra de las operaciones *mod* y *floor*

Antes de presentar la familia de autómatas con la que se trabajará, se presentan algunas observaciones sobre los operadores que la componen.

**Notación.** El operador *mód* se denotará en este trabajo por  $\%$ .

**Definición 2.18.** Dados  $a, n, r, q \in \mathbb{N}^+$ , tales que  $a = nq + r$ , se definen las funciones *mód* y  $\lfloor \cdot \rfloor$  como

$$a \% b = r \quad \text{y} \quad \lfloor a/n \rfloor = q$$

Es decir, los operadores  $\lfloor \cdot \rfloor$  y  $\%$  corresponden al cociente y el resto de la división entera, respectivamente.

A continuación, se establecerán identidades que serán útiles en el desarrollo de esta memoria

- Dados  $k, k', m \in \mathbb{N}^+$  tales que  $m = kk'$  y  $a \in \mathbb{N}$  entonces,

$$ka \% m = k(a \% k') \quad (2.1)$$

- Sean  $A \in \mathbb{Z}$  y  $m, a \in \mathbb{N}^+$  entonces,

$$\left\lfloor \frac{A + \lfloor a/m \rfloor}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{mA + a}{m^2} \right\rfloor \quad (2.2)$$

*Demostración.*

- Utilizando la definición del operador *mód*, se tiene

$$\begin{aligned} ka \% m &= ka - \left\lfloor \frac{ka}{m} \right\rfloor m \\ &= ka - \left\lfloor \frac{ka}{kk'} \right\rfloor kk' \\ &= k \left( a - \left\lfloor \frac{a}{k'} \right\rfloor k' \right) \\ &= k(a \% k') \end{aligned}$$

- Si se considera cualquier función monótona creciente que cumpla que

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \quad \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \quad (2.3)$$

entonces se tiene que  $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$  para todo  $x \in \text{dom}(f)$  [16]. En particular, se considera  $f(x) = \frac{A+x}{m}$ , con  $A \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}^+$  y  $x \in \mathbb{R}$ . Es fácil ver que  $f(x)$  cumple con 2.3, y por lo tanto

$$\left\lfloor \frac{A + \lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{A + x}{m} \right\rfloor \quad \text{y con } x = a/m \text{ se tiene } \left\lfloor \frac{A + \lfloor a/m \rfloor}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{A + a/m}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{mA + a}{m^2} \right\rfloor$$

■

## Capítulo 3

# Autómata de Multiplicación y Propiedades

Existe una familia de autómatas reversibles en una dimensión que proveen ejemplos de AC pre-expansivos [1]. Dados dos números naturales  $k$  y  $k'$ , se considera el autómata celular  $F_{k,k'}$  en el conjunto de estados  $\mathbb{Z}_m$ , con  $m = kk'$ , el cual se define

$$F_{k,k'}(c)_i = kc_i \% m + \lfloor kc_{i+1}/m \rfloor$$

donde la multiplicación tiene prioridad sobre el operador módulo, el cual a su vez tiene prioridad sobre la adición. Se observa que  $F_{k,k'}(c)_{i,j}$  siempre pertenece a  $\mathbb{Z}_m$  porque  $kc_{i,j} \% m \leq k(k'-1)$  y  $\lfloor \frac{kc_{i+1,j}}{m} \rfloor < k$ .

Notar entonces que lo que esta familia de autómatas hace en cada celda es sumar el resto de la división entre el valor de la celda y  $m$ , con el cociente de la celda de al lado dividido por  $m$ .

**Proposición 3.1** ([8]).  $F_{k,k'}$  es expansivo positivo si y sólo si  $k'$  divide a una potencia positiva de  $k$ .

Los siguientes tres resultados están extraídos del trabajo de A. Gajardo, V. Nesme y G. Theyssier [1] y no se incluirán las demostraciones.

**Proposición 3.2** ([1]).  $F_{k,k'}$  es biyectivo y  $F_{k,k'}^{-1} = F_{k',k} \circ \sigma^{-1}$ .

**Teorema 3.1** ([1]). Sean  $p_1, \dots, p_I$  números primos distintos y sean  $o$  y  $q$  enteros multiplicativamente independientes (posiblemente 1), que también son multiplicativamente independientes con  $p_1, \dots, p_I$ . Si  $k = op_1^{e_1}, \dots, p_I^{e_I}$  y  $k' = p_1^{e'_1}, \dots, p_I^{e'_I}q$ , entonces  $F_{k,k'}$  es  $\alpha$ -pre-expansivo si y sólo si

- $\alpha \in ] -\log_m(k), -\min\{\frac{e_i}{e_i+e'_i} : i \in \{1, \dots, I\}\}[$  y  $q = 1$ , o
- $\alpha \in ] -\log_m(k), 0[$  y  $q \neq 1$ .

Este teorema establece que las perturbaciones se propagarán dentro de un cono cuyas pendientes izquierda y derecha son  $-\log_m(k)$  y 0 o  $-\min\{\frac{e_i}{e_i+e'_i} : i \in \{1, \dots, I\}\}$ , respectivamente.

**Teorema 3.2** ([1]).  $F_{k,k'}$  tiene direcciones de pre-expansividad si y sólo si  $k$  y  $k'$  son multiplicativamente independientes.

Este último teorema implica que existen miembros de esta familia que son pre-expansivos y no expansivos.

### 3.1. Definición en dos dimensiones

Vile Salo propuso una forma de generalizar esta familia de autómatas a dos dimensiones y así, se definen  $F_{k,k'}$  y  $G_{k,k'}$  en dos dimensiones, donde  $k, k' \in \mathbb{N}$  y  $m = kk'$ , a partir de los AC  $H_{k,k'}$  y  $V_{k,k'}$  definidos como

$$\begin{aligned} H_{k,k'}(c)_{i,j} &= kc_{i,j} \%m + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{k'} \right\rfloor \\ V_{k,k'}(c)_{i,j} &= kc_{i,j} \%m + \left\lfloor \frac{c_{i,j+1}}{k'} \right\rfloor \end{aligned} \quad (3.1)$$

De modo que  $F_{k,k'}$  y  $G_{k,k'}$  se definen como

$$F_{k,k'}(c)_{i,j} = k \left( kc_{i,j} \%m + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{k'} \right\rfloor \right) \%m + \left\lfloor \frac{kc_{i,j+1} \%m + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j+1}}{k'} \right\rfloor}{k'} \right\rfloor \quad (3.2)$$

$$G_{k,k'}(c)_{i,j} = k \left( kc_{i,j} \%m + \left\lfloor \frac{c_{i,j+1}}{k'} \right\rfloor \right) \%m + \left\lfloor \frac{kc_{i+1,j} \%m + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j+1}}{k'} \right\rfloor}{k'} \right\rfloor \quad (3.3)$$

El conjunto de estados para estos autómatas es  $Q = \mathbb{Z}_m$  y para ambos autómatas la vecindad de la función local aplicada a  $c_{i,j}$  corresponde a una sección de  $2 \times 2$ .

$$\begin{array}{|c|c|} \hline c_{i,j+1} & c_{i+1,j+1} \\ \hline c_{i,j} & c_{i+1,j} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{F_{k,k'}(c)_{i,j}} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline F(c)_{i,j} & \\ \hline \end{array}$$

Así,  $F(c) = (V \circ H)(c)_{i,j}$ , mientras que  $G(c)_{i,j} = (H \circ V)(c)_{i,j}$

El trabajo de esta tesis consiste en analizar estos autómatas, utilizando las propiedades algebraicas de éstos, así como también basándose en los resultados obtenidos para una dimensión. Si se consigue demostrar que existe algún miembro de esta familia que sea pre-expansivo, sería el primer autómata en dos dimensiones que cumpliría con esa propiedad.

Dado el objetivo de esta tesis, es útil definir los siguientes términos para referirse a las filas y columnas que determinan el cuadrado en el que se encierra la perturbación en cada iteración  $t$ .

Dados  $c, d \in \mathbb{Z}_m^2$  tales que  $c \cong d$  se definen

$$J_t^+ = \sup\{j \in \mathbb{Z} : \exists i \in \mathbb{Z} \ F_{k,k'}^t(c)_{i,j} \neq F_{k,k'}^t(d)_{i,j}\}$$

$$J_t^- = \inf\{j \in \mathbb{Z} : \exists i \in \mathbb{Z} \ F_{k,k'}^t(c)_{i,j} \neq F_{k,k'}^t(d)_{i,j}\}$$

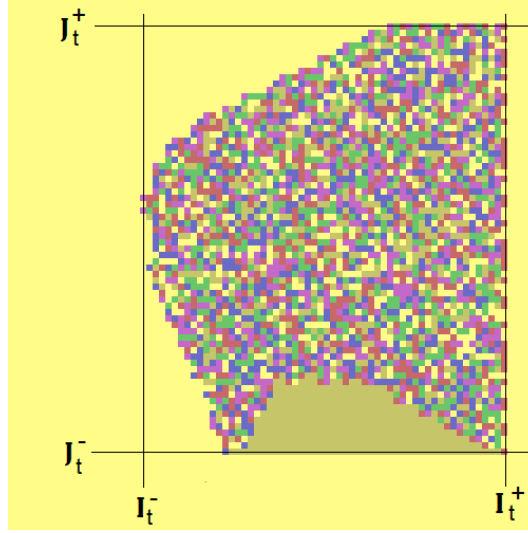
$$I_t^+ = \sup\{i \in \mathbb{Z} : \exists j \in \mathbb{Z} \ F_{k,k'}^t(c)_{i,j} \neq F_{k,k'}^t(d)_{i,j}\}$$

$$I_t^- = \inf\{i \in \mathbb{Z} : \exists j \in \mathbb{Z} \ F_{k,k'}^t(c)_{i,j} \neq F_{k,k'}^t(d)_{i,j}\}$$

$$\Delta_J := J_0^+ - J_0^-$$

$$\Delta_I := I_0^+ - I_0^-$$

$I_t^+$  e  $I_t^-$  indican los márgenes derecho e izquierdo entre los que se ubica la diferencia entre dos configuraciones asintóticas, en cada iteración  $t$  en que se aplica  $F_{k,k'}$ . Así mismo,  $J_t^+$  y  $J_t^-$  indican los márgenes superior e inferior. Éstos se ven representados en la figura 3.1.


 Figura 3.1: Representación visual de  $I_t^+$ ,  $I_t^-$ ,  $J_t^+$  y  $J_t^-$ 

## 3.2. Propiedades del AC

En esta sección se demostrarán algunas de las propiedades del autómata y de las funciones que lo componen. e demostrará que estos autómatas, al igual que en el caso de una dimensión, son no lineales y biyectivos. Y además, se establecerán relaciones de conjugación entre  $F_{k,k'}$ ,  $G_{k,k'}$  y sus respectivas inversas.

### 3.2.1. No-linealidad

Sean  $c, d \in \mathbb{Z}_m^{\mathbb{Z}^2}$ .  $c_{i,j} = k'(k-1)$  para todo  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  y  $d_{i,j} = k'$  para todo  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ .

Se observa que  $(c+d)_{i,j} = 0$  para todo  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ .

Es fácil ver que  $F_{kk'}(0)_{i,j} = k(0+0) \% m + \lfloor \frac{0+0}{k'} \rfloor = 0$ .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} F_{kk'}(c)_{i,j} &= k(kk'(k-1) \% m + \lfloor (k'(k-1))/k' \rfloor) \% m + \left\lfloor \frac{0 + \lfloor (k'(k-1))/k' \rfloor}{k'} \right\rfloor \\ &= k(k-1) \% m + \left\lfloor \frac{k(k-1)}{m} \right\rfloor \end{aligned}$$

Además,  $F_{kk'}(d)_{i,j} = k(0+1) \% m + \lfloor (0+1)/k' \rfloor = k$ , mientras que

$$\begin{aligned} F_{kk'}(d)_{i,j} + F_{kk'}(c)_{i,j} &= (k) \% m + (k(k-1)) \% m + \left\lfloor \frac{k(k'-1)}{k'} \right\rfloor \\ &= (k + k^2 - k) \% m + \left\lfloor \frac{k(k'-1)}{k'} \right\rfloor \\ &= (k^2) \% m + \left\lfloor \frac{k(k'-1)}{k'} \right\rfloor \end{aligned}$$

Obviamente, cada sumando es mayor o igual a cero. En particular, se necesita que  $(k^2) \% m = 0$ . Por lo tanto

$$F(c) + F(d) = F(c + d) \Leftrightarrow m = k^2$$

Y por lo tanto, esta familia de autómatas no es lineal cuando  $k' \neq k$ .

### 3.2.2. Biyectividad

**Proposición 3.3.**  $F_{k,k'}$  es biyectiva y  $F_{k,k'}^{-1} = G_{k',k} \circ \sigma^{(-1,-1)}$

*Demostración.* Para comenzar, utilizamos que  $F_{k,k'}(c)_{i,j} = V_{k,k'}(H_{k,k'}(c))_{i,j}$ , ya que

$$\begin{aligned} F_{k,k'}(c)_{i,j} &= k(H_{k,k'}(c))_{i,j} \% m + \left\lfloor \frac{H_{k,k'}(c)_{i,j+1}}{k'} \right\rfloor \\ &= k \left( kc_{i,j} \% m + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{k'} \right\rfloor \right) \% m + \left\lfloor \frac{kc_{i,j+1} \% m + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j+1}}{k'} \right\rfloor}{k'} \right\rfloor \end{aligned}$$

Primero, se tiene que  $H_{k,k'} \circ H_{k',k} = \sigma^{(1,0)}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} H_{k,k'} \circ H_{k',k}(c)_{i,j} &= (kH_{k',k}(c))_{i,j} \% m + \left\lfloor \frac{kH_{k',k}(c)_{i+1,j}}{m} \right\rfloor \\ &= \left( k \left( \cancel{k'c_{i,j} \% m}^0 + \left\lfloor \frac{k'c_{i+1,j}}{m} \right\rfloor \right) \right) \% m + \left\lfloor \frac{k \left( \cancel{k'c_{i+1,j} \% m}^0 + \left\lfloor \frac{k'c_{i+2,j}}{m} \right\rfloor \right)}{m} \right\rfloor \\ &= \left( \left\lfloor \frac{kk'c_{i+1,j}}{m} \right\rfloor \right) \% m + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{kk'c_{i+2,j}}{m} \right\rfloor}{m} \right\rfloor^0 \\ &= c_{i+1,j} \\ &= \sigma^{(1,0)}(c)_{i,j} \end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene que  $H_{k',k} \circ H_{k,k'} = \sigma^{(1,0)}$ ,  $V_{k,k'} \circ V_{k',k} = \sigma^{(0,1)}$  y  $V_{k',k} \circ V_{k,k'} = \sigma^{(0,1)}$ , y usando la conmutatividad de shift con cualquier AC, podemos escribir

$$\begin{aligned} F_{k,k'}^{-1} &= H_{k',k} \circ \sigma^{(-1,0)} \circ V_{k',k} \circ \sigma^{(0,-1)} \\ &= H_{k',k} \circ V_{k',k} \circ \sigma^{(-1,0)} \circ \sigma^{(0,-1)} \\ &= G_{k',k} \circ \sigma^{(-1,-1)} \end{aligned}$$

■

**Observación 3.1.** La proposición anterior puede extenderse a  $n$  dimensiones, si se define  $F_{k,k'} = f_{k,k'}^{(n)} \circ \dots \circ f_{k,k'}^{(2)} \circ f_{k,k'}^{(1)}$ , donde  $c \in \mathbb{Z}_m^n$  y

$$f_{k,k'}^{(j)}(c)_{i_1, \dots, i_n} = (kc_{i_1, \dots, i_n}) \% m + \left\lfloor \frac{c_{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_n}}{k'} \right\rfloor \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Con el inverso definido por  $F_{k,k'}^{-1} = f_{k',k}^{(1)} \circ \dots \circ f_{k',k}^{(n-1)} \circ f_{k',k}^{(n)} \circ \sigma^{(-1, \dots, -1)}$

### 3.2.3. Relaciones entre $F_{k,k'}$ , $F_{k',k}$ , $G_{k,k'}$ y $G_{k',k}$

**Proposición 3.4.** ■  $F_{k,k'}$  y  $G_{k,k'}$  son conjugados.

- $F_{k',k}^{-n} = V_{k,k'}^{-1} \circ F_{k,k'}^n \circ \sigma^{-n,-n} \circ V_{k,k'}$ .
- $G_{k',k}^{-n} = H_{k,k'}^{-1} \circ G_{k,k'}^n \circ \sigma^{-n,-n} \circ H_{k,k'}$

*Demostración.* Se sabe que  $F_{k,k'} = V_{k,k'} \circ H_{k,k'}$ , mientras que  $G_{k,k'} = H_{k,k'} \circ V_{k,k'}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} F_{k,k'} &= V_{k,k'} \circ H_{k,k'} \circ V_{k,k'} \circ V_{k,k'}^{-1} \\ &= V_{k,k'} \circ G_{k,k'} \circ V_{k,k'}^{-1} \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} G_{k,k'} &= H_{k,k'} \circ V_{k,k'} \circ H_{k,k'} \circ H_{k,k'}^{-1} \\ &= H_{k,k'} \circ F_{k,k'} \circ H_{k,k'}^{-1} \end{aligned}$$

Usando el ítem anterior, es fácil ver que

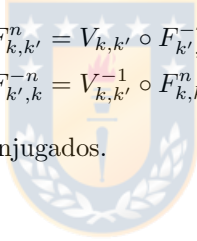
$$F_{k,k'}^n = V_{k,k'} \circ G_{k,k'}^n \circ V_{k,k'}^{-1}$$

Por otro lado, se sabe que  $F_{k',k}^{-n} = G_{k,k'}^n \circ \sigma^{-n,-n}$ , de modo que

$$\begin{aligned} F_{k,k'}^n &= V_{k,k'} \circ F_{k',k}^{-n} \circ \sigma^{n,n} \circ V_{k,k'}^{-1} \\ \Leftrightarrow F_{k',k}^{-n} &= V_{k,k'}^{-1} \circ F_{k,k'}^n \circ \sigma^{-n,-n} \circ V_{k,k'} \end{aligned}$$

Es decir,  $F_{k',k}^{-1}$  y  $F_{k,k'} \circ \sigma^{n,n}$  son conjugados.

Análogo para  $G_{k',k}^{-n}$  y  $G_{k,k'} \circ \sigma^{n,n}$ .



■

El primer ítem implica que existe una simetría entre ambas funciones, de donde

$$\begin{aligned} F_{k,k'} &= R \circ G_{k,k'} \circ R \\ &= R \circ V_{k,k'}^{-1} \circ F_{k,k'} \circ V_{k,k'} \circ R \end{aligned}$$

Lo que significa que lo que si se tienen  $a, b \in \mathbb{Z}_m^2$  tales que  $V_{k,k'}(b) = a$ , entonces lo que se demuestre para  $a$ , estará demostrado con una simetría para  $b$ .

Los otros ítems establecen que  $F_{k,k'} \circ \sigma^{-1,-1}$  y  $F_{k',k}^{-1}$  son conjugados, así como también lo son  $G_{k,k'} \circ \sigma^{-1,-1}$  y  $G_{k',k}^{-1}$ . Ésto era de esperarse, sabiendo que  $G_{k,k'} \circ \sigma^{-1,-1}$  es la inversa de  $F_{k',k}$ , pero puede resultar útil tenerlo expresado en términos de  $F$ .



## Capítulo 4

# Simulaciones

El objetivo de este capítulo es mostrar que existen miembros de la familia de autómatas de multiplicación que parecen ser pre-expansivos. Para ello, se ejecutaron simulaciones de  $F_{k,k'}$ , probando diferentes  $k, k' \in \mathbb{N}^+$  y utilizando el programa Processing 3.5.4.

Para comenzar, se utilizaron números primos para los valores de  $k$  y  $k'$  y luego se probó usando pares de números que fueran primos relativos. Estas elecciones se hicieron inspirados en la caracterización de la pre-expansividad del autómata en una dimensión.

**Notación.** La configuración homogénea cuyo estado es “a” en todas las celdas se denotará por el número “a” en negrita de pizarra ( $\mathbf{a}$ ).

Sean  $c \in Q^{\mathbb{Z}^n}$  y  $a \in Q$  se denota  $c = \bar{a}$  si para todo  $z \in \mathbb{Z}^n$   $c_z = a$ .

**Definición 4.1.** Se sabe que todas las configuraciones homogéneas pertenecerán a una única órbita. Entonces, se dice que  $(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$  es la *órbita de*  $\bar{a}_0 \in \mathbb{Z}_m^2$  si para todo  $l \in \{0, \dots, n\}$ ,  $F^l(\bar{a}_0) = \bar{a}_l$  y  $F(\bar{a}_n) = \bar{a}_0$ .

### 4.1. $k = 3$ y $k' = 2$

Sean las configuraciones iniciales  $c, d \in \mathbb{Z}_6^2$  tales que  $c \cong d$  son aleatorias, es decir, cada una de las celdas de  $d$  se define con una función aleatoria que puede entregar cualquier número entero entre 0 y 5 y la configuración  $c$  se define igual a  $d$  en todas partes excepto un número finito de celdas.

En la figura 4.1, se observa que  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$  parecen ser direcciones de propagación para configuraciones aleatorias asintóticas.

Para crear estas imágenes, la configuración aleatoria se estableció para cada celda como un número aleatorio entre 0 y  $m - 1$  (5, en este caso). Las imágenes cuentan con  $300 \times 200$  celdas y la perturbación introducida es un cuadrado de  $20 \times 20$ . Las figuras además incluyen rectas que representan a  $I_t^+$ ,  $I_t^-$ ,  $J_t^+$  y  $J_t^-$ .

Para calcular la imagen de las celdas que están en los extremos de la figura, se definieron las vecindades de las celdas del extremo derecho usando las del izquierdo para completar y las de arriba con las de abajo (formando un toroide).

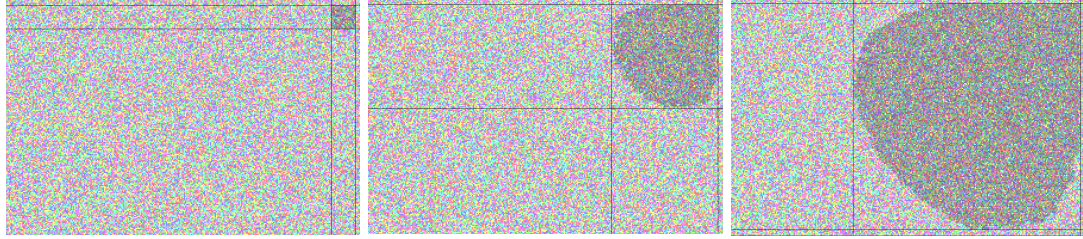


Figura 4.1: Simulación en fondo aleatorio.  
La perturbación se muestra mediante celdas coloreadas en tonos más oscuros.

Calculando la dinámica de los fondos homogéneos, se obtiene que

- $F_{3,2}(1) = 4$  y  $F_{3,2}(2) = 3$ . Además,  $H_{3,2}(2) = 1$ , con lo que, según la proposición 3.4, se espera que exista alguna simetría en la dinámica entre ambos pares de configuraciones homogéneas.
- $F_{3,2}(0) = 0$ . A diferencia de las anteriores,  $H_{3,2}(0) = 0$ .
- $F_{3,2}(5) = 5$ . Al igual que para 0,  $H_{3,2}(5) = 5$ .

Las relaciones anteriores se representan a través del grafo de la figura 4.2. En éste, los nodos conectados por aristas continuas representan configuraciones homogéneas que pertenecen a la misma órbita, mientras que las aristas segmentadas representan que el nodo de llegada es imagen a través de  $V_{3,2}$  del nodo de salida.

Los nodos conectados con aristas azules presentan un comportamiento simétrico al de los que se conectan con líneas verdes dentro de la misma componente conexa. Si la componente conexa no cuenta con aristas azules, es porque no existe un fondo homogéneo que tenga un comportamiento simétrico.

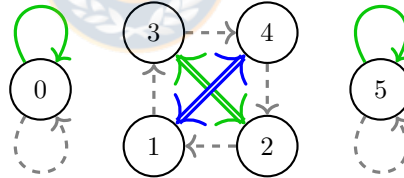


Figura 4.2: Grafo de la dinámica de los fondos homogéneos para  $F_{3,2}$ .

Cabe destacar que la razón por la que una componente conexas presentan comportamientos similares es que  $F_{k,k'}^n(c) = R \circ V_{k,k'}^{-1} \circ F_{k,k'}^n \circ V_{k,k'} \circ R(c)$ . De modo que el comportamiento de los nodos que se conectan a través de aristas segmentadas será simétrico entre sí. Por ejemplo,  $V_{3,2}(2) = 1$ , por lo tanto la dinámica sobre 2 será simétrica a lo que ocurra sobre 1.

Simulando para perturbaciones sobre cada una de las configuraciones homogéneas, se obtiene:

1.  $c \cong 1$  o  $c \cong 4$ . En este caso, parece ser que  $(0, -1)$  y  $(-2, -1)$  son direcciones de propagación. Sabiendo que  $F_{3,2}(1) = 4$  (y  $F_{3,2}(4) = 1$ ), es claro que describir el comportamiento del autómata cuando  $c \cong 1$  es equivalente a hacerlo cuando  $c \cong 4$ .

Notar que sólo se hace referencia a las direcciones de propagación de los bordes. Naturalmente, las direcciones entre las dos recién mencionadas también son direcciones de propagación.

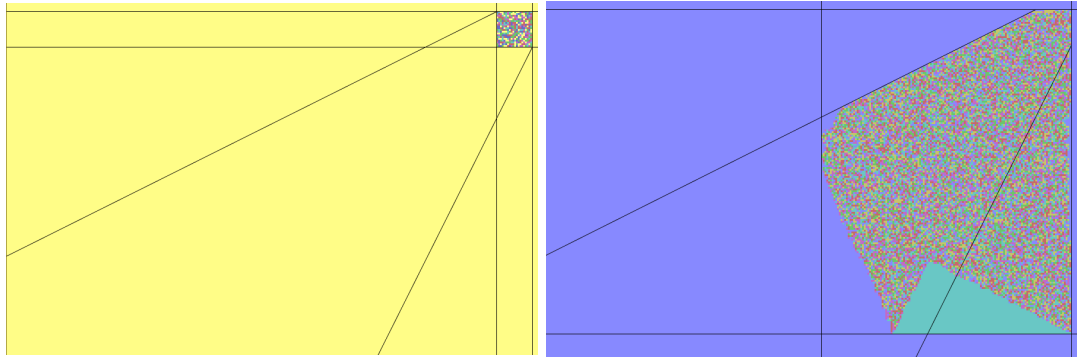


Figura 4.3: Simulación en fondo  $c \cong 4$  y  $F_{3,2}(c) \cong 1$ . La figura incluye las rectas de pendiente  $1/2$  y  $2$  como referencia.

2.  $c \cong 3$  o  $c \cong 2$ . En la figura 4.4 se observa que la perturbación tiene dirección de propagación hacia la izquierda  $(-1, 0)$  y hacia abajo  $(-1, -2)$ . Al igual que en el caso anterior,  $F_{3,2}(2) = 3$  (y  $F_{3,2}(3) = 2$ ). Observar también que la forma de la propagación parece ser una reflexión del caso 4, lo que es conforme a la proposición 3.4.

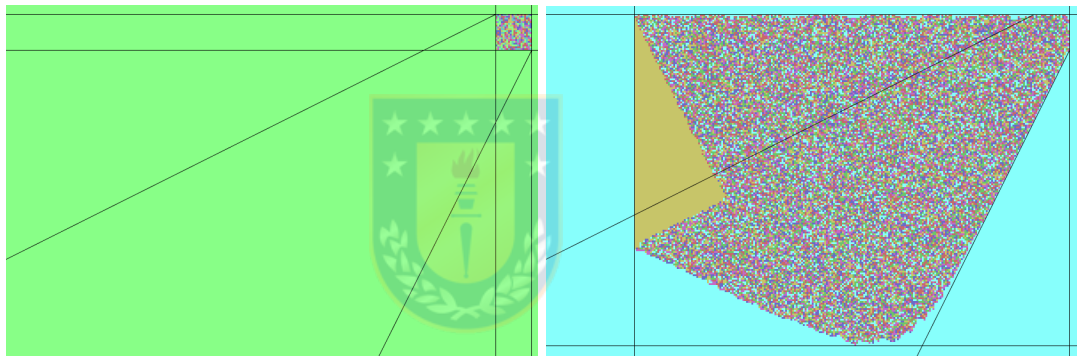


Figura 4.4: Simulación en fondo  $c \cong 3$  y  $F_{3,2}(c) \cong 2$ .

Los casos recién descritos dan una idea positiva sobre la pre-expansividad del autómata  $F_{3,2}$ .

**Observación 4.1.** Cabe destacar que si el fondo está compuesto de líneas horizontales de 4 y 1, las direcciones de propagación son las mismas que si estuviera sobre cualquiera de esos fondos homogéneos. Ésto está representado en la figura 4.5.

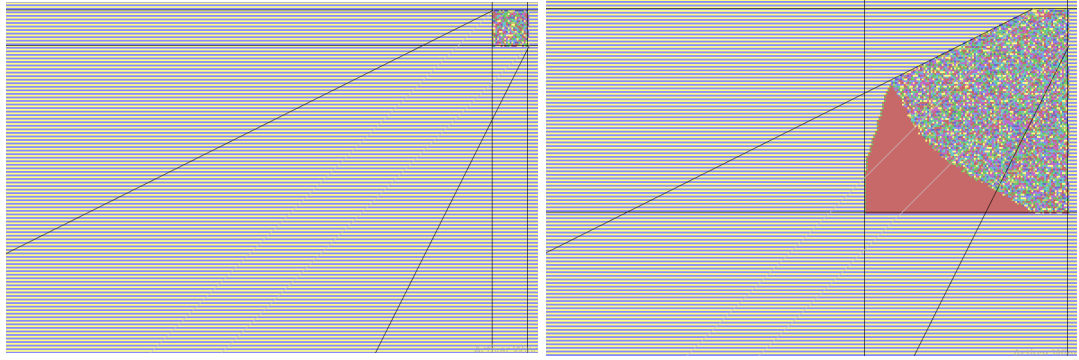


Figura 4.5: Fondo con líneas horizontales homogéneas  $c_{i,j} = 1 \Rightarrow c_{i,j+1} = 4$  para todo  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ .

Análogamente, si se tiene un fondo con líneas verticales de 2 y 3, entonces la perturbación se propaga con las mismas direcciones que si la perturbación fuera asintótica a 2 o 3.

En los casos en que  $c \stackrel{\infty}{=} 0$  o  $c \stackrel{\infty}{=} 5$  (figuras 4.6 y 4.7, respectivamente), la perturbación crece hacia la izquierda con dirección  $(-1, 0)$  y hacia abajo con  $(0, -1)$ . Pero a diferencia de los casos anteriores, se tiene que  $H_{3,2}(0) = 0$  y  $H_{3,2}(5) = 5$ , con lo que estas configuraciones presentan dinámicas cuya propagación es un reflejo de sí misma.

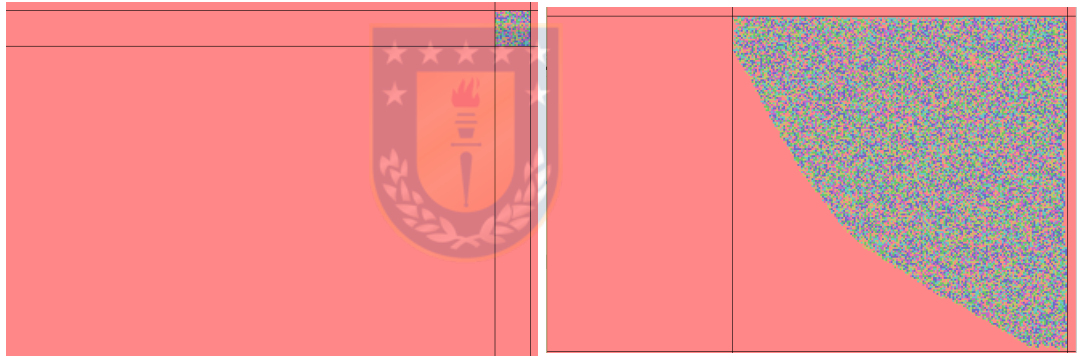


Figura 4.6: Simulación en fondo  $c \stackrel{\infty}{=} 0$  y  $F_{3,2}(c) \stackrel{\infty}{=} 0$ .

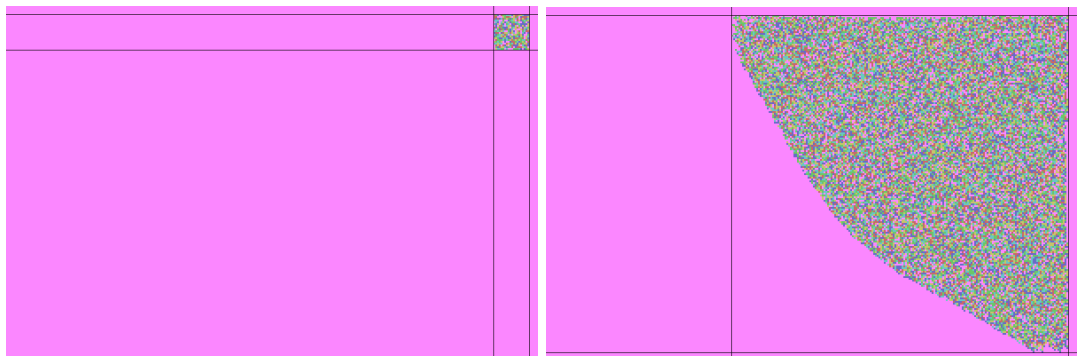


Figura 4.7: Simulación en fondo  $c \stackrel{\infty}{=} 5$  y  $F_{3,2}(c) \stackrel{\infty}{=} 5$ .

### 4.2. $k = 5$ y $k' = 2$

Al igual que para el caso con  $k = 3$  y  $k' = 2$ , cuando se tienen dos configuraciones iniciales aleatorias  $c, d \in \mathbb{Z}_{10}^{\mathbb{Z}_2^2}$  tales que  $c \not\equiv d$ , la perturbación crece hacia la izquierda con dirección de propagación igual a  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$  hacia abajo. Lo anterior está representado en la figura 4.8.

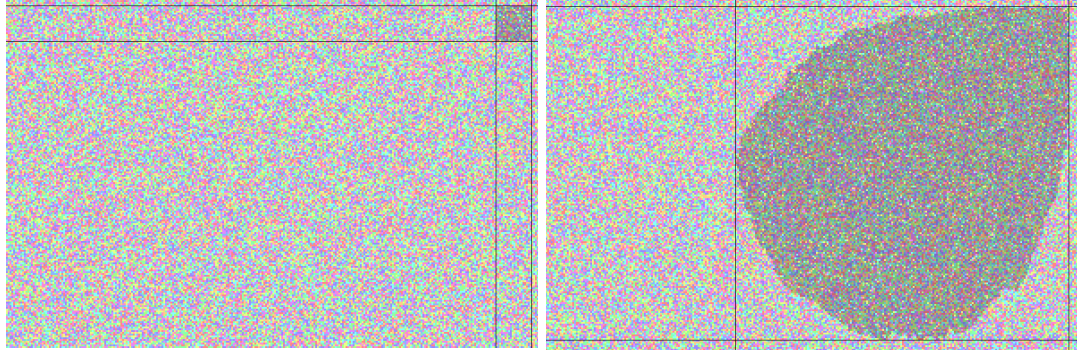


Figura 4.8: Simulación en fondo aleatorio para  $F_{5,2}$ .

Al igual que antes, la perturbación se muestra mediante celdas con tonos más oscuros.

Cabe destacar que las direcciones antes mencionadas se expresan asintóticamente, lo que significa que la perturbación parece propagarse a mayor velocidad en diagonal que en la horizontal o vertical. Esto le otorga a la perturbación una forma más redondeada, similar a una gota, que las que se habían observado hasta ahora.

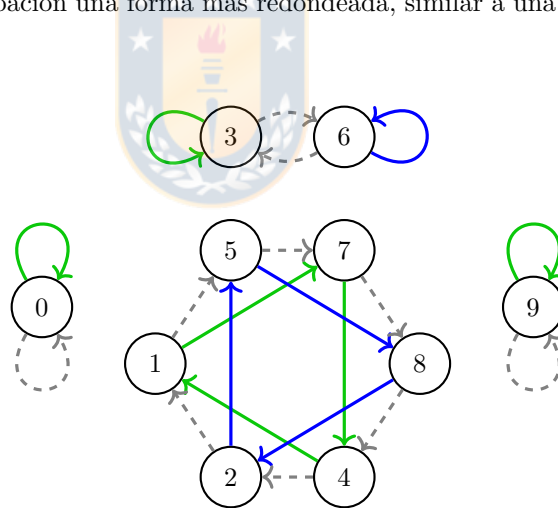


Figura 4.9: Grafo de la dinámica de los fondos homogéneos para  $F_{5,2}$ .

En el grafo de la figura 4.9 se ve representada la dinámica de los fondos homogéneos para el AC  $F_{5,2}$ . Las perturbaciones sobre los fondos que pertenecen a las componentes conexas de  $\mathbb{1}$  y  $\mathbb{3}$  se propagan con dirección  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$ . No se incluyen figuras para estos casos.

En cambio, en las figuras 4.10 y 4.11 se observa que las perturbaciones sobre los fondos  $\mathbb{9}$  y  $\mathbb{0}$  no se propagan con la misma dirección que las otras. En estos casos, lo que ocurre es que las perturbaciones se propagan hacia abajo en dirección  $(-1, -2)$  y hacia la izquierda en dirección  $(-2, -1)$ .

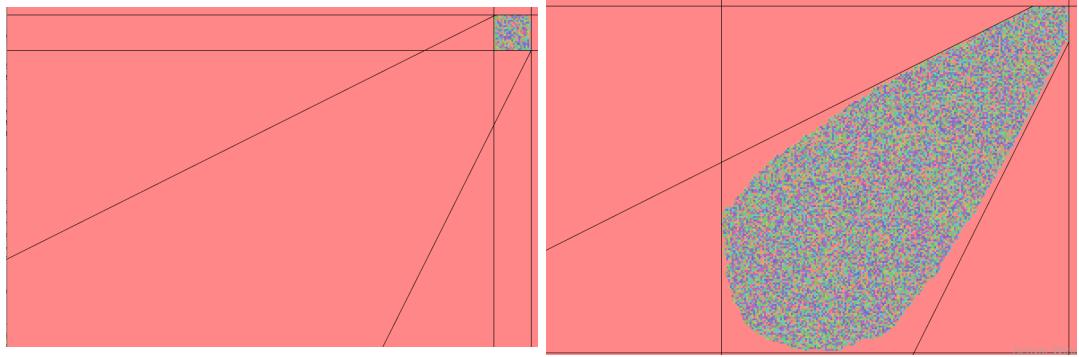


Figura 4.10: Fondo  $c \stackrel{\infty}{=} 0$

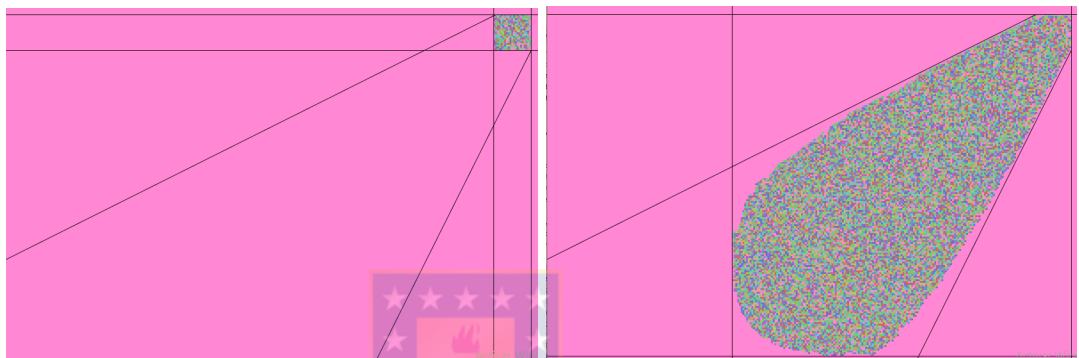


Figura 4.11: Fondo  $c \stackrel{\infty}{=} 9$

### 4.3. $k = 7$ y $k' = 2$

Al igual que antes, si se tienen dos configuraciones aleatorias  $c, d \in \mathbb{Z}_{14}^2$  tales que  $c \stackrel{\infty}{=} d$ , la perturbación se propaga en dirección  $(-1, 0)$  a la izquierda y  $(0, -1)$  hacia abajo. Ésto se observa en la figura 4.12.

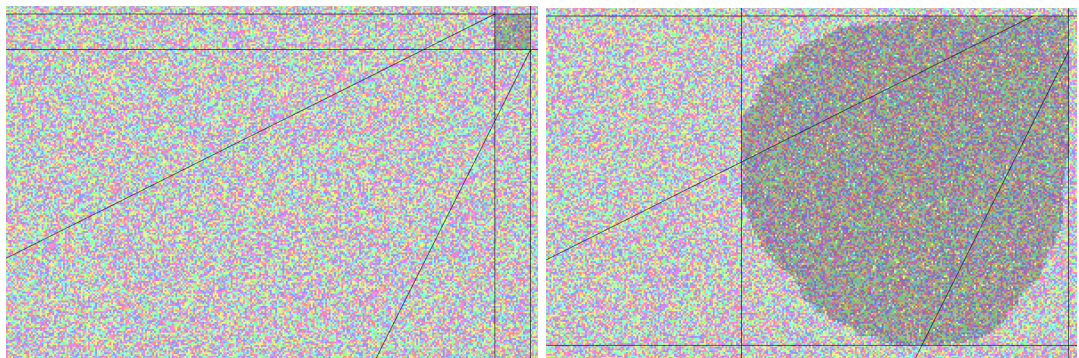


Figura 4.12: Simulación en fondo aleatorio para  $F_{7,2}$ .

Se observa que  $F_{7,2}(0) = 0$  y  $F_{7,2}(13) = 13$ , y en ambos casos, las direcciones de propagación es la misma que en el caso aleatorio, tal como se observa en la figura 4,13

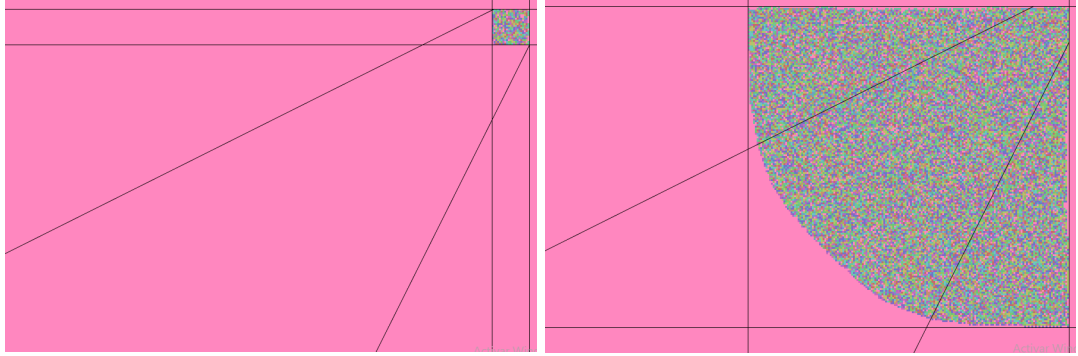


Figura 4.13: Simulación en fondo 13 para  $F_{7,2}$ .

Además, como  $V_{7,2}(0) = 0$  y  $V_{7,2}(13) = 13$  (representado en el grafo con aristas grises segmentadas), resulta natural que si  $(-1, 0)$  es dirección de propagación, entonces  $(0, -1)$  también sea dirección de propagación, sabiendo que  $F_{7,2}(c)_{i,j} = R \circ V_{7,2}^{-1} \circ F_{7,2} \circ V_{7,2} \circ R(c)_{i,j}$ .

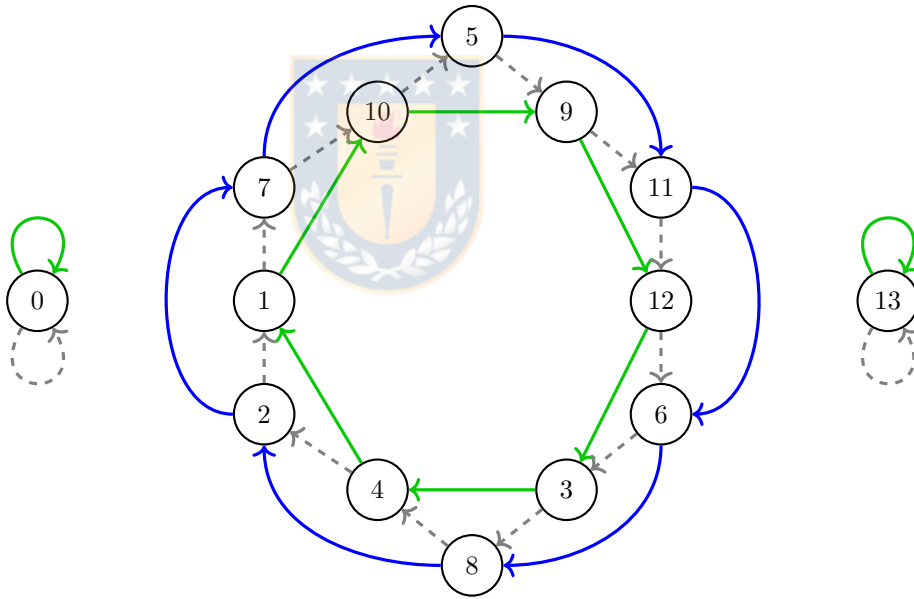


Figura 4.14: Dinámica de los fondos homogéneos para  $F_{7,2}$ .

En la figura 4,14 se observa que todas las configuraciones homogéneas pertenecen a la misma componente conexa, a excepción de 0 y 13.

En las figuras 4.15 y 4.16 se puede apreciar la simetría que el grafo representa con líneas verdes y azules. En efecto, observar que la forma de la propagación en la figura 4.15 es un reflejo con respecto a una recta con pendiente 1, de la propagación en 4.16.

En estos casos la propagación parece crecer en todos los casos homogéneos con dirección  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$ , al igual que el caso aleatorio.

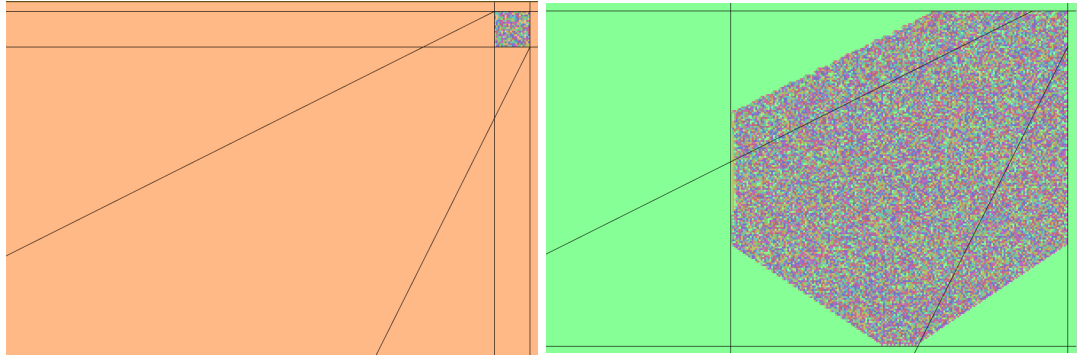


Figura 4.15: Simulación en fondo 1 para  $F_{7,2}$ .

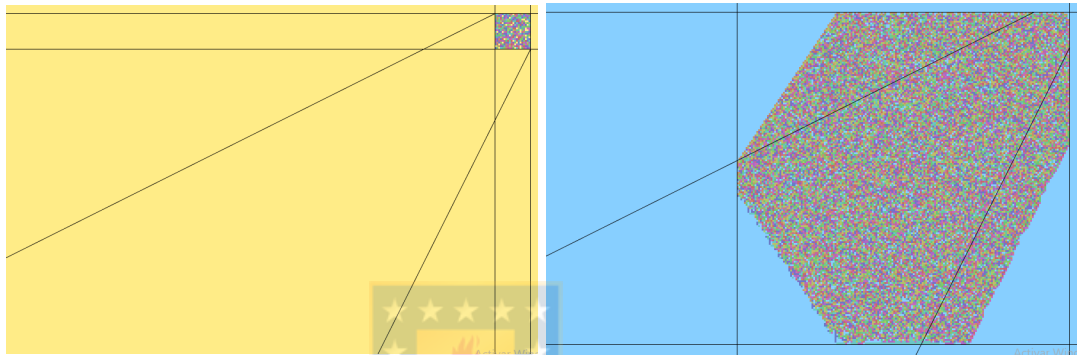


Figura 4.16: Simulación en fondo 2 para  $F_{7,2}$ .

A diferencia de lo que ocurría con  $F_{3,2}$  y  $F_{5,2}$ , en **todas** las secuencias de configuraciones homogéneas las perturbaciones son capaces de propagarse en dirección  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$ .

#### 4.4. $k = 5$ y $k' = 3$

Nuevamente, cuando se tienen dos configuraciones aleatorias  $c, d \in \mathbb{Z}_{15}^{\mathbb{Z}^2}$  tales que  $c \cong d$ , la perturbación se propaga en dirección  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$ , lo que se observa en la figura 4.17.

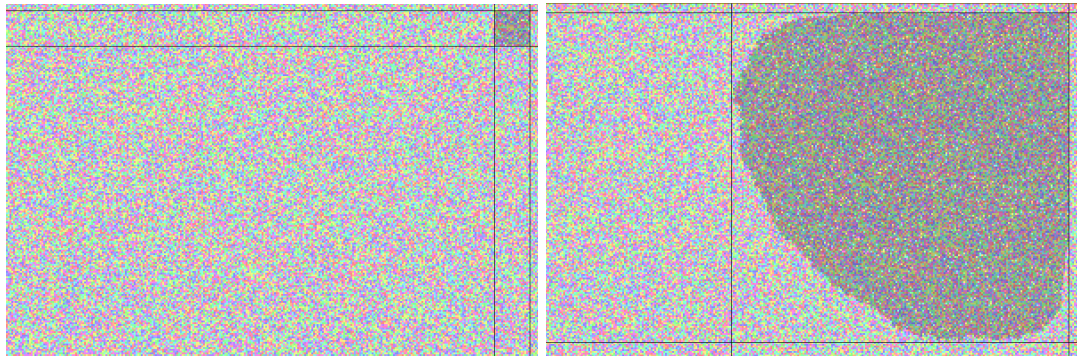


Figura 4.17: Simulación en fondo aleatorio.



En este AC, las perturbaciones sobre todas configuraciones homogéneas se propagan con dirección  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$ . Las secuencias de configuraciones homogéneas son las que se ven representadas en el grafo de la figura 4.18.

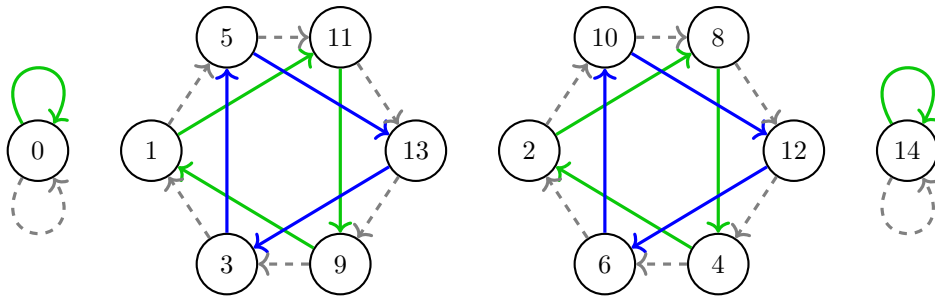


Figura 4.18: Dinámica de los fondos homogéneos para  $F_{5,3}$ .

El grafo indica que existen cuatro dinámicas a analizar. En las figuras 4.19 y 4.20, la perturbación presenta una dinámica similar a otras que ya se han visto.

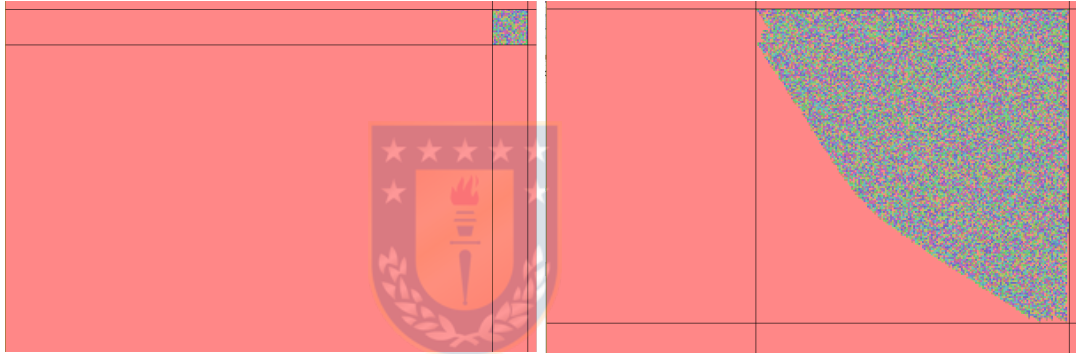


Figura 4.19: Simulación en fondo 0.

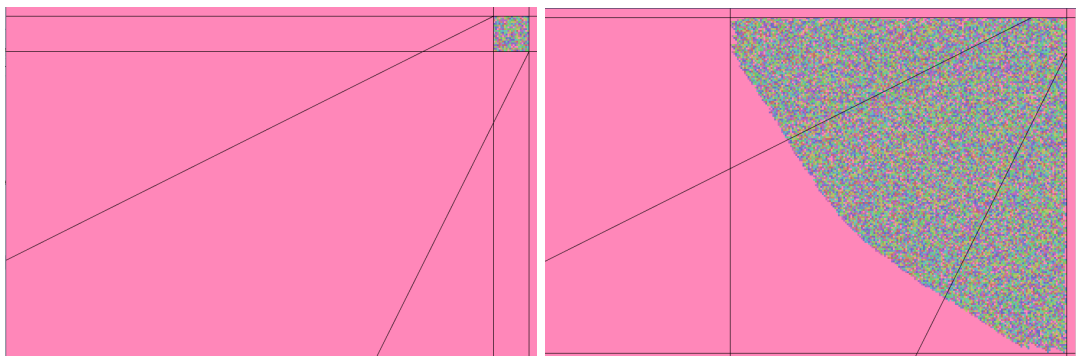


Figura 4.20: Simulación en fondo 14.

En las figuras 4.21 y 4.22, cabe destacar que la evolución de las perturbaciones en estos casos tiene una forma similar a un polígono, lo que hasta ahora sólo se había visto en el caso  $F_{7,2}$ . Todos los casos homogéneos resultan propagar las perturbaciones con direcciones entre  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$ ,

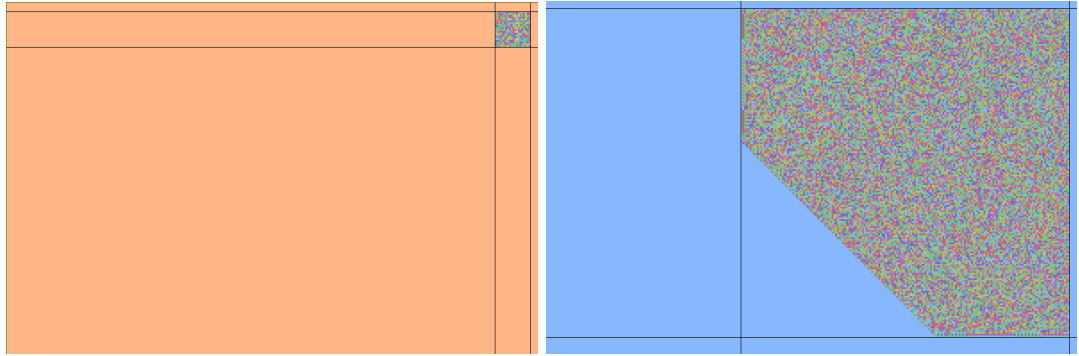


Figura 4.21: Simulación en fondo 1.

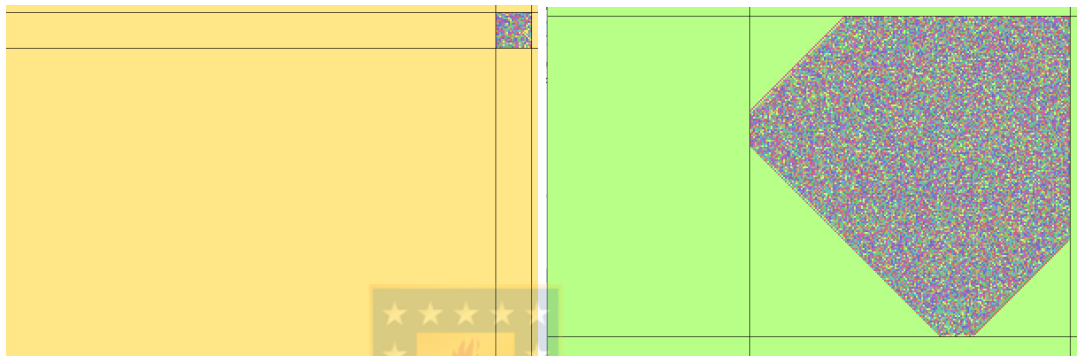


Figura 4.22: Simulación en fondo 2.

#### 4.5. $k = 9$ y $k' = 4$

Al igual que en todos los casos anteriores, cuando se tienen dos configuraciones aleatorias  $c, d \in \mathbb{Z}_{36}^2$ , tales que  $c \stackrel{\infty}{\approx} d$ , la perturbación se propaga en dirección las direcciones entre  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$ , lo cual está representado en la figura 4.23

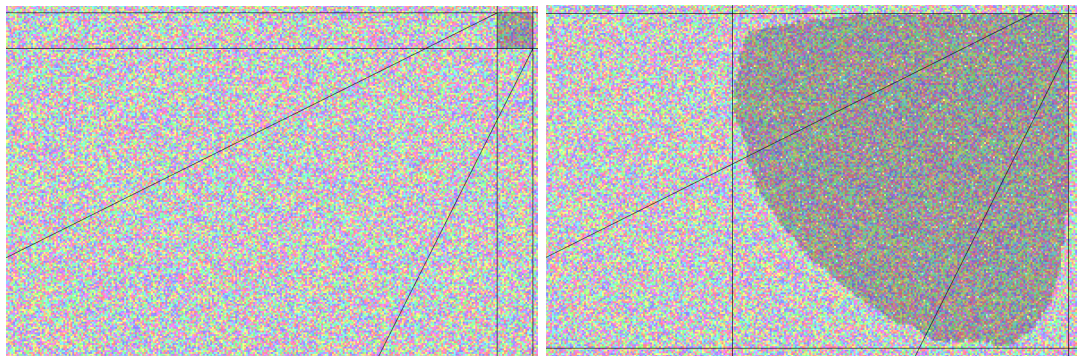


Figura 4.23: Simulación en fondo aleatorio.

Las órbitas de las configuraciones homogéneas están representadas en el grafo de la figura 4.24. Éste indica que hay potencialmente 10 tipos distintos de dinámicas que podrían desarrollarse.

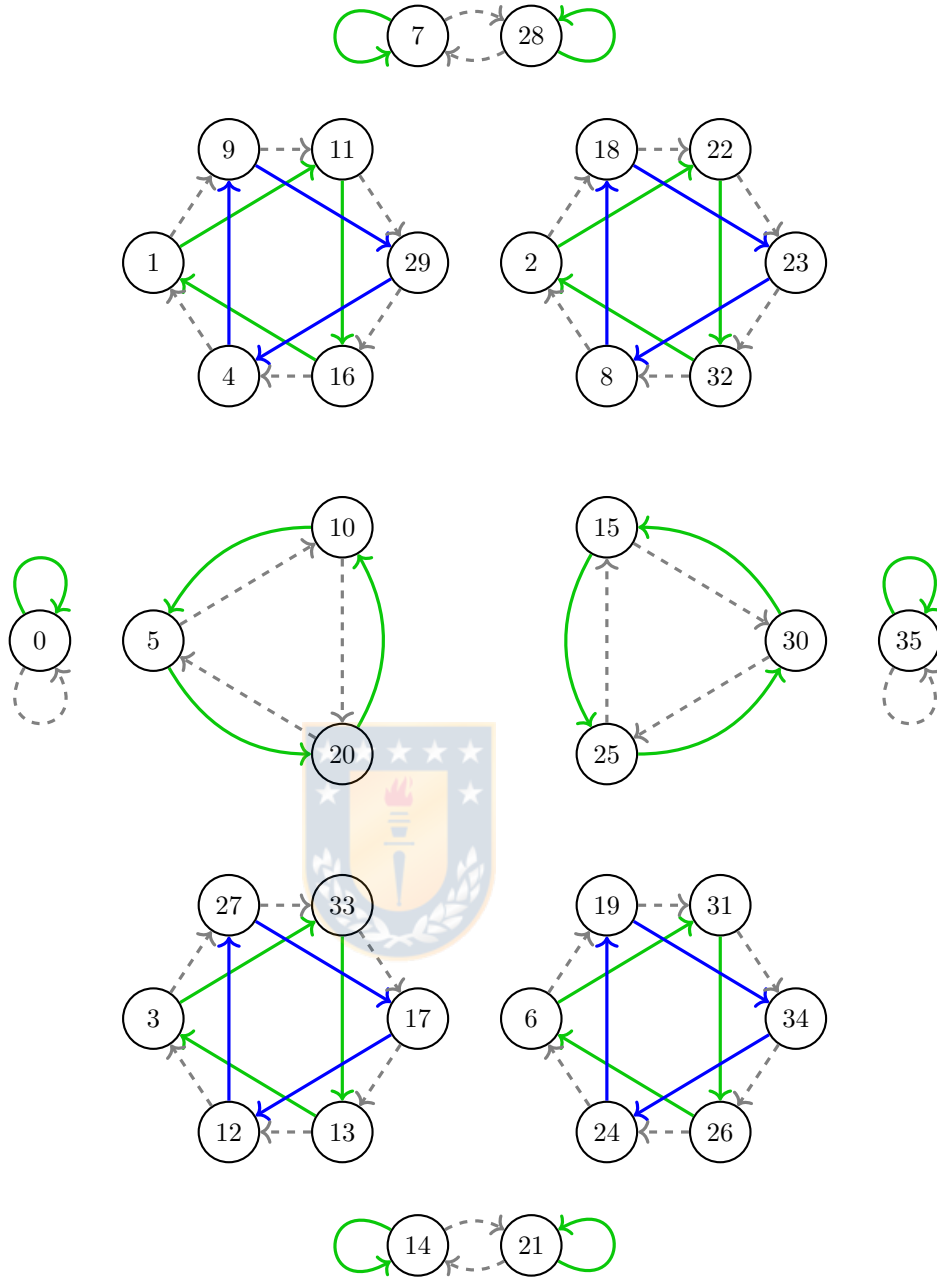


Figura 4.24: Dinámica de los fondos homogéneos para  $F_{9,4}$ .

En las figuras 4.25, 4.26 y 4.27 se observa una muestra de los desarrollos que se ven en las dinámicas que se presentan en este AC. Ésta consiste de los casos donde  $c \in \mathbb{Z}_{36}^2$  es tal que  $c \cong 1$ ,  $c \cong 7$  o  $c \cong 15$ . Los casos  $c \cong 6$ ,  $c \cong 14$  y  $c \cong 5$  son similares a éstos, en tanto a la forma del crecimiento de la perturbación. Cabe destacar que en todos estos casos, las perturbaciones parecen propagarse con direcciones entre  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$ .

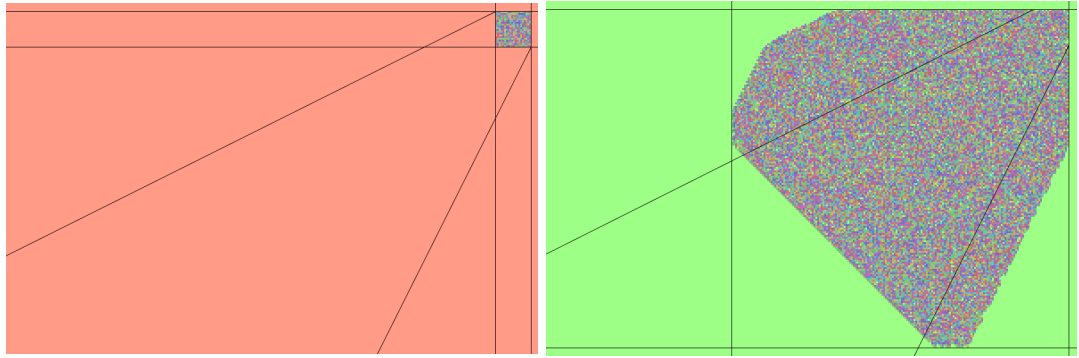


Figura 4.25: Simulación en fondo 1 para  $F_{9,4}$ .

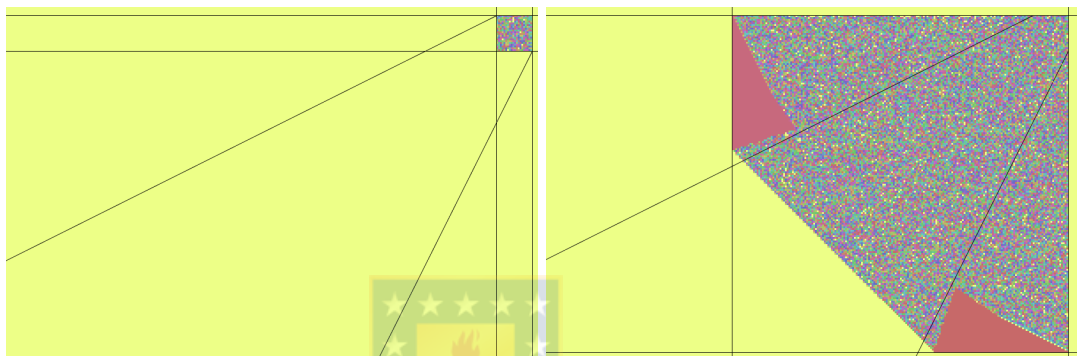


Figura 4.26: Simulación en fondo 7 para  $F_{9,4}$ .

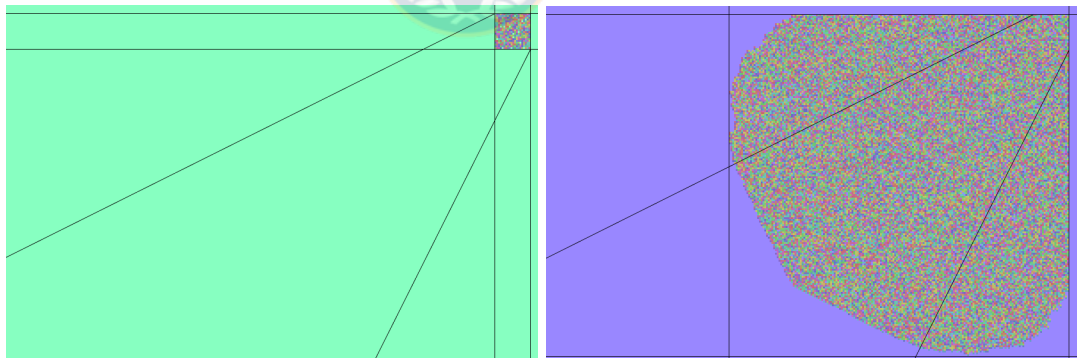


Figura 4.27: Simulación en fondo 15 para  $F_{9,4}$ .

En cambio, en las figuras 4.28 y 4.29, se observa un cambio. En este autómata se encuentran por primera vez fondos homogéneos cuyas perturbaciones parecen propagarse con direcciones entre  $(-3, -1)$  y  $(-1, -3)$ , en lugar de las ya conocidas  $(-1, 0)$ ,  $(-2, -1)$ ,  $(-1, -2)$  o  $(0, -1)$ . Éstas corresponden a configuraciones  $c \in \mathbb{Z}_{36}^2$  tales que  $c \stackrel{\infty}{\cong} 0$  y  $c \stackrel{\infty}{\cong} 35$ . En las figuras se muestran ahora las rectas con pendiente  $\frac{1}{3}$  y 3.

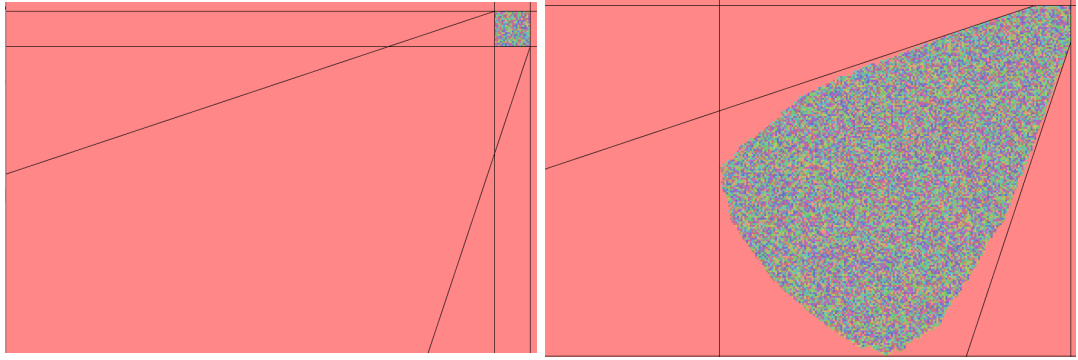


Figura 4.28: Simulación en fondo 0 para  $F_{9,4}$ .  
Las rectas representadas tienen pendiente  $1/3$  y  $3$ .

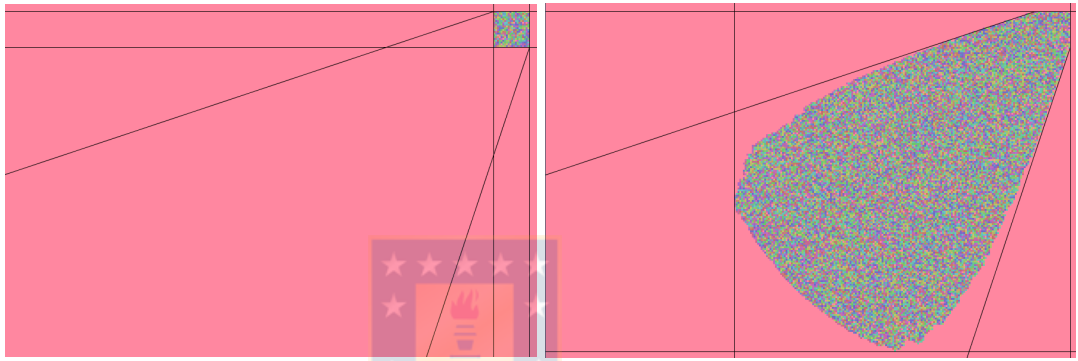


Figura 4.29: Simulación en fondo 35 para  $F_{9,4}$

Además, vale la pena mencionar que las perturbaciones sobre  $2$  y  $6$  también tienen un comportamiento inusual, como se observa en la figura 4.30. En este caso, pareciera que la perturbación eventualmente alcanzara la recta vertical, pero su crecimiento es mucho más lento que en los otros casos. En esta figura se muestran las mismas rectas que en 4.28 y 4,29.

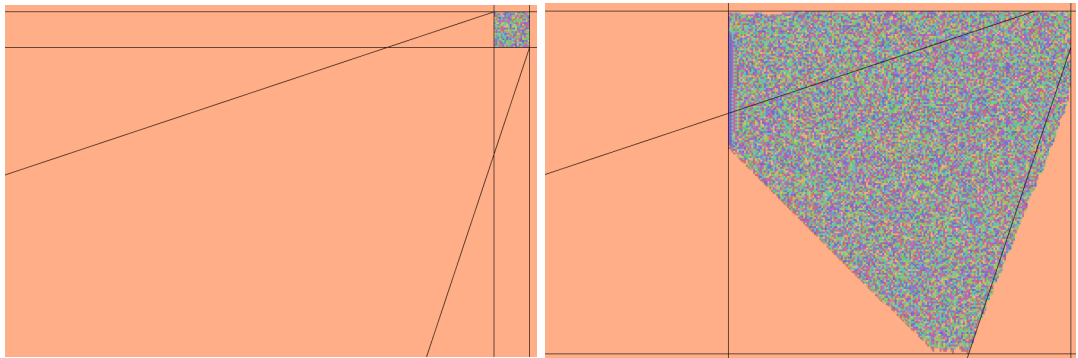


Figura 4.30: Simulación en fondo 2 para  $F_{9,4}$

## Capítulo 5

# En dirección hacia la Pre-expansividad

En este capítulo se toman los resultados ya conocidos de pre-expansividad en una dimensión buscando generalizarlos para dos dimensiones. Luego se analiza qué ocurre cuando hay una única celda distinta entre dos configuraciones asintóticas, ese análisis permite obtener resultados que son útiles para todas las perturbaciones.

Después, se analiza la dinámica de perturbaciones sobre configuraciones homogéneas de un subconjunto de esta familia de AC. En esos casos, se describen las condiciones necesarias y suficientes para determinar (o descartar) direcciones de propagación, presentando también ejemplos de los distintos casos.

Finalmente, se analiza en detalle el caso de las configuraciones homogéneas del autómata  $F_{3,2}$ .

### 5.1. Generalización de resultados en una dimensión

En esta sección se trabajará en encontrar generalizaciones a dimensión superior para los resultados sobre pre-expansividad que se mencionaron en el capítulo de Preliminares.

Con este fin, se enuncia el siguiente lema.

**Lema 5.1.** *Dada una configuración  $a \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ , se define el número racional*

$$g(a) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i,j} m^{-i-j}$$

*entonces, dadas dos configuraciones asintóticas,  $c, d \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ , las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

1. Si  $-$  representa la resta en  $\mathbb{Z}$ , entonces

$$|g(F_{k,k'}(c) - F_{k,k'}(d))| = k^2 |g(c - d)|$$

2. Dadas  $I_0^+, I_0^-, J_0^+$  y  $J_0^-$ , entonces  $m^{-(I_0^+ + J_0^+)} \leq |g(c - d)| \leq m^{-(I_0^- + J_0^-)}$ . Además,  $m^{-(I_0^+ + J_0^+)}$  divide a  $|g(c - d)|$ .

3.  $I_t^- + J_t^- < I_0^+ + J_0^+ + 2 - 2t \frac{\log(k)}{\log(m)}$

4.  $I_0^- + J_0^- - 2 - 2t \frac{\log(k)}{\log(m)} < I_t^+ + J_t^+$

*Demostración.* 1. Por definición

$$\begin{aligned}
 g(F(c) - F(d)) &= \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (kh(c)_{i,j} \% m + \left\lfloor \frac{h(c)_{i,j+1}}{k'} \right\rfloor - kh(d)_{i,j} \% m - \left\lfloor \frac{h(d)_{i,j+1}}{k'} \right\rfloor) m^{-i-j} \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (kh(c)_{i,j+1} \% m - kh(d)_{i,j+1} \% m) m^{-(i+j+1)} \\
 &\quad + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\lfloor h(c)_{i,j+1}/k' \rfloor - \lfloor h(d)_{i,j+1}/k' \rfloor) m^{-(i+j)} \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (kh(c)_{i,j+1} \% m + \lfloor h(c)_{i,j+1}/k' \rfloor \\
 &\quad - (kh(d)_{i,j+1} \% m + \lfloor h(d)_{i,j+1}/k' \rfloor)) m^{-(i+j+1)} \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} k(h(c)_{i,j+1} - h(d)_{i,j+1}) m^{-(i+j+1)} \\
 &= kg(h(c) - h(d))
 \end{aligned}$$

análogamente, se obtiene que  $g(h(c) - h(d)) = kg(c - d)$ ,

con lo que  $|g(F_{k,k'}(c) - F_{k,k'}(d))| = k^2 |g(c - d)|$

2.

$$\begin{aligned}
 |g(c - d)| &= \left| \sum_{i=I^-}^{I^+} \sum_{j=J^-}^{J^+} (c_{i,j} - d_{i,j}) m^{-(i+j)} \right| \\
 &\geq m^{-(I^+ + J^+)}
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 |g(c - d)| &= \left| \sum_{i=I^-}^{I^+} \sum_{j=J^-}^{J^+} (c_{i,j} - d_{i,j}) m^{-(i+j)} \right| \\
 &\leq \sum_{i=I^-}^{I^+} \sum_{j=J^-}^{J^+} |c_{i,j} - d_{i,j}| m^{-(i+j)} \\
 &\leq \sum_{i=I^-}^{I^+} \sum_{j=J^-}^{J^+} (m - 1) m^{-(i+j)} \\
 &= \frac{(m - 1)(m^{1-J^-} - m^{-J^+})(m^{1-I^-} - m^{-I^+})}{(m - 1)^2} \\
 &= \frac{(m^{1-J^-} - m^{-J^+})(m^{1-I^-} - m^{-I^+})}{m - 1} \\
 &< \frac{m^{2-(I^- + J^-)}}{m - 1} \\
 &< m^{2-(I^- + J^-)}
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 m^{2-(I_i^- + J_i^-)} &> |g(F^t(c) - F^t(d))| \\
 &= k^{2t} |g(c - d)| \\
 &\geq k^{2t} m^{-(I_0^+ + J_0^+)}
 \end{aligned}$$

4. Análogamente,

$$\begin{aligned} m^{-(I_t^+ + J_t^+)} &\leq |g(F^t(c) - F^t(d))| \\ &= k^{2t} |g(c - d)| \\ &< k^{2t} m^{2-(I_0^- + J_0^-)} \end{aligned}$$

■

**Ejemplo 5.1.** Cabe destacar que este lema no entrega cotas exactas para  $I_t^- + J_t^-$ . Por ejemplo, en el caso del AC  $F_{8,3}$ , el lema dice que  $I_t^- + J_t^- < I_0^+ + J_0^+ + 1 - 2t \log_{24} (2 \log_{24} \approx -1,3)$ . En la figura 5.1, se observa una perturbación sobre un fondo 0.

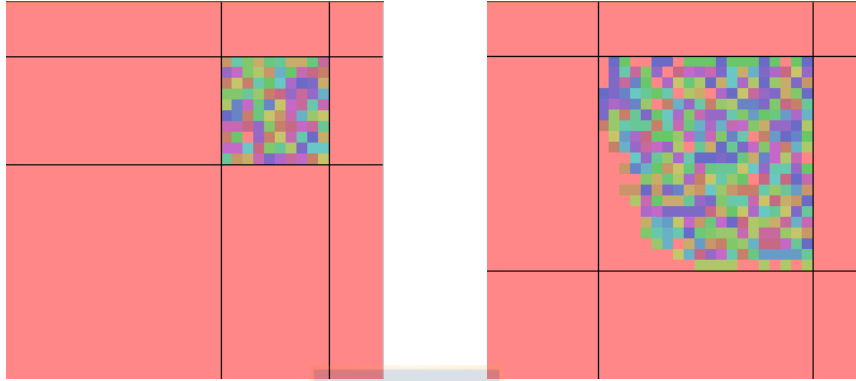


Figura 5.1: A la izquierda,  $c \cong 0$ . A la derecha,  $F_{8,3}^{10}(c)$

Entonces, pasadas 10 iteraciones, se tiene que  $I_0^+ = 0$ ,  $J_0^+ = 0$ ,  $I_0^- = -9$  y  $J_0^- = -9$ , mientras que  $I_{10}^- = -19$  y  $J_{10}^- = -19$ . Con lo cual,

$$\begin{aligned} -19 + -19 &< 0 + 0 + 1 - 10 \cdot 1,3 \\ -38 &< -13 \end{aligned}$$

Observar que en cada aplicación de  $F_{8,3}$  la perturbación se propaga una celda hacia la izquierda y una celda hacia abajo. En efecto, sabiendo que las celdas de la primera línea de la perturbación sólo pueden tener dos ceros en las celdas superiores de la vecindad, la primera vez que se aplica  $F_{8,3}$  se tiene que

$$\begin{aligned} 8(8c_{i,j} \%24 + \lfloor c_{i+1,j}/3 \rfloor) \%24 + \left\lfloor \frac{0+0}{3} \right\rfloor &\in \{0, 8, 16\} + 0 \\ &\in \{0, 8, 16\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline c_{i,j} & c_{i+1,j} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \{0, 8, 16\} & \{0, 8, 16\} \\ \hline \end{array}$$

De modo que en la siguiente iteración, en la celda de la primera fila de la perturbación que se encuentre más a la izquierda sólo se puede tener uno de dos casos

Caso 1

$$\begin{aligned} 8(8 \cdot 0 \%24 + \lfloor 8/3 \rfloor) \%24 + \left\lfloor \frac{0+0}{3} \right\rfloor &= 16 + 0 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 8 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 16 & \{0, 8, 16\} \\ \hline \end{array}$$



Caso 2

$$8(8 \cdot 0 \% 24 + \lfloor 16/3 \rfloor) \% 24 + \left\lfloor \frac{0+0}{3} \right\rfloor = 16 + 0$$

$$= 16$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 16 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 16 & \{0, 8, 16\} \\ \hline \end{array}$$

Así, independiente de cuál sea el valor de la celda más a la izquierda de la primera fila de la perturbación, ésta siempre se propaga una celda hacia la izquierda. Y como el valor con el que se propaga siempre es 16, entonces, se obtiene que en cada iteración la perturbación continuará propagándose una celda a la izquierda.

Además, como  $V_{8,3}(0) = 0$ , utilizando la conjugación entre  $F_{8,3}$  y  $G_{8,3}$ , se tiene que  $F_{8,3}(0) = R \circ V_{8,3}^{-1} \circ F_{8,3} \circ V_{8,3} \circ R(0)$ . Con lo cual, se obtiene que la perturbación también se propaga una celda hacia abajo en cada iteración.

Por lo tanto  $I_t^- = -(9+t)$  y  $J_t^- = -(9+t)$ . Y reemplazando en la desigualdad se tiene,

$$-(9+t) + -(9+t) < 0 + 0 + 1 - t \cdot 1,3$$

$$-18 - 2t < 1 - 1,3t$$

Así, mientras más iteraciones pasen, menos exacta será la cota.

Utilizando el lema anterior, se puede demostrar el siguiente teorema, que corresponde a la generalización del resultado en una dimensión.

**Teorema 5.1.** *Suponiendo que  $p_1, \dots, p_I$  son números primos distintos, o  $y$  y  $q$  son enteros co-primos, los que también son primos relativos con  $p_1, \dots, p_I$ . Si  $k = op_1^{e_1}, \dots, p_I^{e_I}$  y  $k' = p_1^{e'_1}, \dots, p_I^{e'_I} q$ , entonces  $F_{k,k'}$  cumplirá que  $I_t^- + J_t^- - \lceil \beta t \rceil$  no es acotado inferiormente y  $I_t^+ + J_t^+ - \lceil \beta t \rceil$  no es acotado superiormente si*

- $\beta \in ] - 2 \log_m(k), - \min \left\{ \frac{2e_i}{e_i + e'_i} : i \in \{1, \dots, I\} \right\} [$   $y$   $q = 1$ , ó
- $\beta \in ] - 2 \log_m(k), 0 [$   $y$   $q \neq 1$

*Demostración.* Se quiere que  $I_t^- + J_t^- - \lceil \beta t \rceil$  no esté acotado inferiormente y que  $I_t^+ + J_t^+ - \lceil \beta t \rceil$  no esté acotado superiormente, para cualquier par de configuraciones asintóticas  $c$  y  $d$ , si y sólo si  $\beta$  está en el intervalo dado.

- $I_t^- + J_t^- - \lceil \beta t \rceil < I_0^+ + J_0^+ + 1 - 2t \log_m(k) - \lceil \beta t \rceil$  no está acotado si  $\beta > -2 \log_m(k)$ .
- Ahora se estudia  $(I_t^+ + J_t^+)$ . Suponiendo que la descomposición prima de  $q$  es  $q_1^{f_1} \dots q_J^{f_J}$ . Suponiendo además que  $I_0^+ = 0$  y  $J_0^+ = 0$  y sea  $n = |g(c-d)|$ , el cual debe ser natural. Por último, se asume que  $n = o'' p_1^{e''_1} \dots p_I^{e''_I} q_1^{f''_1} \dots q_J^{f''_J}$  donde  $o''$  es primo relativo con  $p_1, \dots, p_I, q_1, \dots, q_J$ . Del lema anterior, es fácil ver que  $s_t = -(I_t^+ + J_t^+)$  es tal que  $m^{s_t} | k^{2t} n$ . Pero como  $m^{s_t} = o^{s_t} p_1^{s_t(e_1 + e'_1)} \dots p_I^{s_t(e_I + e'_I)} q_1^{s_t f_1} \dots q_J^{s_t f_J}$  y  $k^{2t} n = o'' o^{2t} p_1^{e''_1 + 2te_1} \dots p_I^{e''_I + 2te_I} q_1^{f''_1} \dots q_J^{f''_J}$  con lo que  $m^{s_t} | k^{2t} n$  si y sólo si
  1.  $o^{s_t} | o'' o^{2t}$
  2.  $\forall i \in \{1, \dots, I\}, s_t(e_i + e'_i) \leq 2te_i + e''_i$
  3.  $\forall j \in \{1, \dots, J\}, s_t f_j \leq f''_j$

la primera condición es verdadera en forma asintótica, pues del lema anterior se sabe que  $s_t < -(I_0^- + J_0^-) + 1 + 2t \log_m(k)$

Para las otras dos hay que distinguir  $q = 1$  y  $q \neq 1$ :

$q = 1$  La condición 3 se cumple por vacuidad,  $I \geq 1$  y

$$s_t \leq \min \left\{ \left\lfloor \frac{2te_i + e''}{e_i + e'_i} \right\rfloor : i \in \{1, \dots, I\} \right\}$$

para un  $t$  lo suficientemente grande, y por lo tanto,

$$(I_t^+ + J_t^+) - \lceil \beta t \rceil = -s_t - \lceil \beta t \rceil \text{ no está acotado inferiormente si } \beta < \min \{ \lfloor (2e_i)/(e_i + e'_i) \rfloor : i \in \{1, \dots, I\} \}$$

$q > 1$  En este caso  $J > 1$ , y la condición 3 es no vacía, con lo que para algún  $j \in \{1, \dots, J\}$ ,  $-s_t - \lceil \beta t \rceil \geq -f_j''/f_j - \lceil \beta t \rceil$  que no estará acotado superiormente si y sólo si  $\beta < 0$

■

Lamentablemente, el teorema 5.1 no es suficiente para demostrar que  $F_{k,k'}$  es  $\alpha$  pre-expansiva, pues sólo establece que la suma de  $I_t^+ + J_t^+$  y la de  $I_t^- + J_t^-$  no son acotados superior e inferiormente, respectivamente.

Para poder obtener ese resultado, habría que demostrar que tanto  $I_t^-$  como  $J_t^-$  son no acotadas inferiormente, pues de lo contrario, podría pasar que alguna de ellas quedara fija en algún tiempo, de modo que la diferencia entre  $c$  y  $d$  se propague en una franja horizontal, vertical o diagonal.

## 5.2. Caso $|\text{diff}^0(c, d)| = 1$

En esta sección, se trabajarán perturbaciones en una única celda sobre cualquier configuración  $d \in \mathbb{Z}_m^{\mathbb{Z}^2}$ , buscando caracterizar el comportamiento de  $I^+$ ,  $I^-$ ,  $J^+$  y  $J^-$ .

**Notación.** Se denotará por  $[\cdot]_{k'}$  la clase de equivalencia tal que para todo  $a, b \in \mathbb{Z}_m$

$$a \in [b]_{k'} \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{a}{k'} \right\rfloor \% k' = \left\lfloor \frac{b}{k'} \right\rfloor \% k'$$

Observar que esta clase de equivalencia también puede ser caracterizada en términos de  $(k')^2$ .

**Lema 5.2.** Sean  $\hat{i}, \hat{j} \in \mathbb{Z}$  fijos y sean  $c, d \in \mathbb{Z}_m^{\mathbb{Z}^2}$  tales que  $c_{i,j} = d_{i,j}$  para todo  $(i, j) \neq (\hat{i}, \hat{j})$ . Entonces

1. Si  $k$  y  $k'$  son primos relativos.  $F(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \neq F(d)_{\hat{i}, \hat{j}} \Leftrightarrow c_{\hat{i}, \hat{j}} \neq_{k'} d_{\hat{i}, \hat{j}} \Leftrightarrow F(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \neq_{k'} F(d)_{\hat{i}, \hat{j}}$ .
2.  $F(c)_{\hat{i}-1, \hat{j}} \neq F(d)_{\hat{i}-1, \hat{j}} \Leftrightarrow c_{\hat{i}, \hat{j}} \notin [d_{\hat{i}, \hat{j}}] \Leftrightarrow F(c)_{\hat{i}-1, \hat{j}} \neq_{k'} F(d)_{\hat{i}-1, \hat{j}}$ .

Si además  $k > k'$

3.  $F(c)_{\hat{i}, \hat{j}-1} \neq F(d)_{\hat{i}, \hat{j}-1} \Leftrightarrow c_{\hat{i}, \hat{j}} \neq_{k'} d_{\hat{i}, \hat{j}}$
4.  $\left| \left\lfloor \frac{c_{\hat{i}, \hat{j}}}{k'} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{d_{\hat{i}, \hat{j}}}{k'} \right\rfloor \right| \geq k' \Rightarrow F(c)_{\hat{i}-1, \hat{j}-1} \neq F(d)_{\hat{i}-1, \hat{j}-1}$

*Demostración.* Para comenzar se definen

$$A_{i,j} = kc_{i,j} \% m \quad B_{i,j} = \left\lfloor \frac{c_{i,j}}{k'} \right\rfloor \tag{5.1}$$

Y se observa que  $A_{i,j} \in \{0, k, 2k, \dots, (k' - 1)k\}$ ,  
mientras que  $B_{i,j} \in \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$

Notar que  $A_{i,j}$  y  $B_{i,j}$  no dependen de  $c$  ni de  $d$ , pues se utilizan para celdas que aún no han sido alcanzadas por la perturbación.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que  $d_{i,\hat{j}} > c_{i,\hat{j}}$ . Entonces existen  $s, 1 \leq s \leq k' - 1$   
 $1 \ c_{i,\hat{j}} \% k' + s = d_{i,\hat{j}} \% k'$

1. Si  $F(c)_{i,\hat{j}} = F(d)_{i,\hat{j}}$  se tiene que

$$k(kc_{i,\hat{j}} \% m + B_{i+1,\hat{j}}) \% m + \left\lfloor \frac{A_{i,\hat{j}+1} + B_{i+1,\hat{j}+1}}{k'} \right\rfloor = k(kd_{i,\hat{j}} \% m + B_{i+1,\hat{j}}) \% m + \left\lfloor \frac{A_{i,\hat{j}+1} + B_{i+1,\hat{j}+1}}{k'} \right\rfloor$$

Por 2.1, esto es equivalente a

$$k \left[ (kc_{i,\hat{j}} \% k') + B_{i+1,\hat{j}} \% k' \right] = k \left[ (kd_{i,\hat{j}} \% k') + B_{i+1,\hat{j}} \% k' \right]$$

Como  $k$  y  $k'$  son primos relativos, entonces necesariamente

$$k(c_{i,\hat{j}} \% k') = k(d_{i,\hat{j}} \% k')$$

La otra implicación es trivial. Además, como  $k \left[ (kc_{i,\hat{j}} \% k') + B_{i+1,\hat{j}} \% k' \right] \in \{0, k, \dots, (k' - 1)k\}$   
(lo mismo para  $d_{i,\hat{j}}$ ), entonces

$$F(c)_{i,\hat{j}} =_m F(d)_{i,\hat{j}} + nk, \quad n \in \{1, \dots, k' - 1\}$$

y por lo tanto  $F(c)_{i,\hat{j}} \neq_{k'} F(d)_{i,\hat{j}}$ .

2. Si  $F(c)_{i-1,\hat{j}} = F(d)_{i-1,\hat{j}}$ , entonces

$$k(A_{i-1,\hat{j}} + \lfloor c_{i,\hat{j}}/k' \rfloor) \% m + \left\lfloor \frac{A_{i-1,\hat{j}+1} + B_{i,\hat{j}+1}}{k'} \right\rfloor = k(A_{i-1,\hat{j}} + \lfloor d_{i,\hat{j}}/k' \rfloor) \% m + \left\lfloor \frac{A_{i-1,\hat{j}+1} + B_{i,\hat{j}+1}}{k'} \right\rfloor$$

Por 2.1

$$\Leftrightarrow k \left[ (A_{i-1,\hat{j}} + \lfloor c_{i,\hat{j}}/k' \rfloor) \% k' \right] = k \left[ (A_{i-1,\hat{j}} + \lfloor d_{i,\hat{j}}/k' \rfloor) \% k' \right]$$

Usando la distributividad del operador *mod* sobre la adición, se tiene

$$\Leftrightarrow A_{i-1,\hat{j}} \% k' + \lfloor c_{i,\hat{j}}/k' \rfloor \% k' =_{k'} A_{i-1,\hat{j}} \% k' + \lfloor d_{i,\hat{j}}/k' \rfloor \% k'$$

Entonces

$$\left\lfloor \frac{c_{i,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor \% k' = \left\lfloor \frac{d_{i,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor \% k'$$

Es decir,  $F(c)_{i-1,\hat{j}} \neq F(d)_{i-1,\hat{j}} \Rightarrow c_{i,\hat{j}} \in \llbracket d_{i,\hat{j}} \rrbracket$ . La otra implicación es trivial.

Si además  $k$  y  $k'$  son primos relativos, entonces  $F(c)_{i-1,\hat{j}} \neq F(d)_{i-1,\hat{j}} \Leftrightarrow F(c)_{i-1,\hat{j}} \neq_{k'} F(d)_{i-1,\hat{j}}$ ,  
por los mismos argumentos que en ítem anterior.

3. Se procede por contradicción, suponiendo que  $c_{i,\hat{j}} \neq_{k'} d_{i,\hat{j}}$  y  $F(c)_{i,\hat{j}-1} = F(d)_{i,\hat{j}-1}$ .

$$\left\lfloor \frac{kc_{i,\hat{j}} \% m + B_{i+1,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{kd_{i,\hat{j}} \% m + B_{i+1,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor$$

Usando 2.1

$$\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{k(c_{i,\hat{j}} \% k') + B_{i+1,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k(d_{i,\hat{j}} \% k') + B_{i+1,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor$$

Sin pérdida de generalidad, se asume  $d_{i,\hat{j}} \% k' > c_{i,\hat{j}} \% k'$  y se define  $s \in \mathbb{N}^+$  tal que  $s = d_{i,\hat{j}} - c_{i,\hat{j}}$  de donde

$$\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{k(d_{i,\hat{j}} \% k') + ks + B_{i+1,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k(d_{i,\hat{j}} \% k') + B_{i+1,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor$$

Y como  $k > k'$ , entonces existe  $s'$  tal que  $\lfloor ks/k' \rfloor = s'$ . Con lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{k(d_{i,\hat{j}} \% k') + B_{i+1,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor + s' &= \left\lfloor \frac{k(d_{i,\hat{j}} \% k') + B_{i+1,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor \\ &\Leftrightarrow s' = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{ks}{k'} < 1 \\ &\Leftrightarrow s < 1 \end{aligned}$$

Pero  $s \in \mathbb{N}$ , con lo que se ha llegado a una contradicción.

Por lo tanto  $F(c)_{i,\hat{j}-1} = F(d)_{i,\hat{j}-1} \Rightarrow c_{i,\hat{j}} = d_{i,\hat{j}}$ .

La otra implicancia es trivial.

$$4. \left| \left\lfloor \frac{c_{i,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{d_{i,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor \right| \geq k'$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left| A_{i-1,\hat{j}} + \left\lfloor \frac{c_{i,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor - A_{i-1,\hat{j}} - \left\lfloor \frac{d_{i,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor \right| \geq k' \\ &\Rightarrow \left| \frac{A_{i-1,\hat{j}} + \left\lfloor \frac{c_{i,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor}{k'} \right| \neq \left| \frac{A_{i-1,\hat{j}} - \left\lfloor \frac{d_{i,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor}{k'} \right| \\ &\Leftrightarrow F(c)_{i-1,\hat{j}-1} \neq F(d)_{i-1,\hat{j}-1} \end{aligned}$$

Pero si por ejemplo se considera  $A_{i-1,\hat{j}} = 0$ ,  $\left\lfloor \frac{c_{i,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor = k'$  y  $\left\lfloor \frac{d_{i,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor = k' - 1$  entonces se tiene que

$$\begin{aligned} F(c)_{i-1,\hat{j}-1} &= k(A_{i-1,\hat{j}-1} + B_{i,\hat{j}-1}) \% m + \left\lfloor \frac{k'}{k'} \right\rfloor \\ &= k(A_{i-1,\hat{j}-1} + B_{i,\hat{j}-1}) \% m + 1 \\ &\neq k(A_{i-1,\hat{j}-1} + B_{i,\hat{j}-1}) \% m + 0 \\ &= k(A_{i-1,\hat{j}-1} + B_{i,\hat{j}-1}) \% m + \left\lfloor \frac{k' - 1}{k'} \right\rfloor = F(d)_{i-1,\hat{j}-1} \end{aligned}$$

es decir,  $F(c)_{i-1,\hat{j}-1} \neq F(d)_{i-1,\hat{j}-1} \Rightarrow \left| \left\lfloor \frac{c_{i,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{d_{i,\hat{j}}}{k'} \right\rfloor \right| \geq k'$

■

Cabe destacar que en el lema anterior, si  $k' > k$

- El ítem 2 se puede escribir equivalentemente como

$$F(c)_{i-1,\hat{j}} \neq F(d)_{i-1,\hat{j}} \Leftrightarrow \lfloor c_{i,\hat{j}}/k' \rfloor \neq \lfloor d_{i,\hat{j}}/k' \rfloor.$$

- El ítem 4 se cumple por vacuidad, pues para todo  $x, y \in \mathbb{Z}_m$  se tiene que

$$\left| \left\lfloor \frac{x}{k'} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{k'} \right\rfloor \right| < k'.$$

**Observación 5.1.** Se recuerda además que como el autómata es biyectivo, entonces es imposible que la diferencia entre  $c$  y  $d$  desaparezca. Es decir, siempre se va a cumplir al menos uno de los ítems del lema.

**Observación 5.2.** Si bien el lema 5.2 se refiere a dos configuraciones asintóticas que tienen una única diferencia, éste también puede ser usado en otros casos.

Si  $(\hat{i}, \hat{j})$  es una celda tal que las vecindades de  $F(c)_{\hat{i}, \hat{j}}$  y  $F(d)_{\hat{i}, \hat{j}}$ , sólo difieren en una única celda entonces la celda que sea distinta se llamará **esquina** y se podrá usar el ítem del lema 5.2 que le corresponda según su ubicación respecto de  $c_{\hat{i}, \hat{j}}$ . En la figura 5.2 se ven representadas las vecindades de celdas que cumplen con lo recién descrito a través de cuadrados rojos.

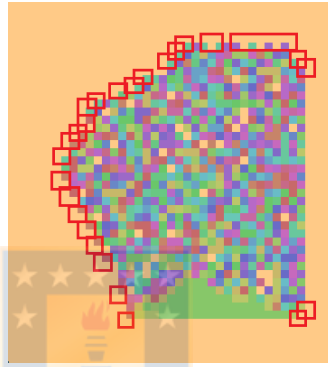


Figura 5.2: Representación de esquinas.  
Corresponde a una perturbación sobre un fondo 2 para el AC  $F_{7,3}$ .

En el caso del autómata  $G = H \circ V$ , el lema 5.2 se cumple con una simetría.

**Lema 5.3.** Sean  $\hat{i}, \hat{j} \in \mathbb{Z}$  fijos y sean  $c, d \in \mathbb{Z}_m^{\mathbb{Z}^2}$  tales que  $c_{i,j} = d_{i,j}$  para todo  $(i, j) \neq (\hat{i}, \hat{j})$ . Entonces

1. Si  $k$  y  $k'$  son primos relativos.  $G(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \neq G(d)_{\hat{i}, \hat{j}} \Leftrightarrow c_{\hat{i}, \hat{j}} \neq_{k'} d_{\hat{i}, \hat{j}} \Leftrightarrow G(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \neq_{k'} G(d)_{\hat{i}, \hat{j}}$ .
2.  $G(c)_{\hat{i}, \hat{j}-1} \neq G(d)_{\hat{i}, \hat{j}-1} \Leftrightarrow c_{\hat{i}, \hat{j}} \notin \left[ \left[ d_{\hat{i}, \hat{j}} \right] \right] \Leftrightarrow G(c)_{\hat{i}, \hat{j}-1} \neq_{k'} G(d)_{\hat{i}, \hat{j}-1}$ .  
Si además  $k > k'$
3.  $G(c)_{\hat{i}-1, \hat{j}} \neq G(d)_{\hat{i}-1, \hat{j}} \Leftrightarrow c_{\hat{i}, \hat{j}} \neq_{k'} d_{\hat{i}, \hat{j}}$
4.  $\left| \left\lfloor \frac{c_{\hat{i}, \hat{j}}}{k'} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{d_{\hat{i}, \hat{j}}}{k'} \right\rfloor \right| \geq k' \Rightarrow G(c)_{\hat{i}-1, \hat{j}-1} \neq G(d)_{\hat{i}-1, \hat{j}-1}$

*Demostración.* Análoga a la del lema anterior. ■

**Definición 5.1.**  $(\hat{i}, \hat{j})$  es *pilar* con respecto al par  $c, d$  si  $c_{\hat{i}, \hat{j}} \neq_{k'} d_{\hat{i}, \hat{j}}$  y si para todo  $n, m \in \mathbb{N}$  se cumple que  $c_{\hat{i}+n, \hat{j}+m} = d_{\hat{i}+n, \hat{j}+m}$ .

Notar que si  $(\hat{i}, \hat{j})$  es pilar con respecto al par  $c, d$ , de acuerdo al ítem 1 del lema 5.2, entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $F^n(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \neq_{k'} F^n(d)_{\hat{i}, \hat{j}}$ .

Gracias al lema 5.2 se puede estudiar el comportamiento de dos configuraciones  $c$  y  $d$ , tales que éstas difieren en una única coordenada  $(\hat{i}, \hat{j})$ , al aplicarles  $F_{k,k'}$   $n$  veces. A continuación, se analizará qué tendría que ocurrir para que no aparecieran pilares, con el objetivo de demostrar que la perturbación siempre pasará a ser un pilar a partir del cual se podrá propagar la perturbación.

### Caso 1:

Si  $F(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \neq F(d)_{\hat{i}, \hat{j}}$ . De acuerdo al ítem 1 del lema 5.2,

$$\begin{aligned} F(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \neq F(d)_{\hat{i}, \hat{j}} &\Leftrightarrow c_{\hat{i}, \hat{j}} \% k' \neq d_{\hat{i}, \hat{j}} \% k' \\ &\Leftrightarrow F(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \% k' \neq F(d)_{\hat{i}, \hat{j}} \% k' \end{aligned}$$

Es decir,  $(\hat{i}, \hat{j})$  es pilar, lo que significa que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tendrá que cumplir

$$F^n(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \neq_{k'} F^n(d)_{\hat{i}, \hat{j}}$$

### Caso 2:

Si no se tiene el caso 1 y  $F(c)_{\hat{i}, \hat{j}-1} \neq F(d)_{\hat{i}, \hat{j}-1}$ . Si no se cumple lo anterior, según los ítems 1 y 3 del lema 5.2 ésto no es posible. En efecto,

$$\begin{aligned} F(c)_{\hat{i}, \hat{j}-1} \neq F(d)_{\hat{i}, \hat{j}-1} &\Leftrightarrow c_{\hat{i}, \hat{j}} \% k' \neq d_{\hat{i}, \hat{j}} \% k' \\ &\Leftrightarrow F(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \% k' \neq F(d)_{\hat{i}, \hat{j}} \% k' \end{aligned}$$

Es decir, nuevamente se obtiene  $(\hat{i}, \hat{j})$  es pilar, o sea que para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$F^n(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \neq F^n(d)_{\hat{i}, \hat{j}}$$

Pero no se puede decir lo mismo sobre  $F^n(c)_{\hat{i}, \hat{j}-1}$  y  $F^n(d)_{\hat{i}, \hat{j}-1}$  porque por un lado al considerar cualquier  $n > 1$  se tiene que hay dos componentes del vecindario que define a  $F_{k,k'}$  que son distintas y estas dos diferencias podrían interactuar de tal modo que para algún  $n > 1$   $F^n(c)_{\hat{i}, \hat{j}-1} = F^n(d)_{\hat{i}, \hat{j}-1}$  y por otro lado, puede ser que  $F(c)_{\hat{i}, \hat{j}-1} \% k' = F(d)_{\hat{i}, \hat{j}-1} \% k'$  con lo que ni siquiera se puede asegurar que  $F^2(c)_{\hat{i}, \hat{j}-2} \neq F^2(d)_{\hat{i}, \hat{j}-2}$ .

### Caso 3:

Si no se tiene el caso 1 y  $F(c)_{\hat{i}-1, \hat{j}} \neq F(d)_{\hat{i}-1, \hat{j}}$ . Según el ítem 2 del lema 5.2,

$$F(c)_{\hat{i}-1, \hat{j}} \neq F(d)_{\hat{i}-1, \hat{j}} \Leftrightarrow F(c)_{\hat{i}-1, \hat{j}} \% k' \neq F(d)_{\hat{i}-1, \hat{j}} \% k'$$

Como  $F(c)_{\hat{i}, \hat{j}} = F(d)_{\hat{i}, \hat{j}}$ , entonces  $(\hat{i}-1, \hat{j})$  es pilar, con lo cual se obtiene que para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$F^n(c)_{\hat{i}-1, \hat{j}} \neq F^n(d)_{\hat{i}-1, \hat{j}}$$

En resumen:

- si  $F(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \neq F(d)_{\hat{i}, \hat{j}}$  (o equivalentemente, si  $F(c)_{\hat{i}, \hat{j}-1} \neq F(d)_{\hat{i}, \hat{j}-1}$ ) entonces  $(\hat{i}, \hat{j})$  es pilar.
- si  $F(c)_{\hat{i}-1, \hat{j}} \neq F(d)_{\hat{i}-1, \hat{j}}$  y  $F(c)_{\hat{i}, \hat{j}} = F(d)_{\hat{i}, \hat{j}}$  entonces  $(\hat{i}-1, \hat{j})$  es pilar.

**Caso 4:**

Si no se cumplen ninguno de los casos anteriores, entonces necesariamente  $F(c)_{\hat{i}-1, \hat{j}-1} \neq F(d)_{\hat{i}-1, \hat{j}-1}$ . Ahora se analizará lo que ocurre con  $(\hat{i}-1, \hat{j}-1)$  cuando  $c_{i,j} = d_{i,j}$  para todo  $(i, j) \neq (\hat{i}, \hat{j})$ .

Como el lema 5.2 no dice nada sobre la paridad de  $F(c)_{\hat{i}-1, \hat{j}-1}$  con respecto a la de  $F(d)_{\hat{i}-1, \hat{j}-1}$ , entonces no se puede asegurar que ésta sea pilar. Pero se sabe que se puede repetir el análisis de los tres casos anteriores cada vez que se aplique  $F$ . De modo que ahora se procede a analizar lo que ocurre en un tiempo  $N$  en la celda  $(\hat{i}-N, \hat{j}-N)$ .

Interesa saber si existe algún tiempo  $N \in \mathbb{N}$  en el que la perturbación deje de desplazarse sólo por la diagonal y en cambio se mueva a la izquierda o hacia abajo, pues de acuerdo a lo anterior, se sabe que cuando eso ocurra se habrá encontrado un pilar.

Es decir, se quiere saber si existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

- (izq) Si para un tiempo  $N \in \mathbb{N}$  se tiene que  $F^N(c)_{\hat{i}-N, \hat{j}-N} \neq F^N(d)_{\hat{i}-N, \hat{j}-N}$  entonces, valiéndose del análisis anterior, se deduce que para todo  $n \geq N$   $F^n(c)_{\hat{i}-N, \hat{j}-N} \neq F^n(d)_{\hat{i}-N, \hat{j}-N}$ . Equivalentemente,  $(\hat{i}-N, \hat{j}-N)$  es pilar respecto al par  $F^N(c)$  y  $F^N(d)$ .
- (abajo) Si para un tiempo  $N \in \mathbb{N}$  se tiene  $F^N(c)_{\hat{i}-N, \hat{j}-N} \neq F^N(d)_{\hat{i}-N, \hat{j}-N}$  entonces se aplica el análisis del caso 1, de modo que para todo  $n \geq N$   $F^n(c)_{\hat{i}-N, \hat{j}-N} \neq F^n(d)_{\hat{i}-N, \hat{j}-N}$ . Esto es,  $(\hat{i}-N, \hat{j}-N)$  es pilar respecto al par  $F^{N-1}(c)$  y  $F^{N-1}(d)$ .

Teniendo claro qué es lo que ocurre fuera de la diagonal, se analizará a continuación qué ocurre con una perturbación que consiste en una única celda que “avanza” sola por la diagonal.

Con este fin, se definirá una recursividad que permite expresar concisamente el autómata  $F_{k,k'}^n$  para cualquier tiempo  $n$  a lo largo de la diagonal  $(\hat{i}-n, \hat{j}-n)$ . Notar que la celda  $(\hat{i}-n, \hat{j}-n)$  necesariamente es la única distinta entre  $c$  y  $d$ , pues si hubieran otras, estarían fuera de la diagonal, con lo que ya se habría encontrado un pilar. Se procede por inducción y para ello se amplían las definiciones de  $A$  y  $B$  que se introdujeron en la sección anterior.

$$A_{i,j}^n(c) := kF^{n-1}(c)_{i,j} \% m \quad B_{i,j}^n(c) := \left\lfloor \frac{F^{n-1}(c)_{i,j}}{k'} \right\rfloor$$

Es fácil ver que  $A_{i,j}^n(c) = A_{i,j}^n(d)$  y  $B_{i,j}^n(c) = B_{i,j}^n(d)$ , si  $i \leq \hat{i}-n$  o  $j \leq \hat{j}-n$ . En el resto de esta sección no se usará álgebra modular, sino que se trabajará en  $\mathbb{Z}$ .

**Proposición 5.1.** *Sea  $c \stackrel{\infty}{=} d$ , tales que  $c_{i,j} = d_{i,j}$  para todo  $(i, j) \neq (\hat{i}, \hat{j})$ , con  $(\hat{i}, \hat{j}) \in \mathbb{Z}^2$ . Se define*

$$\tilde{A}^n = \sum_{l=1}^n (k')^{2l-1} A_{\hat{i}-l, \hat{j}-l+1}^l + \sum_{l=1}^{n-1} (k')^{2l} (k(A_{\hat{i}-l, \hat{j}-l}^l + B_{\hat{i}-l+1, \hat{j}-l}^l) \% m) \quad (5.2)$$

Entonces

$$F^n(c)_{\hat{i}-n, \hat{j}-n} = k(A_{\hat{i}-n, \hat{j}-n}^n + B_{\hat{i}-n+1, \hat{j}-n}^n) \% m + \left\lfloor \frac{\tilde{A}^n + c_{\hat{i}, \hat{j}}}{(k')^{2n}} \right\rfloor \quad (5.3)$$

*Demostración.* Usando la identidad 2.2, se tiene que

$$\begin{aligned}
 F(c)_{\hat{i}-1, \hat{j}-1} &= k(A_{\hat{i}-1, \hat{j}-1}^1 + B_{\hat{i}, \hat{j}-1}^1) \% m + \left[ \frac{A_{\hat{i}-1, \hat{j}}^1 + \lfloor c_{\hat{i}, \hat{j}} / k' \rfloor}{k'} \right] \\
 &= k(A_{\hat{i}-1, \hat{j}-1}^1 + B_{\hat{i}, \hat{j}-1}^1) \% m + \left[ \frac{k' A_{\hat{i}-1, \hat{j}}^1 + c_{\hat{i}, \hat{j}}}{(k')^2} \right] \\
 &= k(A_{\hat{i}-1, \hat{j}-1}^1 + B_{\hat{i}, \hat{j}-1}^1) \% m + \left[ \frac{\tilde{A}^1 + c_{\hat{i}, \hat{j}}}{(k')^2} \right] \\
 &\quad \text{definiendo } \tilde{A}^1 = k' A_{\hat{i}-1, \hat{j}}^1
 \end{aligned}$$

Asumiendo cierto lo siguiente:

$$F^n(c)_{\hat{i}-n, \hat{j}-n} = k(A_{\hat{i}-n, \hat{j}-n}^n + B_{\hat{i}-(n-1), \hat{j}-n}^n) \% m + \left[ \frac{\tilde{A}^n + c_{\hat{i}, \hat{j}}}{(k')^{2n}} \right]$$

donde se define

$$\tilde{A}^n = \sum_{l=1}^n (k')^{2l-1} A_{\hat{i}-l, \hat{j}-l+1}^l + \sum_{l=1}^{n-1} (k')^{2l} (k(A_{\hat{i}-l, \hat{j}-l}^l + B_{\hat{i}-l+1, \hat{j}-l}^l) \% m)$$

Ahora se demuestra para  $n+1$

$$\begin{aligned}
 F^{n+1}(c)_{\hat{i}-(n+1), \hat{j}-(n+1)} &= k(A_{\hat{i}-(n+1), \hat{j}-(n+1)}^{n+1} + B_{\hat{i}-n, \hat{j}-(n+1)}^{n+1}) \% m \\
 &\quad + \left[ \frac{A_{\hat{i}-(n+1), \hat{j}-n}^{n+1} + \lfloor F^n(c)_{\hat{i}-n, \hat{j}-n} / k' \rfloor}{k'} \right] \\
 &= k(A_{\hat{i}-(n+1), \hat{j}-(n+1)}^{n+1} + B_{\hat{i}-n, \hat{j}-(n+1)}^{n+1}) \% m \\
 &\quad + \left[ \frac{k' A_{\hat{i}-(n+1), \hat{j}-n}^{n+1} + F^n(c)_{\hat{i}-n, \hat{j}-n}}{(k')^2} \right]
 \end{aligned}$$

Tomando el segundo sumando y aplicándole la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned}
 &\left[ \frac{k' A_{\hat{i}-(n+1), \hat{j}-n}^{n+1} + F^n(c)_{\hat{i}-n, \hat{j}-n}}{(k')^2} \right] \\
 = &\left[ \frac{k' A_{\hat{i}-(n+1), \hat{j}-n}^{n+1} + k(A_{\hat{i}-n, \hat{j}-n}^n + B_{\hat{i}-(n-1), \hat{j}-n}^n) \% m + \left[ \frac{\tilde{A}^n + c_{\hat{i}, \hat{j}}}{(k')^{2n}} \right]}{(k')^2} \right] \\
 = &\left[ \frac{(k')^{2n+1} A_{\hat{i}-(n+1), \hat{j}-n}^{n+1} + (k')^{2n} (k(A_{\hat{i}-n, \hat{j}-n}^n + B_{\hat{i}-(n-1), \hat{j}-n}^n) \% m) + \tilde{A}^n + c_{\hat{i}, \hat{j}}}{(k')^{2n+2}} \right]
 \end{aligned}$$



Trabajando con los términos del numerador que no dependen de  $c_{i,\hat{j}}$ , se tiene

$$\begin{aligned} & (k')^{2n+1} A_{i-(n+1),\hat{j}-n}^{n+1} + (k')^{2n} (k(A_{i-n,\hat{j}-n}^n + B_{i-(n-1),\hat{j}-n}^n) \%m) + \tilde{A}^n \\ &= (k')^{2n+1} A_{i-(n+1),\hat{j}-n}^{n+1} + (k')^{2n} (k(A_{i-n,\hat{j}-n}^n + B_{i-(n-1),\hat{j}-n}^n) \%m) + \\ & \quad \sum_{l=1}^n (k')^{2l-1} A_{i-l,\hat{j}-l+1}^l + \sum_{l=1}^{n-1} (k')^{2l} (k(A_{i-l,\hat{j}-l}^l + B_{i-l+1,\hat{j}-l}^l) \%m) \\ &= \sum_{l=1}^{n+1} (k')^{2l-1} A_{i-l,\hat{j}-l+1}^l + \sum_{l=1}^n (k')^{2l} (k(A_{i-l,\hat{j}-l}^l + B_{i-l+1,\hat{j}-l}^l) \%m) \end{aligned}$$

de modo que queda:

$$F^{n+1}(c)_{i-(n+1),\hat{j}-(n+1)} = k(A_{i-(n+1),\hat{j}-(n+1)}^{n+1} + B_{i-n,\hat{j}-(n+1)}^{n+1}) \%m + \left[ \frac{\tilde{A}^{n+1} + c_{i,\hat{j}}}{(k')^{2(n+1)}} \right]$$

donde

$$\tilde{A}^{n+1}(c) = \sum_{l=1}^{n+1} (k')^{2l-1} A_{i-l,\hat{j}-l+1}^l + \sum_{l=1}^n (k')^{2l} (k(A_{i-l,\hat{j}-l}^l + B_{i-l+1,\hat{j}-l}^l) \%m)$$

■

### Observación 5.3.

Notar que en cada paso los elementos  $A_{i-n,\hat{j}-n}^n$ ,  $B_{i-n+1,\hat{j}-n}^n$  y  $\tilde{A}^n$  no dependen de  $c_{i,\hat{j}}$

Además, observar que el elemento  $\tilde{A}^n$  puede llegar a ser mucho mayor que  $m = kk'$ .

### 5.3. $k' = 2$ , $k$ impar.

Los ejemplos  $F_{3,2}$  y  $F_{5,2}$  del capítulo de simulaciones corresponden a este grupo y ahora se hará un análisis general.

Notar que  $F_{k,k'}(0) = 0$  y  $\lfloor (m-1)/k' \rfloor = k-1$ , mientras que  $k(m-1) \%m = (k'-1)k$ , con lo que  $F_{k,k'}(m-1) = m-1$ .

Sabiendo que las órbitas de las configuraciones homogéneas son conjuntos periódicos, se obtiene que las órbitas de  $F_{k,k'}$  pueden tener un máximo de  $m-2$  elementos.

Se observa que  $kn \%m \in \{0, k\}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}_m$ , lo que significa que en (3.2) el primer componente de la suma que define a  $F_{k,2}$  pertenece a  $\{0, k\}$ .

En efecto,  $kn \%m = k(n \%2) = 0$  si  $n$  es par y  $kn \%m = k(n \%2) = k$  si  $n$  es impar.

Esto implica que cuando se tienen perturbaciones sobre configuraciones homogéneas, sólo pueden haber dos valores en las celdas de la imagen de la primera línea de la perturbación. En efecto, denotando por  $b_l = ka_l \%m + \lfloor a_l/2 \rfloor$  donde  $a_l \in \mathbb{Z}_m$  el elemento  $l$ -ésimo de la órbita de  $a_0$ , para todo  $l \in \{0, \dots, n\}$ , entonces si  $c \stackrel{\infty}{\cong} \bar{a}_l$ , para todo  $i \in \mathbb{Z}$  se tiene

$$\begin{aligned} F_{k,2}(c)_{i,J_0^+} &= \{0, k\} + \lfloor b_i/2 \rfloor \\ &\in \{\lfloor b_i/2 \rfloor, k + \lfloor b_i/2 \rfloor\} \end{aligned}$$

**Notación.** Sabiendo que  $a_{l+1} \in \{\lfloor b_l/2 \rfloor, k + \lfloor b_l/2 \rfloor\}$ , se denotará  $a'_{l+1} =_m a_{l+1} + k$ . Entonces se dirá que  $a_{l+1}$  y  $a'_{l+1}$  son *compañeros de órbita*.

Se denota por  $T_0$  al tiempo en que para todo  $t > T_0$ ,  $J_t^+ = J_{T_0}^+$ . Se sabe que éste número se alcanza, gracias al teorema 5.1.

**Observación 5.4.** Si  $k' \neq 2$ , entonces se cumple que  $\{0 + B_l, k + B_l, 2k + B_l, \dots, (k' - 1)k + B_l\} \setminus \{a_l\}$  serán los compañeros de órbita de  $a_l$ , donde

$$B_l = \left\lfloor \frac{H_{k,k'}(a_{l-1})_{i,j}}{k'} \right\rfloor$$

**Teorema 5.2.** Sea  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  la órbita de  $a_0$ . Entonces  $(-1, 0)$  será dirección de propagación si y sólo si existe  $l \in \{0, \dots, n\}$ , tal que  $a'_l \notin \llbracket a_l \rrbracket_2$ .  
En caso que para todo  $l \in \{0, \dots, n\}$ ,  $a'_l \in \llbracket a_l \rrbracket_2$ ,  $(-x, -y)$  no será dirección de propagación si  $x/y > 2$ .

*Demostración.* Haremos el análisis por casos.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que la perturbación se encuentra sobre un fondo igual a  $\bar{a}_0$ .

En primer lugar, observamos que la imagen de los elementos de la primera fila de la perturbación sólo pueden ser  $a_1$  o  $a'_1$ .

Sabemos que a partir de un tiempo  $T_0$ , se tiene que para todo  $t \geq T_0$ ,  $J_t^+ = J_{T_0}^+$ , es decir la fila en la que por primera vez aparece un compañero de órbita siempre tendrá compañeros de órbita.

Gracias al lema 5.2, sabemos que si  $a'_l \notin \llbracket a_l \rrbracket_2$ , entonces la perturbación debe avanzar una celda a la izquierda.

Ésto significa que cada  $t$  iteraciones de  $F_{k,2}$ , la perturbación avanzará al menos una celda a la izquierda.

Es fácil ver que avanzará tantas celdas a la izquierda como se tengan compañeros de órbita que no pertenezcan a la clase de equivalencia que les corresponde.

Por lo tanto, si existe algún  $l \in \{0, \dots, n\}$  tal que  $a'_l \notin \llbracket a_l \rrbracket_2$ , entonces  $(-1, 0)$  será dirección de propagación.

Ahora analizaremos el caso en que para todo  $l \in \{0, \dots, n\}$  se tiene que  $a'_l \in \llbracket a_l \rrbracket_2$ . Vamos a denotar por  $\tilde{c} = F_{k,2}^{T_0}(c)$  la configuración en que por primera vez aparece  $a'_l$  en la primera fila de la perturbación, siendo  $\tilde{c} \equiv \bar{a}_l$ . Y denotaremos por  $\hat{j} = J_{T_0}^+$  e  $\hat{i}$  al mayor entero tal que para todo  $i < \hat{i}$ ,  $\tilde{c}_{i,\hat{j}} = a_l$ .

Es decir, la celda  $\tilde{c}_{\hat{i},\hat{j}} = a'_l$  es la que se encuentra más a la izquierda en la primera fila de la perturbación.

$a_l$	$a_l$	$a_l$	$a_l$
$a_l$	$a_l$	$a'_l$	$\{a_l, a'_l\}$
$a_l$	$\tilde{c}_{\hat{i}-1,\hat{j}-1}$	$\tilde{c}_{\hat{i},\hat{j}-1}$	$\tilde{c}_{\hat{i}+1,\hat{j}-1}$

Como  $\tilde{c}_{\hat{i},\hat{j}} = a'_l$ , puede ser que  $F_{k,2}(\tilde{c})_{\hat{i}-1,\hat{j}-1} \notin \llbracket a_{l+1} \rrbracket$

$a_{l+1}$	$a_{l+1}$	$a_{l+1}$	$a_{l+1}$
$a_{l+1}$	$a_{l+1}$	$a'_{l+1}$	$\{a_{l+1}, a'_{l+1}\}$
$a_{l+1}$	$F(\tilde{c})_{\hat{i}-1,\hat{j}-1}$	$F(\tilde{c})_{\hat{i},\hat{j}-1}$	$F(\tilde{c})_{\hat{i}+1,\hat{j}-1}$

Pero sabemos que la celda  $(\hat{i} - 2, \hat{j} - 1)$  tendrá valores restringidos a  $\{a_{l+2}, a'_{l+2}\}$ , pues las celdas superiores a ella son iguales a  $a_{l+1}$ . Entonces puede ser que  $F^2(\tilde{c})_{\hat{i}-2,\hat{j}-1} = a'_{l+2}$ .

$a_{l+2}$	$a_{l+2}$	$a_{l+2}$	$a_{l+2}$
$a_{l+2}$	$a_{l+2}$	$a'_{l+2}$	$\{a_{l+2}, a'_{l+2}\}$
$a'_{l+2}$	$F^2(\tilde{c})_{\hat{i}-1,\hat{j}-1}$	$F^2(\tilde{c})_{\hat{i},\hat{j}-1}$	$F^2(\tilde{c})_{\hat{i}+1,\hat{j}-1}$

O puede ser que esto se demore  $m$  pasos en ocurrir, en cuyo caso tendríamos

$a_{l+m+1}$	$a_{l+m+1}$	$a_{l+m+1}$	$a_{l+m+1}$
$a_{l+m+1}$	$a_{l+m+1}$	$a'_{l+m+1}$	$\{a_{l+m+1}, a'_{l+m+1}\}$
$a'_{l+m+1}$	$F^{m+1}(\tilde{c})_{\hat{i}-1, \hat{j}-1}$	$F^{m+1}(\tilde{c})_{\hat{i}, \hat{j}-1}$	$F^{m+1}(\tilde{c})_{\hat{i}+1, \hat{j}-1}$

De manera que tenemos que es imposible que  $a'_{l+m+1}$  envíe información a la celda  $(\hat{i} - 3, \hat{j} - 1)$ , pues sabemos que  $a'_{l+m+1} \in \llbracket a_{l+m+1} \rrbracket_2$ .

Ahora es necesario analizar qué es lo que ocurre si existe alguna celda más a la izquierda de  $(\hat{i} - 1, \hat{j} - 1)$  que ya sea distinta a  $a_l$ . Entonces tendremos un caso como

$a_l$	$a_l$	$a_l$	$\dots$	$a_l$	$a_l$	$a_l$
$a_l$	$a_l$	$a_l$	$\dots$	$a_l$	$a'_l$	$\{a_l, a'_l\}$
$a_l$	$\tilde{c}_{\hat{i}-m, \hat{j}-1}$	$\tilde{c}_{\hat{i}-m+1, \hat{j}-1}$	$\dots$	$\tilde{c}_{\hat{i}-1, \hat{j}-1}$	$\tilde{c}_{\hat{i}, \hat{j}-1}$	$\tilde{c}_{\hat{i}+1, \hat{j}-1}$

Pero observamos que desde  $(\hat{i} - m, \hat{j} - 1)$  hasta  $(\hat{i} - 2, \hat{j} - 1)$ , se tiene que todas esas celdas reciben la misma información desde las celdas de arriba que las celdas de la primera fila, de modo que para todo  $i \in \{\hat{i} - m, \dots, \hat{i} - 2\}$ ,

$$F(\tilde{c})_{i, \hat{i}-1} \in \{a_{l+1}, a'_{l+1}\}$$

Con lo cual al aplicar  $F_{k,2}$  se tendría

$a_{l+1}$	$a_{l+1}$	$a_{l+1}$	$\dots$	$a_{l+1}$	$a_{l+1}$	$a_{l+1}$
$a_{l+1}$	$a_{l+1}$	$a_{l+1}$	$\dots$	$a_{l+1}$	$a'_{l+1}$	$\{a_{l+1}, a'_{l+1}\}$
$a_{l+1}$	$a'_{l+1}$	$\{a_{l+1}, a'_{l+1}\}$	$\dots$	$F(\tilde{c})_{\hat{i}-1, \hat{j}-1}$	$F(\tilde{c})_{\hat{i}, \hat{j}-1}$	$F(\tilde{c})_{\hat{i}+1, \hat{j}-1}$

Y a partir de ahí se repite el mismo análisis anterior.

Por lo tanto, si para todo  $l \in \{0, \dots, n\}$  se tiene  $a'_l \in \llbracket a_l \rrbracket$ , entonces  $(-x, -y)$  será dirección de propagación sólo si  $x \leq 2y$  ■

A partir del teorema anterior, es directo concluir lo que ocurre para obtener un resultado similar sobre la propagación vertical de las perturbaciones sobre fondos homogéneos.

**Teorema 5.3.** Sean  $(\overline{b_0}, \overline{b_1}, \dots, \overline{b_n})$  la órbita de  $\overline{b_0}$  y  $V_{k,2}(\overline{b_0}) = \overline{a_0}$ . Entonces  $(0, -1)$  será dirección de propagación si y sólo si la órbita de  $a_0$  cumple que existe  $l \in \{0, \dots, n\}$ , tal que  $a'_l \notin \llbracket a_l \rrbracket_2$ . En caso que para todo  $l \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a'_l \in \llbracket a_l \rrbracket_2$ ,  $(-x, -y)$  no será dirección de propagación si  $y/x > 2$ .

*Demostración.* Se observa que como  $F_{k,k'}$  y  $G_{k,k'}$  son conjugadas, entonces se tiene que  $F_{k,k'}(\overline{b_0}) = R \circ V^{-1} \circ F \circ V \circ R(\overline{b_0})$ , de modo que

$$F^n(b_0)_{i,j} = R \circ V^{-1} \circ F^n(a_0)_{j,i}$$

Entonces se repite el análisis anterior, obteniéndose la dirección de propagación horizontal antes descrita. Luego, usando que la órbita es periódica, se puede volver a la órbita original a través de  $V^{-1}$  y finalmente se aplica  $R$ , con lo que la dirección de propagación horizontal pasa a ser vertical. ■

**Observación 5.5.** Si  $a'_l \in \llbracket a_l \rrbracket_2$ , entonces para la primera fila de la perturbación, se tiene que aplicar  $F_{k,2}$  es similar a aplicar la identidad, en el sentido de que las celdas distintas al fondo seguirán siendo distintas y las que eran iguales permanecerán iguales. Es decir, la perturbación conservará su forma.

En cambio, si existe  $l$  tal que  $a'_l \notin \llbracket a_l \rrbracket_2$ , entonces cuando se aplique  $F_{k,2}(\overline{a_l})$  la perturbación tendrá que avanzar una celda hacia la izquierda en la primera fila, lo que es similar a la suma en módulo 2.

Los teoremas anteriores acotan las direcciones de propagación de perturbaciones sobre configuraciones homogéneas para autómatas que cumplen con los supuestos mencionados.  $F_{3,2}$  tiene configuraciones homogéneas que cumplen con los supuestos del teorema 5.2 y otras que cumplen con los de 5.3. Ésto se analizará en detalle en la siguiente sección.

**Ejemplo 5.2.** En el caso del autómata  $F_{7,2}$ , ninguna de las órbitas de las configuraciones homogéneas cumplen con los supuestos y en efecto, las direcciones de propagación están entre  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$ .

Este autómata tiene 4 órbitas distintas. Ellas son  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  y  $\{13\}$ . Además,  $H_{7,2}(2) = 1$ . Y, en efecto, ninguna de ellas cumple con los supuestos del teorema 5.2. Por ejemplo, 11 pertenece a la órbita de 2 ( $F^3(2) = 2$ ) y si tiene que  $c \cong 11$  ( $F(c) \cong 6$  y  $F^2(c) \cong 8$ ).

$$\begin{aligned} 7 \left( 7c_{i,j} \%14 + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{2} \right\rfloor \right) \%14 + \left\lfloor \frac{7 \cdot 11 \%14 + \lfloor 11/2 \rfloor}{2} \right\rfloor &= 7 \left( 7c_{i,j} \%14 + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{2} \right\rfloor \right) \%14 + \left\lfloor \frac{7+5}{2} \right\rfloor \\ &= 7 \left( 7c_{i,j} \%14 + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{2} \right\rfloor \right) \%14 + 6 \\ &\in \{6, 13\} \end{aligned}$$

11	11	⇒	6	6
$c_{i,j}$	$c_{i+1,j}$		{6, 13}	$F(c)_{i+1,j}$

Es decir, si se considera  $a_3 = 11$ , se tiene que  $a_4 = 6$  y  $a'_4 = 13$ , pero  $13 \notin \llbracket 6 \rrbracket_2$ . En efecto,

$$\begin{aligned} 7 \left( 7 \cdot 6 \%14 + \left\lfloor \frac{13}{2} \right\rfloor \right) \%14 + \left\lfloor \frac{7 \cdot 6 \%14 + \lfloor 6/2 \rfloor}{2} \right\rfloor &= 7(0+6) \%14 + \left\lfloor \frac{0+3}{2} \right\rfloor \\ &= 0+1 \\ &= 1 \end{aligned}$$



6	6	⇒	8	8
6	13		1	{8, 1}

Los resultados de esta sección se traducen en que si para un  $k \in \mathbb{N}^+$  dado, se consigue encontrar una órbita de  $F_{k,2}$  que cumpla con los supuestos del teorema 5.2, entonces las direcciones de propagación para las configuraciones homogéneas de ese AC están entre  $(-2, -1)$  y  $(0, -1)$ . Si un autómata tiene órbitas que cumplen con las hipótesis del teorema 5.3, entonces las direcciones de propagación de ese AC estarán entre  $(-1, 0)$  y  $(-1, -2)$ .

Si un autómata tiene órbitas que cumplen las hipótesis de los teoremas 5.2 y 5.3 al mismo tiempo, entonces las perturbaciones sobre esas órbitas tendrán direcciones de propagación que estarán entre  $(-2, -1)$  y  $(-1, -2)$ .

**Ejemplo 5.3.**  $F_{5,2}$  es un ejemplo de un autómata que tiene configuraciones homogéneas que cumplen con las hipótesis de los teoremas 5.2 y 5.3 a la vez. En efecto,

- $c \cong 0$ . Se sabe que 0 es el único miembro de su órbita, y además  $V_{k,k'}(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} F_{5,2}(c)_{i,j} &= 5 \left( 5c_{i,j} \%10 + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{2} \right\rfloor \right) \%10 + \left\lfloor \frac{5 \cdot 0 \%10 + \lfloor 0/2 \rfloor}{2} \right\rfloor \\ &= 5 \left( 5c_{i,j} \%10 + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{2} \right\rfloor \right) \%10 + \left\lfloor \frac{0+0}{2} \right\rfloor \\ &= 5 \left( 5c_{i,j} \%10 + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{2} \right\rfloor \right) \%10 + 0 \\ &\in \{0, 5\} \end{aligned}$$

Es decir,  $a_0 = 0$  y  $a'_0 = 5$ . Gráficamente, se tiene que:

0	0	⇒	0	0
$c_{i,j}$	$c_{i+1,j}$		{0, 5}	{0, 5}

Y en efecto,  $5 \in \llbracket 0 \rrbracket_2$ :

$$\begin{aligned} F_{5,2}(c)_{i-1,j} &= 5 \left( 5 \cdot 0 \%10 + \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \right) \%10 + \left\lfloor \frac{5 \cdot 0 \%10 + \lfloor 0/2 \rfloor}{2} \right\rfloor = 5(0+0) \%10 + \left\lfloor \frac{0+0}{2} \right\rfloor \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Gráficamente:  $\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & \{0,5\} \\ \hline \end{array}$

Lo que indica que  $(-2, -1)$  es una dirección de propagación, cuando la configuración inicial es asintótica a  $\mathbb{0}$ . y como  $V_{k,k'}(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ , entonces  $(-1, -2)$  también es dirección de propagación.

En efecto, al hacer un desarrollo análogo al anterior con  $G_{5,2}(H_{5,2}(c)) \cong G_{5,2}(H_{5,2}(\mathbb{0}))$ , resulta que la perturbación puede avanzar a lo más una única vez hacia abajo, obteniéndose las direcciones antes mencionadas.

- $c \cong \mathbb{9}$ . Análogo al anterior, primero se calcula que  $a_0 = 9$  y  $a'_0 = 4$ .

$$\begin{aligned} 5 \left( 5c_{i,j} \%10 + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{2} \right\rfloor \right) \%10 + \left\lfloor \frac{5 \cdot 9 \%10 + \lfloor 9/2 \rfloor}{2} \right\rfloor &= 5 \left( 5c_{i,j} \%10 + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{2} \right\rfloor \right) \%10 + \left\lfloor \frac{5+4}{2} \right\rfloor \\ &= 5 \left( 5c_{i,j} \%10 + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{2} \right\rfloor \right) \%10 + 4 \\ &\in \{4, 9\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 9 & 9 \\ \hline c_{i,j} & c_{i+1,j} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 9 & 9 \\ \hline \{4,9\} & F(c)_{i+1,j} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} 5 \left( 5 \cdot 9 \%10 + \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor \right) \%10 + \left\lfloor \frac{5 \cdot 9 \%10 + \lfloor 9/2 \rfloor}{2} \right\rfloor &= 5(5+2) \%10 + \left\lfloor \frac{5+4}{2} \right\rfloor \\ &= 5+4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 9 & 9 \\ \hline 9 & 4 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 9 & 9 \\ \hline 9 & \{4,9\} \\ \hline \end{array}$$

Y en efecto,  $4 \in \llbracket 9 \rrbracket_2$ . Al igual que en el caso  $c \cong \mathbb{0}$ , las direcciones de propagación están entre  $(-2, -1)$  y  $(-1, -2)$ , pues  $V_{k,k'}(\mathbb{9}) = \mathbb{9}$ .

## 5.4. Estudio del caso $k = 3$ y $k' = 2$

### 5.4.1. $d = \mathbb{0}$ .

En el caso que la configuración  $c \in \mathbb{Z}_6^{\mathbb{Z}^2}$  sea asintótica a la nula, para todos los  $i \in \mathbb{Z}$  de la primera fila de la perturbación ( $j = J_0^+$ ) se tiene

$$F_{3,2}(c)_{i,j} = 3 \left( 3c_{i,j} \%6 + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{2} \right\rfloor \right) \%6 + \left\lfloor \frac{3 \cdot 0 \%6 + \lfloor 0/2 \rfloor}{2} \right\rfloor \in \{0, 3\}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline c_{i,j} & c_{i+1,j} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \{0,3\} & \{0,3\} \\ \hline \end{array}$$

Es decir,  $a_0 = 0$  y  $a'_0 = 3$ . Luego, al aplicar  $F_{3,2}$  nuevamente, esta vez en particular a la celda  $(i-1, j)$ , donde  $j = J_0^+$  e  $i \in \mathbb{Z}$  es la menor tal que la imagen de  $c$  y  $d$  son distintas se obtiene

$$3 \left( 3 \cdot 0 \%6 + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \right) \%6 + \left\lfloor \frac{3 \cdot 0 \%6 + \lfloor \frac{0}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor = 3$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 3 & F(c)_{i+1,j} \\ \hline \end{array}$$

Con lo que, en efecto,  $3 \notin \llbracket 0 \rrbracket_2$  y por lo tanto se tiene que la dirección de propagación será  $(-1, 0)$  para cualquier perturbación sobre  $0$ . Dicho de otro modo, las perturbaciones sobre  $c \stackrel{\infty}{=} 0$  se propagan con dirección  $(-1, 0)$ ; y con velocidad 1 (es decir, en cada iteración avanza una celda). Además,  $V_{k,k'}(0) = 0$ , por lo tanto  $(0, -1)$  es una dirección de propagación.

#### 5.4.2. $d = 5$

Haciendo el mismo análisis que en el caso anterior, cuando la configuración es asintótica a 5, se tiene que  $a_0 = 5$  y  $a'_0 = 2$ . En efecto,

$$F_{3,2}(c)_{i,j} = 3 \left( 3c_{i,j} \%6 + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{2} \right\rfloor \right) \%6 + \left\lfloor \frac{3 \cdot 5 \%6 + \lfloor \frac{5}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor \in \{2, 5\}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline c_{i,j} & c_{i+1,j} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \{2, 5\} & \{2, 5\} \\ \hline \end{array}$$

$$3 \left( 3 \cdot 5 \%6 + \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor \right) \%6 + \left\lfloor \frac{3 \cdot 5 \%6 + \lfloor \frac{5}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor = 2$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline 2 & F(c)_{i+1,j} \\ \hline \end{array}$$

Es decir, en cada iteración la perturbación avanzará una celda hacia la izquierda ( $2 \notin \llbracket 5 \rrbracket_2$ ), con lo que  $(-1, 0)$  es una dirección de propagación y como  $V_{k,k'}(5) = 5$ , entonces  $(0, -1)$  también es dirección de propagación.

#### 5.4.3. $d = 1$ (o $d = 4$ ).

Según lo que ya se observó en el capítulo de simulaciones, se conjetura que cualquier perturbación sobre estos fondos se propaga con direcciones entre  $(-2, -1)$  y  $(0, -1)$ .

Para comenzar, se observa que si  $c \in \mathbb{Z}_6^2$  es tal que  $c \stackrel{\infty}{=} 4$  o  $c \stackrel{\infty}{=} 1$ , se tiene, respectivamente, que

$$3 \left( 3c_{i,j} \%6 + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{2} \right\rfloor \right) \%6 + \left\lfloor \frac{3 \cdot 4 \%6 + \lfloor \frac{4}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor \in \{1, 4\}$$

o

$$3 \left( 3c_{i,j} \%6 + \left\lfloor \frac{c_{i+1,j}}{2} \right\rfloor \right) \%6 + \left\lfloor \frac{3 \cdot 1 \%6 + \lfloor \frac{1}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor \in \{1, 4\}$$

Es decir, si  $a_0 = 1$ , entonces  $a_1 = 4$ , mientras que  $a'_0 = 4$  y  $a'_1 = 1$ . Además, como  $4 \in \llbracket 1 \rrbracket$ , por el teorema 5.2, se sabe que la dirección de propagación de la perturbación será  $(-2, -1)$ , en el mejor de los casos.

Interesa ver si se puede determinar el tiempo que pasará hasta que la perturbación alcance la celda  $(\hat{i} - 2, \hat{j} - 1)$ .

Sea  $J_0^+ \in \mathbb{Z}$  tal que  $J_0^+ = \sup\{j \in \mathbb{Z} | \exists i \in \mathbb{Z} : c_{i,j} \neq d_{i,j}\}$ . Se tiene que las celdas de la perturbación pueden tener cualquier valor de  $\mathbb{Z}_6$ , pero lo anterior indica que en la primera iteración, los valores de la fila  $J_0^+$  deberán ser 1 o 4. Es decir,  $F(c)_{i,J_0^+} \in \{1, 4\}$

**Observación 5.6.** *Esto significa que puede ocurrir que la fila completa "desaparezca" si coincide con el valor del fondo. Es decir, puede ser que la perturbación se traslade una fila hacia abajo. Si eso ocurre, se debe repetir el análisis en la siguiente iteración, ahora con la fila  $J_1^+$ .*

Entonces se pueden tener los siguientes casos

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} 3(3 \cdot 1 \%6 + \lfloor \frac{1}{2} \rfloor) \%6 + \lfloor \frac{3 \cdot 4 \%6 + \lfloor 4/2 \rfloor}{2} \rfloor = 4$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} 3(3 \cdot 4 \%6 + \lfloor \frac{1}{2} \rfloor) \%6 + \lfloor \frac{3 \cdot 4 \%6 + \lfloor 4/2 \rfloor}{2} \rfloor = 1$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} 3(3 \cdot 1 \%6 + \lfloor \frac{4}{2} \rfloor) \%6 + \lfloor \frac{3 \cdot 4 \%6 + \lfloor 4/2 \rfloor}{2} \rfloor = 4$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} 3(3 \cdot 4 \%6 + \lfloor \frac{4}{2} \rfloor) \%6 + \lfloor \frac{3 \cdot 1 \%6 + \lfloor 1/2 \rfloor}{2} \rfloor = 1$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} 3(3 \cdot 1 \%6 + \lfloor \frac{4}{2} \rfloor) \%6 + \lfloor \frac{3 \cdot 1 \%6 + \lfloor 1/2 \rfloor}{2} \rfloor = 4$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} 3(3 \cdot 4 \%6 + \lfloor \frac{1}{2} \rfloor) \%6 + \lfloor \frac{3 \cdot 1 \%6 + \lfloor 1/2 \rfloor}{2} \rfloor = 1$$

$x$

Así, se obtiene que a partir de la primera vez que aparece un 1 en la fila  $J_t^+$  cuando el fondo es 4 (o viceversa), esa celda cumplirá que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F^{t+n}(c)_{i,J_t^+} \neq F^{t+n}(d)_{i,J_t^+}$ .

Usando el teorema 5.1, se obtiene que  $I_t^+ + J_t^+$  está acotada superiormente (en este caso  $q \neq 1$ ) y por lo tanto debe existir un  $T \in \mathbb{N}$  tal que  $J_t^+ = J_T^+$  para todo  $t \geq T$ . En otras palabras, debe existir un  $T \in \mathbb{N}$  tal que la perturbación conserva la posición de la primera fila de la perturbación entre una aplicación de  $F_{3,2}$  y la siguiente.

Así, sin pérdida de generalidad, se procede asumiendo  $T = 0$ . Para todo  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  tal que  $j = J_0^+$ ,  $I_0^- - 1 \leq i \leq I_0^+$ .

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline c_{i-1,j-1} & c_{i,j-1} \\ \hline \end{array} 3(3c_{i-1,j-1} \%6 + \lfloor \frac{c_{i,j-1}}{2} \rfloor) \%6 + \lfloor \frac{3 \cdot 4 \%6 + \lfloor 1/2 \rfloor}{2} \rfloor = \{0, 3\}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline c_{i-1,j-1} & c_{i,j-1} \\ \hline \end{array} 3(3c_{i-1,j-1} \%6 + \lfloor \frac{c_{i,j-1}}{2} \rfloor) \%6 + \lfloor \frac{3 \cdot 1 \%6 + \lfloor 4/2 \rfloor}{2} \rfloor = \{2, 5\}$$

De modo que, asumiendo que el extremo izquierdo de la perturbación en la fila  $J_0^+ - 1$  coincide con el de  $J_0^+$ , en la siguiente iteración existen las siguientes configuraciones en dicho extremo:

Sea  $(\hat{i}, \hat{j}) \in \mathbb{Z}^2$  tal que  $c_{i,j} = d_{i,j}$  para todo  $i < \hat{i}$ ,  $\hat{j} = J_T^+$ , donde  $T \in \mathbb{N}$  es tal que  $J_t^+ = J_T^+$  para todo  $t > T$ .

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & c_{\hat{i}, \hat{j}-1} \\ \hline \end{array} \quad 3 \left( 3 \cdot 1 \% 6 + \left\lfloor \frac{0}{2} \right\rfloor \right) \% 6 + \left\lfloor \frac{3 \cdot 1 \% 6 + \lfloor 1/2 \rfloor}{2} \right\rfloor = 4$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 3 & c_{\hat{i}, \hat{j}-1} \\ \hline \end{array} \quad 3 \left( 3 \cdot 1 \% 6 + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \right) \% 6 + \left\lfloor \frac{3 \cdot 1 \% 6 + \lfloor 4/2 \rfloor}{2} \right\rfloor = 1$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 5 & c_{\hat{i}, \hat{j}-1} \\ \hline \end{array} \quad 3 \left( 3 \cdot 4 \% 6 + \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \right) \% 6 + \left\lfloor \frac{3 \cdot 4 \% 6 + \lfloor 4/2 \rfloor}{2} \right\rfloor = 1$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 2 & c_{\hat{i}-1, \hat{j}} \\ \hline \end{array} \quad 3 \left( 3 \cdot 4 \% 6 + \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor \right) \% 6 + \left\lfloor \frac{3 \cdot 4 \% 6 + \lfloor 4/2 \rfloor}{2} \right\rfloor = 4$$

Es decir, se necesita  $c_{\hat{i}-1, \hat{j}-1} = 2$  si el fondo es 4 y  $c_{\hat{i}-1, \hat{j}-1} = 3$  si el fondo es 1 para que la perturbación avance hacia la izquierda, además, como el resultado es  $F(c)_{\hat{i}-2, \hat{j}-1} = 4$  y  $F(c)_{\hat{i}-2, \hat{j}-1} = 1$ , respectivamente, se tiene que la perturbación no podrá seguir avanzando hacia la izquierda en esta fila. De manera que la dirección de propagación  $(-2, -1)$  es la mejor que este autómata podría tener hacia la izquierda. En otras palabras, para configuraciones asintóticas a 4 (o 1), las direcciones de propagación hacia la izquierda están entre  $(-2, -1)$  y  $(-1, -1)$ .

**Observación 5.7.** Si se tuviera que  $c_{\hat{i}-2, \hat{j}-1} \neq d_{\hat{i}-2, \hat{j}-1}$ , entonces se debe considerar la fila  $\hat{j} - 1$  para el análisis anterior, buscando la celda más a la izquierda en esa fila que sea distinta. Notar que esto se puede hacer porque la perturbación en  $c_{\hat{i}, \hat{j}}$  no puede avanzar hacia la izquierda, con lo que a partir de la celda  $(\hat{i} - 2, \hat{j} - 1)$  todas actúan de igual manera que la fila  $\hat{j}$ . Es decir, efectivamente existe el mejor de los casos.

A partir de las observaciones anteriores se concluye el siguiente teorema.

**Teorema 5.4.** Sea  $c \in \mathbb{Z}_6^{\mathbb{Z}^2}$ ,  $c \stackrel{\infty}{=} \mathbb{1}$  (o  $c \stackrel{\infty}{=} 4$ ). Sea  $N \geq T_0$  el menor natural par tal que existe  $i \in \mathbb{Z}$  tal que  $F^N(c)_{i, J_{T_0}^+} = 4$  (o  $F^N(c)_{i, J_{T_0}^+} = 1$ ). Sean  $(\hat{i}, \hat{j}) \in \mathbb{Z}^2$  tales que  $\hat{j} = J_{T_0}^+$ , mientras que  $\hat{i}$  es tal que  $F^N(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \neq F^N(\mathbb{1})_{\hat{i}, \hat{j}} = 1$  (o  $F^N(c)_{\hat{i}, \hat{j}} \neq F^N(4)_{\hat{i}, \hat{j}} = 4$ ) y  $F^N(c)_{\hat{i}, \hat{j}} = 1$  (o  $F^N(c)_{\hat{i}, \hat{j}} = 4$ ) para todo  $i < \hat{i}$ .

Entonces, existe  $t \geq N$  tal que  $F^t(c)_{\hat{i}-2, \hat{j}-1} \neq F^t(\mathbb{1})_{\hat{i}-2, \hat{j}-1}$  (o  $F^t(c)_{\hat{i}-2, \hat{j}-1} \neq F^t(4)_{\hat{i}-2, \hat{j}-1}$ ).

*Demostración.* Para comenzar, se define  $\tilde{c} := F^N(c)$  y  $\tilde{d} := F^N(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ . Según las observaciones anteriores, es fácil ver que  $F^{2n}(\tilde{c})_{\hat{i}, \hat{j}} = 4$  y  $F^{2n+1}(\tilde{c})_{\hat{i}, \hat{j}} = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Se procede por contradicción: Asumiendo que para todo  $t \in \mathbb{N}$ ,  $F^t(\tilde{c})_{\hat{i}-2, \hat{j}-1} = F^t(\tilde{d})_{\hat{i}-2, \hat{j}-1}$ . Gracias al análisis anterior, se sabe que  $F(\tilde{c})_{\hat{i}-1, \hat{j}-1} \in \{2, 5\}$ , por lo tanto es distinto de  $F(\mathbb{1})_{\hat{i}-1, \hat{j}-1} = 4$ .

Si  $F(\tilde{c})_{\hat{i}-1, \hat{j}-1} = 2$ , entonces  $F^2(\tilde{c})_{\hat{i}-2, \hat{j}-1} = 4 \neq F^2(\mathbb{1})_{\hat{i}-2, \hat{j}-1}$  y listo.

Si  $F(\tilde{c})_{\hat{i}-1, \hat{j}-1} = 5$ , entonces la perturbación no puede avanzar a la celda  $(\hat{i} - 2, \hat{j} - 1)$ . Ahora se analizará qué ocurre a continuación.

Se sabe que  $F^t(\tilde{c})_{i, \hat{j}} \in \{1, 4\}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , para todo  $t \in \mathbb{N}$ , lo que permite caracterizar la fila  $\hat{j} - 1$  entre  $I_N^-$  e  $I_N^+$ . Esta caracterización se encuentra en la tabla (5.4). En ella se observa que en la fila  $\hat{j} - 1$ , debajo de una celda cuyo estado es 1, sólo pueden encontrarse los estados  $\{0, 1, 3, 4\}$ , mientras que debajo de una cuyo estado es 4, sólo existen los estados  $\{1, 2, 4, 5\}$ . Y además, esta tabla indica qué estado debe tener la celda que está al lado de ese 1 o 4 para que se den dichos valores en la fila  $\hat{j} - 1$ .



$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline c_{i,\hat{j}-1} & c_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline \{2, 5\} & F(c)_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline c_{i,\hat{j}-1} & c_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline \{0, 3\} & F(c)_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline c_{i,\hat{j}-1} & c_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \{1, 4\} & F(c)_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline c_{i,\hat{j}-1} & c_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline \{1, 4\} & F(c)_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array}
 \end{array} \tag{5.4}$$

Si  $F^2(\tilde{c})_{i-1,\hat{j}-1} = 3$ , entonces  $F^3(\tilde{c})_{i-2,\hat{j}-1} \neq F^3(\mathbb{1})_{i-2,\hat{j}-1}$ . Por lo tanto se necesita que  $F^2(\tilde{3})_{i-1,\hat{j}-1} \neq 3$ . Ahora bien, ¿qué se necesita para que ésto pueda ocurrir?

Para que  $F^2(\tilde{c})_{i-1,\hat{j}-1} \neq 3$ , se necesita que  $F(\tilde{c})_{i,\hat{j}-1} \in \{2, 3\}$ , pero según la información de la tabla (5.4), se tiene que las únicas opciones para el estado de una celda debajo de una que contiene un 1, son  $\{0, 1, 3, 4\}$ , por lo tanto se necesita que  $F(\tilde{c})_{i,\hat{j}-1} = 3$ .

A partir de aquí, se simbolizará con texto azul a la celda en la posición  $(\hat{i}, \hat{j})$ .

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \mathbf{1} \\ \hline 5 & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \mathbf{4} \\ \hline 0 & F^2(\tilde{c})_{i,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array}$$

A su vez, para que esa condición pueda darse, se necesita que  $F(\tilde{c})_{i+1,\hat{j}} = 4$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & \mathbf{1} & 4 \\ \hline 5 & 3 & F(\tilde{c})_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \mathbf{4} & 1 \\ \hline 0 & F^2(\tilde{c})_{i,\hat{j}-1} & F^2(\tilde{c})_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array}$$

Por las mismas razones que antes, para que  $F^3(\tilde{c})_{i-1,\hat{j}-1} \neq 2$  se necesita que  $F^2(\tilde{c})_{i,\hat{j}-1} = 2$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & \mathbf{1} & 4 \\ \hline 5 & 3 & F(\tilde{c})_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \mathbf{4} & 1 \\ \hline 0 & 2 & F^2(\tilde{c})_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & \mathbf{1} & 4 \\ \hline 5 & F^3(\tilde{c})_{i,\hat{j}-1} & F^3(\tilde{c})_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array}$$

y para que eso pueda ocurrir, se necesita que  $F(\tilde{c})_{i+1,\hat{j}-1} = 2$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & \mathbf{1} & 4 \\ \hline 5 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \mathbf{4} & 1 \\ \hline 0 & 2 & F^2(\tilde{c})_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & \mathbf{1} & 4 \\ \hline 5 & F^3(\tilde{c})_{i,\hat{j}-1} & F^3(\tilde{c})_{i+1,\hat{j}-1} \\ \hline \end{array}$$

Se demostrará que el primer tiempo  $t$  en el cual  $F^t(\tilde{c})_{i-2,\hat{j}-1} \neq F^t(\mathbb{1})$  es  $l+3$ , si y sólo si  $l$  es el mayor natural tal que  $F(\tilde{c})_{i,\hat{j}-1}F(\tilde{c})_{i+1,\hat{j}-1} \dots F(\tilde{c})_{i+l,\hat{j}-1}$  es subsecuencia de  $32^{\mathbb{Z}}$ .

Observar que en la fila  $\hat{j}$  se necesita que los estados estén ordenados alternadamente entre 4 y 1, si hay dos 1 o dos 4 seguidos, debajo de ellos no pueden haber 2 o 3 (ver tabla (5.4)).

Sin pérdida de generalidad,  $F(\tilde{c}) \cong 4$ , y considerando  $l$  impar. Por inducción sobre el largo de la secuencia tal que si  $c_{i,\hat{j}-1} = 3$  entonces  $c_{i+1,\hat{j}-1} = 2$ , se asume que para  $n = l$ , en  $F(\tilde{c})$  se tiene

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \hat{i} \downarrow & & & & \hat{i} + l + 1 \downarrow \\
 \hline
 4 & 4 & \mathbf{1} & \dots & 4 & \mathbf{1} & 4 \\
 \hline
 4 & 5 & 3 & \dots & 2 & 3 & \{1, 4, 5\} \\
 \hline
 \end{array}$$

Después de aplicar  $F$   $n$  veces se tiene  $F^{n+1}(\tilde{c})$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \hat{i} \downarrow & & & \hat{i} + l + 1 \downarrow & \\ \hline 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 5 & \dots & & & \end{array}$$

$F^{n+2}(\tilde{c})$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \hat{i} \downarrow & & & \hat{i} + l + 1 \downarrow & \\ \hline 4 & 4 & 1 & \dots & 4 & 1 & 4 \\ \hline 4 & 2 & & \dots & & & \end{array}$$

$F^{n+3}(\tilde{c})$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \hat{i} \downarrow & & & \hat{i} + l + 1 \downarrow & \\ \hline 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ \hline 4 & & & \dots & & & \end{array}$$

Entonces para una secuencia de largo  $n = l + 1$ , en  $F(\tilde{c})$  se tiene

$$\begin{array}{ccccccc} & & \hat{i} \downarrow & & & \hat{i} + l + 1 \downarrow & \\ \hline 4 & 4 & 1 & \dots & 4 & 1 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 5 & 3 & \dots & 2 & 3 & 2 & \{0, 1, 4\} \end{array}$$

$F^2(\tilde{c})$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \hat{i} \downarrow & & & \hat{i} + l + 1 \downarrow & \\ \hline 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 4 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 2 & \dots & 3 & 2 & 0 & \end{array}$$

$F^{n+1}(\tilde{c})$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \hat{i} \downarrow & & & \hat{i} + l + 1 \downarrow & \\ \hline 4 & 4 & 1 & \dots & 4 & 1 & 4 \\ \hline 4 & 5 & 0 & \dots & & & \end{array}$$

$F^{n+2}(\tilde{c})$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \hat{i} \downarrow & & & \hat{i} + l + 1 \downarrow & \\ \hline 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 3 & & \dots & & & \end{array}$$

$F^{n+3}(\tilde{c})$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \hat{i} \downarrow & & & \hat{i} + l + 1 \downarrow & \\ \hline 4 & 4 & 1 & \dots & 4 & 1 & 4 \\ \hline 1 & & & \dots & & & \end{array}$$

De modo que, efectivamente, si  $l$  corresponde al largo de la subsecuencia de  $32^Z$  en la fila  $\hat{j} - 1$ , entonces en el tiempo  $l + 3$  se tendrá que  $F^{l+3}(\tilde{c})_{\hat{j}-2, \hat{j}-1} \neq F^{l+3}(\mathbb{1})_{\hat{j}-2, \hat{j}-1}$ .

■

El teorema recién demostrado dice que cuando la configuración inicial es asintótica a  $\mathbb{1}$  o  $\mathbb{4}$ , en el peor de los casos, el tiempo que demora la perturbación en alcanzar la posición deseada depende a lo más de la diferencia entre  $I_0^+$  e  $I_0^-$ , si la perturbación completa estuviera ordenada de la forma que recién se caracterizó.

Cabe destacar que a diferencia de la perturbación en la celda  $(\hat{i}, \hat{j})$ , la perturbación en  $(\hat{i} - 2, \hat{j} - 1)$  no necesariamente se preservará en el tiempo, pero cada cierto número de iteraciones esa celda volverá a ser distinta de la configuración a la cual es asintótica.

#### 5.4.4. $d = 2$ (o $d = \mathbb{3}$ ).

Primero, se observa que  $H_{3,2}(\mathbb{3}) = 4$  y  $H_{3,2}(2) = \mathbb{1}$ . Y usando que  $F_{k,k'}^n = V_{k,k'} \circ G_{k,k'}^{n-1} \circ H_{k,k'}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} F_{k,k'}^n(2) &= V_{k,k'} \circ G_{k,k'}^{n-1} \circ H_{k,k'}(2) \\ &= V_{k,k'} \circ G_{k,k'}^{n-1}(\mathbb{1}) \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} F_{k,k'}^n(\mathbb{3}) &= V_{k,k'} \circ G_{k,k'}^{n-1} \circ H_{k,k'}(\mathbb{3}) \\ &= V_{k,k'} \circ G_{k,k'}^{n-1}(4) \end{aligned}$$

Y usando los mismos argumentos de la sección anterior, es fácil ver que  $(-1, -2)$  es una dirección de propagación para configuraciones asintóticas a  $\mathbb{2}$  y  $\mathbb{3}$  y no puede existir alguna dirección de propagación entre  $(-1, 0)$  y  $(-1, -2)$ .

**Teorema 5.5.** *Sea  $c \in \mathbb{Z}_6^{\mathbb{Z}^2}$ ,  $c \cong 2$  (o  $c \cong \mathbb{3}$ ). Sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\exists i \in \mathbb{Z}$  tal que  $F(c)_{i, J_{2N}^+} = \mathbb{3}$  (o  $F(c)_{i, J_{2N}^+} = 2$ ). Sean  $(\hat{i}, \hat{j}) \in \mathbb{Z}^2$  tales que  $\hat{j} = J_{2N}^+$  y  $F^{2N}(c)_{i, \hat{j}} = 2$  (o  $F^{2N}(c)_{i, \hat{j}} = \mathbb{3}$ ) para todo  $i < \hat{i}$ . Entonces,  $\exists t \geq 2N$  tal que  $F^t(c)_{\hat{i}-2, \hat{j}-1} \neq F^t(2)_{\hat{i}-2, \hat{j}-1}$  (o  $F^t(c)_{\hat{i}-2, \hat{j}-1} \neq F^t(\mathbb{3})_{\hat{i}-2, \hat{j}-1}$ ).*

*Demostración.* Es directo del teorema anterior, usando que  $F_{k,k'}^n = R \circ V_{k,k'}^{-1} \circ F_{k,k'}^n \circ V_{k,k'} \circ R$ ,  $V_{k,k'}(2) = \mathbb{1}$  y  $V_{k,k'}(4) = \mathbb{3}$ . ■

## Capítulo 6

# Conclusiones

En primer lugar, escribimos los resultados ya conocidos para esta familia de autómatas de multiplicación en una dimensión [1], para luego mostrar que la biyectividad se conserva no sólo en dos dimensiones, sino que también para cualquier dimensión superior. Además, se definió la pre-expansividad direccional para autómatas de dimensiones superiores y las direcciones de propagación para pares de configuraciones asintóticas.

Se comprobó que estos autómatas son no-lineales, biyectivos y además son conjugados. Esto último significa que si el objeto de estudio hubiese sido  $G_{k,k'}$  en lugar de  $F_{k,k'}$  los resultados habrían sido los mismos, con una simetría.

Se pudieron generalizar lemas y teoremas de [1], consiguiendo así demostrar que para cualquier par de configuraciones asintóticas, la perturbación aumentará de tamaño. Sin embargo, esto no significa que no pueda ser no acotada en todas las direcciones, pues podría propagarse en una franja diagonal. Esto no ocurre en ninguna de las simulaciones que se hicieron, para ningún par de valores de  $k$  y  $k'$ , lo que indicaría que aún quedan cosas por demostrar.

Demostramos un lema que permite analizar localmente el comportamiento dinámico del autómata, a través de la relación entre  $k$  y  $k'$  y así determinar una cota superior para que una perturbación no se desplace en la grilla, sino que se detenga y comience a propagarse.

A través de la simulación y comparación de  $F_{k,k'}$  y su respectiva inversa para distintos valores de  $k$  y  $k'$ , pudimos hacer conjeturas sobre la propagación de perturbaciones sobre fondos homogéneos.

Utilizando el concepto de órbita y el hecho de que el autómata es biyectivo, se pudo determinar un teorema que establece las condiciones bajo las cuales una perturbación se propaga y en qué dirección lo hace, sobre fondos homogéneos. Además, se estableció para  $k'$  igual a 2 y  $k$  impar que si  $(-1, 0)$  no es una dirección de propagación, entonces  $(-2, -1)$  es la mejor dirección hacia la izquierda. Análogamente, si las perturbaciones sobre un fondo homogéneo no se propagan con dirección  $(0, -1)$  hacia abajo, entonces el mejor de los casos es  $(-1, -2)$ . Estas condiciones serán fáciles de extender para otros  $k$  y  $k'$ .

Si bien no se logró responder la pregunta inicial, ¿Existen miembros de  $F_{k,k'}$  que sean pre-expansivos en dos dimensiones?, sí se consiguieron resultados que permitirán seguir avanzando en esta línea de investigación, tales como las condiciones necesarias y suficientes para determinar las posibles direcciones de propagación cuando  $k'$  es igual a 2; y también, por supuesto, la generalización de los resultados ya conocidos en una dimensión.

# Capítulo 7

## Referencias

- 1 A. Gajardo, V. Nesme, G. Theyssier, Pre-expansivity in Cellular Automata. *Theoretical Computer Science*, vol 816(1), 3766, 2020.
- 2 Gustav Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Mathematical systems theory*, 3(4):320–375, 1969.
- 3 P. Kurka. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 17:417–433, 1997.
- 4 A. W. Burks, Essays on Cellular Automata, *Univ. Illinois Press*, 1970.
- 5 M. Pivato, The ergodic theory of cellular automata, *Int. J. General Systems* 41 (6) (2012) 583–594.
- 6 T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, Cellular Automata and Groups, Springer, 2010.
- 7 E. Akin, J. Auslander, and K. Berg. When is a transitive map chaotic? In Bergelson, March, and Rosenblatt, editors, *Conference in Ergodic Theory and Probability*, pages 25–40. de Gruyter and Co., 1996.
- 8 F. Blanchard, A. Maass, Dynamical properties of expansive one-sided cellular automata. *Israel Journal of Mathematics*, 99, 149174, 1997.
- 9 M. A. Shereshevsky, Expansiveness, entropy and polynomial growth for groups acting on subshifts by automorphisms, *Indagationes Mathematicae* 4 (2) (1993) 203 – 210.
- 10 M. Pivato, Positive expansiveness versus network dimension in symbolic dynamical systems, *Theor. Comput. Sci.* 412 (30) (2011) 3838–3855.
- 11 P. Kurka, Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 17 (1997) 417–433.
- 12 C. Jadur, J. Yazlle, On the dynamics of cellular automata induced from a prefix code, *Advances in Applied Mathematics* 38 (1) (2007) 27 – 53.
- 13 P. Di Lena, Decidable properties for regular cellular automata, in: G. Navarro, L. Bertossi, Y. Kohayakawa (Eds.), Fourth IFIP International Conference on Theoretical Computer Science-TCS 2006, Vol. 209 of IFIP International Federation for Information Processing, *Springer US*, 2006, pp.

- 14 V. Lukkarila, On undecidable dynamical properties of reversible onedimensional cellular automata, Ph.D. thesis, *Turku Centre for Computer Science* (2010).
- 15 E. M. Coven, M. Keane, Every compact metric space that supports a positively expansive homeomorphism is finite, Vol. Volume 48 of *Lecture Notes–Monograph Series, Institute of Mathematical Statistics, Beachwood, Ohio, USA*, 2006, pp. 304–305.
- 16 R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik *Concrete Mathematics*. p 72.

