

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA



Profesor Patrocinante:

Dr. Daniel G. Sbarbaro H.

Informe de Memoria de Título
para optar al título de:

Ingeniero Civil Electrónico

**Método de Medición y Detección de Conductividad
Eléctrica Usando una Sonda y Tomografía por
Impedancia Eléctrica**

Concepción, Abril de 2013

Sebastián Andrés Chandía Díaz

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Profesor Patrocinante:
Dr. Daniel G. Sbarbaro H.

Método de Medición y Detección de Conductividad Eléctrica Usando una Sonda y Tomografía por Impedancia Eléctrica



Sebastián Andrés Chandía Díaz

Informe de Memoria de Título
para optar al Título de

Ingeniero Civil Electrónico

Abril 2013

Resumen

La tomografía por impedancia eléctrica corresponde a una técnica no invasiva en la cual se tiene un cuerpo o un medio a analizar y se procede a inyectar corrientes en un determinado orden o secuencia, midiendo voltajes por cada inyección realizada. Este método permite conocer la conductividad eléctrica del cuerpo o medio en análisis mediante la implementación de herramientas matemáticas, tal como el método de Newton-Raphson modificado y regularización del tipo variación total desarrollados durante este trabajo de Memoria de Título. Se obtienen las ecuaciones características que representan el sistema en dos versiones, una versión unidimensional y otra bidimensional. Esto se desarrolla con el objetivo de poder estimar el comportamiento del sistema con dicho modelo en dos dimensiones y poder aprovechar la matemática reducida otorgada por el modelo en una dimensión para así estimar un perfil conductivo que represente el sistema en un momento determinado. También se desarrolla un proceso de calibración basándose en mediciones con un conductímetro de laboratorio para una muestra de agua potable, permitiendo calibrar el algoritmo y setear las mediciones tal que la conductividad eléctrica arroje $95 \mu S/cm$ para dicha muestra, y un método de ajuste que permita poder traspasar la información obtenida por mediciones de voltaje reales al modelo en una dimensión y posteriormente reconstruir dicho perfil de conductividad eléctrica. Gracias a las simulaciones de ambos modelos se tiene que es necesario una elección adecuada de hiperparámetro de regularización de alrededor del valor de 1×10^{-7} y del parámetro de diferenciabilidad del método de variación total de 1×10^{-9} para asegurar la convergencia del algoritmo de reconstrucción. Finalmente se utilizó 20 kilogramos de dióxido de silicio como material alterador de conductividad eléctrica en 120 litros de agua potable para obtener datos reales medidos por la sonda tomográfica utilizada y configurada para 15 secuencias adyacentes de inyección de corriente y 15 mediciones de voltaje adyacentes por secuencia, arrojando resultados que verifican el método de reconstrucción desarrollado a lo largo de este trabajo y cumpliendo los objetivos definidos inicialmente.



A mis padres y familia.

Agradecimientos

Quisiera comenzar agradeciendo a mi familia entera, a todos ellos les debo este trabajo. Gracias por apoyarme y darme fuerzas cuando el camino se hacía cada vez más empinado. Este trabajo lleva en cada letra y número, parte de ustedes. A mis padres de los que estoy orgulloso, ahora empieza otro camino del que espero devolverles todo lo que han hecho por mí sin dudarlo dos veces.

Como no agradecer a Don Pato quien, según yo, por obligación debiera estar en todos los agradecimientos salidos desde el laboratorio de control, sin duda una gran persona con una gran disposición y sentido del humor.

A todos mis compañeros y amigos que a lo largo de este gran periodo de mi vida, han estado en las buenas y las malas. Ya sea para apoyar, hacer deporte o simplemente pasar el rato conversando y riendo. Especiales agradecimientos a Kosa, Lucho y Feña que han sido personas importantes a lo largo de este esforzado camino y espero no perder el contacto en esta próxima etapa de nuestras vidas.

Por otro lado están mis mentores, mis profesores que estuvieron para obligar que siempre diera lo mejor de mí en cada tarea o trabajo realizado. Tremendamente agradecido del profesor Daniel Sbarbaro de la oportunidad que me ofreció para realizar mi memoria de título y poder aportar con algo nuevo dentro del departamento.

Finalmente agradecido de tener a una mujer tan especial a mi lado. Marliz, te amo mucho y aprovecho para desearte éxito y darte las gracias por apoyarme siempre que lo necesitaba. Sé que te queda recorrer tu propio camino dentro de la universidad y quiero que estés segura que siempre estaré para ayudarte y apoyarte. Gracias por hacerme reír y estar contento con tu compañía, te amo.

En mi cabeza sé que faltan nombrar demasiadas personas de las cuales les estoy tremendamente agradecido, pero sé que a lo largo del tiempo les voy a ir devolviendo de alguna forma todas esas buenas vibras que me entregaron. **Gracias a ustedes padres, tíos, tías, primos, primas, abuelas, abuelos, polola, amigos, amigas, profesores, auxiliares..... simplemente muchas, muchas gracias.**

Tabla de Contenidos

NOMENCLATURA	XI
ABREVIACIONES.....	XIV
1. INTRODUCCIÓN	1
2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	2
2.1. INTRODUCCIÓN	2
2.2. TRABAJOS PREVIOS	2
2.2.1 <i>Desarrollo de modelos y análisis matemático</i>	2
2.2.2 <i>Análisis histórico</i>	6
2.3. DISCUSIÓN	10
3. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	11
3.1. INTRODUCCIÓN	11
3.2. HIPÓTESIS DE TRABAJO	11
3.3. OBJETIVOS	11
3.3.1 <i>Objetivo General</i>	11
3.3.2 <i>Objetivos Específicos</i>	11
3.4. ALCANCES Y LIMITACIONES	12
3.5. METODOLOGÍA.....	12
4. MODELOS DIRECTO E INVERSO	14
4.1. INTRODUCCIÓN	14
4.2. OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA DIRECTO DE TIE (1-D)	14
4.2.1 <i>Cálculo de la matriz de rigidez B (1-D)</i>	17
4.3. OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA DIRECTO DE TIE (2-D)	20
4.3.1 <i>Cálculo de la matriz de rigidez A2d (2-D)</i>	25
4.4. OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA INVERSO DE TIE (1-D)	28
4.4.1 <i>Cálculo del Jacobiano presente en NRm del problema inverso</i>	30
4.4.2 <i>Cálculo de la derivada de B con respecto a σ_k</i>	31
4.5. MÉTODO DE VARIACIÓN TOTAL DE REGULARIZACIÓN	31
4.6. MÉTODOS DE INYECCIÓN DE CORRIENTE Y MEDICIÓN DE VOLTAJE.....	34
5. CALIBRACIÓN, SIMULACIONES Y RESULTADOS.....	36
5.1. CONSIDERACIONES PRE-SIMULACIÓN Y OBTENCIÓN DE RESULTADOS	36
5.2. SIMULACIÓN DEL PROBLEMA DIRECTO (1-D)	40
5.3. SIMULACIÓN DEL PROBLEMA DIRECTO (2-D)	42
5.4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN DEL PROBLEMA INVERSO (1-D).....	43
5.5. AJUSTE Y CALIBRACIÓN DEL MODELO 2-D.....	57
5.5.1 <i>Relación perfil conductivo y mediciones de voltaje</i>	59
5.6. CALIBRACIÓN ENTRE MODELO 2-D Y 1-D.....	64
5.7. RESULTADOS CON DATA SIMULADA	70
5.8. RESULTADOS CON DATA REAL	74
5.8.1 <i>Análisis de los resultados con data real</i>	83
6. CONCLUSIONES.....	85
BIBLIOGRAFÍA	86
ANEXO A. CARACTERÍSTICAS DEL HARDWARE.....	88
A.1. SONDA TOMOGRÁFICA.....	88
A.2. PLACA P64 EIST	88
A.3. VARIADOR POWERFLEX 70EC	90
A.4. BOMBAS BREDEL HOSE SP/25	91

A.5. PLC ALLEN BRADLEY 1756 Y SWITCH.....	91
ANEXO B. DIAGRAMA DE COLUMNA Y Sonda	92
ANEXO C. SET-UP EXPERIMENTAL.....	94
ANEXO D. MODELO RESISTIVO EN UNA DIMENSIÓN	96



Lista de tablas

Tabla 4.1 Posición de valores no nulos en $dB/d\sigma ik$	31
Tabla 5.1 Resumen de configuración secuencia-electrodo.....	40
Tabla 5.2 Voltajes diferenciales vs conductividad entre [0.01 mS/cm, 1000 mS/cm].....	60
Tabla 5.3 Voltajes diferenciales vs conductividad entre [0.01 mS/cm, 0.1 mS/cm].....	61
Tabla 5.4 Voltajes diferenciales vs conductividad entre [0.002 mS/cm, 0.01 mS/cm].....	62
Tabla A.1 Resumen de las especificaciones físicas de la sonda tomográfica.....	88
Tabla A.2 Especificaciones de placa dispositivo P64 EIST.	88



Lista de figuras

Fig. 4.1 Representación del MEF para un elemento aislado.....	18
Fig. 4.2 Traspaso de eje z a eje normalizado ε	18
Fig. 4.3. Visualización ubicación de coordenadas de un elemento.....	22
Fig. 4.4 Malla generada por MEF para $N_{2d} = 3261$	22
Fig. 4.5 Ejemplo de inyección y medición para 3 secuencias.	34
Fig. 5.1 Visualización de MEF sobre la sonda tomográfica en modelo 1-D.....	36
Fig. 5.2 Perfiles 1-D de conductividad simulados.	38
Fig. 5.3 Perfiles 2-D de conductividad simulada.	39
Fig. 5.4 Voltajes diferenciales resultantes al problema directo 1-D.	41
Fig. 5.5 Voltajes diferenciales resultantes al problema directo 2-D.	43
Fig. 5.6 Reconstrucciones con variación de λ y $\beta d = 1e-9$	45
Fig. 5.7 Reconstrucciones con variación de βd y $\lambda = 1e-7$	47
Fig. 5.8 Comparación de reconstrucción vs perfil ideal.	49
Fig. 5.9 Error cuadrático regularizado de reconstrucción.....	51
Fig. 5.10 Reconstrucción perfil constante con adición de error de medición.....	52
Fig. 5.11 Reconstrucción perfil rampa con adición de error de medición.....	53
Fig. 5.12 Reconstrucción perfil sinusoidal con adición de error de medición.....	54
Fig. 5.13 Reconstrucción perfil triangular con adición de error de medición.....	55
Fig. 5.14 Reconstrucción perfil escalón con adición de error de medición.....	56
Fig. 5.15 Medición de referencia con conductivímetro de laboratorio Lab 960.....	57
Fig. 5.16 Mediciones reales de sonda tomográfica para agua potable.....	58
Fig. 5.17 Comparación entre medición real y modelo 2-D ajustado.....	58
Fig. 5.18 Variación de medición con respecto a la impedancia de contacto.....	59
Fig. 5.19 Visualización de tabla 5.2.....	60
Fig. 5.20 Visualización de tabla 5.3.....	61
Fig. 5.21 Visualización de tabla 5.4.....	62
Fig. 5.22 Representación resistiva de medición.....	63
Fig. 5.23 Voltajes de problema directo para $\sigma = 95 \text{ mS/cm}$	64
Fig. 5.24 Voltajes par de inyección para $\sigma = 95 \text{ mS/cm}$	65
Fig. 5.25 Evolución de coeficiente de ajuste para primera secuencia de inyección.....	66
Fig. 5.26 Diagrama creación del vector de coeficientes.....	66
Fig. 5.27 Resultado de ajuste del modelo 2-D a 1-D.....	67
Fig. 5.28 Resultado de ajuste entre modelo 2-D y 1-D para perfiles de conductividad escalón.....	68
Fig. 5.29 Error cuadrático medio ajuste entre modelo 2-D y 1-D con respecto al perfil simulado.....	69
Fig. 5.30 Error cuadrático medio para conductividades bajas y perfil constante.....	70
Fig. 5.31 Diagrama ilustrativo del orden de cálculos.....	70
Fig. 5.32 Reconstrucciones de perfil conductivo.....	71
Fig. 5.33 Errores de reconstrucción.....	72
Fig. 5.34 Reconstrucciones en visión de columna.....	73
Fig. 5.35 Resultados reales para situación de aire húmedo.....	75
Fig. 5.36 Resultados reales para situación de agua potable.....	76
Fig. 5.37 Resultados reales para situación homogénea.....	77
Fig. 5.38 Resultados reales para primer nivel de interfaz.....	78
Fig. 5.39 Resultados reales para segundo nivel de interfaz.....	79

Fig. 5.40 Resultados reales para tercer nivel de interfaz.	80
Fig. 5.41 Resultados reales para cuarto nivel de interfaz.	81
Fig. 5.42 Resultados reales para nivel doble de interfaz.	82
Fig. A.1 Dimensiones en mm de la sonda tomográfica.	88
Fig. A.2 Gabinete Numcore.	89
Fig. A.3 Placa maestra P64 con cableado coaxial, cable Ethernet y par trenzado a DSP.	89
Fig. A.4 Tarjeta DSP en conexión de cable par trenzado de adquisición de datos.	90
Fig. A.5 Imagen frontal del variador de frecuencia PowerFlex 70EC.	90
Fig. A.6 Imagen frontal bombas Bredel Hose SP/25.	91
Fig. A.7 Imagen frontal PLC.	91
Fig. B.1 Diagrama 2D de instalación columna de sedimentación.	92
Fig. B.2 Diagrama 3D de instalación columna de sedimentación.	93
Fig. B.3 Instalación en terreno de la columna de sedimentación y sonda tomográfica.	93
Fig. C.1 Esquema general del Set up experimental.	95
Fig. D.1 Representación circuital para modelo resistivo.	96
Fig. D.2 Visualización para primera secuencia de inyección del modelo resistivo.	97
Fig. D.3 Comparación de reconstrucciones entre modelos.	100



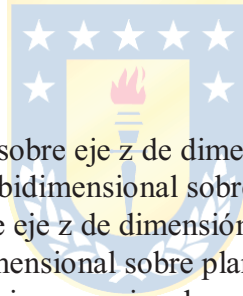
Nomenclatura

Escalares

L	: Cantidad de electrodos sobre la sonda tomográfica.
I_s	: Amplitud de corriente inyectada.
I_i	: Valor de corriente en i -ésimo electrodo.
U_i	: Valor de voltaje en i -ésimo electrodo.
U_{i2d}	: Valor de voltaje en i -ésimo electrodo del modelo bidimensional.
z_i	: i -ésima componente de eje z discretizado.
z_{in}	: Posición sobre eje z de electrodo de recepción de corriente.
z_{out}	: Posición sobre eje z de electrodo de inyección de corriente.
Z_l	: l -ésima impedancia de contacto de electrodo.
N	: Cantidad de nodos definido por el método de elementos finitos al modelo unidimensional.
N_{2d}	: Cantidad de nodos definido por el método de elementos finitos al modelo bidimensional.
α_i	: Valor del potencial eléctrico en el i -ésimo nodo.
α_{i2d}	: Valor del potencial eléctrico en el i -ésimo nodo en el modelo bidimensional.
β^d	: Parámetro de diferenciabilidad.
β_i	: Valor arbitrario sobre el i -ésimo nodo.
β_{i2d}	: Valor arbitrario sobre el i -ésimo nodo del modelo bidimensional.
φ_i	: i -ésima función base de \mathbf{u}^h .
φ_{i2d}	: i -ésima función base de \mathbf{u}_{2d}^h .
φ_j	: j -ésima función base de \mathbf{v}^h .
φ_{j2d}	: j -ésima función base de \mathbf{v}_{2d}^h .
h	: Ancho de elemento en la malla definida por el método de elementos finitos.
ε	: Componente de eje normalizado.
ϕ	: Error cuadrático regularizado.
λ	: Valor de hiperparámetro de regularización.
s	: Sensibilidad del error.
p	: Valor promedio entre el máximo y mínimo valor de \mathbf{U}_0 .
a	: Área superficie de elemento.
$ e_l $: Área de superficie (largo) del l -ésimo electrodo del modelo bidimensional.
$x_{frontera}$: Posición de la ubicación de electrodos en eje x .
z_o	: Posición inicial del dominio del electrodo en eje z .
z_f	: Posición final del dominio del electrodo en eje z .
Δz	: Diferencia entre z_f y z_o .
a_i, b_i, c_i	: Constantes de posición nodal de función base φ_{i2d} .
a_j, b_j, c_j	: Constantes de posición nodal de función base φ_{j2d} .
R_{e_l}	: Resistencia asociada a impedancia de contacto del l -ésimo electrodo.
R_m	: Resistencia asociada a resistividad del medio.
$coefU_i$: Coeficiente de ajuste entre modelos 2-D y 1-D de la i -ésima medición de voltaje.
ρ_i	: Valor de resistividad del i -ésimo elemento del modelo secundario

Matrices

B	: Matriz de rigidez del modelo unidimensional de dimensión \mathbb{R}^{NxN} .
A_{2d}	: Matriz de rigidez del modelo bidimensional.
B_{2d}	: Sub matriz de rigidez del modelo bidimensional.
B_{2d}^m	: Sub matriz de B_{2d} del modelo bidimensional.
B_{2d}^c	: Sub matriz de B_{2d} del modelo bidimensional.
C_{2d}	: Sub matriz de rigidez del modelo bidimensional.
D_{2d}	: Sub matriz de rigidez del modelo bidimensional.
M	: Matriz definición de mediciones y de adaptación de dimensión \mathbb{R}^{L-1xN} .
M_{ref}	: Matriz de cálculo de voltajes sobre electrodos del modelo bidimensional.
M_{dif}	: Matriz de cálculo de voltajes diferenciales del modelo bidimensional.
L	: Matriz de regularización definida por Tikhonov.
L_{TV}	: Matriz de regularización definida por método de variación total de dimensión $\mathbb{R}^{N-2xN-1}$.
F'	: Matriz Jacobiano por elemento de dimensión \mathbb{R}^{LxN} .
E_k	: Matriz generada por acondicionamiento de diferenciabilidad en TV_β .
A_ρ	: Matriz constante del modelo resistivo.



Vectores

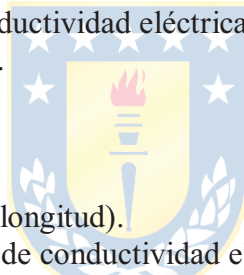
σ	: Perfil de conductividad sobre eje z de dimensión \mathbb{R}^{1xN-1} .
σ_{2d}	: Perfil de conductividad bidimensional sobre plano (x,z).
u	: Potencial eléctrico sobre eje z de dimensión \mathbb{R}^{1xN} .
u_{2d}	: Potencial eléctrico bidimensional sobre plano (x,z).
u^h	: Solución potencial eléctrico aproximado sobre eje z de dimensión \mathbb{R}^{1xN} .
u_{2d}^h	: Solución potencial eléctrico aproximado bidimensional sobre plano (x,z).
v	: Potencial eléctrico secundario definido por el método de elementos finitos de dimensión \mathbb{R}^{1xN} .
v_{2d}	: Potencial eléctrico secundario bidimensional sobre plano (x,z).
v^h	: Solución potencial eléctrico secundario aproximado definido por el método de elementos finitos de dimensión \mathbb{R}^{1xN} .
v_{2d}^h	: Solución potencial eléctrico secundario aproximado bidimensional sobre plano (x,z).
I	: Vector de corrientes sobre electrodos por secuencia de dimensión \mathbb{R}^{Lx1} .
U₀	: Vector de voltajes diferenciales medidos de dimensión \mathbb{R}^{L-1x1} .
U_{ruido}	: Vector de voltajes diferenciales medidos con adición de ruido de medición de dimensión \mathbb{R}^{L-1x1} .
U	: Vector de voltajes sobre electrodos por secuencia de dimensión \mathbb{R}^{L-1x1} .
U_{2d}	: Vector de voltajes sobre electrodos por secuencia del modelo bidimensional.
U^h	: Vector de solución voltajes sobre electrodos aproximado por secuencia de dimensión \mathbb{R}^{L-1x1} .
U_{2d}^h	: Vector de solución voltajes sobre electrodos aproximado del modelo bidimensional.
U_{2d dif}^h	: Vector de solución voltajes diferenciales aproximado del modelo bidimensional.

V	: Vector de voltajes sobre electrodos secundario definido por el método de elementos finitos de dimensión $\mathbb{R}^{L \times 1}$.
V_{2d}	: Vector de voltajes sobre electrodos secundario del modelo bidimensional.
$\delta(z)$: Vector representativo de la función Delta de Dirac sobre todo el eje z de dimensión $\mathbb{R}^{N \times 1}$.
α	: Vector de valores nodales del potencial eléctrico de dimensión $\mathbb{R}^{1 \times N}$.
α_{2d}	: Vector de valores nodales del potencial eléctrico del modelo bidimensional.
β	: Vector de valores nodales arbitrarios de dimensión $\mathbb{R}^{1 \times N}$.
β_{2d}	: Vector de valores nodales arbitrarios del modelo bidimensional.
φ_u	: Vector de funciones bases de $\mathbf{u}^h(z)$ de dimensión $\mathbb{R}^{1 \times N}$.
φ_v	: Vector de funciones bases de $\mathbf{v}^h(z)$ de dimensión $\mathbb{R}^{1 \times N}$.
$\tilde{\mathbf{I}}$: Vector de corrientes de inyección sobre discretización del eje z en el método de elementos finitos de dimensión $\mathbb{R}^{N \times 1}$.
TV	: Vector resultante de regularización de variación total de dimensión $\mathbb{R}^{N-1 \times 1}$.
TV_{β}	: Vector adaptado resultante de regularización de variación total de dimensión $\mathbb{R}^{N-1 \times 1}$.
ω	: Vector de ruido de dimensión $\mathbb{R}^{L-1 \times 1}$.
C	: Vector de valores aleatorios de dimensión $\mathbb{R}^{L-1 \times 1}$.
\mathbf{n}_j	: Vector de referencia al j -ésimo electrodo.
\mathbf{b}_{2d}	: Vector de pesos del modelo bidimensional.
\mathbf{f}_{2d}	: Vector de datos de inyección del modelo bidimensional.
ρ	: Vector de valores de resistividad.
$\hat{\rho}$: Vector calculado de valores de resistividad.
\mathbf{U}_ρ	: Vector de mediciones de voltaje diferencial en modelo resistivo.
\mathbf{R}_ρ	: Vector de sumatorias de resistividades.

Abreviaciones

Mayúsculas

TIE	: Tomografía por Impedancia Eléctrica (EIT, Electrical Impedance Tomography).
MEF	: Modelo de Elementos Finitos.
EIST	: Electrical Impedance Spectroscopy Tomography.
EIDORS	: Electrical Impedance Tomography and Diffuse Optical Tomography Reconstruction Software.
RWM	: Random Walk Model (Modelo de paso aleatorio).
FKM	: First order Kinematic Model.
SKM	: Second order Kinematic Model.
MCE	: Modelo Completo de Electrodo (CEM, Complete Electrode Model).
TAC	: Tomografía Axial Computarizada.
DIE	: Departamento de Ingeniería Eléctrica.
WVF	: Weak Variational Form (Galerkin Variational).
NRm	: Algoritmo de Newton-Raphson modificado.
1-D	: Una dimensión.
2-D	: Dos dimensiones.
S	: Siemens (unidad de conductividad eléctrica).
V	: Volt (unidad de voltaje).



Minúsculas

cm	: Centímetros (unidad de longitud).
uS	: Micro-Siemens (unidad de conductividad eléctrica).
mS	: Mili-Siemens (unidad de conductividad eléctrica).
mV	: Mili-Volt (unidad de voltaje).
pV	: Pico-Volt (unidad de voltaje).

1. Introducción

La TIE es una técnica que permite analizar un cuerpo en cuestión de manera no invasiva mediante mediciones de conductividad o permitividad a partir de señales eléctricas inyectadas en la superficie del cuerpo [18].

Este método tuvo su nacimiento a mediados de los 80's, cuando Alberto Pedro Calderón desarrolló la primera publicación, donde se realizó la formulación de la matemática pura necesaria para la recuperación de la conductividad a partir de mediciones de corriente [1]. Pasado un tiempo de su publicación, el problema característico de recuperar la información de manera inversa en la TIE se pasó a conocer como “el problema inverso de Calderón”.

Sin embargo, a la fecha esta técnica se ha estado perfeccionando, considerando nuevas investigaciones que han permitido establecer conceptos de resolución, regularización, linealización y estabilidad como en [2], [14], [17] y [19] de los métodos de reconstrucción mediante algoritmos cada vez más desarrollados y eficientes, como también el análisis en el comportamiento ante diferentes componentes frecuenciales, volviendo a la TIE una opción cada vez más presente en procesos donde se requieran análisis de cuerpos de manera no invasiva y que no se necesite emitir radiación, ya sea en diversas e importantes áreas como lo son la medicina, tomando como ejemplo la aplicación en neumología [3], y en el área de la ingeniería eléctrica, electrónica vistos en [2], [6] y [10], análisis topográficos de suelos, biomédica y química.

En el presente trabajo se realizará el análisis teórico considerando variaciones de la conductividad en una y dos dimensiones, y la implementación de herramientas matemáticas como el método de elementos finitos descrito en [7], [15] y [16] para la determinación de la solución, identificación y descripción del hardware requerido y utilizado para definir el método de inyección de corriente y su posterior medición durante el proceso de adquisición de datos para una sonda tomográfica [5], descripción del software a utilizar y técnicas de regularización aplicadas para la posterior reconstrucción de la imagen vistas en [4], [11], [12] y [13].

2. Revisión Bibliográfica

2.1. Introducción

En este apartado se comenta la bibliografía utilizada para el entendimiento de la teoría, avances actuales, ejemplos y aplicaciones en diferentes ámbitos de la ingeniería u otras áreas en donde la TIE ha sido una herramienta de vital importancia en el desarrollo de nuevas opciones de análisis y diagnósticos.

2.2. Trabajos Previos

Aquí se procede al análisis de cada uno de los documentos incorporados en la bibliografía separándolos en ítems, tales como: “Desarrollo de modelos y análisis matemático”, “Análisis histórico”, “Simulaciones y comparación de resultados”, “Descripción, programación y configuración del software y hardware”.

2.2.1 Desarrollo de modelos y análisis matemático

- ♣ A. P. Calderón, “On an Inverse Boundary Value Problem”, *Seminar on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics, Boletim da sociedade Brasileira de Matemática*, pp. 65-73, Rio de Janeiro, 1980, [1].

En este documento se presenta una de las primicias en el desarrollo matemático en análisis de conductividad. Aquí es donde quedan definidas las condiciones de frontera y ecuaciones necesarias para definir y modelar la recuperación de la conductividad, actualmente utilizada en TIE, a partir de señales de corriente medidas en un cuerpo. Gracias a este documento se puede tener conciencia de la dificultad que presenta el desarrollo de los problemas que describe la obtención de conductividades.

- ♣ O. Casas Piedrafita, “Contribución a la obtención de imágenes paramétricas en tomografía de impedancia eléctrica para la caracterización de tejidos biológicos”, Tesis doctoral, Diciembre 1998, Departamento de Ingeniería Electrónica, Universidad Politécnica de Cataluña, [2].

Este documento presenta una investigación a fondo de las técnicas de inyección de corriente en TIE, como lo son la inyección polar, adyacente y trigonométrica, considerando una estructura

cilíndrica de 16 electrodos. Se definen conceptos importantes de resolución, optimización, error, estabilidad y linealización en los métodos de reconstrucción. Se describe también una técnica que permite situar el objeto en análisis en el centro de un tomógrafo cilíndrico mediante ecuaciones de transformación, aparte de realizar comparaciones entre las técnicas de inyección, mostrando resultados que permiten un análisis claro sobre las limitaciones físicas de la TIE.

- ♣ M. Vauhkonen, D. Vadász, P. A. Karjalainen, E. Somersalo, J. P. Kaipio. “Tikhonov Regularization and Prior Information in Electrical Impedance Tomography”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 17, no. 2, pp. 285-293, Abril 1998, [4].

Este documento está basado en el desarrollo del MEF como una opción en la aproximación de los resultados obtenidos en TIE También muestra a la regularización de Tikhonov como método de regularización de matrices en el problema inverso para la reconstrucción de imágenes, resaltando la importancia que existe en los resultados, la correcta elección de supuestos sobre la distribución de la impedancia en el cuerpo sometido a análisis. Gracias a este documento se puede tener en cuenta que este método de regularización presenta limitaciones ante diversas condiciones a priori e implica un sumo cuidado al momento de la programación del código de reconstrucción de imágenes necesario para este proyecto.

- ♣ J. Winther, “Finite Element Method: Introduction, 1D heat conduction”, Profesor externo, Departamento Ingeniería Civil, Universidad de Aalborg, Dinamarca, [7].

Aquí, se desarrolla el método de elementos finitos de forma simple en un contexto de transferencia de calor, el cual se analiza de forma unidimensional. Este documento aporta gran conocimiento de tal forma poder encontrar el camino que se requiere en el proceso de obtención de las ecuaciones principales que definen el problema inverso de TIE mediante un análisis aislado a un elemento de la MEF para luego describir de forma generalizada para toda la MEF. Se muestra también durante la obtención de las matrices que definen la discretización de la MEF, el efecto que tienen entre si los elementos que comparten sus nodos y la forma en que esto queda explícitamente formulado en dichas ecuaciones. De todas maneras, este documento resulta ser uno de los más importantes al momento de desarrollar la solución al problema inverso presente en este trabajo.

- ♣ E. Somersalo, M. Cheney, D. Isaacson, “Existence and Uniqueness for Electrode Models for Electric Current Computed Tomography”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 52, no. 4, pp. 1023-1040, Agosto 1992, <http://www.jstor.org/stable/2102189>, [8].

En este documento se realiza un exhaustivo desarrollo matemático que involucra ecuaciones diferenciales, ecuaciones de Maxwell y condiciones de contorno necesarias para poder desarrollar el denominado MCE. Se nombran sugerencias para poder definir el tipo de densidad de corriente para la aplicación a modelar. Por ejemplo, se desarrolla el modelo considerando una densidad de corriente como una función continua de la forma cosenoidal o sinusoidal. Si bien este documento realiza un desarrollo minucioso para la obtención del MCE, también se demuestran las condiciones que deben existir para que la solución a este modelo exista y sea única. Sin embargo, para objetivos de este proyecto y dada la complejidad matemática que conlleva, se enfocó principalmente en el método de obtención del modelo dejando las demostraciones de existencia y unicidad como tema aparte.

- ♣ L. Ferragut, “Métodos Numéricos: Introducción al Método de Elementos Finitos”, Diciembre 2005, http://web.usal.es/~ferragut/apuntes/introduccion_MEF.pdf, [9].

En este documento se procede a la enseñanza del método de elementos finitos como método numérico que permite discretizar una superficie continua a modo de poder encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales parciales. Se definen los conceptos de “elementos” y “nodos” para la modelación de los diversos problemas existentes en ingeniería y física.

- ♣ A. Borsic, B. M. Graham, A. Adler, W. R. B. Lionheart, “In vivo Impedance Imaging with Total Variation Regularization”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 29, no. 1, pp. 44-54, Enero 2010, [11].

En este documento se presenta a la “Variación Total” como método de regularización en sistemas mal condicionados enfocados en la búsqueda de la solución al problema inverso de la TIE. Se define a este tipo de regularización como uno de los que aporta mejor aproximación ante cambios de conductividad, reduciendo los picks que provoca el algoritmo iterativo típico de Newton-Raphson en donde la MEF presenta elementos con cambios de conductividad. Además, se realizan pruebas con dos estilos diferentes de regularización, ambas basadas en la teoría de la “Variación Total”, las cuales son “The Lagged Diffusivity” y “Primal Dual-Interior Point Method”, siendo el primero al que se le va a considerar en este trabajo.

- ♣ D. Romano, S. Pisa, E. Piuzzi, “Implementation of the Newton-Raphson and Admittance Methods for EIT”, *International Journal of Bioelectromagnetism*, vol. 12, no 1, pp. 12-20, 2010, [12].

Este trabajo desarrolla una aproximación de diferencias finitas al problema planteado por las ecuaciones de Maxwell, además de la implementación del algoritmo iterativo de Newton-Raphson en donde se realiza un capítulo aparte describiendo la forma en que calcula el Jacobiano involucrado en el algoritmo, ya sea por el método de admitancia o bien, por el método de sensibilidad. Además de implementar el algoritmo de Newton-Raphson, también se recurre a la utilización del método de regularización de Tikhonov, variando la matriz de regularización y mostrando sus diferentes resultados.

- ♣ J. M. Kang, M. S. Kim, Jae. H. Kim, Ji H. Kim, C. Y. Kim, B. Y. Choi, S. Kim, J. S. Lee, K.Y. Kim, “The modified Newton-Raphson algorithm using Region of Interes in EIT”, *The 23rd International Technical Conference on Circuits/Systems Computers and Communications*, 2008, [13].

Los autores de este documento quisieron buscar otra forma de poder implementar el algoritmo de Newton-Raphson al proceso de reconstrucción en TIE. Para ello se enfocaron en realizar una aproximación en torno al Hessiano presente en el desarrollo de la ecuación característica del algoritmo, puesto que es ahí donde se produce el mal acondicionamiento al momento de buscar la solución al problema inverso de reconstrucción. La aproximación en dicho Hessiano permite al algoritmo de Newton-Raphson, ahora modificado, poder llegar a soluciones de reconstrucción en torno a forma y resistividad en la imagen alrededor de una región de interés.

- ♣ “*Finite Element Methods for Engineers*”, U. S. Dixit. Cengage Learning, 2009, [15].

Aquí se desarrolla, al igual que en [9] y [16], el marco teórico que implica la aplicación del método de elementos finitos en el área de ingeniería. Se consideran problemas característicos en una, dos y tres dimensiones además de mostrar las diferencias que existen entre el método de elementos finitos y el método de diferencias finitas. Se desarrolla una descripción sobre las funciones bases y las características que otorga la elección de dichas funciones. Además en este libro, existe un capítulo de temas diversos en donde se muestra la existencia de problemas mal condicionados que efectivamente existe en el proceso de encontrar la solución al problema inverso de TIE presente en este trabajo.

- ♣ “*The Finite Element Method: Its Fundamentals and Applications in Engineering*”, Zhangxin Chen. World Scientific, 2011, [16].

En este libro se desarrollan variados ejemplos de los posibles casos en que se puede recurrir al método de elementos finitos como herramienta matemática. Se muestran ejemplos y aplicaciones en una, dos y tres dimensiones detallando de forma clara y didáctica las diferencias que cada problema presenta. Se define la forma variacional de las ecuaciones diferenciales representativas del entorno físico y la ayuda que esta expresión otorga. Se considera este libro como apoyo teórico al entendimiento del proceso de aplicación del MEF al presente trabajo de TIE.

2.2.2 Análisis histórico

- ♣ M. Ramirez, “Tomografía por Impedancia Eléctrica: ¿una nueva rama de la Teoría del Caos?”, *Revista del Centro de Investigación*, Universidad La Salle, Distrito Federal de México, vol. 9, no. 34, pp. 13-20, Julio-Diciembre 2010, [18].

En este documento se analiza una revisión sobre toda la historia en la tomografía por impedancia eléctrica. Partiendo desde 1980 describiendo el trabajo del matemático Alberto Calderón, sobre el planteamiento analítico en la recuperación de señales de conductividad en un cuerpo a partir de señales de corriente inyectadas en el exterior de forma no invasiva. Pasando también por una descripción sobre las teorías de funciones pseudoanalíticas desarrolladas por Lipman Bers en la segunda mitad del siglo XX. Se muestran ejemplos simples a modo de entender sobre la aplicación de la TIE y su funcionamiento, dejando en claro su importancia en la actualidad en las áreas de ingeniería y medicina. Considerándose como una ayuda importante en este trabajo con respecto al entendimiento de las limitaciones prácticas de implementar la TIE.

2.2.3 Simulaciones y comparación de resultados

- ♣ B. De Lema, P. Casan, P. Riu. “Tomografía por impedancia eléctrica. Estandarización del procedimiento para su aplicación en neumología.” *Arch Bronconeumol*, vol 42, no. 6, pp. 299-301, Noviembre 2006, [3].

En este documento se muestra la aplicación de la TIE, en su configuración de 16 electrodos, como una nueva herramienta en el campo de la neumología, mostrando resultados obtenidos en el comportamiento de imágenes provenientes de pacientes sin antecedentes médicos sobre órganos en el área del tórax. Demostrando así que la TIE es una herramienta en ascenso, pero que muestra

algunas falencias en resolución en comparación con otras técnicas de imagen invasivas disponibles en la medicina. Este documento aporta un grado de realidad ante los posibles resultados que se puedan obtener en este proyecto, dejando en claro que la resolución es un tema de suma importancia a considerar en dichos resultados y posterior interpretación de los mismos.

- ♣ O.P. Tossavainen, M. Vauhkonen, V. Kolehmainen, Kyung Youn Kim, “Tracking of moving interfaces in sedimentation processes using electrical impedance tomography”, *Chemical Engineering Science*, vol. 61, no. 23 , pp. 7717-7729, Diciembre 2006, [6].

En este documento se realiza una comparativa entre criterios de análisis y estimación en los procesos de monitoreo de sedimentación utilizando la tecnología de la TIE. Para ello se realizaron pruebas utilizando datos simulados provenientes de un modelo creado con solamente 6 electrodos colocados de forma vertical en un costado de un tanque de sedimentación, donde solamente se utilizaron 2 electrodos para realizar la inyección de corriente. Se realizaron pruebas para 3 diferentes estilos de monitoreo del proceso de sedimentación los cuales son el modelo RWM, FKM y SKM, presentando notables mejoras para los resultados obtenidos con FKM y SKM en cuanto a velocidad de sedimentación, ubicación de las diferentes fases dentro del estanque y las conductividades representativas de 3 diferentes capas dentro del estanque. Sin embargo se presentan debilidades con respecto a este trabajo, en cuanto la confiabilidad en la estimación de resultados que presentaría este sistema de tan solo 6 electrodos y solamente una inyección de corriente, al presentarse situaciones que alteren la homogeneidad de las distintas fases que se van formando en el proceso de sedimentación, como lo son la existencia de burbujas que podrían alterar los resultados de conductividad, velocidad de sedimentación e identificación de las fases de sedimentación. Sin embargo, este documento presenta de forma resumida el tema principal de este proyecto y es de gran ayuda en el entendimiento del comportamiento que se puede esperar en los futuros resultados de este trabajo.

- ♣ S. Chandía, F. Ferrada, “*Configuración y Operación de un Tomógrafo Industrial*”, Trabajo Proyecto Electrónico, Junio 2012, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Concepción, [10].

Este documento trata del análisis y puesta en marcha de un método de reconstrucción a base

de la tecnología de la TIE, enfocado en un ambiente cilíndrico con 16 electrodos. Se describe en detalle la parte teórica que este problema de ingeniería conlleva y se realiza desarrollo el cual permite poder establecer un valor de hiperparámetro que permita una reconstrucción clara y precisa del perfil de conductividad. También, se describe y se muestra el algoritmo implementado para este problema basado en software EIDORS en el entorno Matlab y las configuraciones necesarias con respecto a software, hardware y estrategias de inyección de corriente y medición de voltajes. Este trabajo aporta conocimiento y mejora el entendimiento de cómo funciona y de que se trata la TIE en la ingeniería.

- ♣ A. Adler, B. M. Graham, “Objective selection of hyperparameter for EIT”, *Institute of Physics Publishing*, vol. 27, no. 5, pp. s65-s79, Abril 2006, [14].

En este documento se presenta la importancia que tiene la elección de un valor de hiperparámetro en el desarrollo de reconstrucción de la imagen. El hiperparámetro representa un grado de resolución que está directamente relacionado con la capacidad del equipo, ruido de medición incorporado en los set de datos a considerar y se toma como un factor de importancia al momento de determinar la veracidad de la imagen reconstruida. Aquí, se presentan 5 métodos que permiten encontrar un valor adecuado de hiperparámetro que permita la obtención de resultados próximos a lo ideal, siendo el método de BestRes al que se le ha tomado mayor importancia. Además de BestRes, se presentan y comparan los métodos: Heuristic selection, L-curve, Generalized cross-validation y Fixed noise figure. Presentando estos 4 métodos nombrados diferentes desventajas tales como resultados variables en el tiempo, la imposibilidad de aplicar el método ante condiciones específicas y la dificultad de determinar un valor mínimo.

- ♣ D. Silvera, D. Rye, M. Velonaki, “Improved EIT drive patterns for a robotics sensitive skin”, *in Australasian Conference on Robotics and Automation (ACRA)*, Sydney, Australia, Dic. 2-4, 2009, [17].

En este documento se presenta un trabajo que implica la utilización de la TIE en donde a diferencia de otras aplicaciones, los electrodos se encuentra en el interior de un cuerpo y se intenta poder reconstruir las diferencias de conductividad en los bordes del mismo, utilizando un contorno delgado y flexible tal que simule una piel humana. Se muestra la importancia de la correcta elección

del valor de hiperparámetro, utilizando el método de BestRes para encontrar el valor que permita una reconstrucción con mayor resolución y a su vez poder estimar las distancias de distintos elementos colocados sobre esta piel artificial. Este documento aporta un mejor entendimiento del método BestRes de elección, las consecuencias en la reconstrucción de imagen para distintas secuencias en inyección de corriente y se presentan 3 maneras de medir la resolución obtenida en la imagen reconstruida.

- ♣ A. Adler, R. Guardo, “Electrical Impedance Tomography: Regularized Imaging and Contrast Detection”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 15, no. 2, pp. 170-179, Abril 1996, [19].

En este documento se hace referencia a la capacidad que se tiene al momento de resolver el problema inverso de reconstrucción de imagen en la TIE con métodos estáticos (un solo set de datos en t_0) y dinámicos (resultado ente la comparación de datos en t_0 y t_1), resultando en los métodos estáticos una sensibilidad muy alta ante errores de medición y en los métodos dinámicos una reducción de las alteraciones en los set de datos generando una gran inmunidad ante la variabilidad de los datos de medición. También, es mencionado de manera breve la importancia de la parametrización en estos algoritmos, puesto que saltándose este paso, la reconstrucción es errónea ante valores de conductividad 0 e ∞ . Se describe todo el proceso matemático de linealización, adaptación y regularización necesario para estimar una solución lo más próxima a la ideal. Se presenta una debilidad en el hardware implementado, ya que consta con 16 electrodos para inyección de corriente y medición de voltaje, lo que deja pocas mediciones independientes para la reconstrucción de la conductividad provocando una resolución limitada. De aquí se define el concepto de BestRes como herramienta en la determinación de la calidad de la resolución.

2.2.4 Descripción, programación y configuración del software y hardware

- ♣ Documento oficial empresa Numcore, “Numcore EIST User Manual”, 29 de Julio, 2010, [5].

Este documento es de vital importancia en este proyecto, ya que es donde se describe todo el equipo a implementar para la inyección de corriente y posterior medición de la distribución de tensiones a lo largo de la sonda tomográfica (este documento no considera dicha sonda). Además, se describe de manera detallada las características del software Numcore incorporado para administrar

las diferentes configuraciones del equipo. Se nombran y definen explícitamente limitaciones y rangos donde puede operar el equipo, tal como la capacidad de muestreo, frecuencias máximas de inyección de corrientes alternas, limitaciones en cuanto a la cantidad de puertos y secuencias, canales de inyección y medición, configuración del cableado implementado entre otras características. Este manual ha sido fundamental para poder estudiar y comprender la instrumentación que se utilizará a lo largo del desarrollo de este informe de Memoria de Título.

2.3. Discusión

Como se vio en el análisis bibliográfico anterior, gran mayoría de las aplicaciones de la tomografía por impedancia eléctrica son realizadas en un ambiente cilíndrico de 16 o 32 electrodos en su contorno. El tema que se desarrollara en este proyecto es justamente utilizar la teoría que se revisó en el MCE y MEF pero en un ambiente donde 16 electrodos son colocados de manera vertical en una sonda para análisis de la conductividad con variaciones en una sola dimensión en estanques de sedimentación o en otros procesos en los que se requiera la información que brinda este método para su posterior control.

Queda plasmado en el análisis anterior, que el método más utilizado para la etapa de reconstrucción de la conductividad o imagen representativa del estado del proceso es el algoritmo de Newton-Raphson, pero tomando en cuenta la aproximación del Hessiano perteneciente a la ecuación propia del algoritmo, conformando el llamado algoritmo de Newton-Raphson Modificado. También existe la necesidad de acondicionar el problema de reconstrucción mediante la incorporación de regularizaciones, en donde la literatura apoya rotundamente el método de Tikhonov agregando condiciones a la llamada matriz de regularización como lo son el método de Variación Total utilizado en este trabajo de Memoria de Título. Por otra parte, se vió que es necesaria la elección de un valor adecuado de hiperparámetro para determinar la sensibilidad de la matriz de regularización en la resolución del problema inverso, ya que es muy importante al momento de reconstruir una imagen con poco error y que sea capaz de entregar una calidad de información lo más próxima a la real.

La TIE se caracteriza por ser una herramienta no invasiva en el cuerpo o espacio de análisis y se considera una tecnología de bajo costo en comparación a otras herramientas de reconstrucción de imágenes como son la TAC, resonancia o la imagenología por rayos X, por lo que este proyecto presenta un aporte al desarrollo e incorporación futura de la TIE al área de la ingeniería de procesos.

3. Definición del Problema

3.1. Introducción

En el presente capítulo se describen los principales objetivos en los cuales se centra este trabajo. Definiendo la hipótesis del trabajo, alcances y limitaciones presentes en la Memoria de Título, y la metodología que implica el cumplimiento de los objetivos establecidos.

3.2. Hipótesis de Trabajo

- La TIE es una nueva herramienta en análisis de conductividad relacionados con procesos que requieran sensores de conductividad eléctrica y posterior control.
- Las variaciones en el perfil de conductividad se pueden aproximar a variaciones en el eje vertical simplificando el análisis matemático propuesto por el MCE.
- Es necesaria la implementación de un método de regularización que otorgue una solución válida al problema inverso de reconstrucción.

3.3. Objetivos

3.3.1 Objetivo General

Establecer un método de desarrollo del problema directo e inverso en la TIE, y análisis de conductividad considerando un desarrollo matemático unidimensional con respecto a un perfil de conductividad conocido en el contexto de problema directo, para aplicarlo posteriormente a una sonda tomográfica de tecnología TIE y así poder reconstruir un perfil de conductividad real a partir de mediciones de voltaje dando solución al problema inverso considerando un método de calibración entre los modelos en una y dos dimensiones.

3.3.2 Objetivos Específicos

- Encontrar las ecuaciones que describen la solución al problema definido por el MCE utilizando el MEF para un análisis unidimensional y bidimensional.
- Programar mediante software Matlab las ecuaciones para la obtención de la solución del problema directo e inverso del análisis de conductividad.



- Simular resultados al problema directo de TIE para un perfil de conductividad dado y reconstruir el perfil de conductividad con datos reales obtenidos de una sonda tomográfica.
- Estudiar el hardware y software Numcore.

3.4. Alcances y Limitaciones

El estudio realizado es basado en un análisis unidimensional principalmente, que describe la variación del perfil de conductividad a la largo del eje z de un estanque con un supuesto material homogéneo que se ve alterado por la incorporación de otro material con una conductividad diferente. Dejando el análisis bidimensional como técnica de calibración ante los datos de entrada al modelo unidimensional.

El hardware considerado para el desarrollo de este trabajo fue una sonda tomográfica que consta con un arreglo de 16 electrodos distanciados uniformemente a lo largo de la misma conectado a un rack con la función de inyección de las secuencias de corrientes y posterior medición y demodulación de las señales de voltaje medidas. Este rack contiene un hardware que presenta sus propias limitaciones descritas en el anexo A.2.

En este trabajo de Memoria de Título se realizará la obtención de la solución del problema directo, que consta en la obtención de los voltajes inducidos con respecto a un perfil de conductividad dado para los modelos en una y dos dimensiones, y la obtención de la solución al problema inverso, que trata de la obtención del perfil de conductividad a partir de los voltajes medidos por la sonda y las corrientes inyectadas por el hardware utilizado, considerando herramientas matemáticas como MEF, regularización de Tikhonov y método de Variación Total para la reconstrucción de la conductividad real y simulada utilizando las ventajas del modelo en una dimensión.

3.5. Metodología

Primero que todo, se realiza el análisis matemático para la obtención de las ecuaciones en una y dos dimensiones que describen la solución al problema directo definido por el MCE utilizando herramientas matemáticas como el MEF. Luego se procede a programar mediante software Matlab dichas ecuaciones para un perfil dado de conductividad y obtener los voltajes requeridos para cada secuencia establecida. Luego, una vez obtenidas las ecuaciones que determinan la solución del

problema directo, se realiza el proceso inverso dejando como variable a analizar el perfil de conductividad en una dimensión para una posterior reconstrucción de imagen que representa el medio real (estanque de sedimentación) utilizando el algoritmo de Newton-Raphson modificado y el método Tikhonov de regularización al problema mal condicionado incorporando teoría que define el método de Variación Total.

El desarrollo de este trabajo de Memoria de Título se realizará en el laboratorio de control del DIE, con hardware, software y materiales disponibles.



4. Modelos Directo e Inverso

4.1. Introducción

En el presente capítulo se describirán los avances realizados en cuanto a consideraciones en análisis teóricos y matemáticos, estudios del software y hardware a utilizar en este trabajo de Memoria de Título.

4.2. Obtención de la solución al problema directo de TIE (1-D)

Según [8] y considerando el eje vertical (eje z) como la dimensión a analizar, la ecuación principal que define el problema de conductividad es obtenido con los supuestos que para un cuerpo Ω (sonda tomográfica) con frontera $\partial\Omega$ (puntos extremos de la sonda) y conductividad conocida $\sigma(z)$, se encuentran adosados un arreglo de electrodos $e_l, 1 \leq l \leq L$. Por los cuales es inyectada una corriente I_s , de las cuales se conforma un vector columna de inyección $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_L)^T$, donde T hace referencia a la función transpuesta, y se considera como vector de patrón (secuencia) de corrientes si se cumple la condición de conservación de carga $\sum_{l=1}^L I_l = 0$. Luego el correspondiente vector columna de patrón de voltajes será $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_L)^T$.

Luego, por las leyes y ecuaciones de Maxwell descritas en [8] y considerando que el problema presenta una fuente externa de corriente de valor I_s , considerar [7] como ejemplo, se define el problema característico de este sistema de TIE con sus respectivas condiciones de contorno para una sonda aislada,

$$\nabla(\sigma(z) \cdot \nabla \mathbf{u}(z)) = \mathbf{I} \quad \text{sobre } \Omega, \quad (4.1)$$

$$\frac{d\mathbf{u}(z_1)}{dz} = \frac{d\mathbf{u}(z_N)}{dz} = 0 \quad \text{sobre } \Omega, \quad (4.2)$$

donde ∇ es el operador “nabla” de divergencia para coordenadas cartesianas, lo que para este caso unidimensional se transmite como una derivada con respecto a la coordenada z , $\mathbf{u}(z)$ es la función que describe al potencial eléctrico a lo largo del cuerpo Ω , z_1 y z_N corresponden al punto inicial y final de la sonda de medición respectivamente.

En la literatura al estilo de la ecuación (4.1) se le denomina “Strong Form” puesto que la ecuación diferencial principal que describe el entorno físico del problema tiene como solución un único valor, o en este caso una única combinación posible de la variable $\mathbf{u}(z)$. Según [8], [9], [15] y [16] es posible considerar un espacio de soluciones $H^1(\Omega)$ donde se encuentra (\mathbf{u}, \mathbf{U}) y que además considera la existencia de (\mathbf{v}, \mathbf{V}) , $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^L$ tal que al aplicar el método propuesto por la teoría de MEF, se tiene el resultado de multiplicar (4.1) por $\mathbf{v}(z)$ e integrar sobre Ω como,

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}(z) \cdot [\nabla(\boldsymbol{\sigma}(z) \cdot \nabla \mathbf{u}(z))] dz = \int_{\Omega} \mathbf{v}(z) \cdot [\boldsymbol{\delta}(z - z_{out}) - \boldsymbol{\delta}(z - z_{in})] \cdot I_s dz , \quad (4.3)$$

donde (4.3) es la llamada forma variacional del modelo establecido por (4.1) (WVF o Galerkin Weak Variational Form, [15] y [16]), z_{in} y z_{out} representan la ubicación de los electrodos por donde se está produciendo la recepción e inyección de corriente respectivamente. Notar que se ha reemplazado $\mathbf{I} = [\boldsymbol{\delta}(z - z_{out}) - \boldsymbol{\delta}(z - z_{in})] \cdot I_s$, con $\boldsymbol{\delta}(z - z_a)$ la función Delta de Dirac,

$$\boldsymbol{\delta}(z - z_a) = \begin{cases} 1, & \text{si } z = z_a \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

con el propósito de ubicar la posición de los 16 electrodos de la sonda a lo largo de la discretización de la misma provocado por el MEF para una cantidad de N nodos, $z \in [z_1, z_N]$ y $N - 1$ elementos.

Definiendo funcionales $f = \mathbf{v}(z)$ y $g = \boldsymbol{\sigma}(z) \cdot \nabla \mathbf{u}(z)$ y por definición de integración por partes al lado izquierdo de (4.3) se tiene,

$$\int_{\Omega} f \cdot [\nabla g] dz = [f \cdot g]_1^N - \int_{\Omega} [\nabla f] \cdot g dz$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}(z) \cdot [\nabla(\boldsymbol{\sigma}(z) \cdot \nabla \mathbf{u}(z))] dz = [\mathbf{v}(z) \cdot \boldsymbol{\sigma}(z) \cdot \nabla \mathbf{u}(z)]_1^N - \int_{\Omega} [\nabla \mathbf{v}(z)] \cdot \boldsymbol{\sigma}(z) \cdot \nabla \mathbf{u}(z) dz , \quad (4.4)$$

sustituyendo las condiciones de contorno definidas en (4.2) en (4.4) y reescribiendo (4.3),

$$-\int_{\Omega} [\nabla \mathbf{v}(z)] \cdot \boldsymbol{\sigma}(z) \cdot \nabla \mathbf{u}(z) dz = \int_{\Omega} \mathbf{v}(z) \cdot [\boldsymbol{\delta}(z - z_{\text{out}}) - \boldsymbol{\delta}(z - z_{\text{in}})] \cdot I_s dz . \quad (4.5)$$

Utilizando la teoría del MEF es posible estimar las soluciones $u(z)$ y $v(z)$ como una única combinación de funciones lineales continuas en dependencias de funciones bases o funciones de peso. Así, las soluciones estimadas quedan definidas como,

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \varphi_i = \boldsymbol{\varphi}_u \cdot \boldsymbol{\alpha}^T , \quad (4.6)$$

$$\mathbf{v}^h = \sum_{j=1}^N \beta_j \cdot \varphi_j = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\varphi}_v^T , \quad (4.7)$$

donde α_i son los valores nodales a determinar y β_i son valores arbitrarios que definen a la solución \mathbf{v}^h , φ_i y φ_j son las funciones bases de cada vector de solución respectivamente, de igual manera $\boldsymbol{\varphi}_u \cdot \boldsymbol{\alpha}^T$, $\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\varphi}_v^T$ corresponden a la representación vectorial de las soluciones donde $\boldsymbol{\varphi}_u$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi}_v$, $\boldsymbol{\beta}$ son vectores fila. Según [7], el método Galerkin permite considerar a las funciones bases de cada solución (4.6) y (4.7) de igual forma, por lo tanto que $\boldsymbol{\varphi}_u = \boldsymbol{\varphi}_v = \boldsymbol{\varphi}$.

Luego reemplazando (4.6) y (4.7) en (4.5) y desarrollando las integrales del lado derecho de la ecuación se tiene,

$$\begin{aligned} & -\int_{\Omega} [\nabla \mathbf{v}(z)] \cdot \boldsymbol{\sigma}(z) \cdot \nabla \mathbf{u}(z) dz = \mathbf{v}(z_{\text{out}}) \cdot I_s - \mathbf{v}(z_{\text{in}}) \cdot I_s , \\ & -\boldsymbol{\beta} \cdot \int_{\Omega} \frac{d(\boldsymbol{\varphi}^T)}{dz} \cdot \boldsymbol{\sigma}(z) \cdot \frac{d(\boldsymbol{\varphi})}{dz} dz \cdot \boldsymbol{\alpha}^T = \boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{\varphi}^T(z_{\text{in}}) - \boldsymbol{\varphi}^T(z_{\text{out}})) \cdot I_s , \\ & \int_{\Omega} \frac{d(\boldsymbol{\varphi}^T)}{dz} \cdot \boldsymbol{\sigma}(z) \cdot \frac{d(\boldsymbol{\varphi})}{dz} dz \cdot \boldsymbol{\alpha}^T = (\boldsymbol{\varphi}^T(z_{\text{out}}) - \boldsymbol{\varphi}^T(z_{\text{in}})) \cdot I_s , \\ & \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T = \tilde{\mathbf{I}} , \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $\tilde{\mathbf{I}} = \left(\boldsymbol{\varphi}^T(z_{out}) - \boldsymbol{\varphi}^T(z_{in}) \right) \cdot I_s$ es un vector columna con dos elementos no nulos solamente, $-I_s$ en la posición z_{in} y I_s en la posición z_{out} , $\mathbf{B} = \int_{\Omega} \frac{d(\boldsymbol{\varphi}^T)}{dz} \cdot \boldsymbol{\sigma}(z) \cdot \frac{d(\boldsymbol{\varphi})}{dz} dz$ es una matriz de rigidez de dimensiones $\mathbb{R}^{N \times N}$. De (4.8) se observa de forma explícita que la solución al problema directo está definido para \mathbf{B} invertible como,

$$\boldsymbol{\alpha}^T = \mathbf{B}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{I}}, \quad (4.9)$$

así, $\boldsymbol{\alpha}^T$ es de dimensión $\mathbb{R}^{N \times 1}$ por lo que se hace necesario un operador adicional para poder determinar $\mathbf{U}^h \in \mathbb{R}^{L-1 \times 1}$. Se define la matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{L-1 \times N}$, como la matriz característica que define la estrategia de medición de voltajes y además realiza una adaptación de un espacio de N variables a un espacio de $L - 1$ valores (mediciones diferenciales de voltaje). Por lo tanto si la estrategia de medición es definida como adyacente del tipo diferencial, se deberían considerar 2 electrodos continuos para realizar las mediciones, y en las posiciones de dichos electrodos van a estar los valores 1 y -1 donde el valor lo define si el electrodo es definido como punto positivo o negativo en la medición del voltaje. Por lo tanto la solución al problema directo queda definida como,

$$\mathbf{U}^h = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T. \quad (4.10)$$

Cabe mencionar que se debe considerar en los vectores y matrices a utilizar, la eliminación de todas las componentes asociadas a un electrodo de referencia, para así poder realizar los cálculos con respecto a un punto de la sonda.

4.2.1 Cálculo de la matriz de rigidez \mathbf{B} (1-D)

Es posible calcular \mathbf{B} para el caso donde se tiene solamente el análisis sobre un solo elemento aislado [7] y sus respectivos nodos extremos en la malla creada por el MEF.

Sea z_i y z_j los respectivos nodos inicial y final de un elemento m_i , se puede asociar a este elemento un valor constante de conductividad σ_i y un valor de distribución de potencial eléctrico α_i y α_j en los respectivos nodos inicial y final, ver figura 4.1. Es posible definir una función de pertenencia del potencial eléctrico,

$$u(z) = -\frac{1}{h}(z - z_j) \cdot \alpha_i + \frac{1}{h}(z - z_i) \cdot \alpha_j, \quad (4.11)$$

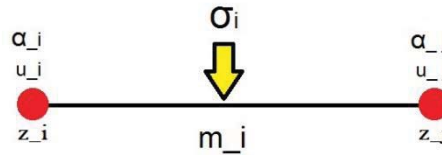


Fig. 4.1 Representación del MEF para un elemento aislado.

donde $h = z_j - z_i$ representa el ancho del elemento. La ecuación (4.11) se puede representar de forma matricial,

$$u(z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h}(z - z_j) & \frac{1}{h}(z - z_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T, \quad (4.12)$$

donde $\boldsymbol{\varphi}$ representan las funciones bases en la ecuación (4.8) y $\boldsymbol{\alpha}$ son los valores nodales definidos en (4.6).

De manera de poder normalizar de alguna forma el intervalo de integración definido en el cálculo de la matriz \mathbf{B} mostrado en (4.8), se recurre a una transformación en las coordenadas. Si bien, el elemento m_i comienza en el nodo z_i y termina en el nodo z_j se puede definir una función de traslado de coordenadas tal que el elemento quede centrado en 0 y sus extremos sean -1 y 1 para z_i y z_j respectivamente. Dicha función de traslado es definida sobre un eje nuevo ε , ver Fig. 4.2, y queda establecida como,

$$z = \frac{h}{2} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2} \cdot (z_i + z_j), \quad (4.13)$$

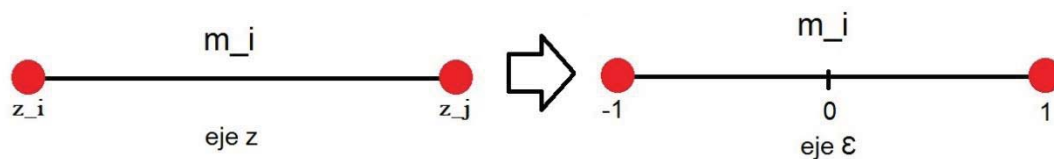


Fig. 4.2 Traspaso de eje z a eje normalizado ε .

de aquí es posible encontrar que,

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = \frac{h}{2} \rightarrow \frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{2}{h}, \quad (4.14)$$


luego reescribiendo $\boldsymbol{\varphi}(z)$ en las nuevas coordenadas $\boldsymbol{\varphi}(\varepsilon)$ se tiene,

$$\boldsymbol{\varphi}(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2} \cdot (1 - \varepsilon) \quad \frac{1}{2} \cdot (1 + \varepsilon) \right], \quad (4.15)$$

expandiendo la derivada de $\boldsymbol{\varphi}(z)$ se tiene,

$$\frac{d(\boldsymbol{\varphi}(z))}{dz} = \frac{d(\boldsymbol{\varphi}(\varepsilon))}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dz} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{h} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{h}, \quad (4.16)$$

reemplazando (4.16) en la definición de \mathbf{B} nombrada en (4.8) y adaptando las integrales al nuevo intervalo de integración $[-1,1]$ se tiene,



$$\mathbf{B} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{h} \cdot \sigma_i \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} d\varepsilon, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\sigma_i}{h} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

luego para cada elemento m_i existe una matriz de rigidez asociada \mathbf{B}_i ,

$$\mathbf{B}_i = \frac{\sigma_i}{h} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

Una vez obtenida la representación de la matriz para un análisis aislado a un solo elemento y dos nodos, se puede asociar dicha matriz a una generalización con respecto a toda la sonda, es decir, para N nodos y $N - 1$ elementos,

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}(z)) = \frac{1}{h} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & -\sigma_1 & & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\sigma_1 & \sigma_1 + \sigma_2 & -\sigma_2 & & & \ddots & & \\ & -\sigma_2 & \sigma_2 + \sigma_3 & & & & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & & \\ & & & & \sigma_{N-3} + \sigma_{N-2} & -\sigma_{N-2} & & \\ & & & & -\sigma_{N-2} & \sigma_{N-2} + \sigma_{N-1} & -\sigma_{N-1} & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & & -\sigma_{N-1} & \sigma_{N-1} & \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

Se puede observar que la forma de la matriz \mathbf{B} en (4.19) es de carácter tridiagonal, en donde la diagonal principal se encuentra una representación de la discretización de la sonda y de los efectos que se producen cuando dos elementos se encuentran compartiendo un mismo nodo a excepción de los extremos que se encuentran aislados.

4.3. Obtención de la solución al problema directo de TIE (2-D)

Tomando las mismas definiciones iniciales del modelo en una dimensión (ver primer párrafo del apartado 4.2), pero esta vez considerando que las variaciones del perfil de conductividad pueden ocurrir en dos dimensiones, es decir, hacia abajo (eje z) y hacia al lado (eje x), se tienen la ecuaciones definidas en [8] como sigue,

$$\nabla \cdot (\sigma_{2d}(x, z) \cdot \nabla u_{2d}(x, z)) = 0, \quad \text{sobre } \Omega \quad (4.20)$$

$$u_{2d}(x, z) + z_l \cdot \sigma_{2d}(x, z) \cdot \frac{du_{2d}(x, z)}{d\mathbf{v}} = U_{2dl}, \quad \text{sobre } e_l, \quad l = 1, \dots, L \quad (4.21)$$

$$\int_{e_l} \sigma_{2d}(x, z) \cdot \frac{du_{2d}(x, z)}{d\mathbf{v}} dS = I_l, \quad l = 1, \dots, L \quad (4.22)$$

$$\sigma_{2d}(x, z) \cdot \frac{du_{2d}(x, z)}{d\mathbf{v}} = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l$$

donde ∇ en este caso es el operador “nabla” de divergencia visto anteriormente, solo que en esta ocasión bidimensional este operador se refiere a variaciones en dos dimensiones, \mathbf{v} es el vector normal unitario exterior provocado por la densidad de corriente, $u_{2d}(x, z)$ es la función que describe al potencial eléctrico y z_l corresponde a la l -ésima impedancia de contacto entre el electrodo l de superficie e_l y la superficie $\partial\Omega$.

Debido a la teoría de la existencia y unicidad del modelo CEM descrito en [8], se demuestra que para un espacio $H^1(\Omega)$ donde se encuentra la solución $(u_{2d}, \mathbf{U}_{2d})$ existe $(v_{2d}, \mathbf{V}_{2d})$, $v_{2d} \in H^1(\Omega)$, $\mathbf{V}_{2d} \in \mathbb{R}^L$ tal que,

$$B_s((u_{2d}, \mathbf{U}_{2d}), (v_{2d}, \mathbf{V}_{2d})) = \sum_{l=1}^L I_l V_{2d_l}, \quad (4.23)$$

donde B_s es la forma variacional (WVF o Galerkin Weak Variational Form) del modelo MCE que toma la forma de (B_s representa la ecuación 4.23),

$$B_s = \int_{\Omega} \sigma_{2d}(x, z) \cdot \nabla u_{2d}(x, z) \cdot \nabla v_{2d}(x, z) \, d\Omega + \sum_{l=1}^L \int_{e_l} (u_{2d} - U_{2d_l})(v_{2d} - V_{2d_l}) \, dS. \quad (4.24)$$

Al igual que en el caso en una dimensión se procede a la utilización del MEF es posible estimar las soluciones como una única combinación de funciones lineales continuas en dependencias de funciones bases o funciones de pertenencia. Así, las soluciones de las ecuaciones (4.20) – (4.22) de la forma $(u_{2d}, \mathbf{U}_{2d})$ pueden ser estimadas como,

$$u_{2d}^h = \sum_{i=1}^{N_{2d}} \alpha_{2d_i} \cdot \varphi_{2d_i}, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{U}_{2d}^h = \sum_{j=1}^{L-1} \beta_{2d_j} \cdot \mathbf{n}_j, \quad (4.26)$$

donde α_{2d_i} y β_{2d_i} son los pesos a determinar, \mathbf{n}_j son los vectores de referencia a electrodos de la forma $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{n}_2 = (1, 0, -1, 0, \dots, 0)^T$, ..., $\mathbf{n}_{L-1} = (1, 0, 0, \dots, -1)^T \in \mathbb{R}^L$, φ_{2d_i} son las funciones bases de área triangular y N_{2d} es la cantidad de elementos en el modelo bidimensional creado por el MEF. Dichas funciones bases tienen coordenadas ubicadas de la forma que se observa en la Fig. 4.3, donde cada punto representa un nodo de la malla creada por el MEF (ver Fig. 4.4), siendo el mismo triángulo uno de los N_{2d} elementos.

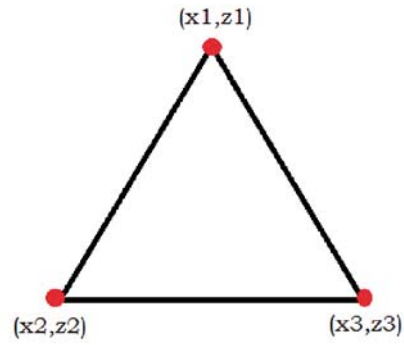


Fig. 4.3. Visualización ubicación de coordenadas de un elemento.

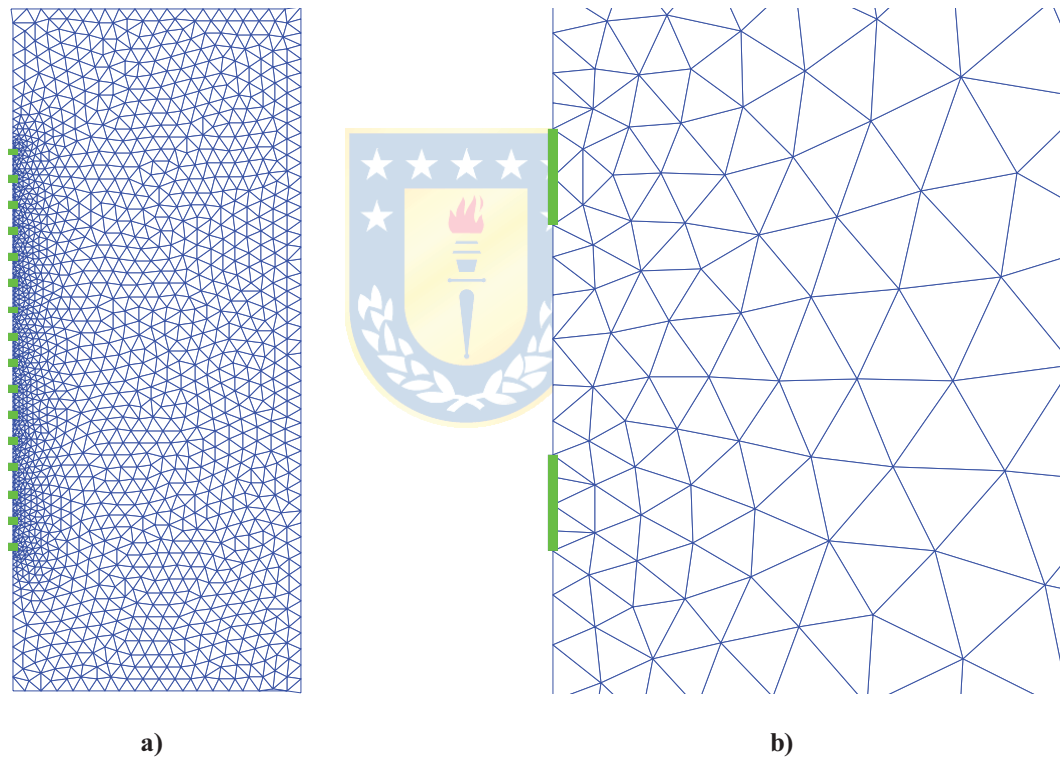


Fig. 4.4 Malla generada por MEF para $N_{2d} = 3261$.

a) Malla completa con $L=16$ electrodos situados en extremo izquierdo, **b)** Ampliación de la malla a dos electrodos contiguos.

Las ecuaciones que describen los nodos de la Fig. 4.3 quedan definidas como φ_{2d_1} , φ_{2d_2} , φ_{2d_3} para las coordenadas (x_1, z_1) , (x_2, z_2) , (x_3, z_3) respectivamente donde,

$$\varphi_{2d_1} = \frac{1}{2 \cdot a} \left(x_i \cdot (z_2 - z_3) + z_j \cdot (x_3 - x_2) + (x_2 \cdot z_3 - x_3 \cdot z_2) \right), \quad (4.27)$$

$$\varphi_{2d_2} = \frac{1}{2 \cdot a} \left(x_i \cdot (z_3 - z_1) + z_j \cdot (x_1 - x_3) + (x_3 \cdot z_1 - x_1 \cdot z_3) \right), \quad (4.28)$$

$$\varphi_{2d_3} = \frac{1}{2 \cdot a} \left(x_i \cdot (z_1 - z_2) + z_j \cdot (x_2 - x_1) + (x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1) \right), \quad (4.29)$$

donde, a representa el área total del elemento en análisis y queda definido como,

$$a = \frac{1}{2} \left((x_2 - x_1)(z_3 - z_2) + (x_3 - x_2)(z_1 - z_2) \right), \quad (4.30)$$

obteniendo la condición de pertenencia,

$$i = j \rightarrow \varphi_{2d_i}(x_i, z_j) = 1, \quad i \neq j \rightarrow \varphi_{2d_i}(x_i, z_j) = 0,$$

permitiendo que la ecuación (4.25) pueda ser representada por 3 nodos para cada elemento de la malla,

$$u_{2d}^h = \sum_{i=1}^3 \alpha_{2d_i} \cdot \varphi_{2d_i}, \quad (4.31)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.25) y (4.26) en (4.24) y expresándolo en forma matricial de la forma,

$$\mathbf{A}_{2d} \cdot \mathbf{b}_{2d} = \mathbf{f}_{2d}, \quad (4.32)$$

donde $\mathbf{A}_{2d} \in \mathbb{R}^{N_{2d}+L-1 \times N_{2d}+L-1}$ es la matriz de rigidez del modelo bidimensional, \mathbf{b}_{2d} es el vector de pesos $\mathbf{b}_{2d} = (\alpha_{2d_1}, \dots, \alpha_{2d_N}, \beta_{2d_1}, \dots, \beta_{2d_{L-1}})^T$ y \mathbf{f}_{2d} es el vector de datos $\mathbf{f}_{2d} = (\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{I}})^T$, con $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{N_{2d}}$ y $\tilde{\mathbf{I}} = (I_1 - I_2, I_1 - I_3, \dots, I_1 - I_L)^T \in \mathbb{R}^{L-1}$. Luego la matriz de rigidez \mathbf{A}_{2d} se puede expresar en términos de 4 sub matrices del tipo,

$$\mathbf{A}_{2d} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{2d} & \mathbf{C}_{2d} \\ \mathbf{C}_{2d}^T & \mathbf{D}_{2d} \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{B}_{2d}(i, j) = \int_{\Omega} \sigma_{2d}(x, z) \cdot \nabla \varphi_{2d_i} \cdot \nabla \varphi_{2d_j} d\Omega + \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{e_l} \varphi_{2d_i} \cdot \varphi_{2d_j} dS, \quad \text{con } i, j = 1, \dots, N_{2d} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{C}_{2d}(i, j) = -\left(\frac{1}{z_1} \int_{e_1} \varphi_{2d_i} dS - \frac{1}{z_{j+1}} \int_{e_{j+1}} \varphi_{2d_i} dS \right), \quad \text{con } i = 1, \dots, N_{2d}; j = 1, \dots, L-1 \quad (4.35)$$

$$\mathbf{D}_{2d}(i, j) = \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{e_l} (\mathbf{n}_i)_l (\mathbf{n}_j)_l dS, \quad \text{con } i, j = 1, \dots, L-1$$

$$\mathbf{D}_{2d}(i, j) = \begin{cases} \frac{|e_1|}{z_1} & ; i \neq j \\ \frac{|e_1|}{z_1} + \frac{|e_{j+1}|}{z_{j+1}} & ; i = j. \end{cases} \quad (4.36)$$

donde $|e_j|$ corresponde al largo del j -ésimo electrodo.

Una vez calculada la matriz de rigidez \mathbf{A}_{2d} el vector de pesos resulta del despeje de \mathbf{b}_{2d} en la ecuación (4.32) y las aproximaciones de los voltajes en los electrodos definidos en (4.26) son obtenidos como,

$$\mathbf{b}_{2d} = \mathbf{A}_{2d}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{2d}, \quad (4.37)$$

$$U_{2d_1}^h = \sum_{l=1}^{L-1} \beta_{2d_l}, \quad (4.38)$$

$$U_{2d_2}^h = -\beta_{2d_1}, \quad (4.39)$$

•

•

•

$$U_{2d_L}^h = -\beta_{2d_{L-1}}, \quad (4.40)$$

también puede ser representado como,

$$\mathbf{U}_{2d}^h = \mathbf{M}_{ref} \cdot \boldsymbol{\beta}_{2d}^T, \quad (4.41)$$

donde la matriz $\mathbf{M}_{ref} \in \mathbb{R}^{L \times L-1}$ contiene los vectores de referencia \mathbf{n}_j . Sin embargo, este resultado corresponde a los voltajes de referencia en cada electrodo, y la configuración de medición utilizada en este modelo es del tipo adyacente, por lo que se hace necesario calcular los voltajes diferenciales de la forma,

$$\mathbf{U}_{2d_{dif}}^h = \mathbf{M}_{dif} \cdot \mathbf{U}_{2d}^h, \quad (4.42)$$

aquí, la matriz $\mathbf{M}_{dif} \in \mathbb{R}^{L-1 \times L}$ es la encargada de producir las diferencias entre los voltajes en los electrodos, por lo que tiene la forma,

$$\mathbf{M}_{dif} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

4.3.1 Cálculo de la matriz de rigidez \mathbf{A}_{2d} (2-D)

Es posible considerar la ecuación (4.34) como dos integrales por separado, una matriz \mathbf{B}_{2d}^m en donde se encuentra un factor del perfil de conductividad del medio y otra matriz \mathbf{B}_{2d}^c la que representa una matriz en función del dominio de la superficie de cada electrodo,

$$\mathbf{B}_{2d}^m(i, j) = \int_{\Omega} \sigma_{2d}(x, z) \cdot \nabla \varphi_{2d_i} \cdot \nabla \varphi_{2d_j} \, d\Omega, \quad \text{con } i, j = 1, \dots, N_{2d} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{B}_{2d}^c(i, j) = \sum_{l=1}^L \frac{1}{z_l} \int_{e_l} \varphi_{2d_i} \cdot \varphi_{2d_j} \, dS. \quad \text{con } i, j = 1, \dots, N_{2d} \quad (4.45)$$

Para la resolución de estas integrales es necesario definir las funciones bases como,

$$\varphi_{2d_i} = \frac{1}{2 \cdot a} (x_i \cdot a_i + z_j \cdot b_i + c_i), \quad (4.46)$$

$$\varphi_{2d_j} = \frac{1}{2 \cdot a} (x_j \cdot a_j + z_j \cdot b_j + c_j), \quad (4.47)$$

donde $a_i, b_i, c_i, a_j, b_j, c_j$ corresponden a valores constantes expresados en (4.27) y su valor dependerá del nodo que se esté considerando.

Para el desarrollo de \mathbf{B}_{2d}^m se aplica el operador nabla de divergencia a dichas funciones bases dando como resultado componentes vectoriales de la forma,

$$\nabla\varphi_{2d_i}(x, z) = \frac{1}{2 \cdot a} \left(\frac{\partial\varphi_{2d_i}}{\partial x}, \frac{\partial\varphi_{2d_i}}{\partial z} \right), \quad (4.48)$$

$$\nabla\varphi_{2d_j}(x, z) = \frac{1}{2 \cdot a} \left(\frac{\partial\varphi_{2d_j}}{\partial x}, \frac{\partial\varphi_{2d_j}}{\partial z} \right). \quad (4.49)$$

Aplicando el producto punto entre ambos resultados y considerando que el valor de la conductividad en dicho elemento es constante y puede ser sacado del integrando se tiene,

$$\mathbf{B}_{2d}^m(i, j) = \frac{\sigma_{2d}(x, z)}{4 \cdot a^2} \left(\frac{\partial\varphi_{2d_i}}{\partial x} \cdot \frac{\partial\varphi_{2d_j}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{2d_i}}{\partial z} \cdot \frac{\partial\varphi_{2d_j}}{\partial z} \right) \int_{\Omega} d\Omega. \quad \text{con } i, j = 1, \dots, N_{2d} \quad (4.50)$$

La integral presente en (4.50) está sobre el dominio triangular de cada elemento, por lo tanto arroja como resultado el área de superficie triangular. Además, si se resuelven las derivadas parciales tomando en cuenta la definición de funciones bases en (4.46) y (4.47) se obtiene finalmente,

$$\mathbf{B}_{2d}^m(i, j) = \frac{\sigma_{2d}(x, z)}{4 \cdot a} (a_i \cdot a_j + b_i \cdot b_j). \quad \text{con } i, j = 1, \dots, N_{2d} \quad (4.51)$$

Para el cálculo de la matriz \mathbf{B}_{2d}^c es necesario aplicar las definiciones sobre el desarrollo con integrales de línea. En este caso la integral de línea está sobre el dominio C de la curva representada por la superficie de cada electrodo, el cual es una línea recta adosada de forma vertical a un extremo de la malla. Descrita la forma del dominio es posible parametrizar dicha curva en función de t ,

$$x(t) = x_{frontera}, \quad z(t) = z_o + (z_f - z_o) \cdot t, \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1 \quad (4.52)$$

de esta manera si $t = 0$ el valor de z corresponde al punto inicial vertical z_0 del electrodo, y si $t = 1$ toma el valor final z_f , ambas posiciones con un valor horizontal $x_{frontera}$. De modo que la curva C tiene como ecuación vectorial,

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + z(t)\hat{k}, \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1 \quad (4.53)$$

cuya derivada y respectivo modulo vectorial corresponde a,

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\hat{i} + z'(t)\hat{k}, \quad (4.54)$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}, \quad (4.55)$$

luego por definición de integral de línea en un campo escalar,

$$\int_C f(x, z) dS = \int_0^1 f(x(t), z(t)) \cdot \|\vec{r}'(t)\| dt, \quad (4.56)$$

reemplazando la función $f(x(t), z(t))$ por la multiplicación directa de las funciones bases presente en el integrando de (4.45) considerando (4.46) y (4.47) se tiene,

$$\int_{e_l} \varphi_{2d_i} \cdot \varphi_{2d_j} dS = \int_0^1 \varphi_{2d_i}(x(t), z(t)) \cdot \varphi_{2d_j}(x(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt, \quad (4.57)$$

$$\int_{e_l} \varphi_{2d_i} \cdot \varphi_{2d_j} dS = \int_0^1 (k_1 \cdot x(t)^2 + k_2 \cdot z(t)^2 + k_3 \cdot x(t) + k_4 \cdot z(t) + k_5 \cdot x(t) \cdot z(t) + k_6) \cdot \frac{\Delta z}{4 \cdot a^2} dt, \quad (4.58)$$

donde las constantes $k_{i=1,\dots,6}$ y Δz están definidas como,

$$k_1 = a_i \cdot a_j,$$

$$k_2 = b_i \cdot b_j,$$

$$k_3 = a_i \cdot c_j + c_i \cdot a_j,$$

$$k_4 = b_i \cdot c_j + c_i \cdot b_j,$$

$$k_5 = a_i \cdot b_j + b_i \cdot a_j,$$

$$k_6 = c_i \cdot c_j,$$

$$\Delta z = \|\vec{r}'(t)\| = |z_f - z_0|.$$

El siguiente paso es resolver estas 6 integrales resultantes de la ecuación (4.58) resultando,

$$\int_{e_l} \varphi_{2d_i} \cdot \varphi_{2d_j} dS = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6, \quad (4.59)$$

donde,

$$C_1 = \frac{k_1 \cdot \Delta Z \cdot x_{frontera}^2}{4 \cdot a^2},$$

$$C_2 = \frac{k_2 \cdot \Delta Z}{4 \cdot a^2} \left(z_o^2 + z_o \cdot (z_f - z_o) + \frac{1}{3} \cdot (z_f - z_o)^2 \right),$$

$$C_3 = \frac{k_3 \cdot \Delta Z \cdot x_{frontera}}{4 \cdot a^2},$$

$$C_4 = \frac{k_4 \cdot \Delta Z}{4 \cdot a^2} \left(z_o + \frac{1}{2} \cdot (z_f - z_o) \right),$$

$$C_5 = \frac{k_5 \cdot \Delta Z \cdot x_{frontera}}{4 \cdot a^2} \left(z_o + \frac{1}{2} \cdot (z_f - z_o) \right),$$

$$C_6 = \frac{k_6 \cdot \Delta Z}{4 \cdot a^2}.$$

Finalmente queda por resolver la integral presente en la matriz \mathbf{C}_{2d} descrita en la ecuación (4.35) en donde el integrando es una función lineal del tipo,

$$\int_C \varphi_{2d_i} dS = \int_0^1 \varphi_{2d_i}(x(t), z(t)) \cdot \Delta z dt,$$

$$\int_C \varphi_{2d_i} dS = \frac{\Delta Z}{4 \cdot a^2} \left(a_i \cdot x_{frontera} + c_i + b_i \cdot \left(z_o + \frac{1}{2} \cdot (z_f - z_o) \right) \right). \quad (4.60)$$

4.4. Obtención de la solución al problema inverso de TIE (1-D)

Para la obtención de una solución al problema inverso de reconstrucción del perfil de conductividad se recurre a un método iterativo muy bien catalogado por la literatura, dicho método es el de Newton-Raphson en su versión modificada, implementado en [12] y [13], dando resultados satisfactorios y de gran veracidad en el perfil de conductividad obtenido.

Se define un vector $\mathbf{U}_o \in \mathbb{R}^{L-1}$ como un vector que contiene mediciones reales de voltajes que representan el perfil de conductividad real del sistema, el cual se quiere determinar. Sea

$\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^k) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{L-1}$ un funcional que mapea un perfil de conductividad dado en la k -ésima iteración, $\boldsymbol{\sigma}^k$, a un conjunto de voltajes representativos en los electrodos.

El algoritmo de NRm desarrollado en [12], muestra que se hace necesario un método de regularización puesto que la ecuación de actualización del perfil de conductividad presenta el cálculo de la inversa de una matriz mal condicionada, la cual provoca que el problema completo difiera de la solución óptima. Con las consideraciones establecidas hasta ahora se tiene que NRm trabaja sobre el principio de minimización de un funcional de error,

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}^k) = \arg \min_{\boldsymbol{\sigma}^k} \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^k) - \mathbf{U}_o\|^2 + \lambda \cdot \|\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}^k\|^2, \quad (4.61)$$

donde a la ecuación (4.61) se le denomina “función cuadrática regularizada del error”, donde la utilización de normas del carácter ℓ_2 permite que ϕ sea diferenciable provocando que este funcional sea capaz de tener mayores aplicaciones en problemas inversos de minimización. El valor λ se le denomina valor de hiperparámetro y \mathbf{L} corresponde a la matriz de regularización. El valor que se le da a la fijación de λ es muy importante, puesto que con ello se está definiendo un estilo de equilibrio entre resolución de la imagen y atenuación o amplificación de los valores del perfil de conductividad obtenido durante la reconstrucción. La importancia de estos dos últimos parámetros puede ser vista en [4], [10], [14], [17] y [19]. La ecuación (4.61) también puede ser considerada como una regularización que adopta el nombre de regularización de Tikhonov [4].

Siguiendo con el algoritmo NRm, se requiere derivar (4.61) con respecto a $\boldsymbol{\sigma}^k$ e igualar a cero para analizar el problema de minimización del funcional,

$$\phi'(\boldsymbol{\sigma}^k) = [\mathbf{F}'(\boldsymbol{\sigma}^k)]^T * [\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^k) - \mathbf{U}_o] + \lambda \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}^k = 0, \quad (4.62)$$

donde $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\sigma}^k)$ corresponde al Jacobiano del conjunto de voltajes de medición para cada σ_i^k , con $i = 1, \dots, N$. Luego expandiendo (4.62) en serie de Taylor se tiene,

$$\phi'(\boldsymbol{\sigma}^k) \approx \phi'(\boldsymbol{\sigma}^k) + \phi''(\boldsymbol{\sigma}^k) \cdot \Delta\boldsymbol{\sigma}^k, \quad (4.63)$$

donde $\Delta\boldsymbol{\sigma}^k = \boldsymbol{\sigma}^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^k$ y $\phi''(\boldsymbol{\sigma}^k)$ corresponde al Hessiano del funcional de error, aproximado como (de aquí el agregado de “modificado” al nombre del algoritmo),

$$\phi''(\boldsymbol{\sigma}^k) \approx [\mathbf{F}']^T \cdot \mathbf{F}' + \lambda \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L}. \quad (4.64)$$

Reemplazando (4.62) y (4.64) en (4.63) e igualando a 0 para despejar $\boldsymbol{\sigma}^{k+1}$, asumiendo (4.14) no singular se tiene la actualización del perfil de conductividad dado por NRm,

$$\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}^k - \left[[\mathbf{F}'(\boldsymbol{\sigma}^k)]^T \cdot \mathbf{F}'(\boldsymbol{\sigma}^k) + \lambda \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L} \right]^{-1} \cdot ([\mathbf{F}'(\boldsymbol{\sigma}^k)]^T \cdot [\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^k) - \mathbf{U}_o] + \lambda \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}^k), \quad (4.65)$$

siendo necesario un criterio de detención, ya sea sobre un nivel de tolerancia en el funcional de error (4.61) o una cantidad establecida de iteraciones del algoritmo.

4.4.1 Cálculo del Jacobiano presente en NRm del problema inverso

Para este apartado es necesario volver a nombrar la definición del Jacobiano descrito anteriormente, el cual era que dicho Jacobiano representa las derivadas de cada representación de las mediciones de voltaje U_i , $i = 1, \dots, L$ con respecto a cada valor nodal del perfil de conductividad σ_i^k , $i = 1, \dots, N - 1$, por lo tanto,

$$\mathbf{F}'(\boldsymbol{\sigma}^k) = \frac{dU_i(\boldsymbol{\sigma}^k)}{d\sigma_i^k} = \frac{d(\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{\sigma}^k))}{d\sigma_i^k} = \frac{d(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^k) \cdot \tilde{\mathbf{I}})}{d\sigma_i^k} = \mathbf{M} \cdot \frac{d(\mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^k))}{d\sigma_i^k} \cdot \tilde{\mathbf{I}}, \quad (4.66)$$

luego, aplicando propiedad sobre derivada de matrices con respecto a un escalar se tiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(\boldsymbol{\sigma}^k) &= \mathbf{M} \cdot -\mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^k) \cdot \frac{d(\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}^k))}{d\sigma_i^k} \cdot \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^k) \cdot \tilde{\mathbf{I}} \\ \mathbf{F}'(\boldsymbol{\sigma}^k) &= -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^k) \cdot \frac{d(\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}^k))}{d\sigma_i^k} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{\sigma}^k), \end{aligned} \quad (4.67)$$

por lo que ahora el problema se transforma en encontrar la derivada de la matriz \mathbf{B} con respecto a cada componente del perfil de conductividad σ^k .

4.4.2 Cálculo de la derivada de \mathbf{B} con respecto a σ^k

Esta etapa resulta simple puesto que la forma de la matriz en cuestión ya está definida en (4.19) y solamente hace falta encontrar una forma general para representar dicha derivada en función del número del i -ésimo elemento que se esté analizando.

Derivando (4.19) con respecto a un i -ésimo elemento, se tiene una matriz de dimensiones en $\mathbb{R}^{L \times N}$, la cual es una matriz de carácter dispersa poco densa con valores no nulos en las posiciones definidas en la tabla 4.1 para $i = 1, \dots, N - 1$.

Tabla 4.1 Posición de valores no nulos en $d\mathbf{B}/d\sigma_i^k$

Posición en \mathbf{B} (fila, columna)	Valor
(i, i)	1
$(i, i + 1)$	-1
$(i + 1, i)$	1
$(i + 1, i + 1)$	-1

4.5. Método de Variación Total de regularización

En este apartado se analizará la obtención de la matriz \mathbf{L} necesaria para la etapa de regularización y actualización del método NRm, ecuación (4.65), que soluciona el mal condicionamiento del problema inverso. El método de variación total responde a la necesidad de poder encontrar una perfil de conductividad que presente cambios bruscos a los largo de la discretización de la malla creada por el MEF. De esta manera el resultado encontrado será más aproximado al ideal, reduciendo los picks de reconstrucción ante variaciones bruscas de $\sigma(\mathbf{z})$.

Una característica que presenta este método de regularización, es que la componente derecha del funcional de error cuadrático (4.61) utiliza una norma de carácter ℓ_1 , pero aun así sigue siendo diferenciable. Según [11], el concepto de variación total de un perfil $\sigma(\mathbf{z})$ está definido como,

$$\mathbf{TV}(\boldsymbol{\sigma}(z)) = \int_{\Omega} |\nabla \boldsymbol{\sigma}(z)| dz, \quad (4.68)$$

o en su forma matricial,

$$\mathbf{TV}(\boldsymbol{\sigma}(z)) = |\mathbf{L}_{\mathbf{TV}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(z)|, \quad (4.69)$$

donde $\mathbf{L}_{\mathbf{TV}}$ es la matriz de regularización definida por el método de variación total y al tratarse en (4.68) como norma ℓ_1 representa una combinación de valores absolutos por cada diferencia entre componentes continuos en $\boldsymbol{\sigma}(z)$. Explicado de otra forma, como el contexto de este trabajo de Memoria de Título es sobre una dimensión, el funcional resultante $\mathbf{TV}(\boldsymbol{\sigma}(z))$ tiene la forma de vector columna de dimensiones $\mathbb{R}^{N-1 \times 1}$ en donde cada componente es representado por,

$$TV_i = |\sigma(z_i) - \sigma(z_{i-1})|. \quad (4.70)$$

Se observa que este funcional de variación total presenta un problema de diferenciabilidad en los puntos donde $\sigma(z_i) = \sigma(z_{i-1})$, lo que es corregido mas adelante con una técnica descrita en [11]. Sin embargo la importancia de este funcional es que para los casos donde el perfil de conductividad presenta discontinuidades, la regularización se limita a penalizarlas provocando una mejor adaptación en aquellos puntos.

Como se dijo anteriormente es necesaria una adaptación al problema que presenta el funcional de variación total en donde los puntos continuos del perfil de conductividad son iguales. Para ello se procede a implementar la técnica denominada “Lagged Diffusivity” (Difusividad Retardada), la cual implica una adaptación del funcional $\mathbf{TV}(\boldsymbol{\sigma}(z))$ a un nuevo funcional que dependa de un nuevo parámetro llamado en este trabajo como “parámetro de diferenciabilidad”. La adaptación de la ecuación (4.68) queda,

$$\mathbf{TV}_{\beta}(\boldsymbol{\sigma}(z)) = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla \boldsymbol{\sigma}(z)|^2 + \beta^a} dz, \quad (4.71)$$

donde se puede observar que para $\beta^d = 0 \rightarrow \mathbf{TV}_\beta(\boldsymbol{\sigma}(z)) = \mathbf{TV}(\boldsymbol{\sigma}(z))$, de modo que este funcional (4.71) se transforma en un problema de minimización sobre $\beta^d > 0$ para conservar la diferenciabilidad ante no cambios en los valores continuos de conductividad en los elementos definidos por el MEF.

Considerando lo anterior, y aplicando el funcional de variación total a la ecuación que toma la forma de regularización de Tikhonov sobre el funcional de error presente en el algoritmo de NRm, (4.61), el problema principal de minimización queda definido como,

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}^k) = \arg \min_{\boldsymbol{\sigma}^k} \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^k) - \mathbf{U}_o\|^2 + \lambda \cdot \mathbf{TV}_\beta(\boldsymbol{\sigma}(z)), \quad (4.72)$$

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}^k) = \arg \min_{\boldsymbol{\sigma}^k} \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^k) - \mathbf{U}_o\|^2 + \lambda \cdot \sqrt{|\mathbf{L}_{\mathbf{TV}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(z)|^2 + \beta^d}, \quad (4.73)$$

cambiando la forma de la actualización de NRm a,

$$\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}^k - \left[[\mathbf{F}'(\boldsymbol{\sigma}^k)]^T \cdot \mathbf{F}'(\boldsymbol{\sigma}^k) + \lambda \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{TV}}^T \cdot \mathbf{E}_k^{-1} \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{TV}} \right]^{-1} \cdot \left([\mathbf{F}'(\boldsymbol{\sigma}^k)]^T \cdot [\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^k) - \mathbf{U}_o] + \lambda \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{TV}}^T \cdot \mathbf{E}_k^{-1} \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{TV}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^k \right), \quad (4.74)$$

donde en [11] se define a la matriz \mathbf{E}_k como,

$$\mathbf{E}_k = \text{diag}(\boldsymbol{\eta}), \quad (4.75)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \sqrt{|\mathbf{L}_{\mathbf{TV}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(z)|^2 + \beta^d}, \quad (4.76)$$

además, la matriz de diferencias $\mathbf{L}_{\mathbf{TV}}$ definida inicialmente en (4.69) con dimensiones $\mathbb{R}^{N-2 \times N-1}$ es de la forma,

$$\mathbf{L}_{\mathbf{TV}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.77)$$

4.6. Métodos de Inyección de Corriente y Medición de Voltaje

Para la etapa de inyección de corriente en la etapa de simulación se utilizará el método de inyección adyacente. Este método de inyección es descrito a fondo en [2] y consiste principalmente en la utilización, como bien dice su nombre, de dos electrodos adyacentes para la inyección de la señal de corriente, ya sea un electrodo para la inyección y el electrodo vecino configurado para recibir dicha corriente. En [2] se demuestra mediante resultados experimentales y simulaciones que este método es el que mejor comportamiento presenta en cuanto a resolución de la imagen a reconstruir en el problema inverso, por lo que se decidió considerar este método para las simulaciones y posteriores desarrollos del problema directo y reconstrucciones del problema inverso de TIE.

Por otro lado se define la medición de voltajes para la resolución del problema inverso como la medición entre dos electrodos vecinos para una secuencia de inyección, también descrito en [2] y utilizado en el desarrollo de [2], [3], [8], [10], [17] y [19].

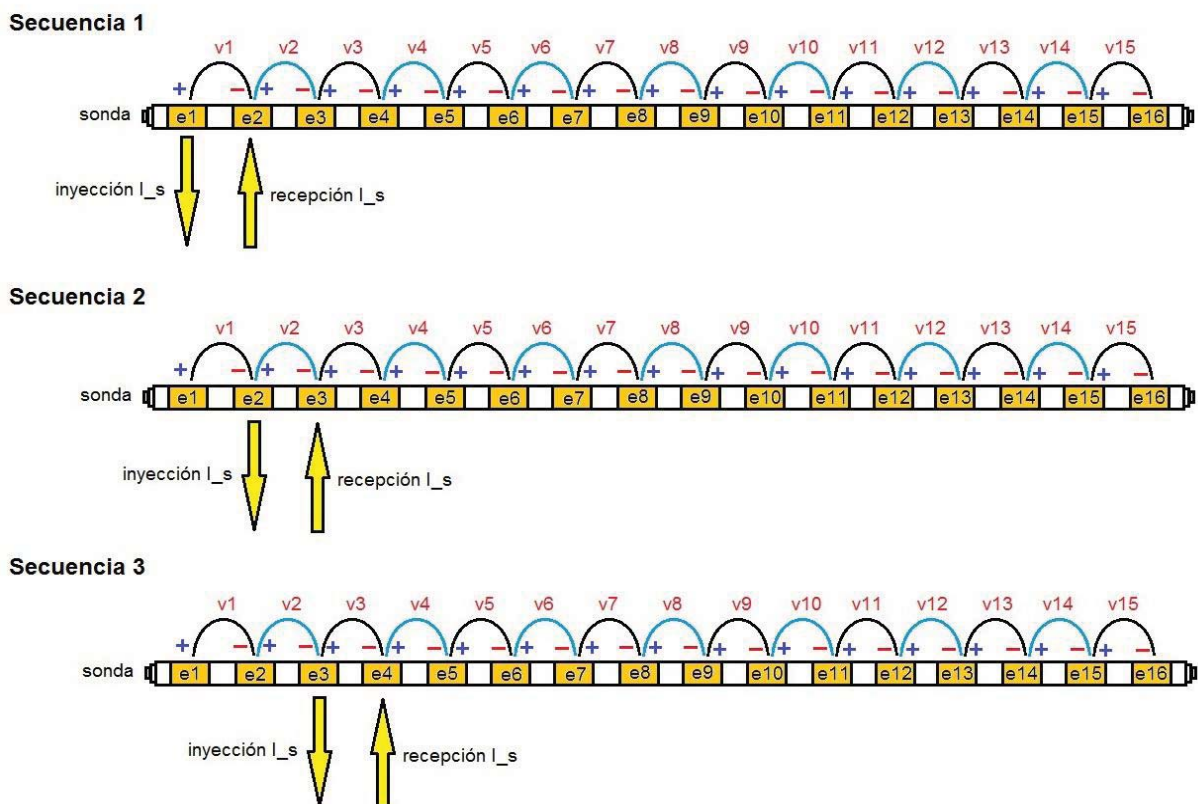


Fig. 4.5 Ejemplo de inyección y medición para 3 secuencias.

En la Fig.4.5 se muestra un ejemplo para una estrategia de 3 secuencias de inyección adyacente, cada una con su respectiva estrategia de medición de voltaje adyacente y diferencial desde v_1 hasta v_{15} .



5. Calibración, Simulaciones y Resultados

5.1. Consideraciones pre-simulación y obtención de resultados

Como se ha mencionado anteriormente, el algoritmo que permite obtener los resultados a los problemas directo e indirecto de TIE fue realizado en entorno Matlab, con un valor de inyección de corriente de $I_s = 6.49 \text{ mA}$, para una cantidad de electrodos de $L = 16$, definiendo al primer electrodo de la sonda como punto de referencia, una discretización de la sonda por MEF con $N = 151$ nodos y por ende 150 elementos para el modelo unidimensional, $N_{2d} = 1726$ nodos y 3207 elementos en el modelo bidimensional, donde cada nodo presenta un espaciamiento constante de $h = 1$ para el modelo unidimensional, una impedancia de contacto constante de $Z_l = 13 \text{ ohm}$ y una estrategia de inyección y medición del estilo adyacente para 15 secuencias de inyección en ambos modelos.

Al considerar un electrodo de referencia implica que durante el cálculo del algoritmo se deben ir eliminando los datos producidos por el mismo, es decir vectores y matrices deben eliminar columnas y filas referenciadas a este electrodo-nodo. Dicho lo anterior, la implementación del MEF sobre la sonda sería de la forma que se muestra en Fig. 5.1, para el modelo 1-D y como ya se mostró en la Fig. 4.4 para el modelo 2-D.

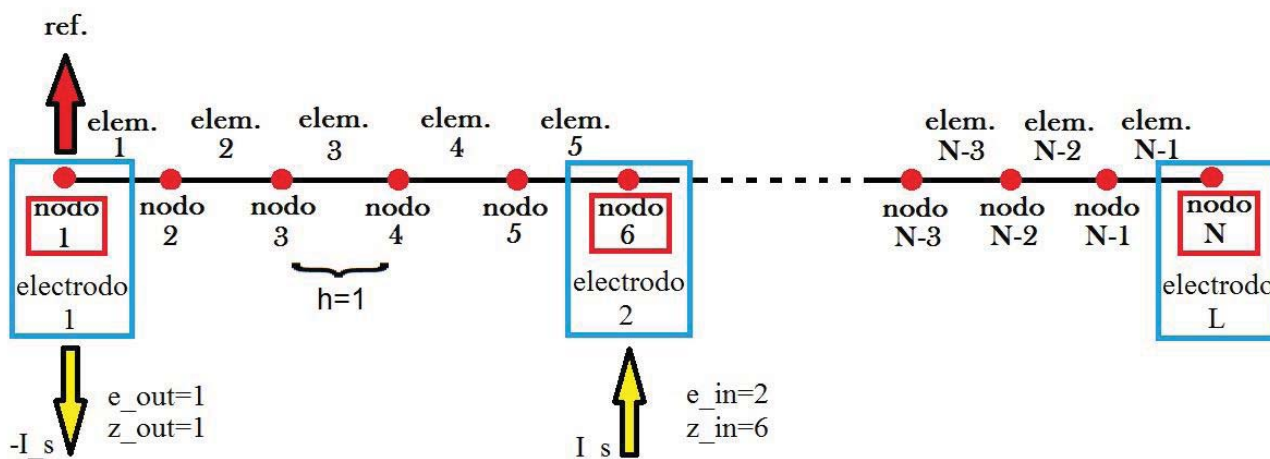
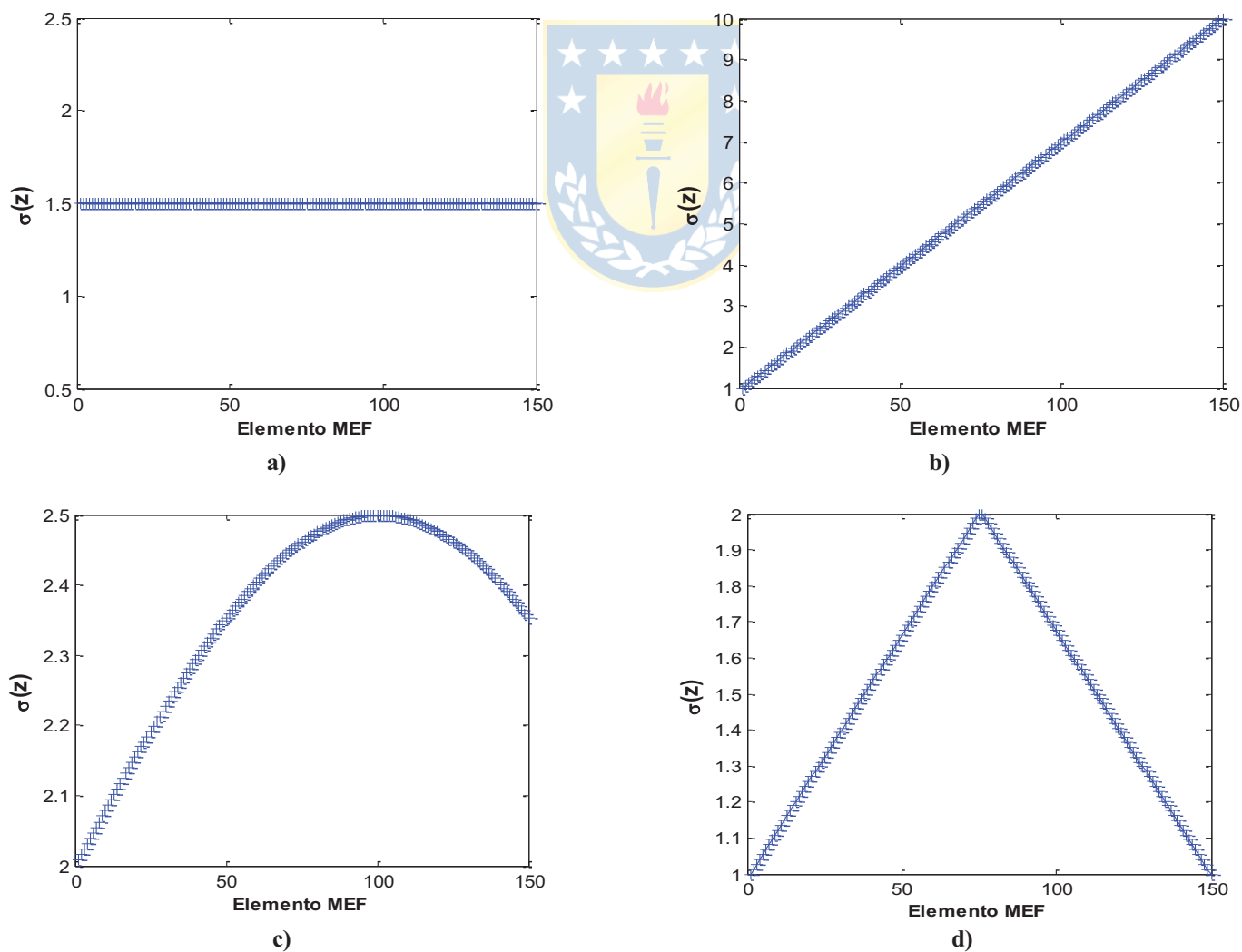


Fig. 5.1 Visualización de MEF sobre la sonda tomográfica en modelo 1-D.

Por otro lado, es necesario establecer los valores de λ y β definidos en la ecuación de regularización característica de Tikhonov y el método de regularización de variación total, ambos

temas vistos en los apartados 4.4 y 4.5. Como criterio se utilizó un método revisado en [14] definido como “Heuristic selection”, el cual principalmente recurre al criterio humano para establecer la mejor opción en la elección de estos parámetros, es decir, se toma un criterio visual sobre el comportamiento del algoritmo de reconstrucción y la calidad de la reconstrucción del perfil de conductividad deseado, permitiendo poder experimentar con perfiles simulados para luego dejar configurados los valores para las reconstrucciones con datos reales medidos por la sonda tomográfica.

Se consideran cinco tipos de comportamientos simulados del perfil de conductividad deseado en el modelo 1-D que podrían caracterizar diversas situaciones reales en un estaque de sedimentación: valor constante, de tipo sinusoidal, de tipo escalón, de tipo rampa y triangular. Por otro lado se consideran 3 tipos de comportamientos para el modelo 2-D los cuales son un perfil constante, un perfil con un cambio en conductividad, y un perfil con dos cambios en conductividad.



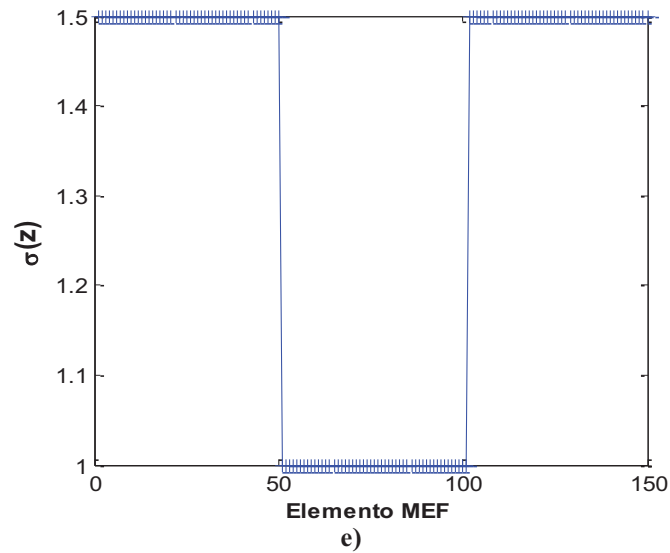
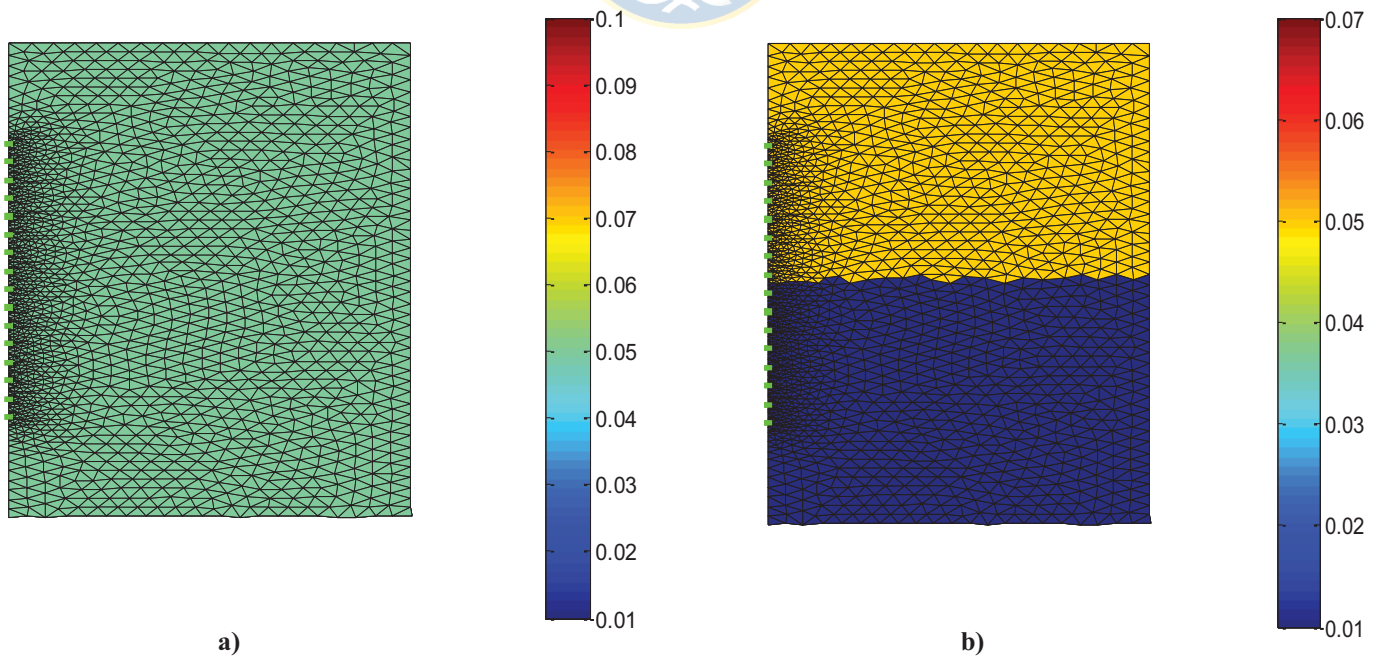


Fig. 5.2 Perfiles 1-D de conductividad simulados.

a) perfil constante, b) perfil estilo rampa, c) perfil estilo sinusoidal, d) perfil estilo triangular, e) perfil estilo escalón.

Como se definió anteriormente en el MEF del modelo 1-D, la sonda está discretizada en $N - 1 = 150$ elementos, por lo tanto cada figura mostrada en Fig. 5.2 corresponde a un vector de 150 elementos. Donde el elemento 1 está representando a la parte superior de la sonda, y el elemento 150 a la parte inferior de la misma y por ende el límite inferior que es alcanzado por la sonda dentro de la columna.



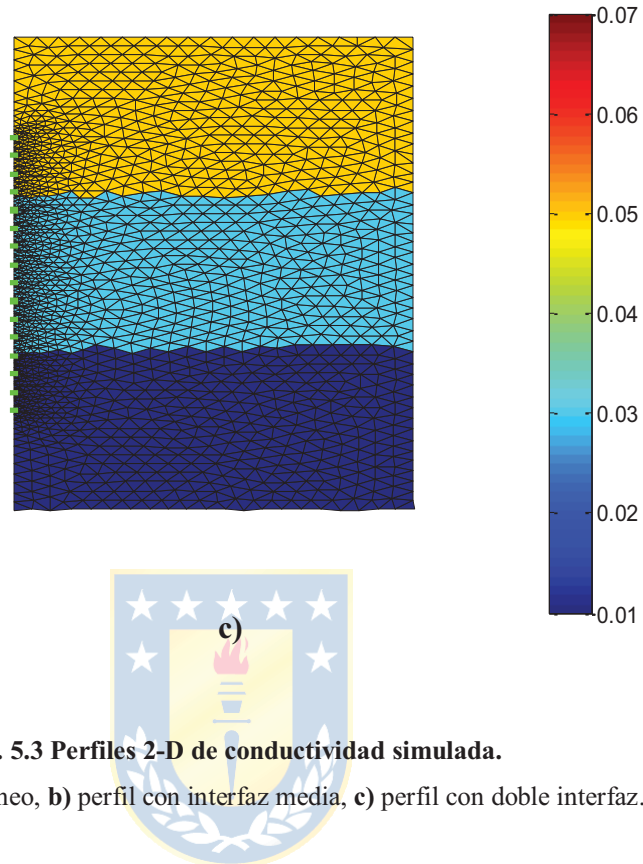


Fig. 5.3 Perfiles 2-D de conductividad simulada.

a) perfil homogéneo, b) perfil con interfaz media, c) perfil con doble interfaz.

En este apartado no se definen unidades de conductividad dado que las Fig.5.2 y 5.3 son a modo de referencia para obtener resultados sin calibración. Más adelante se produce la calibración del modelo y se definen unidades de conductividad.

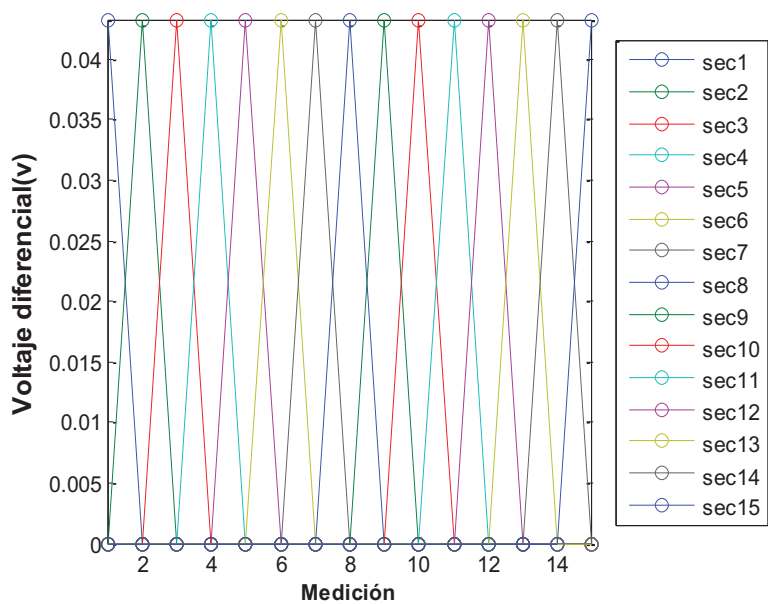
Es necesario realizar la siguiente tabla que resume las secuencias y los electrodos considerados en la inyección y medición, donde $I -$ denota electrodos de inyección de corriente y $I +$ denota electrodos de recepción de corriente.

Tabla 5.1 Resumen de configuración secuencia-electrodo

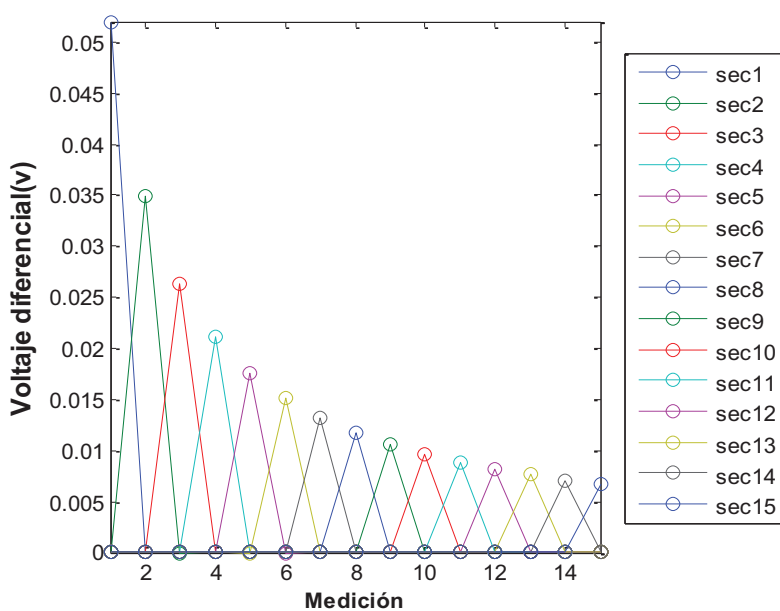
Secuencia	$I -$	$I +$
1	e_1	e_2
2	e_2	e_3
3	e_3	e_4
4	e_4	e_5
5	e_5	e_6
6	e_6	e_7
7	e_7	e_8
8	e_8	e_9
9	e_9	e_{10}
10	e_{10}	e_{11}
11	e_{11}	e_{12}
12	e_{12}	e_{13}
13	e_{13}	e_{14}
14	e_{14}	e_{15}
15	e_{15}	e_{16}

5.2. Simulación del problema directo (1-D)

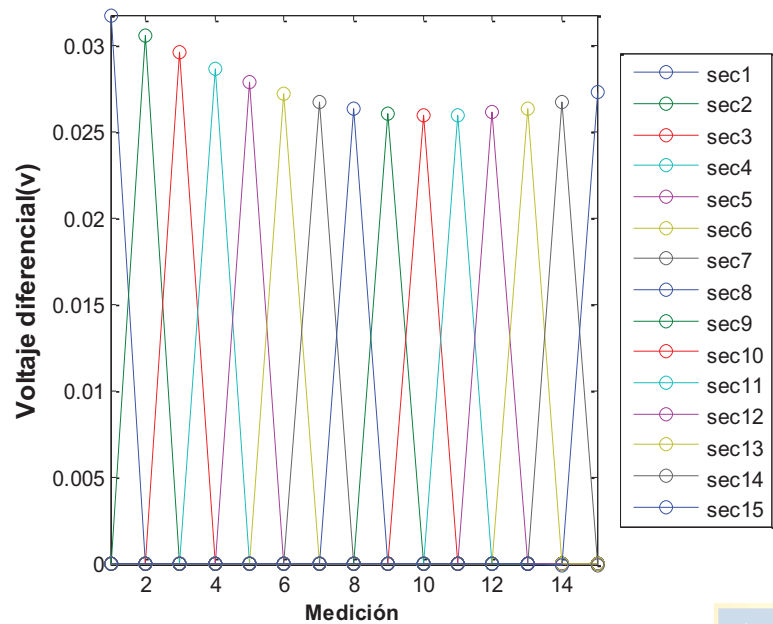
Para la obtención de los voltajes diferenciales se consideraron los cinco perfiles mostrados en la Fig. 5.2, arrojando los resultados observados en la Fig. 5.4.



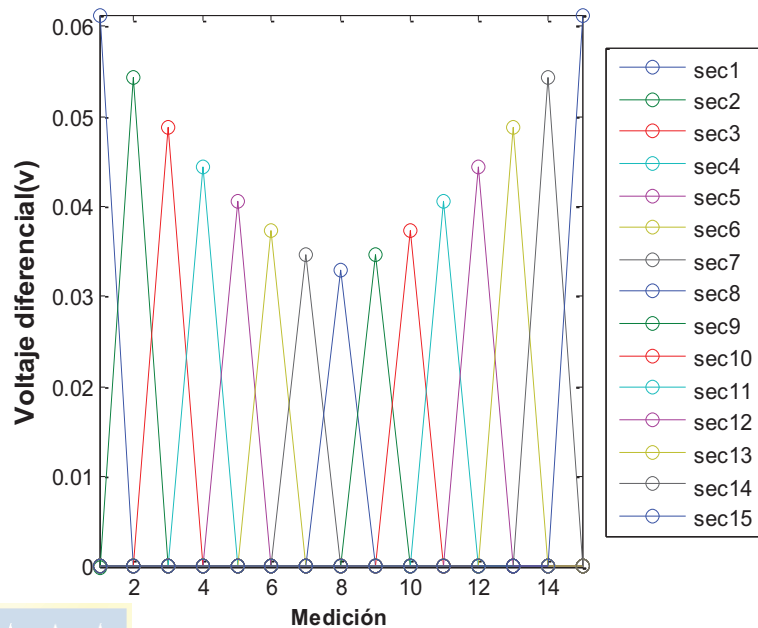
a)



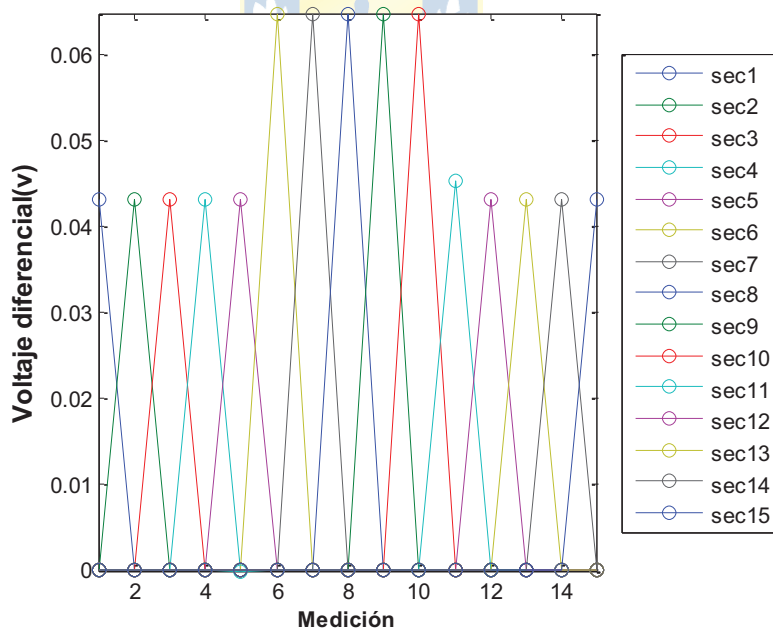
b)



c)



d)



e)

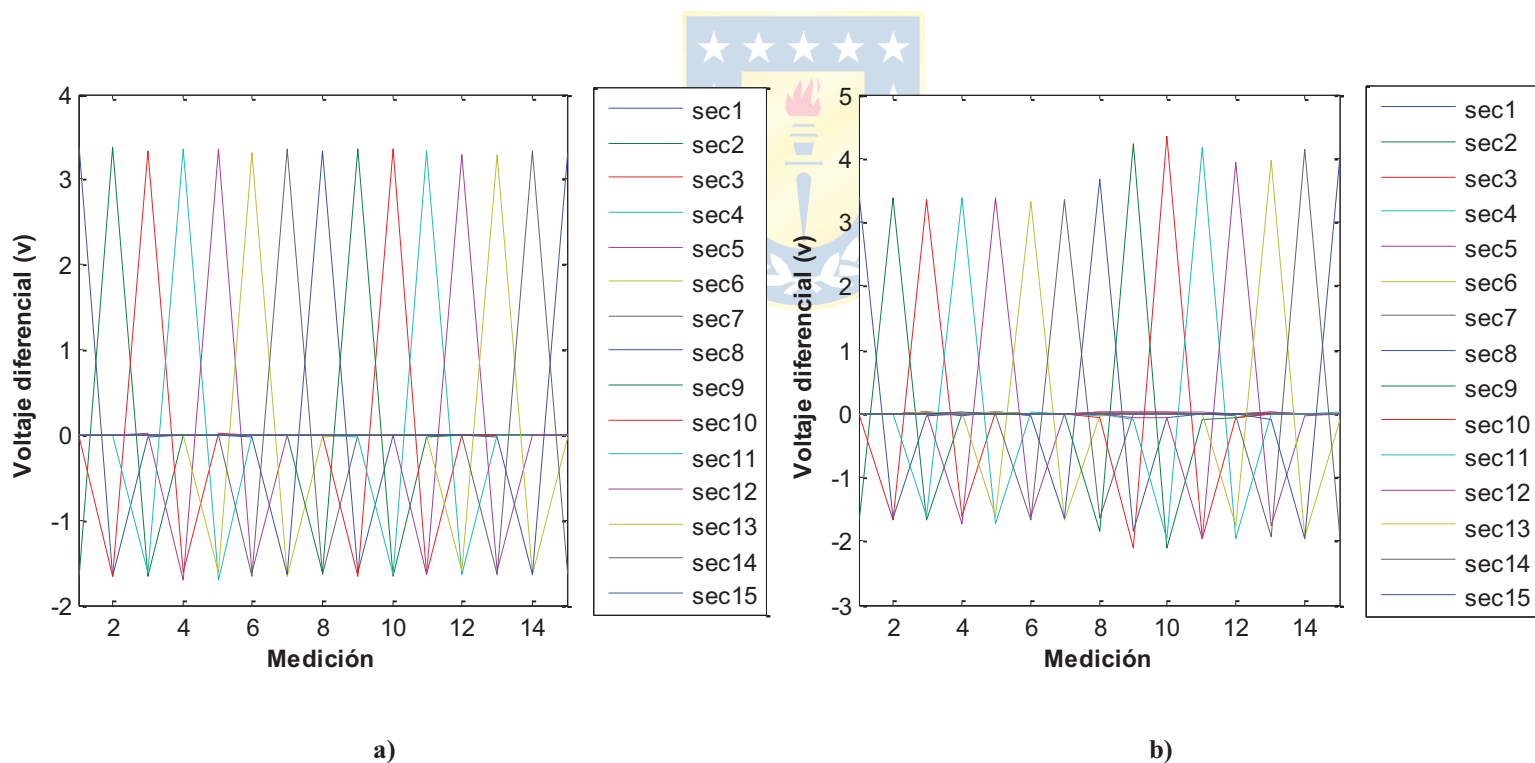
Fig. 5.4 Voltajes diferenciales resultantes al problema directo 1-D.

a) perfil constante, b) perfil estilo rampa, c) perfil estilo sinusoidal, d) perfil estilo triangular, e) perfil estilo escalón.

Observando los resultados obtenidos al problema directo para los distintos perfiles de conductividad se puede hacer una relación inversa entre el comportamiento de dicho perfil y los voltajes diferenciales obtenidos a lo largo de la sonda tomográfica, comprobándose la teoría en electrónica puesto que para una mayor conductividad de la corriente implica una menor resistencia del medio, por lo tanto una menor caída de tensión. También es posible concluir que efectivamente se observa un comportamiento correcto de los resultados, tal que el mayor valor de medición por secuencia corresponde efectivamente al mismo par de electrodos definidos para la inyección de corriente dejando a las demás mediciones con valores muy cercanos o efectivamente nulos.

5.3. Simulación del problema directo (2-D)

Para la obtención de los voltajes diferenciales se consideraron los cinco perfiles mostrados en la Fig. 5.3, arrojando los resultados observados en la Fig. 5.5.



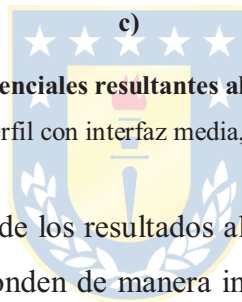
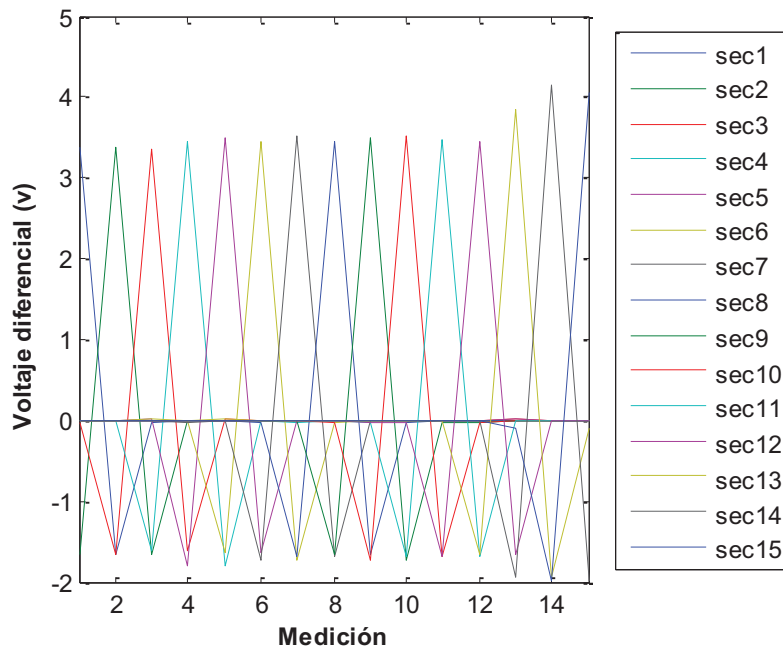


Fig. 5.5 Voltajes diferenciales resultantes al problema directo 2-D.

a) perfil homogéneo, b) perfil con interfaz media, c) perfil con doble interfaz.

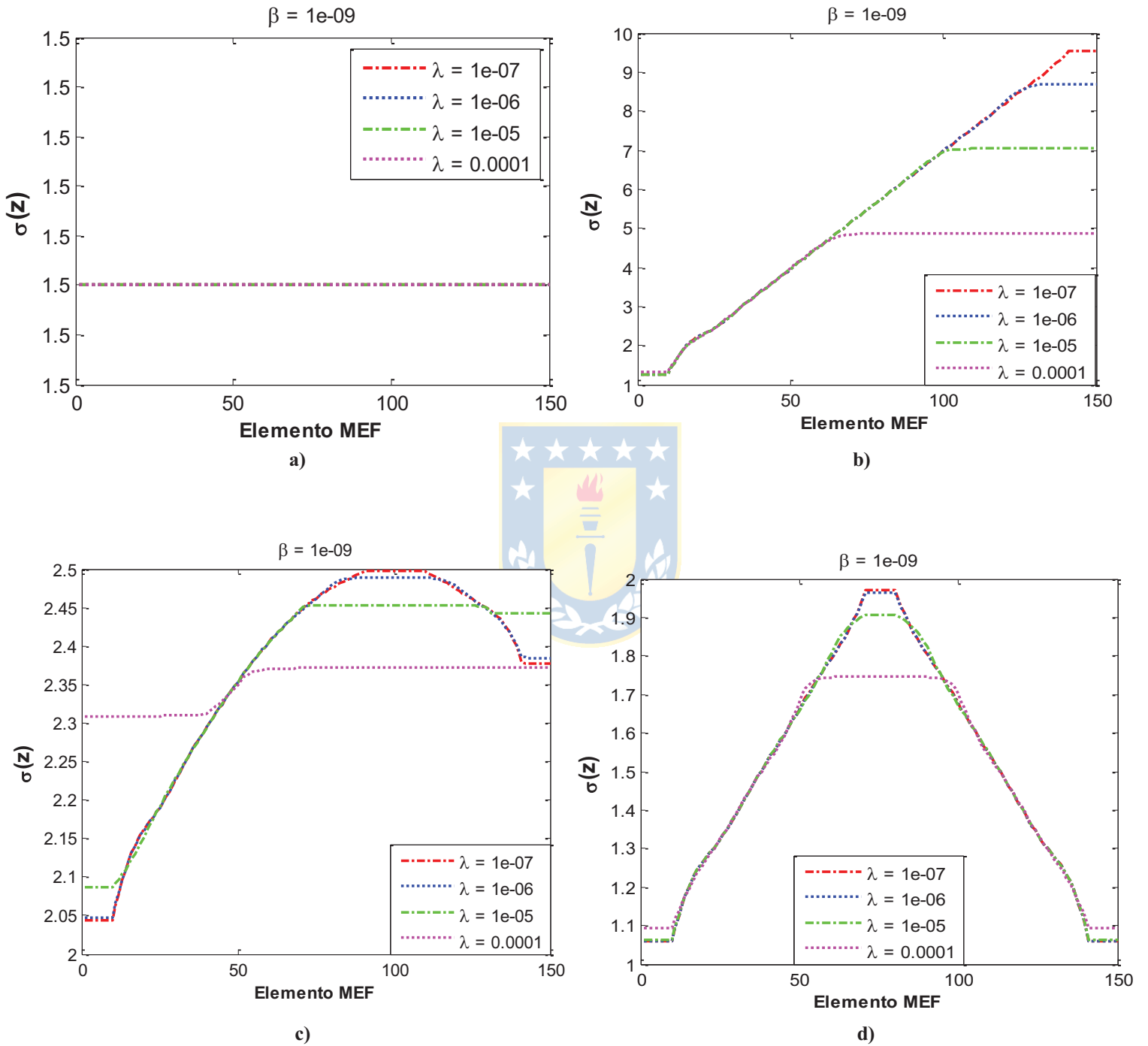
Al igual que en el caso anterior de los resultados al problema directo para el modelo en una dimensión se tiene que los voltaje responden de manera inversa a la conductividad del medio, solo que este modelo presenta cambios menos significativos en los voltajes obtenidos. Esto debido a que el modelo en dos dimensiones presenta un comportamiento menos sensible a los cambios de conductividad obteniendo voltajes más representativos a la situación real.

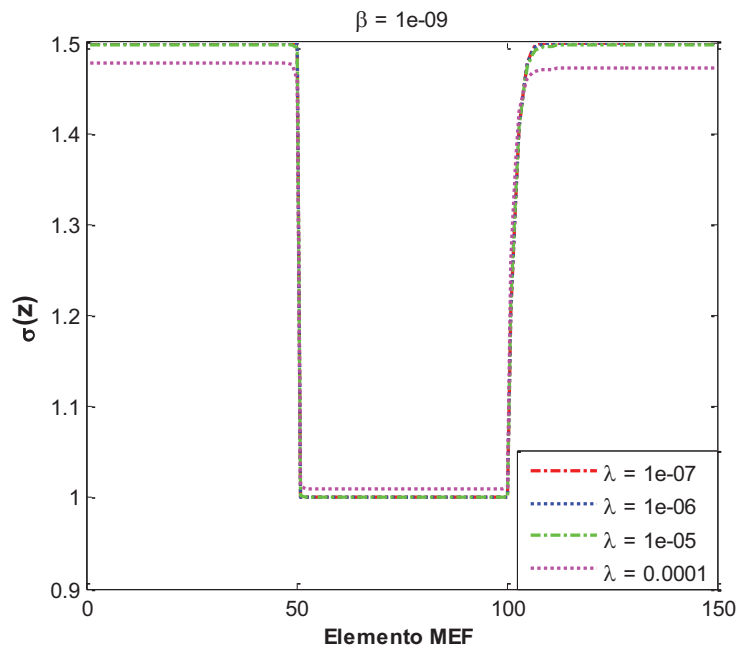
5.4. Resultados de simulación del problema inverso (1-D)

5.4.1 Criterio de elección de β^d y λ

Como se ha mencionado anteriormente, se utilizó el criterio de “Heuristic selection” mostrado en [14], donde por medio de prueba y error se definen los valores de β^d y λ . Para ello se realizan varias reconstrucciones variando dichos parámetros y comparando los resultados de $\sigma^k(z)$ dentro de un límite de 50 iteraciones en el algoritmo de NRM para cada elección de β^d y λ . Se consideró el hecho de que para el caso ideal en la teoría del método de regularización de variación total se tiene que $\beta^d = 0$ pero en la práctica no puede ser dicho valor, por lo que se consideró variar

λ con un $\beta^d = 1 \times 10^{-9}$ fijo. De igual manera par al caso contrario se tomara el valor de λ que arroje la mejor aproximación para variar β^d .





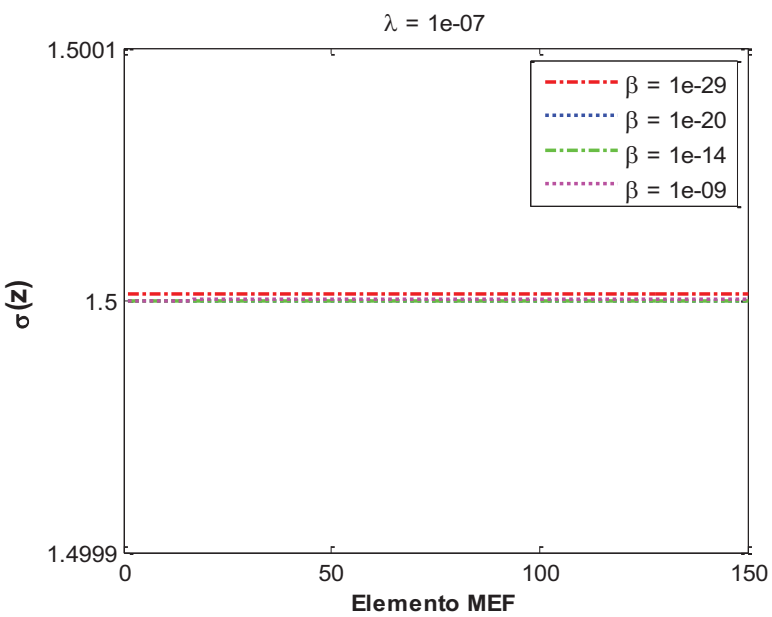
e)

Fig. 5.6 Reconstrucciones con variación de λ y $\beta^d=1e-9$.

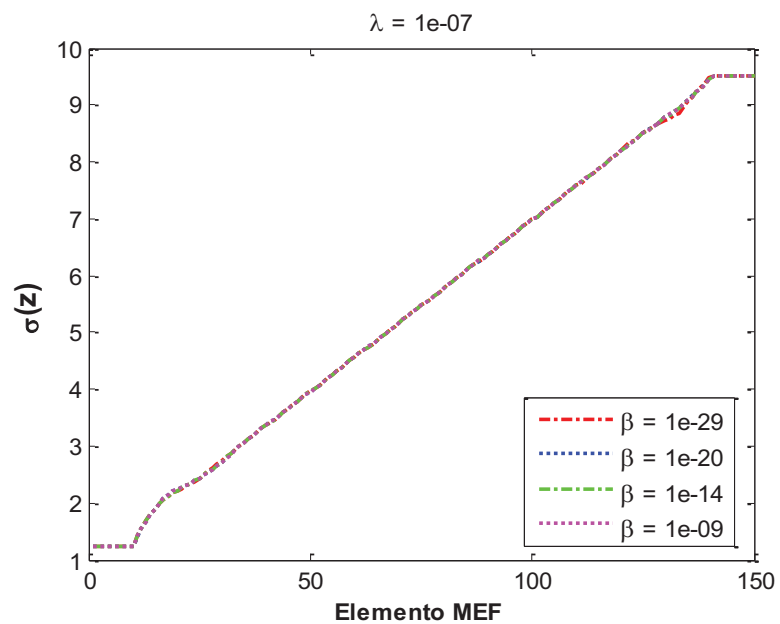
a) perfil constante, b) perfil estilo rampa, c) perfil estilo sinusoidal, d) perfil estilo triangular, e) perfil estilo escalón.

De los resultados anteriores es posible establecer que el valor del hiperparámetro $\lambda = 1 \times 10^{-7}$ presenta una aproximación más cercana a la ideal mostrada en la Fig. 5.2. Si bien en los resultados obtenidos para el perfil constante y escalón no existen grandes diferencias entre las variaciones de λ , para los perfiles del tipo sinusoidal, rampa y triangular se pueden observar a simple vista que existe una gran importancia al momento de considerar variaciones de λ . Posteriormente se realizó el mismo análisis pero tomando un intervalo de variación de $\lambda < 1 \times 10^{-7}$, lo que produjo resultados con cambios ínfimos de reconstrucción. De lo anterior se establece $\lambda = 1 \times 10^{-7}$ como un valor que satisface el criterio de “Heuristic selection”.

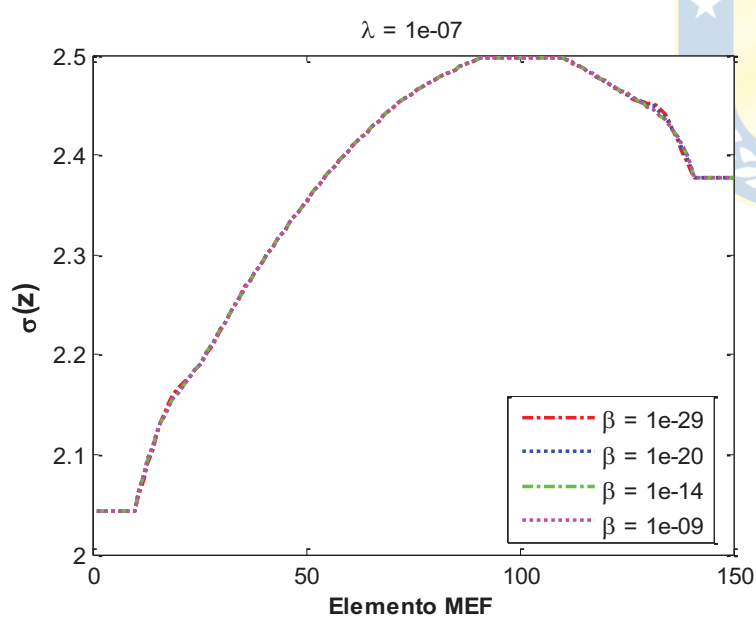
Una vez establecido el valor de hiperparámetro se procede a la fijación del valor del parámetro de diferenciabilidad β^d variando su valor de forma descendente de manera de analizar el caso ideal en la práctica cuando $\beta^d \rightarrow 0$. Dicho intervalo a considerar serán variaciones en $[1 \times 10^{-29}, 1 \times 10^{-9}]$, ya que para valores por debajo de este intervalo el algoritmo de NRm presenta problemas de singularidad provocando la divergencia del perfil de conductividad reconstruido con respecto al ideal.



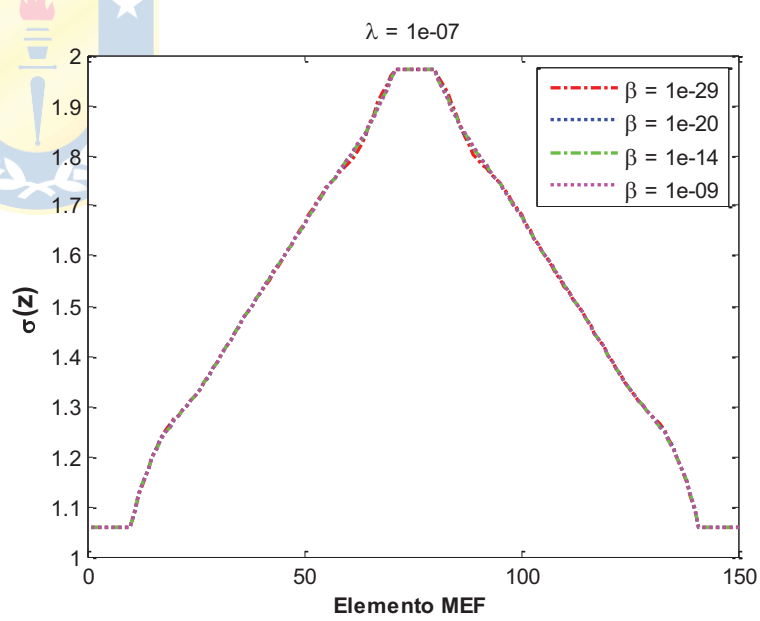
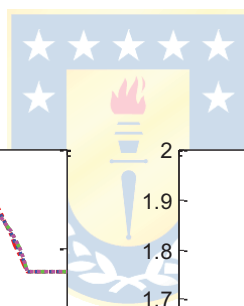
a)



b)



c)



d)

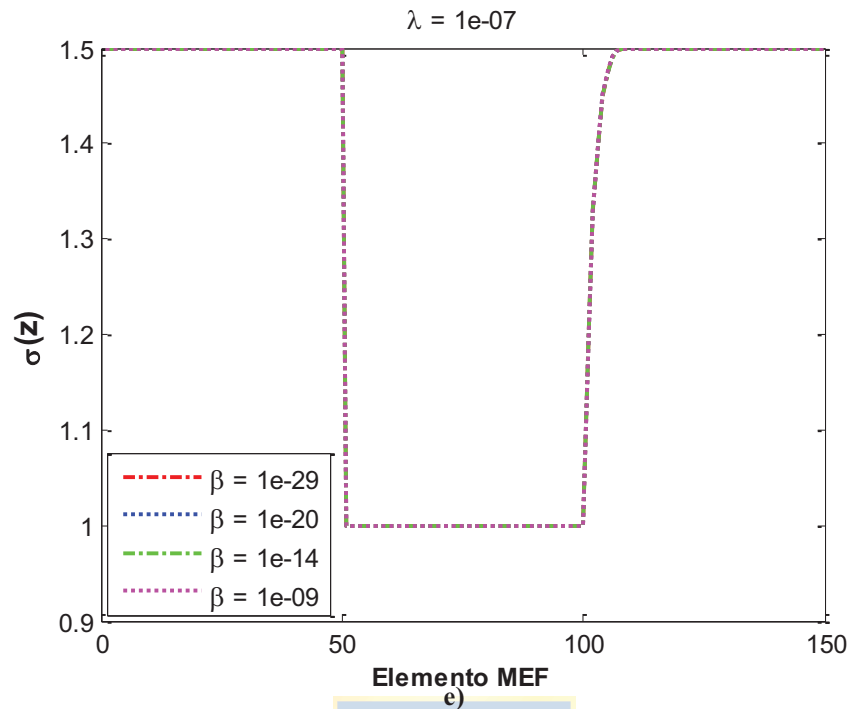


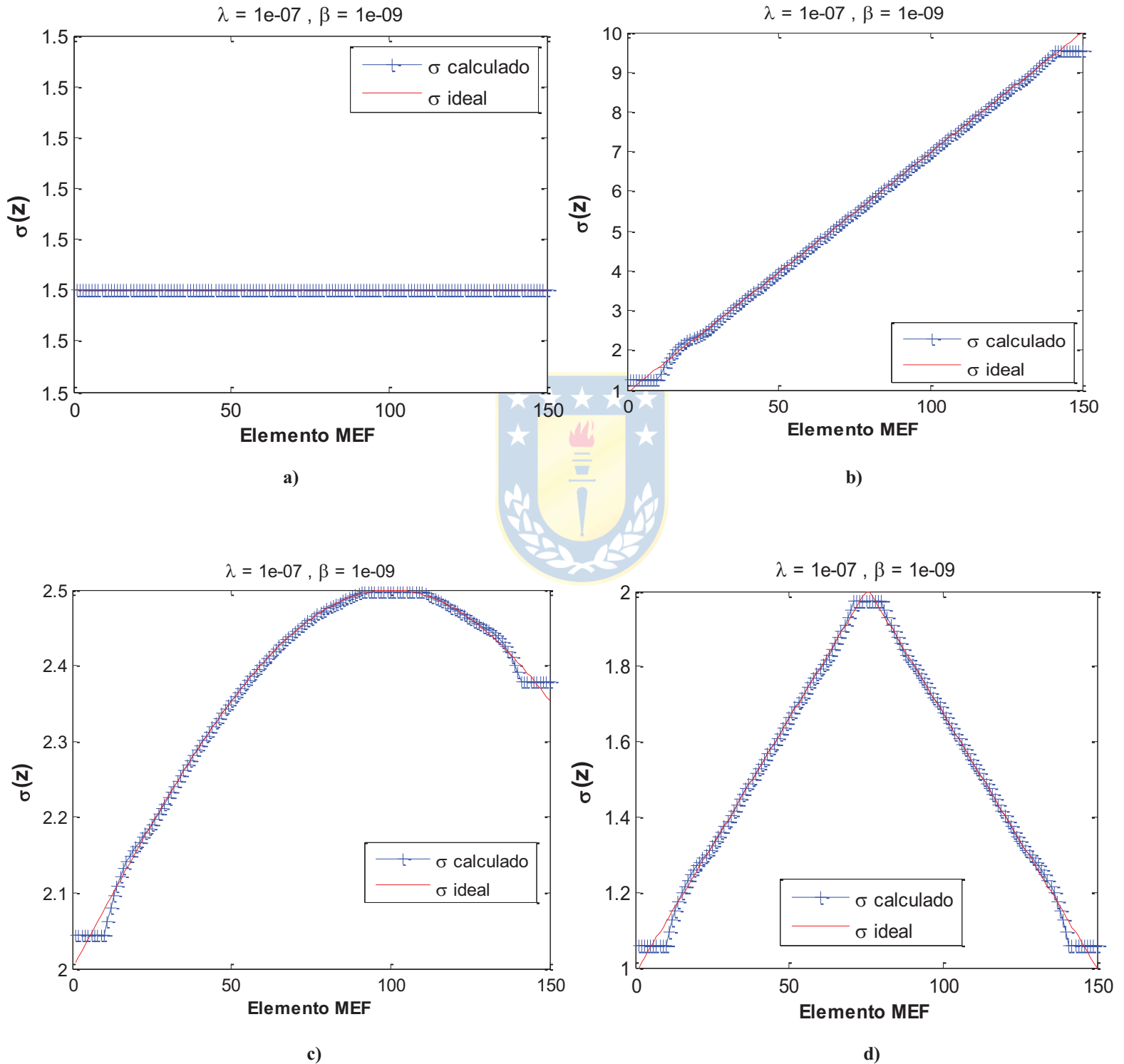
Fig. 5.7 Reconstrucciones con variación de β^d y $\lambda=1e-7$.

a) perfil constante, b) perfil estilo rampa, c) perfil estilo sinusoidal, d) perfil estilo triangular, e) perfil estilo escalón.

En el proceso de elección de un valor de β^d se encontró que para valores por debajo del establecido en un principio de $\beta^d = 1 \times 10^{-9}$, las reconstrucciones no presentan grandes variaciones pero aun así, a medida que se va disminuyendo la reconstrucción presenta pequeñas variaciones que provocan que la solución se aleje de la más cercana a la ideal. Sin embargo el valor de β^d tiene directa influencia en la aproximación en donde los cambios del perfil de conductividad son bruscos, por lo que en las reconstrucciones obtenidas posteriormente con datos reales el valor de β^d puede considerarse aún más pequeño que el definido para simulaciones de $\beta^d = 1 \times 10^{-9}$. Los valores establecidos mediante el método de “Heuristic selection” arrojan las reconstrucciones en comparación con la solución ideal mostradas en la Fig. 5.8.

Por otro lado, también es posible analizar la rapidez del algoritmo NRM con regularización de variación total descrito en este trabajo mediante el comportamiento del funcional de error cuadrático regularizado para cada caso, como se muestra en la Fig. 5.9. Donde es posible observar que en todos los casos se converge rápidamente antes de la décima iteración del algoritmo de actualización, en donde el valor del error en todos los casos es del orden de 1×10^{-6} permitiendo

acomodar el algoritmo para un menor coste de tiempo acortando la cantidad de iteraciones necesarias para converger a la solución requerida.



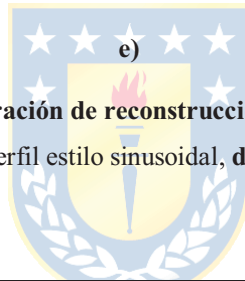
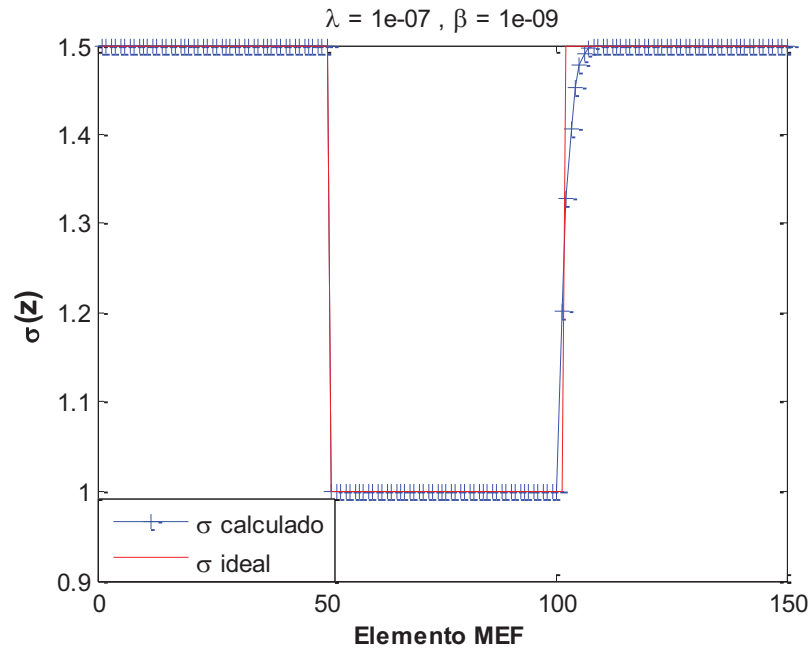
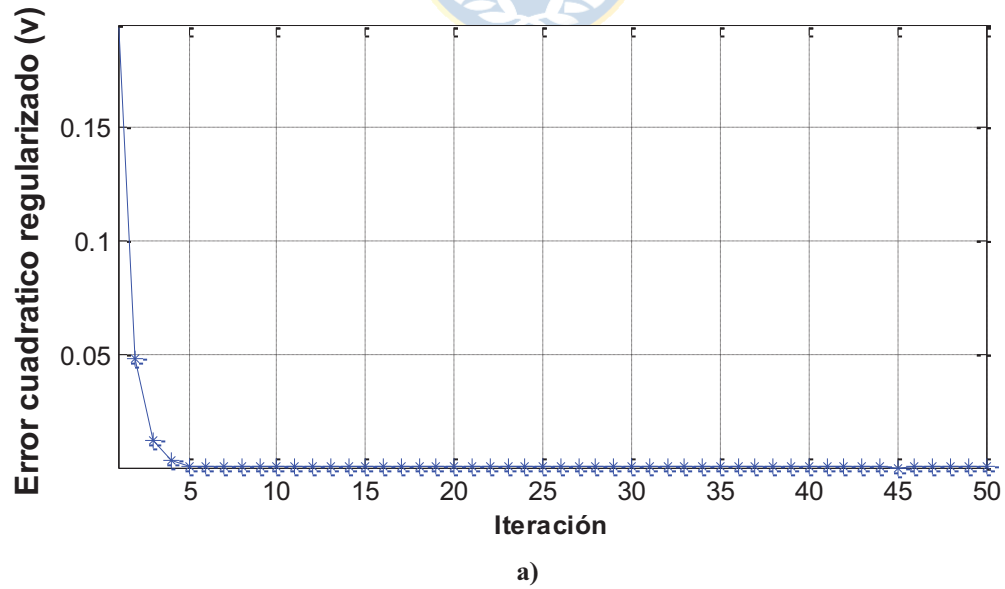
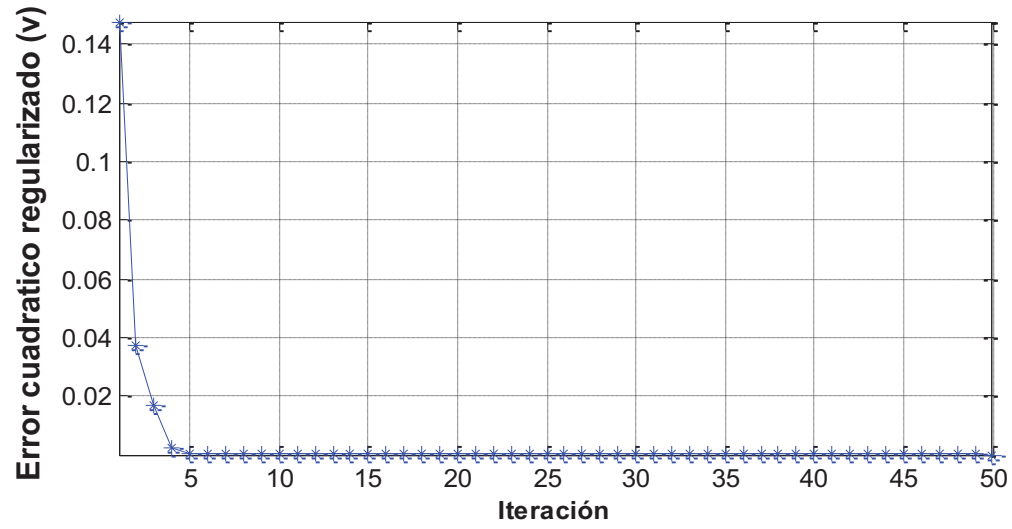


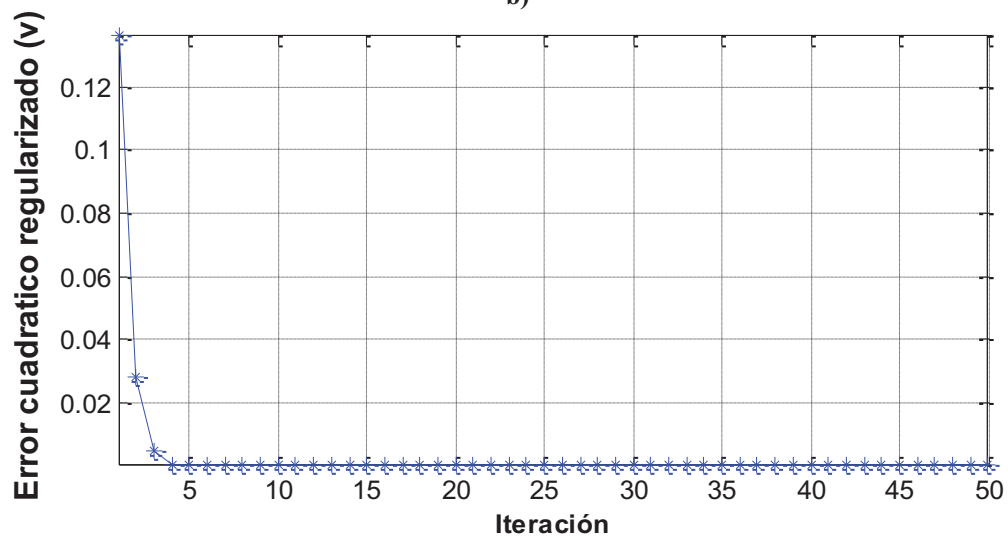
Fig. 5.8 Comparación de reconstrucción vs perfil ideal.

a) perfil constante, b) perfil estilo rampa, c) perfil estilo sinusoidal, d) perfil estilo triangular, e) perfil estilo escalón.

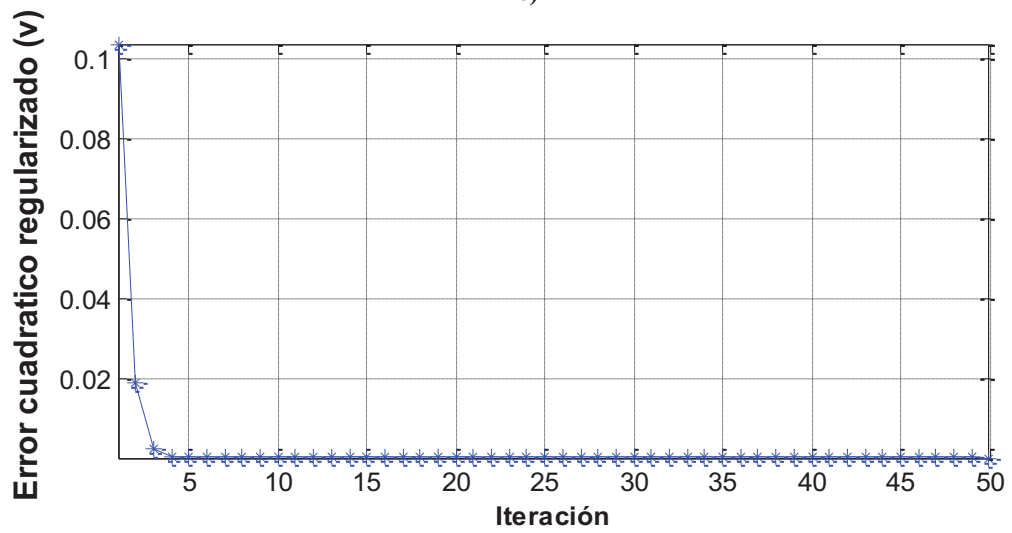




b)



c)



d)

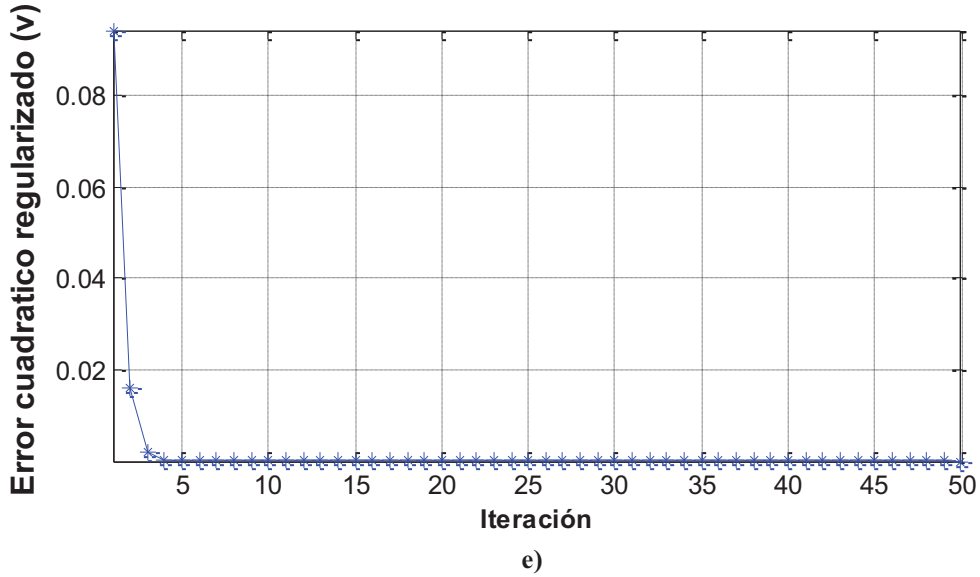


Fig. 5.9 Error cuadrático regularizado de reconstrucción.

a) perfil constante, b) perfil estilo rampa, c) perfil estilo sinusoidal, d) perfil estilo triangular, e) perfil estilo escalón.

5.4.2 Incorporación del error de medición

En la práctica los datos reales vienen con una adición que modifica las mediciones ideales, dicha adición se considera como un error de medición que para efectos de simulación se considerará como un vector de valores aleatorios $\omega \in \mathbb{R}^{L-1 \times 1}$, tal que,

$$\omega = s \cdot \mathbf{C} \quad (5.1)$$

donde, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{L-1 \times 1}$ contiene valores aleatorios entre $[-p, p]$ siendo p el valor medio entre el máximo y el mínimo valor de \mathbf{U}_o (vector de mediciones de voltaje diferencial), y el valor s representa el porcentaje de sensibilidad del error. Definido lo anterior el vector de mediciones a utilizar se considera como,

$$\mathbf{U}_{ruido} = \mathbf{U}_o + \omega \quad (5.2)$$

Para la etapa de simulación se consideran valores de sensibilidad de 0.5%, 3%, 5% y 10% con respecto al valor medio definido anteriormente, y un límite de 20 iteraciones ya que es suficiente para que el error cuadrático regularizado se estabilice en torno a un valor, obteniéndose los siguientes resultados.

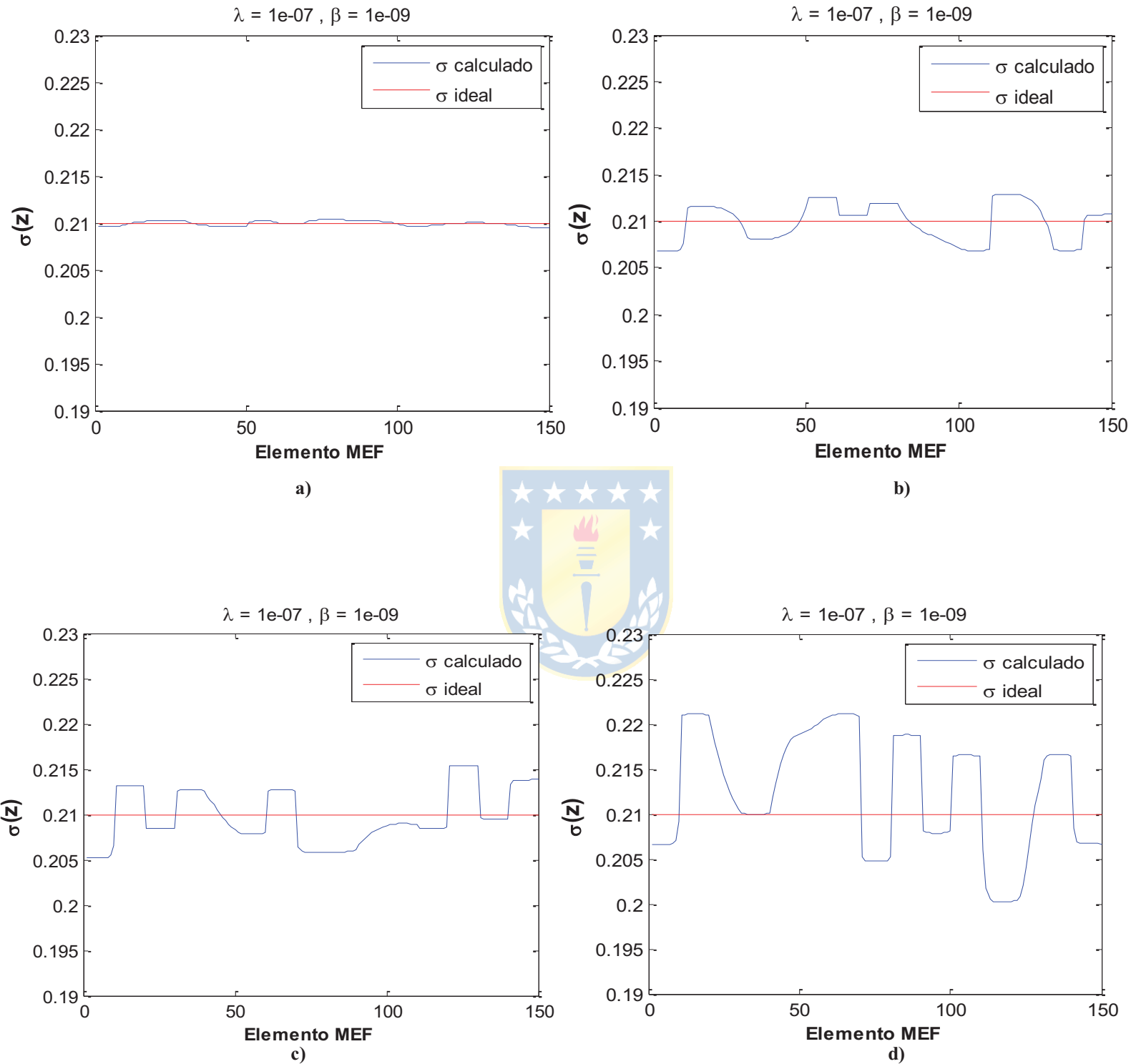


Fig. 5.10 Reconstrucción perfil constante con adición de error de medición.

a) reconstrucción para $s = 0.5\%$, b) reconstrucción para $s = 3\%$, c) reconstrucción para $s = 5\%$, d) reconstrucción para $s = 10\%$.

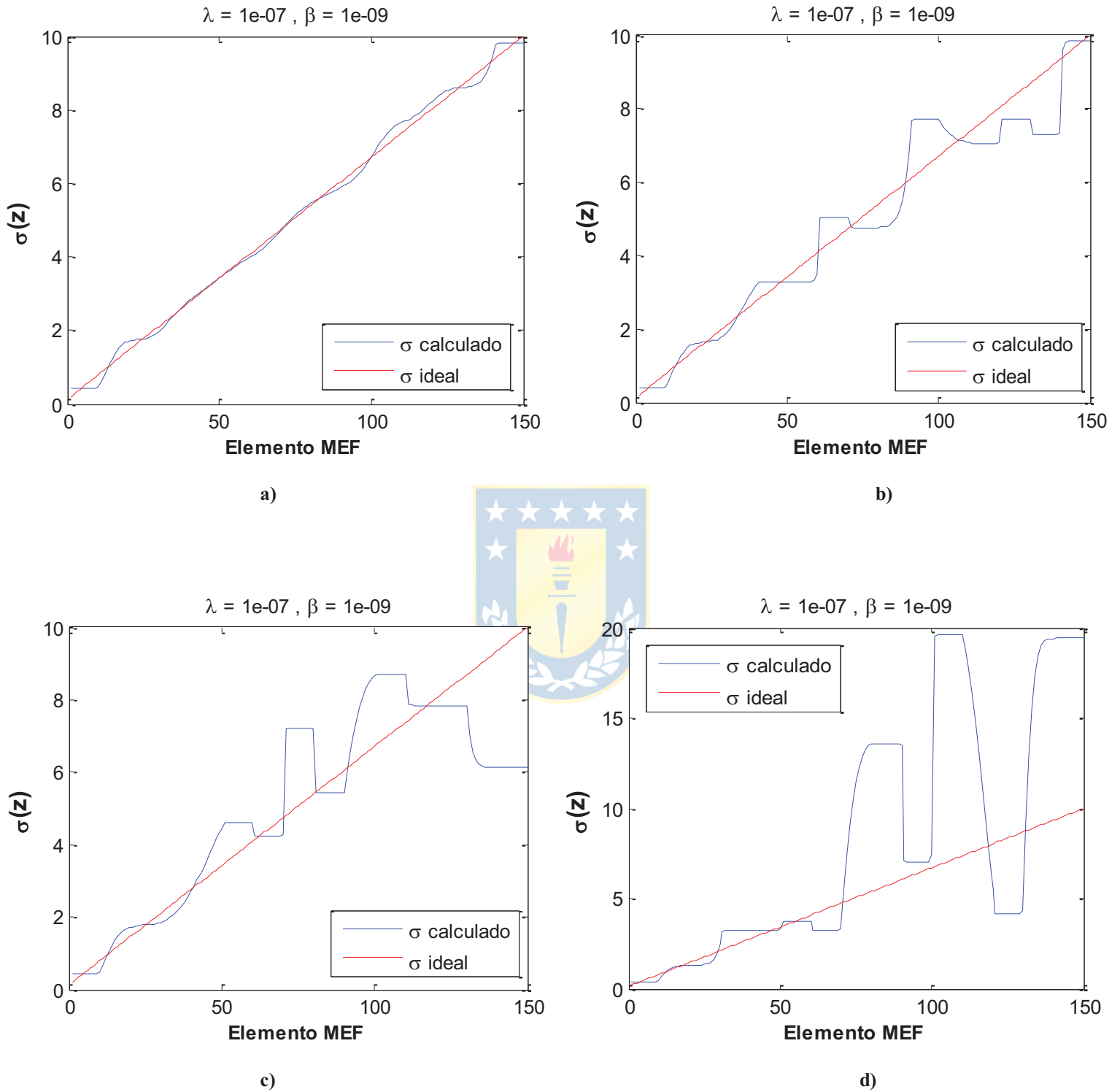


Fig. 5.11 Reconstrucción perfil rampa con adición de error de medición.

a) reconstrucción para $s = 0.5\%$, **b)** reconstrucción para $s = 3\%$, **c)** reconstrucción para $s = 5\%$, **d)** reconstrucción para $s = 10\%$.

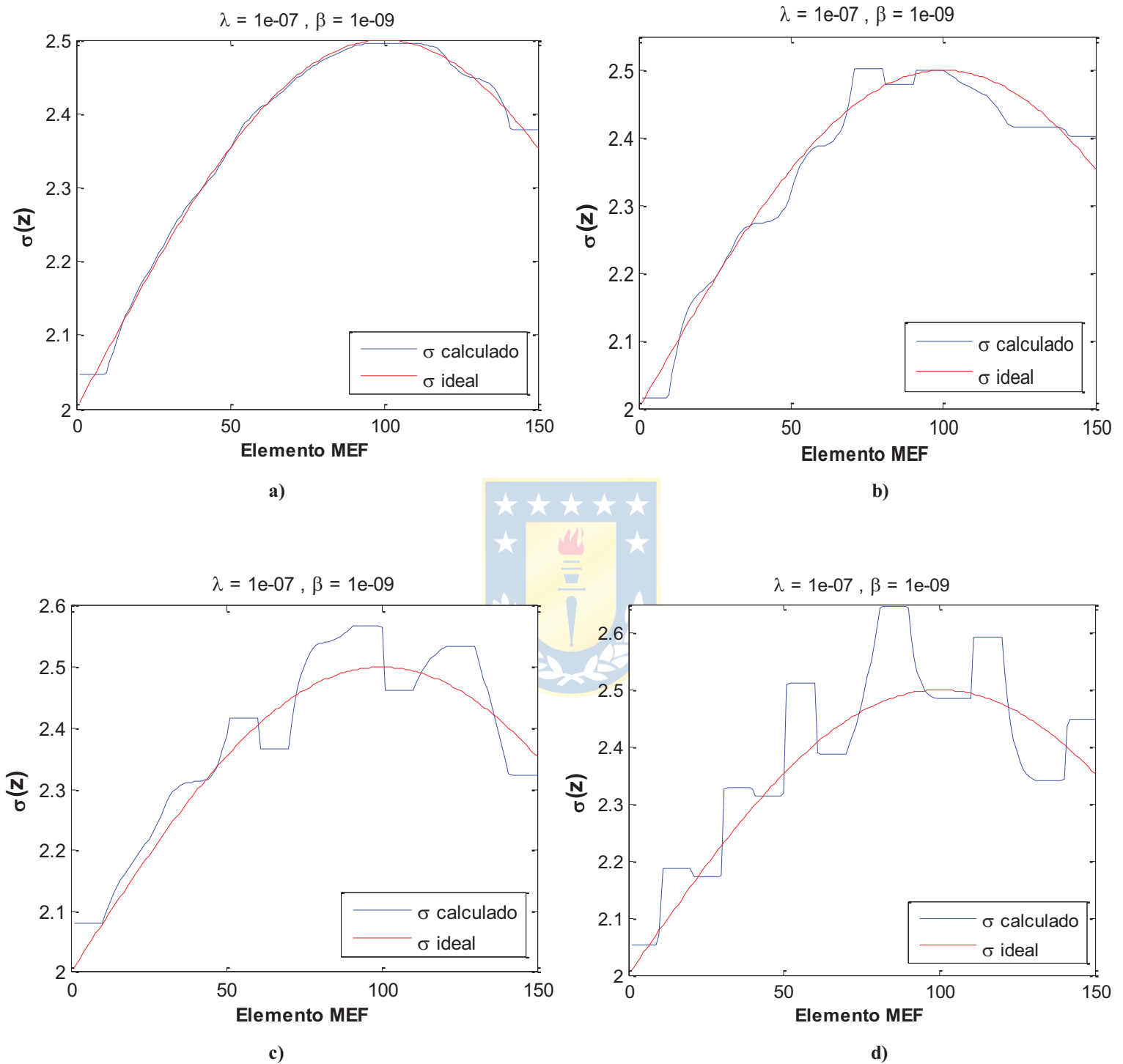


Fig. 5.12 Reconstrucción perfil sinusoidal con adición de error de medición.

a) reconstrucción para $s = 0.5\%$, **b)** reconstrucción para $s = 3\%$, **c)** reconstrucción para $s = 5\%$, **d)** reconstrucción para $s = 10\%$.

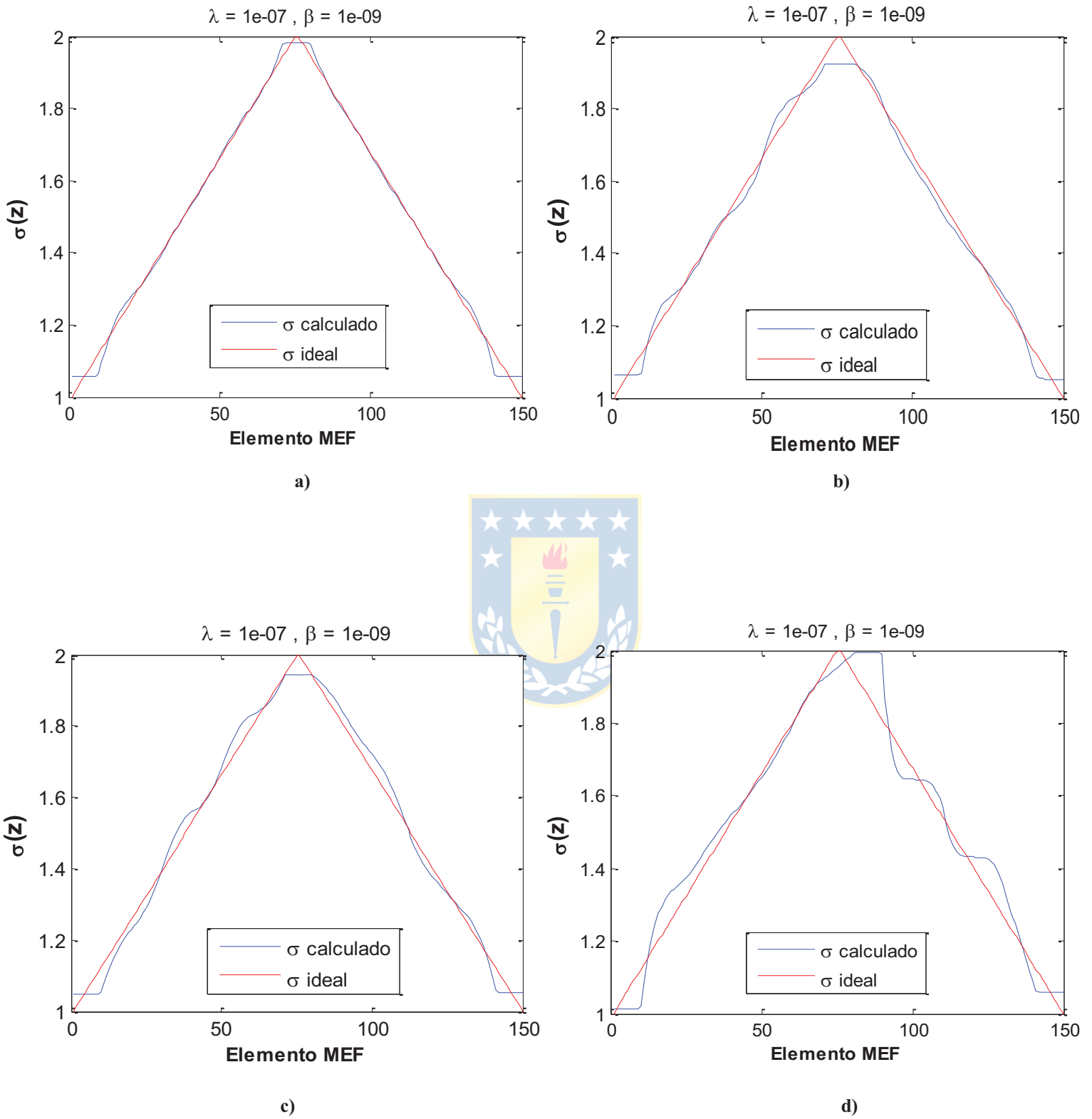


Fig. 5.13 Reconstrucción perfil triangular con adición de error de medición.

a) reconstrucción para $s = 0.5\%$, **b)** reconstrucción para $s = 3\%$, **c)** reconstrucción para $s = 5\%$, **d)** reconstrucción para $s = 10\%$.

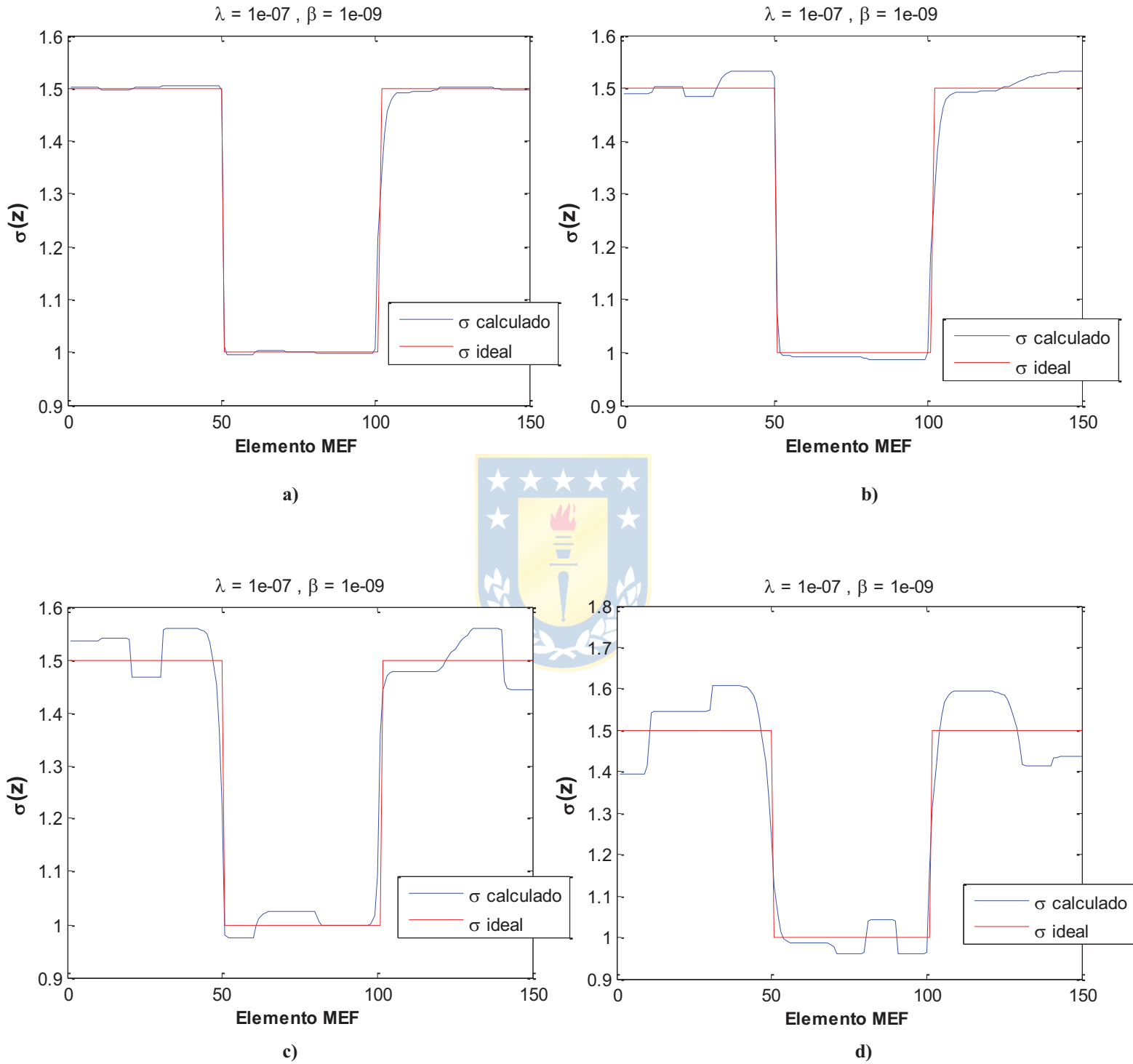


Fig. 5.14 Reconstrucción perfil escalón con adición de error de medición.

a) reconstrucción para $s = 0.5\%$, b) reconstrucción para $s = 3\%$, c) reconstrucción para $s = 5\%$, d) reconstrucción para $s = 10\%$.

5.5. Ajuste y calibración del modelo 2-D

En este punto se adquirió una muestra de datos reales considerando la columna de acrílico descrita en el anexo B y C en conjunto de la sonda tomográfica descrita en el anexo A para un líquido homogéneo, en este caso agua potable, ver Fig.5.16(a). Con un sensor de conductividad de laboratorio modelo Lab 960 (SCHOTT Instruments) se obtuvo una medición de referencia de agua potable arrojando aproximadamente $95 \mu S/cm$ a $22^\circ C$, ver Fig. 5.15.

Luego se obtuvieron las mediciones arrojadas por el modelo 2-D para un perfil homogéneo de valor $95 \mu S/cm$, resultando las mediciones de la Fig. 5.16(b).

Se puede observar de la comparación entre los resultados mostrados en la Fig. 5.16 que las mediciones realizadas por la sonda tomográfica, a pesar de que el líquido es homogéneo a todos los niveles de altura, presenta pequeñas variaciones en los voltajes obtenidos. Esto es debido a que cada uno de los 16 electrodos presentes en la sonda presenta su propio valor de impedancia de contacto. Para corregir estas variaciones entre las mediciones reales y del modelo en 2-D se le asignaron impedancias de contacto z_l diferentes de manera de ajustar estos dos resultados. Una visión más detallada se muestra en las comparaciones de la Fig. 5.17.

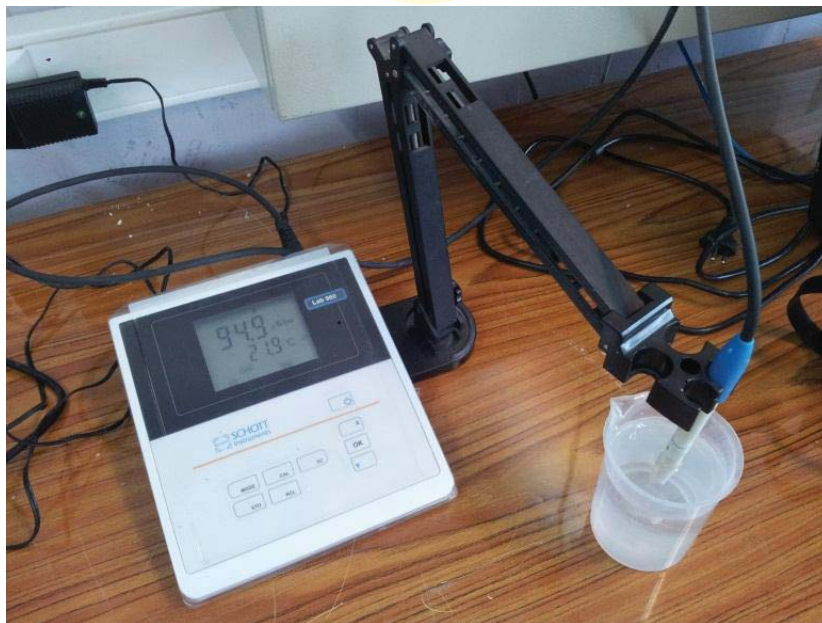


Fig. 5.15 Medición de referencia con conductímetro de laboratorio Lab 960.

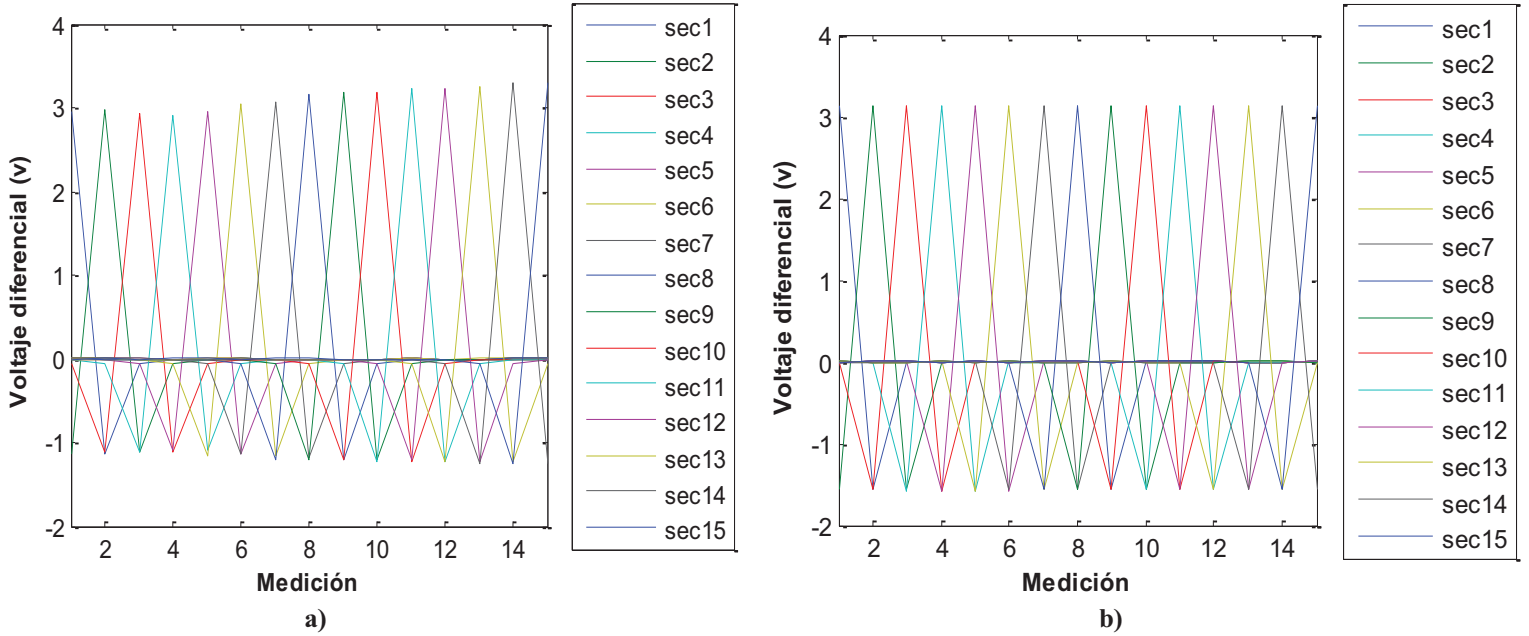


Fig. 5.16 Mediciones reales de sonda tomográfica para agua potable.

a) mediciones reales con sonda tomográfica para agua potable, **b)** mediciones simuladas por modelo 2-D para agua potable ($95 \mu S/cm$) y $z_l = 13ohm$.

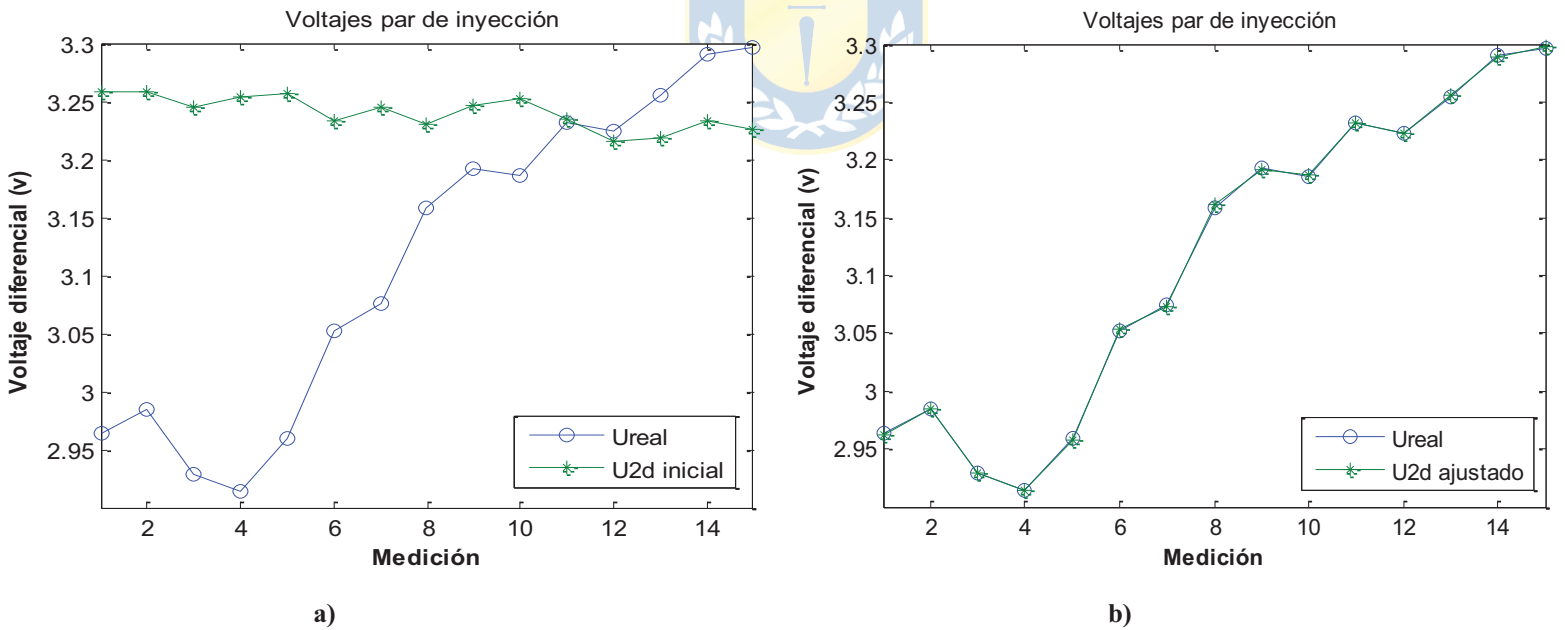


Fig. 5.17 Comparación entre medición real y modelo 2-D ajustado.

a) voltajes en par de inyección para $z_l = 13ohm$, **b)** voltajes en par de inyección para impedancias de contacto ajustadas a datos de muestra homogénea.

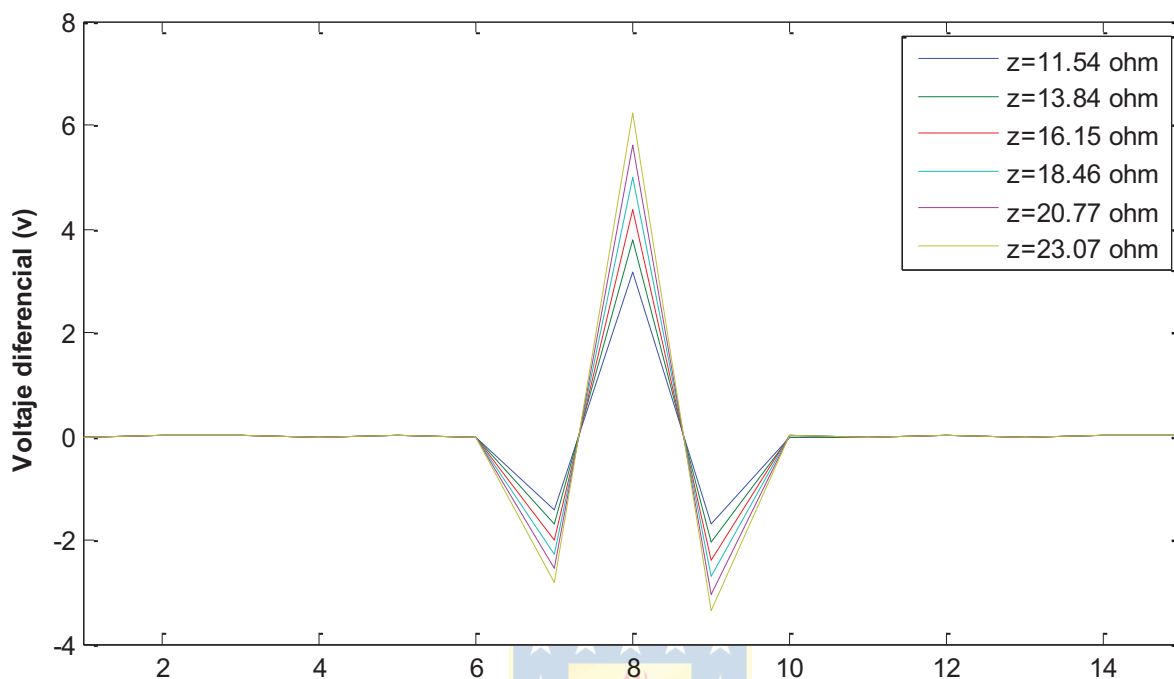


Fig. 5.18 Variación de medición con respecto a la impedancia de contacto.

Las mediciones de voltaje están fuertemente ligadas al valor de la impedancia de contacto que se defina para el modelo. Como se puede ver en la Fig. 5.18, para la secuencia 8 de inyección de corriente por ejemplo, las mediciones aumentan a medida que el valor de las impedancias, en este caso todas las impedancias de igual valor, aumentan. El ejemplo anterior esta simulado para un perfil de conductividad definido para agua potable de $95 \mu S/cm$.

5.5.1 Relación perfil conductivo y mediciones de voltaje

En este apartado se realizara un análisis entre la evolución que presenta el conjunto de mediciones de voltaje considerando los valores máximos de cada secuencia y el valor del perfil de conductividad. Para esto se utilizará el modelo en dos dimensiones ya ajustado a los datos reales. Los resultados se pueden ver en las imágenes y tablas siguientes.

Tabla 5.2 Voltajes diferenciales vs conductividad entre [0.01 mS/cm, 1000 mS/cm].

σ_{2d} (mS/cm)	$\sigma_{2d}=0,01$	$\sigma_{2d}=0,1$	$\sigma_{2d}=1$	$\sigma_{2d}=10$	$\sigma_{2d}=100$	$\sigma_{2d}=1000$
$U_{2d\ 1}^h$ (V)	28,1427	2,8142	0,2814	0,0281	0,0028	0,0003
$U_{2d\ 2}^h$ (V)	28,3581	2,8358	0,2835	0,0283	0,0028	0,0003
$U_{2d\ 3}^h$ (V)	27,8330	2,7833	0,2783	0,0278	0,0028	0,0003
$U_{2d\ 4}^h$ (V)	27,6888	2,7688	0,2768	0,0276	0,0028	0,0003
$U_{2d\ 5}^h$ (V)	28,0918	2,8091	0,2809	0,0280	0,0028	0,0003
$U_{2d\ 6}^h$ (V)	29,0032	2,9003	0,2900	0,0290	0,0029	0,0003
$U_{2d\ 7}^h$ (V)	29,1899	2,9189	0,2918	0,0291	0,0029	0,0003
$U_{2d\ 8}^h$ (V)	30,0272	3,0027	0,3002	0,0300	0,0030	0,0003
$U_{2d\ 9}^h$ (V)	30,3251	3,0325	0,3032	0,0303	0,0030	0,0003
$U_{2d\ 10}^h$ (V)	30,2725	3,0272	0,3027	0,0303	0,0030	0,0003
$U_{2d\ 11}^h$ (V)	30,7047	3,0704	0,3070	0,0307	0,0031	0,0003
$U_{2d\ 12}^h$ (V)	30,6136	3,0613	0,3061	0,0306	0,0031	0,0003
$U_{2d\ 13}^h$ (V)	30,9258	3,0925	0,3092	0,0309	0,0031	0,0003
$U_{2d\ 14}^h$ (V)	31,2440	3,1244	0,3124	0,0312	0,0031	0,0003
$U_{2d\ 15}^h$ (V)	31,3320	3,1332	0,3133	0,0313	0,0031	0,0003

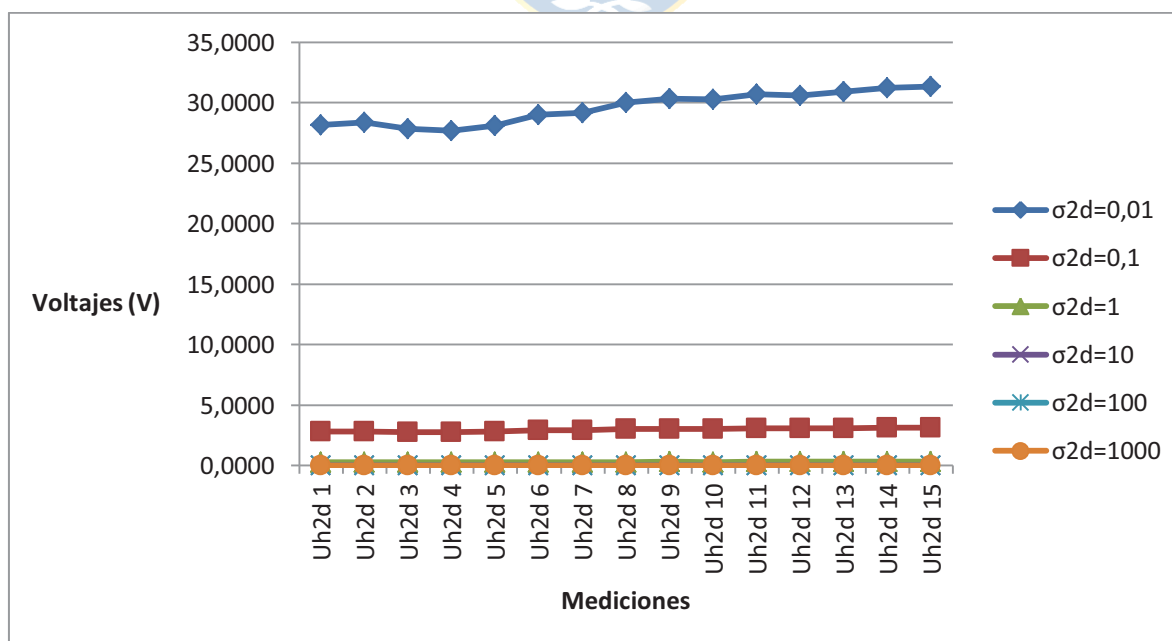


Fig. 5.19 Visualización de tabla 5.2.

Tabla 5.3 Voltajes diferenciales vs conductividad entre [0.01 mS/cm, 0.1 mS/cm].

σ_{2d} (mS/cm)	$\sigma_{2d}=0,01$	$\sigma_{2d}=0,03$	$\sigma_{2d}=0,05$	$\sigma_{2d}=0,07$	$\sigma_{2d}=0,09$	$\sigma_{2d}=0,1$
$U_{2d\ 1}^h$ (v)	28,1427	9,3809	5,6285	4,0203	3,1269	2,8142
$U_{2d\ 2}^h$ (v)	28,3581	9,4527	5,6716	4,0511	3,1509	2,8358
$U_{2d\ 3}^h$ (v)	27,8330	9,2776	5,5660	3,9761	3,0925	2,7833
$U_{2d\ 4}^h$ (v)	27,6888	9,2296	5,3577	3,9555	3,0765	2,7688
$U_{2d\ 5}^h$ (v)	28,0918	9,3639	5,6183	4,0131	3,1213	2,8091
$U_{2d\ 6}^h$ (v)	29,0032	9,6677	5,8006	4,1433	3,2225	2,9003
$U_{2d\ 7}^h$ (v)	29,1899	9,7299	5,8379	4,1699	3,2433	2,9189
$U_{2d\ 8}^h$ (v)	30,0272	10,0090	6,0054	4,2896	3,3363	3,0027
$U_{2d\ 9}^h$ (v)	30,3251	10,1083	6,0650	4,3321	3,3694	3,0325
$U_{2d\ 10}^h$ (v)	30,2725	10,0908	6,0545	4,3246	3,3636	3,0272
$U_{2d\ 11}^h$ (v)	30,7047	10,2349	6,1409	4,3863	3,4116	3,0704
$U_{2d\ 12}^h$ (v)	30,6136	10,2045	6,1227	4,3733	3,4015	3,0613
$U_{2d\ 13}^h$ (v)	30,9258	10,3086	6,1851	4,4179	3,4362	3,0925
$U_{2d\ 14}^h$ (v)	31,2440	10,4146	6,2488	4,4634	3,4715	3,1244
$U_{2d\ 15}^h$ (v)	31,3320	10,4440	6,2664	4,476	3,4813	3,1332

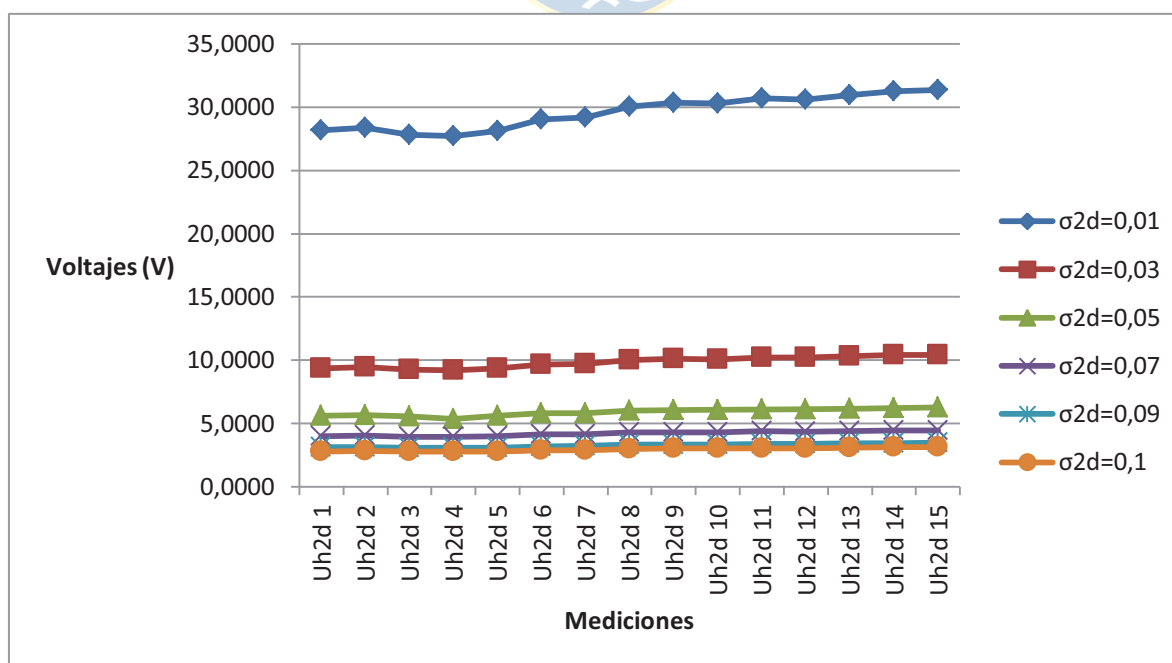


Fig. 5.20 Visualización de tabla 5.3.

Tabla 5.4 Voltajes diferenciales vs conductividad entre [0.002 mS/cm, 0.01 mS/cm].

σ_{2d} (mS/cm)	$\sigma_{2d}=0,002$	$\sigma_{2d}=0,004$	$\sigma_{2d}=0,006$	$\sigma_{2d}=0,008$	$\sigma_{2d}=0,01$
$U_{2d\ 1}^h$ (V)	140,7135	70,3567	46,9045	35,1783	28,1427
$U_{2d\ 2}^h$ (V)	141,7905	70,8952	47,2635	35,4476	28,3581
$U_{2d\ 3}^h$ (V)	139,165	69,5825	46,3883	34,7912	27,8330
$U_{2d\ 4}^h$ (V)	138,4442	69,2221	46,1480	34,611	27,6888
$U_{2d\ 5}^h$ (V)	140,4592	70,2296	46,8197	35,1148	28,0918
$U_{2d\ 6}^h$ (V)	145,0164	72,5082	48,3388	36,2541	29,0032
$U_{2d\ 7}^h$ (V)	145,9498	72,9749	48,6499	36,4874	29,1899
$U_{2d\ 8}^h$ (V)	150,1364	75,0682	50,0454	37,5341	30,0272
$U_{2d\ 9}^h$ (V)	151,6258	75,8129	50,5419	37,9064	30,3251
$U_{2d\ 10}^h$ (V)	151,3626	75,6813	50,4542	37,8406	30,2725
$U_{2d\ 11}^h$ (V)	153,5238	76,7619	51,1746	38,3809	30,7047
$U_{2d\ 12}^h$ (V)	153,068	76,5340	51,0226	38,267	30,6136
$U_{2d\ 13}^h$ (V)	154,6292	77,3146	51,5430	38,6573	30,9258
$U_{2d\ 14}^h$ (V)	156,2203	78,1101	52,0734	39,0550	31,2440
$U_{2d\ 15}^h$ (V)	156,6604	78,3302	52,2201	39,1651	31,3320

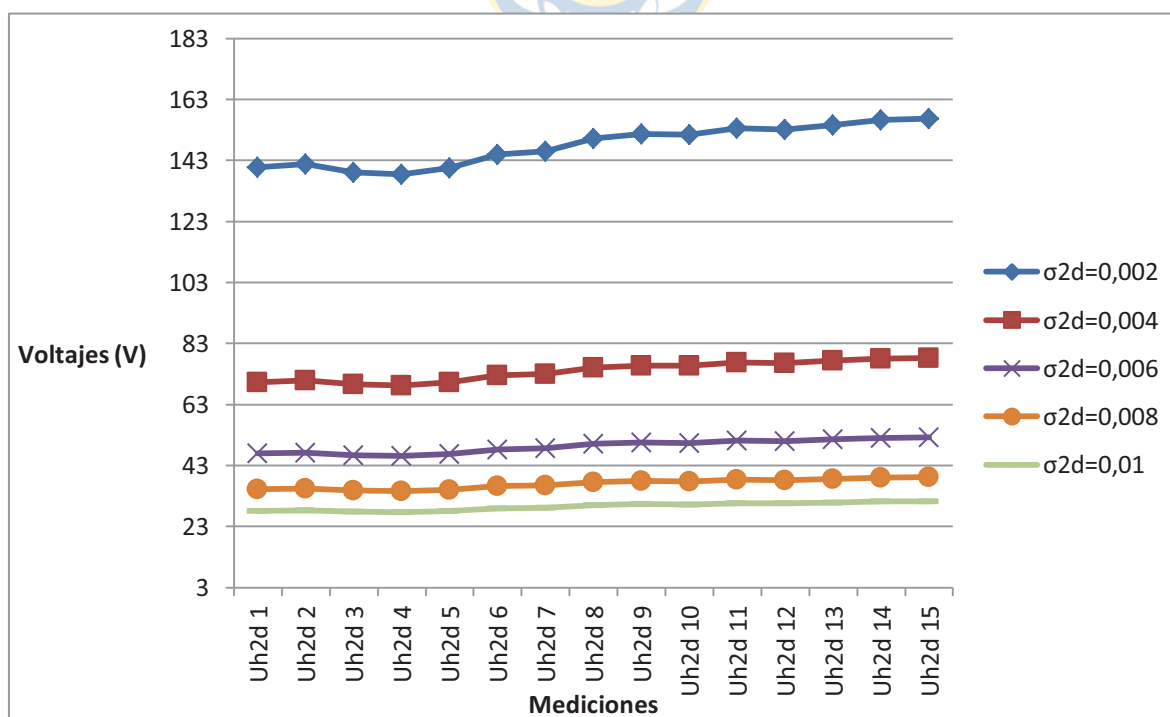


Fig. 5.21 Visualización de tabla 5.4.

En todos los casos se puede observar que cuando el valor de la conductividad aumenta se tiende a un mismo valor en cada punto de medición diferencial de voltaje. Dicho valor corresponde al voltaje medido sobre las impedancias de contacto de los electrodos de medición, ya que la resistividad del medio es demasiado baja y puede ser aproximada a cero a medida que la conductividad aumenta comprobándose la relación inversa entre resistividad y conductividad. Esta tendencia se puede entender de mejor manera con la Fig. 5.22, en donde se representa de manera resistiva el sistema inyección-medición.

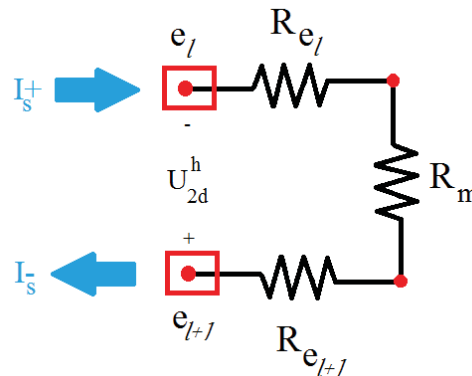


Fig. 5.22 Representación resistiva de medición.

En la Fig. 5.22, R_m representa la resistencia asociada a la resistividad del medio, R_{e_l} representa la resistencia asociada a la impedancia de contacto del l -ésimo electrodo. Por lo tanto la ecuación según la ley de Ohm para una resistividad considerable del medio, es decir una baja conductividad del medio,

$$U_{2d}^h = I_s \cdot (R_{e_l} + R_{e_{l+1}} + R_m), \quad (5.3)$$

por lo tanto para medios donde la conductividad es demasiado alta ($> 0.1 \text{ mS/cm}$) la ecuación (5.3) puede considerarse como,

$$U_{2d}^h \approx I_s \cdot (R_{e_l} + R_{e_{l+1}}). \quad (5.4)$$

En las ecuaciones (5.3) y (5.4) las resistencias que representan a las impedancias de contacto R_{e_l} , presentan un comportamiento que tiene relación con la resistividad del medio, según [20] de

forma inversamente proporcional, es decir, a valores altos de conductividad del medio presente en contacto con el electrodo, la impedancia de contacto de dicho electrodo será pequeña.

5.6. Calibración entre modelo 2-D y 1-D

Como se ha visto durante este trabajo, los modelos en una y dos dimensiones tienen sus propios comportamientos, los cuales se pueden ejemplificar obteniendo los resultados del problema directo de ambos modelos para un igual perfil de conductividad, (ver Fig. 5.23).

En este apartado el trabajo se centra en encontrar un factor el cual permita relacionar los datos obtenidos por el modelo bidimensional con el modelo unidimensional. Esto se realiza para ingresar al problema inverso con un set de voltajes equivalentes a un perfil de conductividad correcto o cercano al deseado, ya que cada modelo presenta sus propias mediciones para un respectivo perfil conductivo.

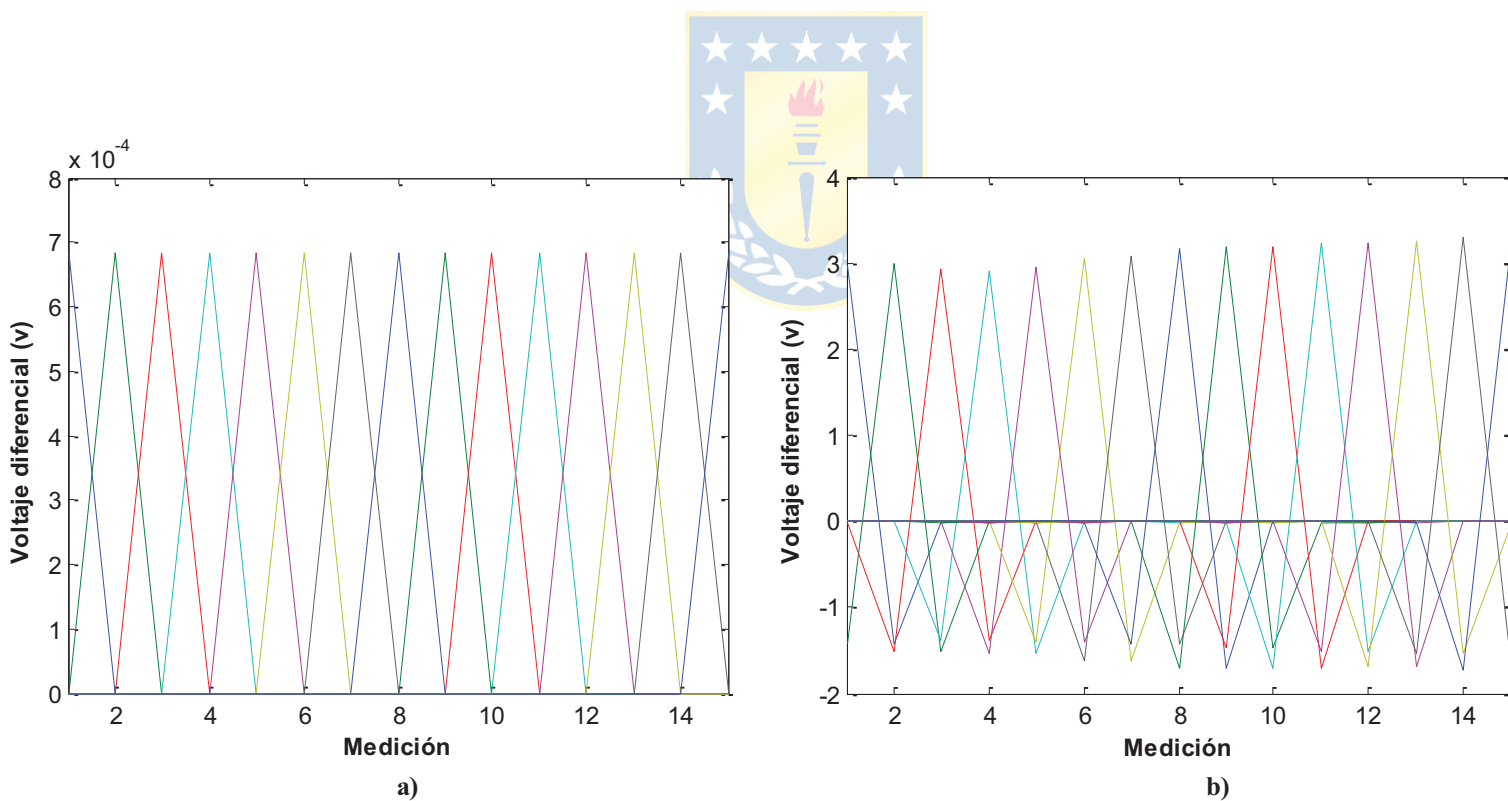


Fig. 5.23 Voltajes de problema directo para $\sigma = 95 \text{ mS/cm}$.

a) resultados modelo 1-D, **b)** resultados modelo 2-D.

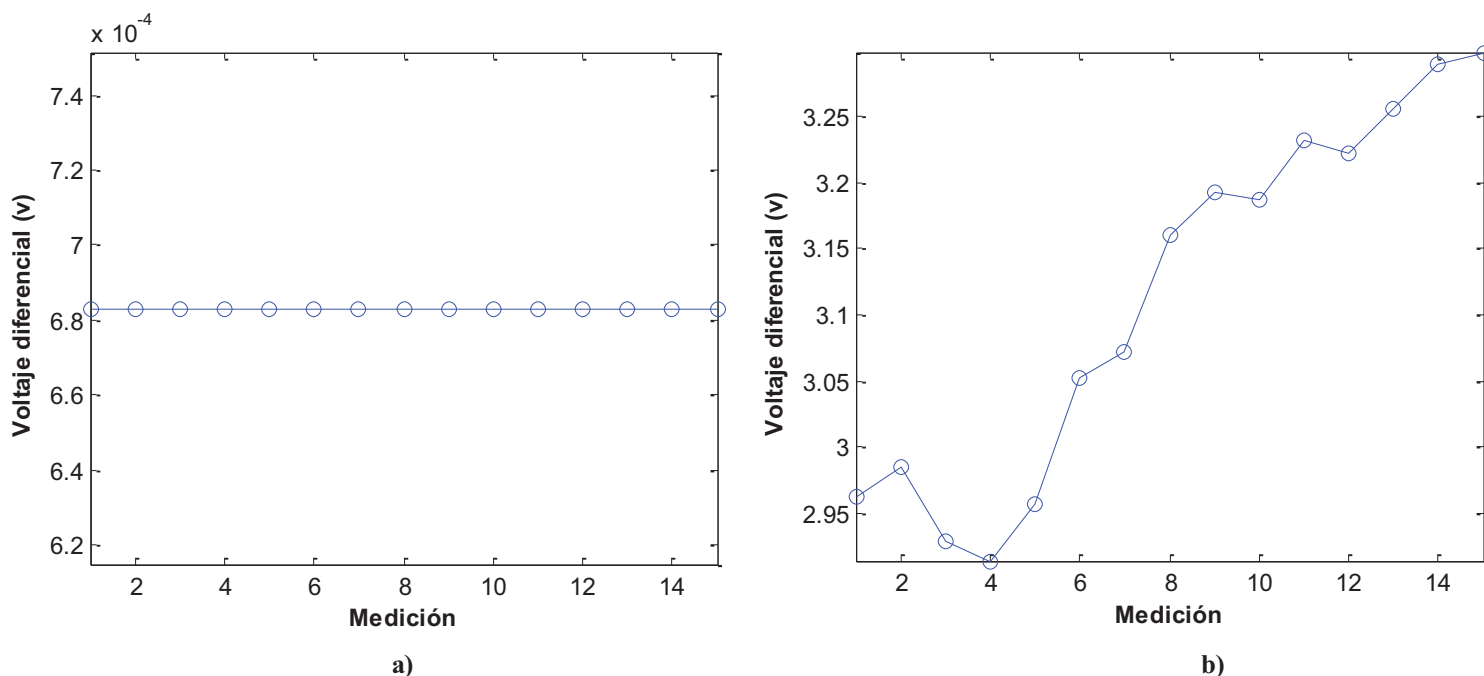


Fig. 5.24 Voltajes par de inyección para $\sigma = 95 \text{ mS/cm}$.

a) resultados modelo 1-D, b) resultados modelo 2-D.

Dado que el problema inverso de reconstrucción responde a una entrada entregada por el problema directo del modelo unidimensional para la obtención de la magnitud de conductividad correcta, se hace necesario un ajuste para convertir las mediciones reales o entregadas por el modelo bidimensional a un equivalente del modelo unidimensional.

En este punto se utiliza la ventaja de tener el modelo en dos dimensiones puesto que con él es posible obtener los voltajes asociados a cada par de electrodos de inyección de corriente para cualquier valor de conductividad simulado. De igual manera, se obtienen los resultados para los mismos perfiles de conductividad arrojados por el modelo en una dimensión y así obtener un factor de conversión que acomode los voltajes desde el modelo bidimensional al modelo unidimensional. La Fig. 5.26 resume de forma gráfica la creación de dicha matriz de coeficientes.

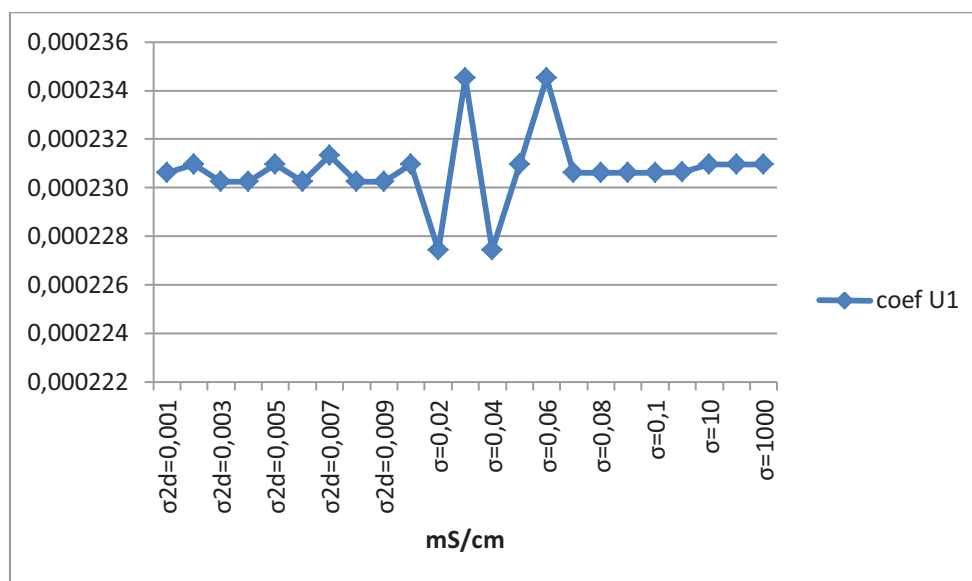


Fig. 5.25 Evolución de coeficiente de ajuste para primera secuencia de inyección.

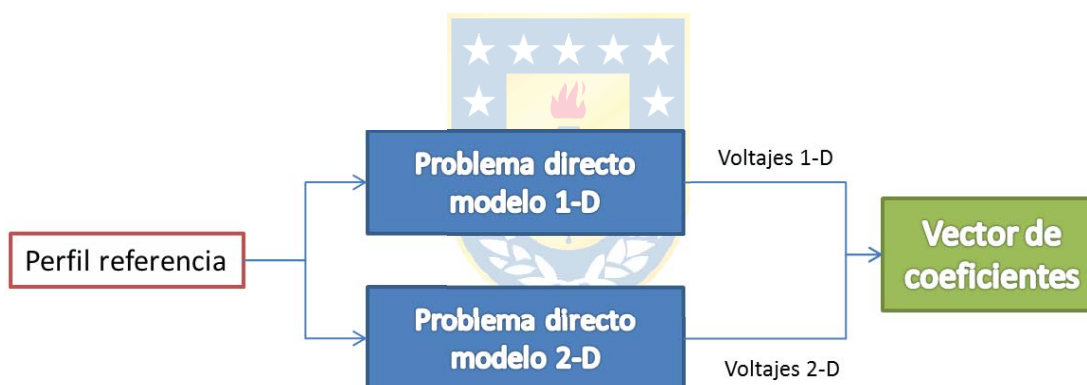


Fig. 5.26 Diagrama creación del vector de coeficientes.

En la Fig. 5.25 se tiene el coeficiente para cada valor de conductividad entre 0.001 y 1000 mS/cm correspondiente a la primera secuencia de inyección y por ende los coeficientes que permiten el ajuste del primer punto de medición entre Fig. 5.24(a) y Fig. 5.24(b). De igual manera, se obtienen las dinámicas de dichos coeficientes de ajustes para las 14 secuencias restantes.

Se puede observar también que los coeficientes presentan un comportamiento casi constante lo que puede asociarse a que ambos modelos tienen una relación casi lineal.

Aplicado este ajuste al modelo bidimensional se tienen los resultados mostrados en la Fig. 5.27 en donde se muestra que el ajuste acomoda de buena manera el resultado del modelo bidimensional (ver Fig. 5.24(b)) a los resultados entregados por el modelo unidimensional tomado como referencia.

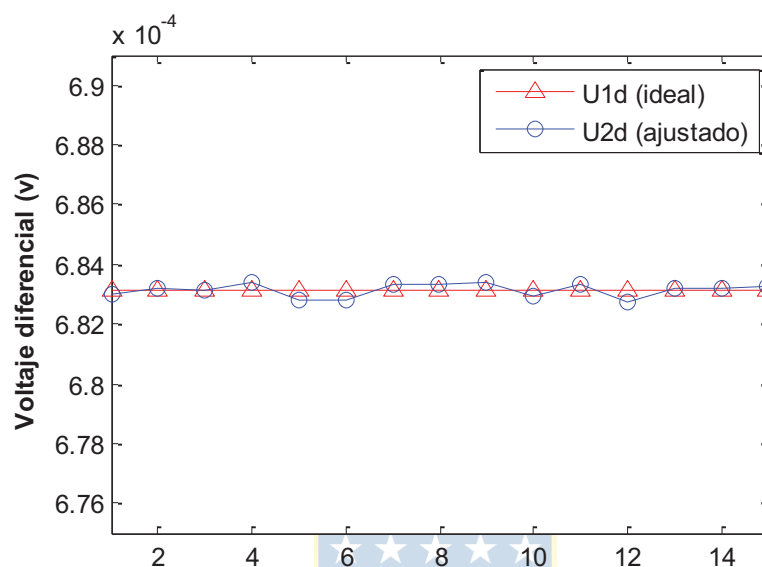
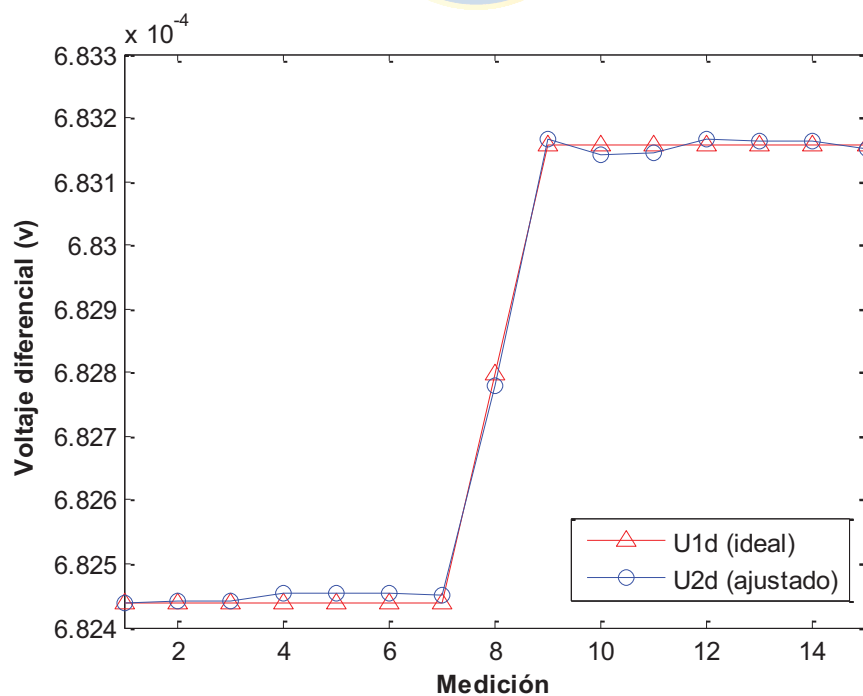
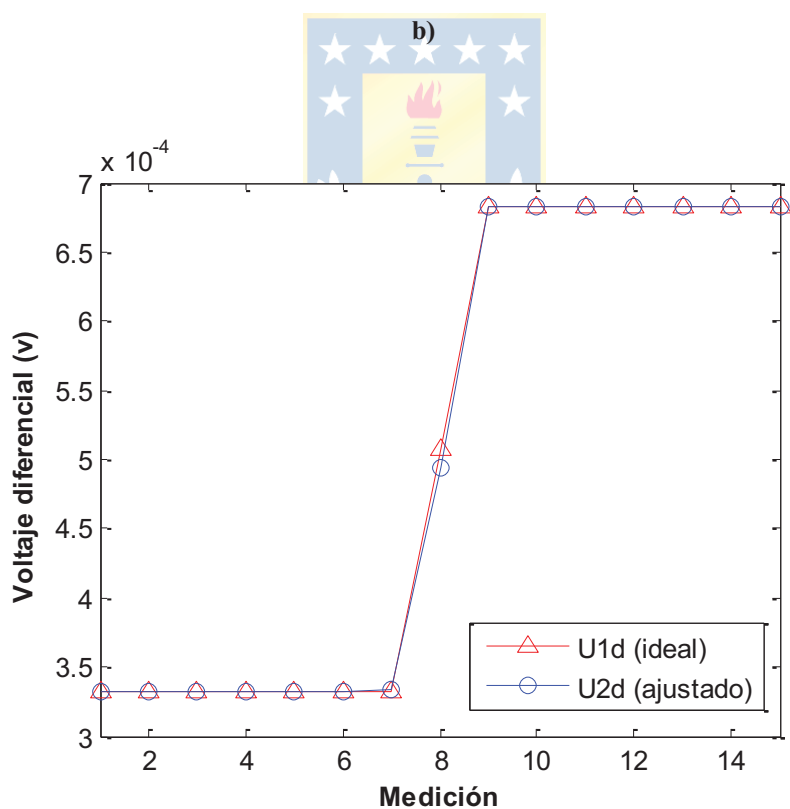
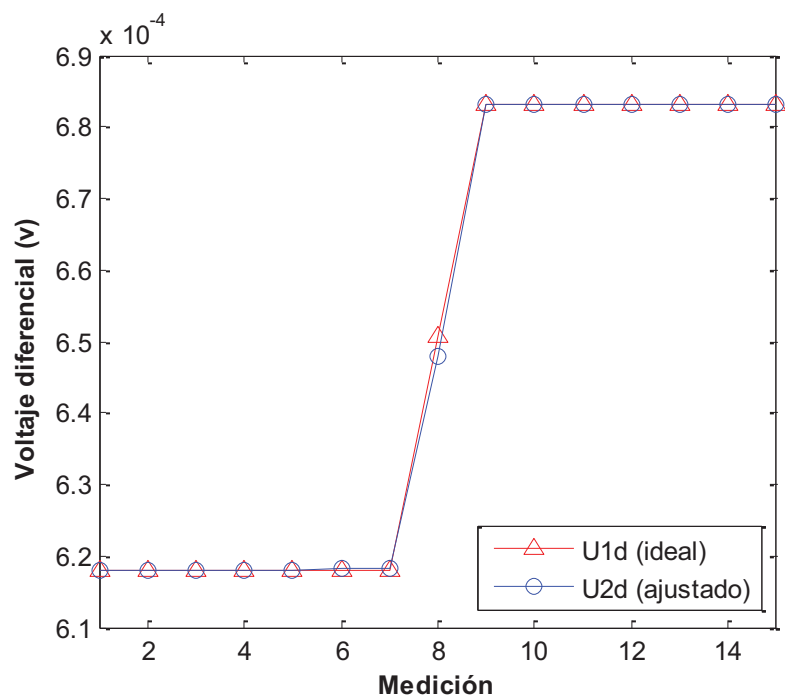


Fig. 5.27 Resultado de ajuste del modelo 2-D a 1-D.

Se puede verificar este ajuste para otros perfiles de conductividad que no sean constantes, como por ejemplo distintos tamaños de cambio del tipo escalón que se observan a continuación.



a)



c)

Fig. 5.28 Resultado de ajuste entre modelo 2-D y 1-D para perfiles de conductividad escalón.

a) voltajes par de inyección para escalón de 0.1 uS/cm, b) voltajes par de inyección para escalón de 10 uS/cm, c) voltajes par de inyección para escalón de 100 uS/cm.

Una muestra de la evolución del error cuadrático medio del ajuste entre ambos modelos a medida que el perfil de conductividad constante aumenta se muestra en la Fig. 5.29(a), para un perfil constante incorporando un escalón de $0.1 \mu S/cm$ se muestra en la Fig. 5.29(b) y de $10 \mu S/cm$ en la Fig. 5.29(c). Como se observa en la Fig. 5.29 para todos los casos el error es mayor a bajas conductividades ($< 6 \mu S/cm$), esto es provocado ya que a bajas conductividades los voltajes obtenidos por el problema directo para ambos modelos son altos en magnitud. Sin embargo los errores están en el orden de los pV para el caso constante y alrededor de los mV para los casos con escalón. Una visión más detallada se tiene en la Fig. 5.30 para el caso de perfil constante de la Fig. 5.29(a).

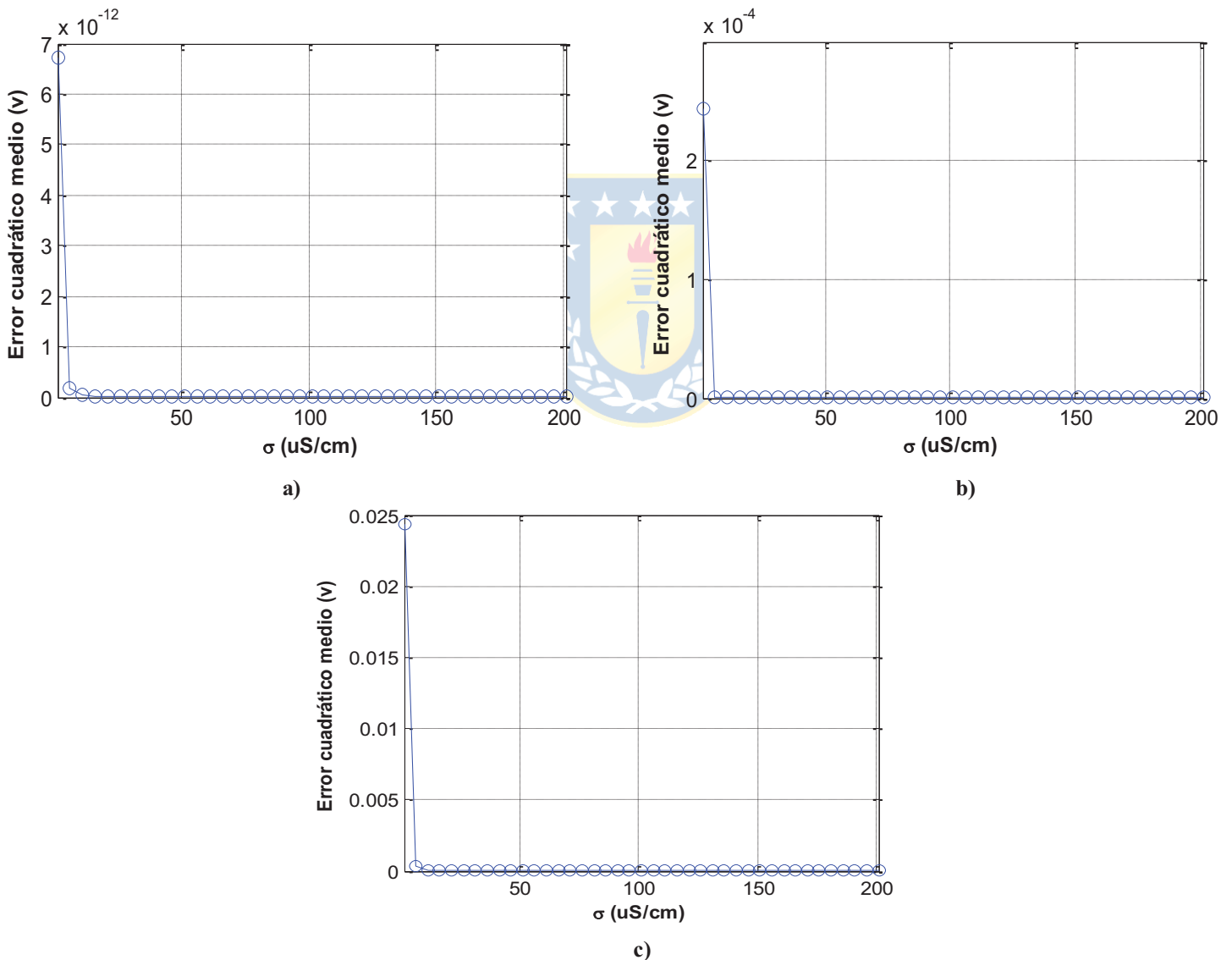


Fig. 5.29 Error cuadrático medio ajuste entre modelo 2-D y 1-D con respecto al perfil simulado.

a) error para perfil constante, b) error para perfil escalón de $0.1 \mu S/cm$, c) error para perfil escalón de $10 \mu S/cm$.

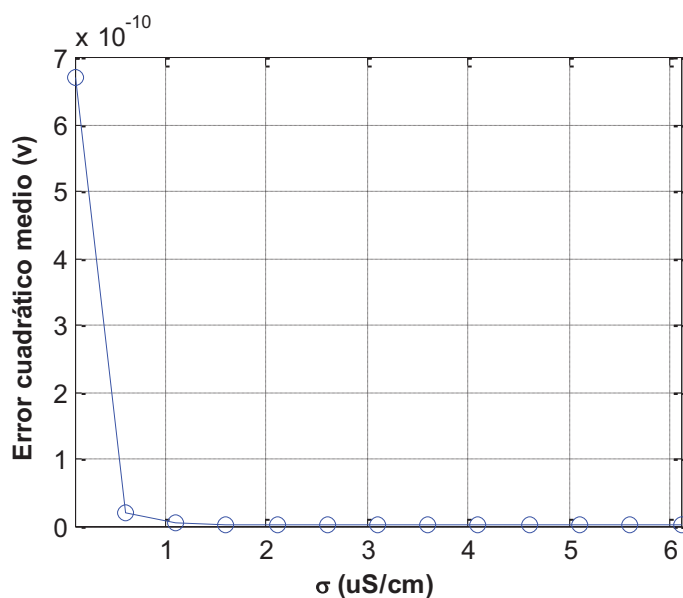


Fig. 5.30 Error cuadrático medio para conductividades bajas y perfil constante.

5.7. Resultados con data simulada

En este apartado se muestran algunos resultados implementando todos los ajustes y calibraciones realizados en este trabajo siguiendo un perfil de conductividad de referencia simulado para obtener las respectivas reconstrucciones de conductividad entregadas por el problema inverso del modelo unidimensional a partir de los voltajes obtenidos por el problema directo del modelo bidimensional inicialmente. La siguiente imagen ilustra el orden que sigue el algoritmo creado con las técnicas y métodos vistos durante este trabajo.

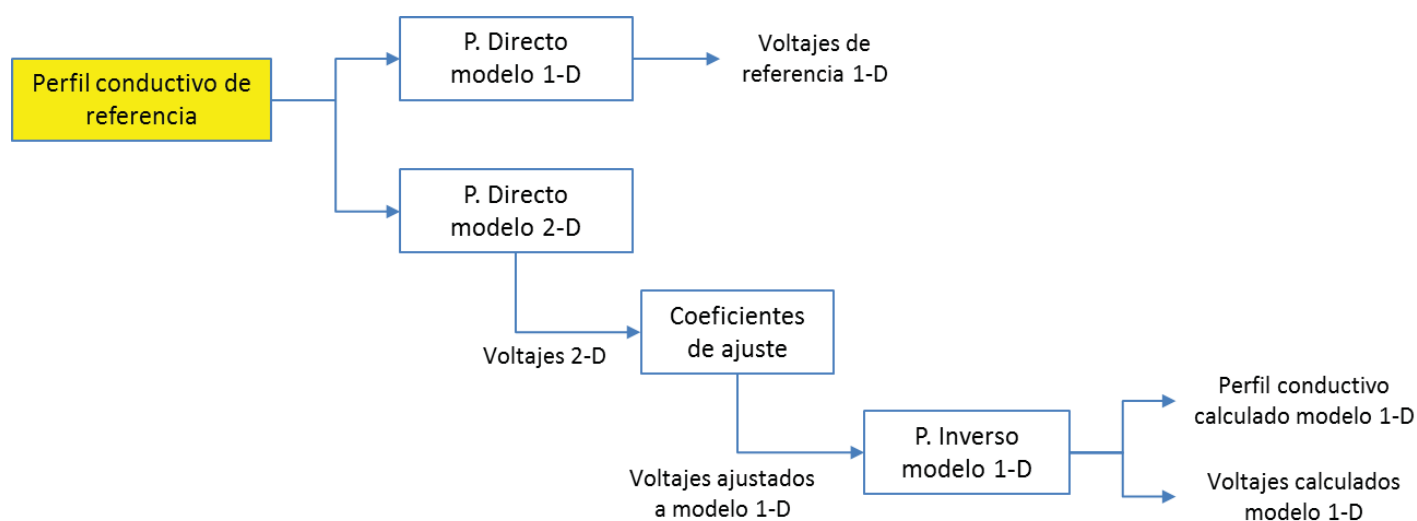


Fig. 5.31 Diagrama ilustrativo del orden de cálculos.

Luego se procedió a realizar las respectivas simulaciones y reconstrucción del perfil de conductividad para los casos mostrados en las Fig. 5.27 y 5.28 obteniendo los siguientes resultados.

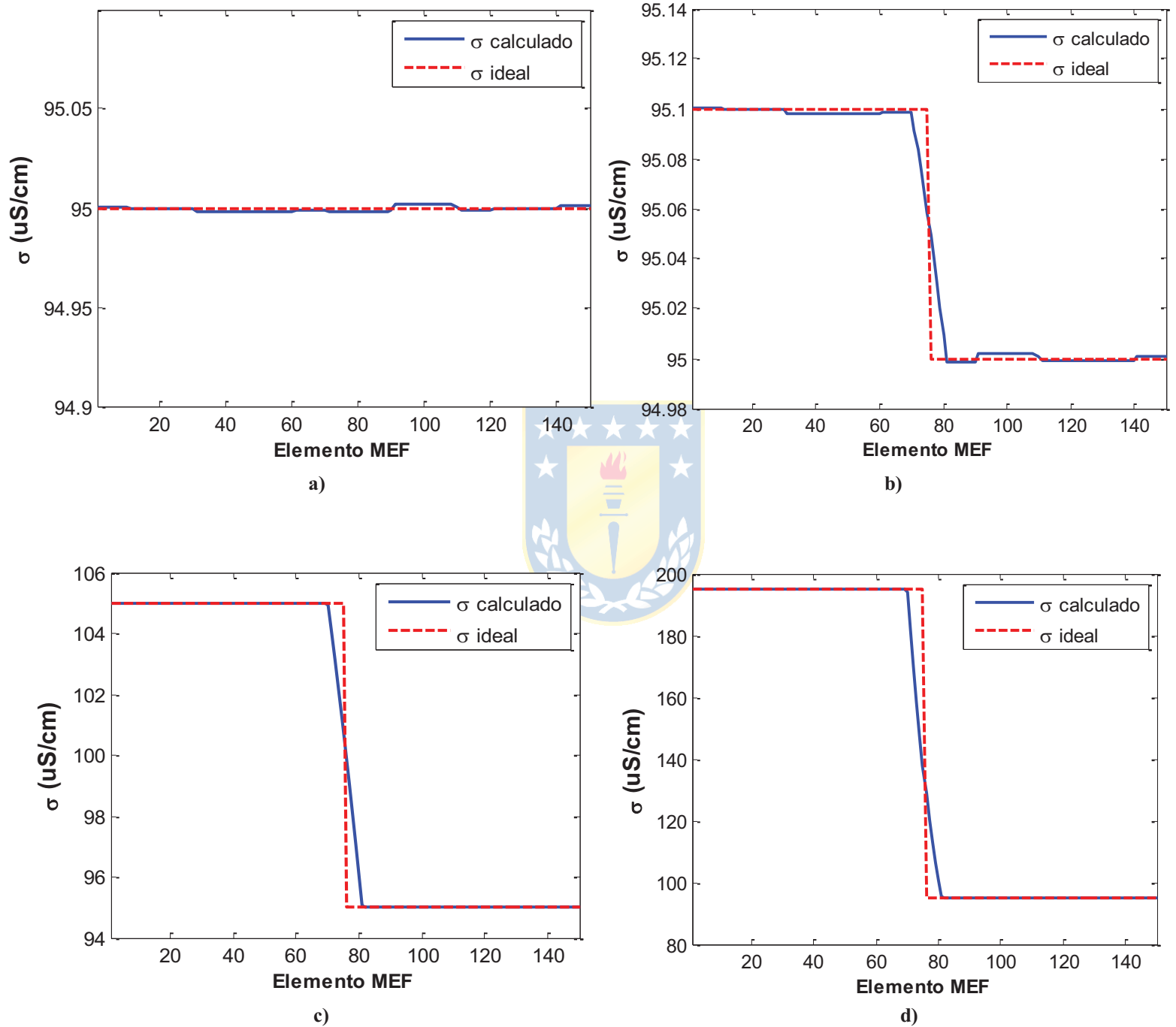


Fig. 5.32 Reconstrucciones de perfil conductivo.

a) referencia perfil constante, b) referencia perfil escalón de 0.1 $\mu\text{S/cm}$, c) referencia perfil escalón de 10 $\mu\text{S/cm}$, d) referencia perfil escalón de 100 $\mu\text{S/cm}$.

Se observa en la Fig. 5.33 los respectivos errores de la reconstrucción realizada por el método planteado en este trabajo.

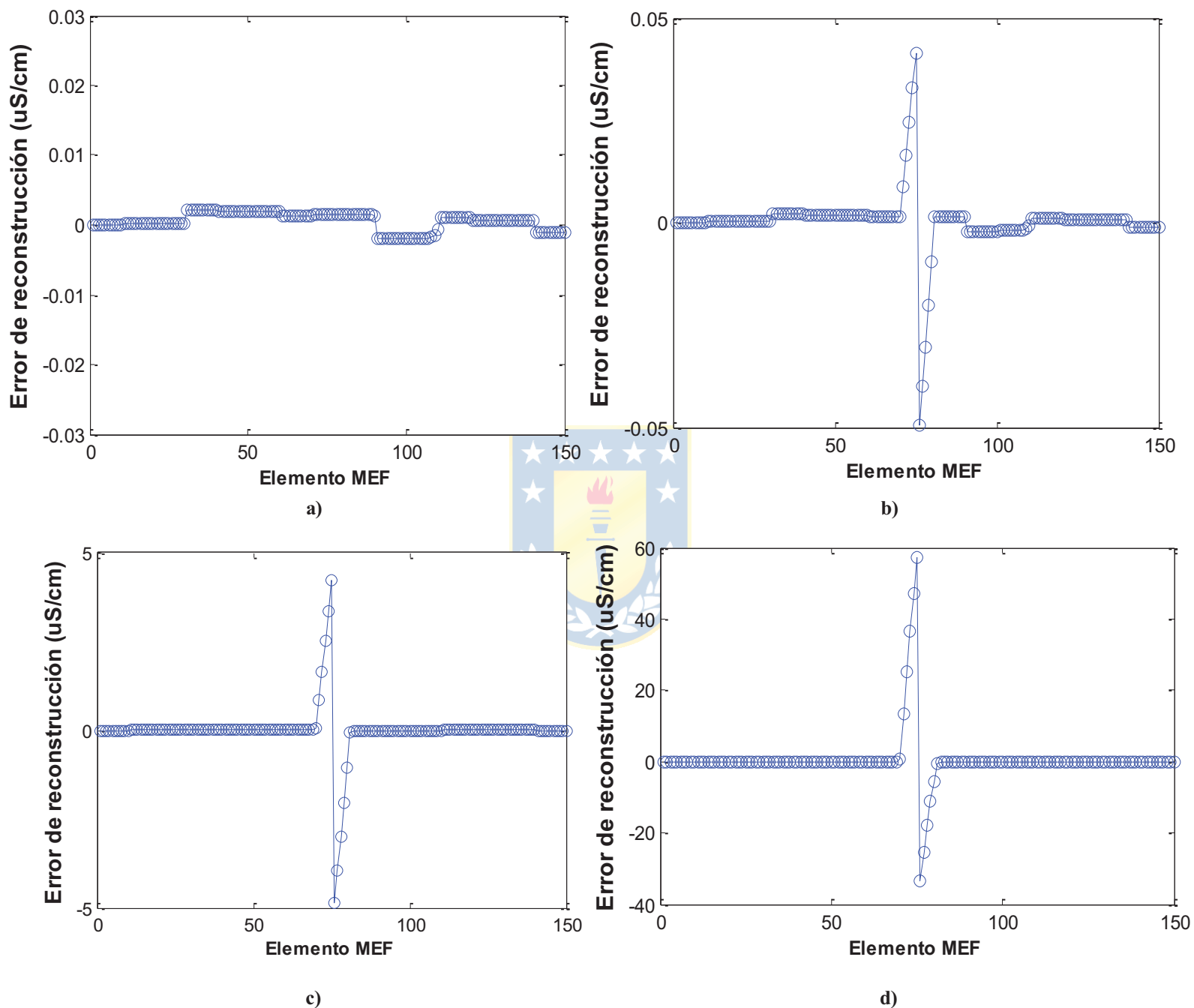


Fig. 5.33 Errores de reconstrucción.

a) error perfil constante, **b)** error perfil escalón de 0.1 $\mu\text{S/cm}$, **c)** error perfil escalón de 10 $\mu\text{S/cm}$,
d) error perfil escalón de 100 $\mu\text{S/cm}$.

Los errores mostrados anteriormente corresponden a la diferencia por elemento del perfil ideal y el perfil reconstruido por el problema inverso. Se puede observar que para los perfiles de referencia del tipo escalón efectivamente se producen errores al momento del cambio brusco de la conductividad, sin embargo el algoritmo de reconstrucción responde de buena manera acomodando el perfil reconstruido al de referencia y por ende reduciendo el valor del error. Por otro lado para el perfil constante de referencia, el error obtenido por elemento de reconstrucción alcanza un máximo de $2.0554 \times 10^{-3} \text{ uS/cm}$ lo que se puede considerar como dentro de los márgenes aceptables ($< 5 \text{ uS/cm}$) para obtener una reconstrucción acorde al valor deseado.

Estas reconstrucciones son posibles representarlas en imágenes tal que imiten la situación de la columna en dicho instante y de esta manera tener una visión de lo que está ocurriendo permitiendo una comparación más directa con el Set up implementado. A continuación se muestran dichas representaciones para el caso de perfil constante y escalón mostrado en la Fig. 5.32(a) y 5.32(d).

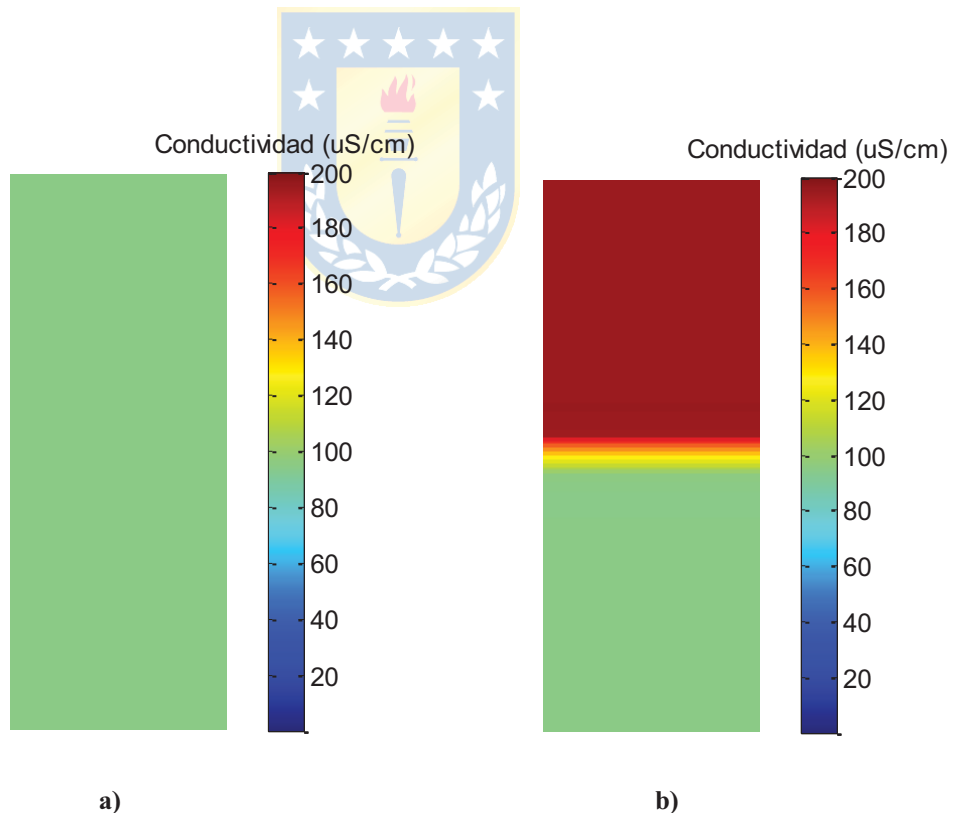


Fig. 5.34 Reconstrucciones en visión de columna.

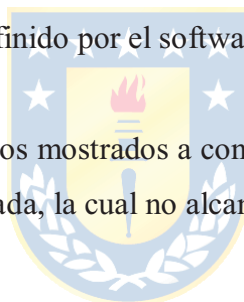
a) perfil constante, b) perfil escalón de 100 uS/cm.

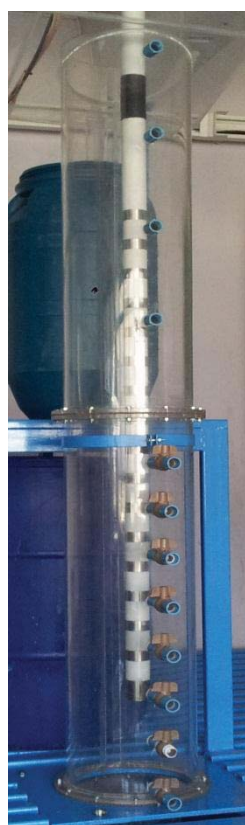
5.8. Resultados con data real

Para la obtención de las mediciones de las situaciones reales se utilizó 120 litros de agua potable como solución principal y 20 kilogramos de sílice (SiO_2) como compuesto alterador de conductividad incorporando floculante TEC 228 en una concentración de 1.5 gr/750 ml de agua destilada y 9 litros de agua potable.

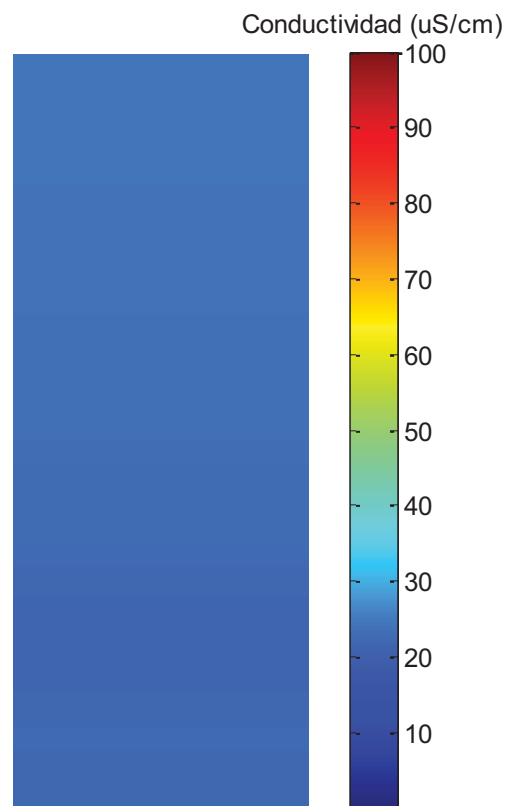
Se procedieron a tomar muestras sobre siete instantes de tiempo dentro de la columna de acrílico que abarcan desde aire hasta distintos niveles de altura para la interfaz creada considerando siempre un nivel de conductividad de agua potable conocido de $95 \mu\text{S}/\text{cm}$. Los niveles de altura de la interfaz fueron creados mediante la inyección de pulpa o concentrado desde el fondo de la columna a una altura deseada. Una vez que se forme la interfaz a simple vista se detuvo la bomba por 1 minuto y se procedió a obtener las muestras por el minuto siguiente. El muestreo es de 0.25 segundos definidos por el hardware, por lo que de cada 4 mediciones se calculó un promedio el cual representa un muestreo de 1 segundo definido por el software creado.

Cabe mencionar que los resultados mostrados a continuación y durante todo este trabajo son sobre el largo efectivo de la sonda utilizada, la cual no alcanza el fondo de la columna de acrílico.

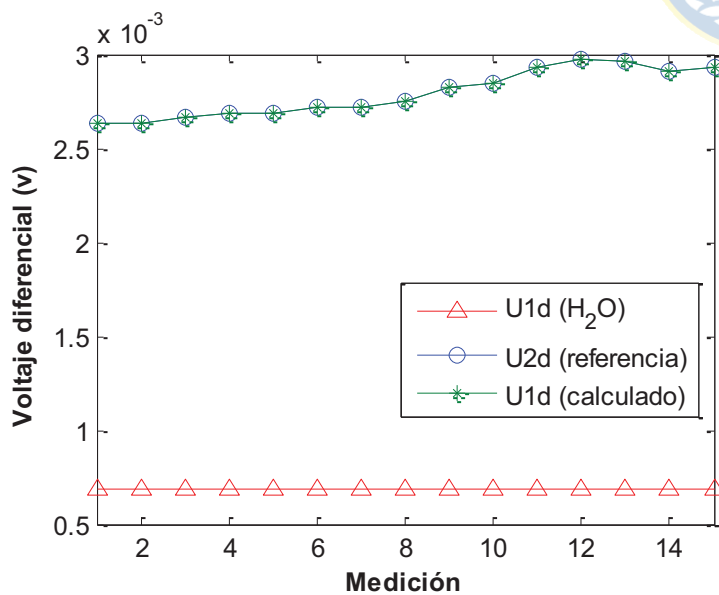




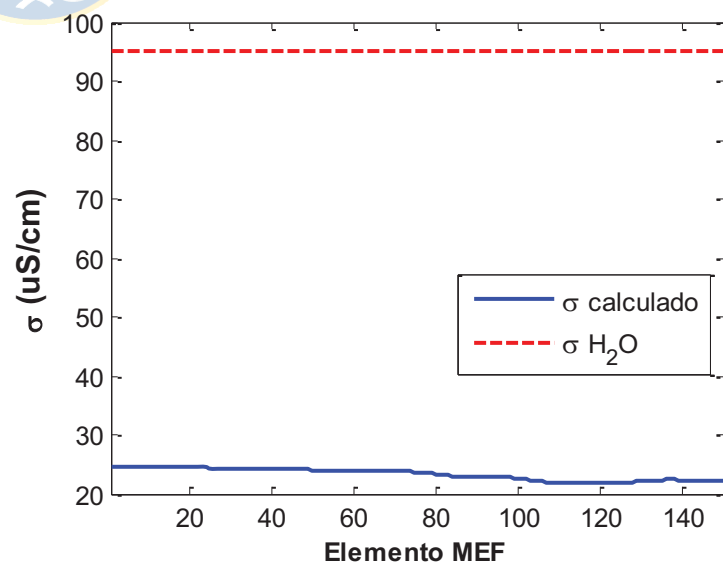
a)



b)



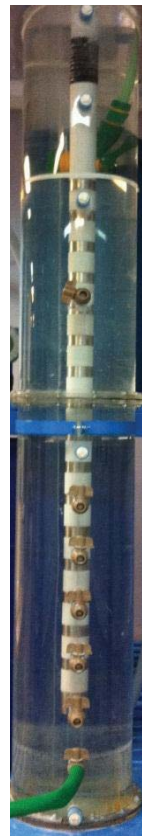
c)



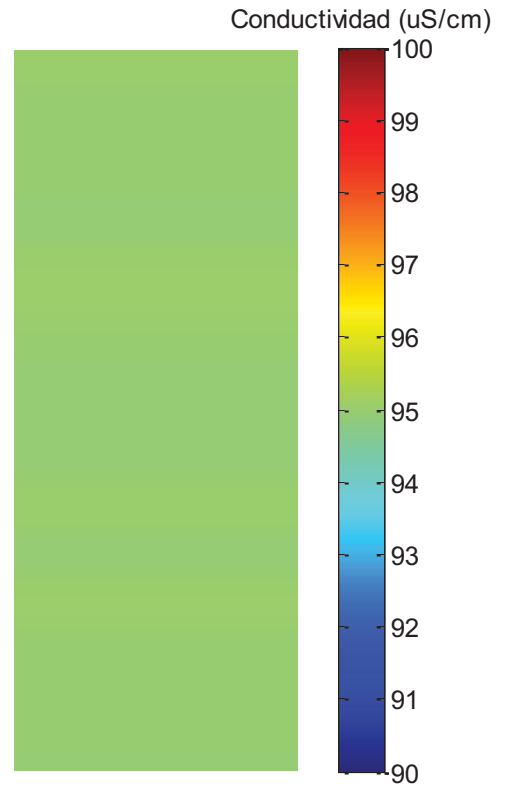
d)

Fig. 5.35 Resultados reales para situación de aire húmedo.

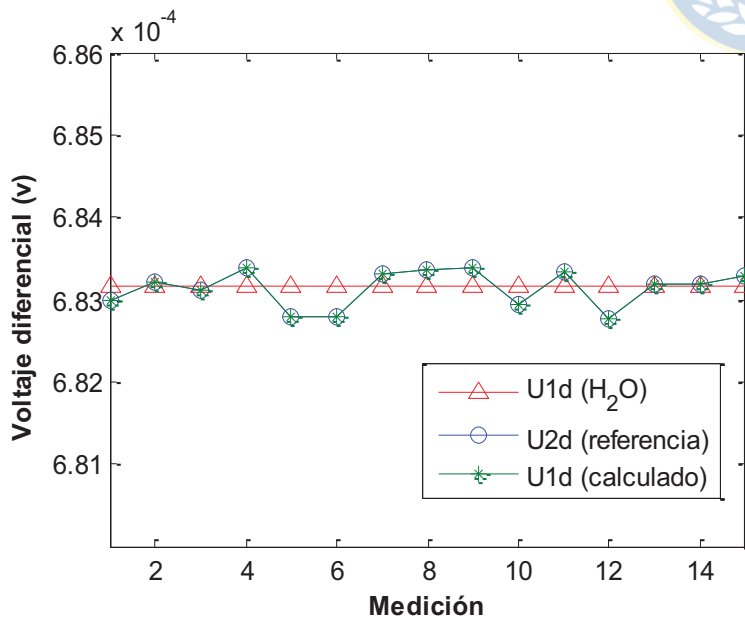
a) situación a reconstruir, b) visión de columna obtenida, c) voltajes medidos en sonda, d) conductividad en columna reconstruida.



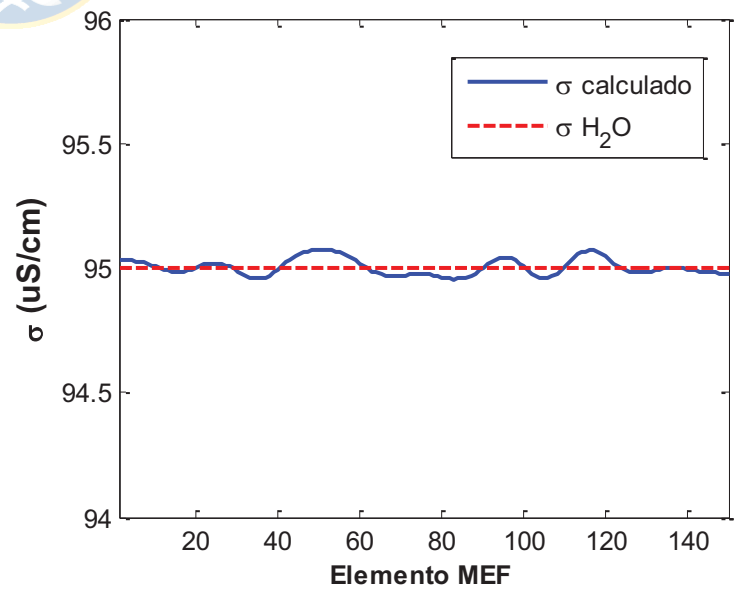
a)



b)



c)



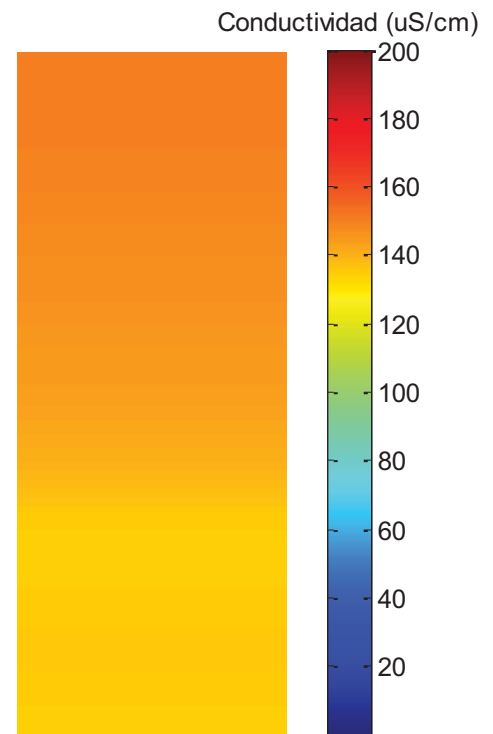
d)

Fig. 5.36 Resultados reales para situación de agua potable.

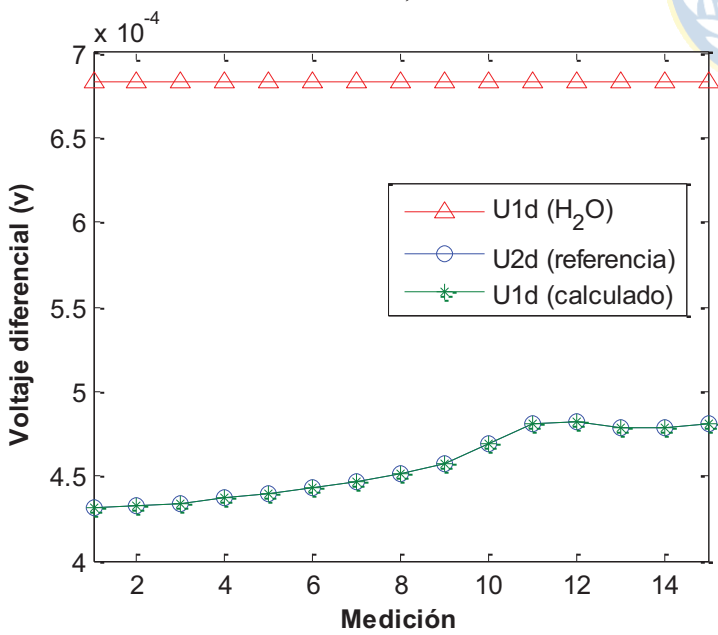
a) situación a reconstruir, b) visión de columna obtenida, c) voltajes medidos en sonda, d) conductividad en columna reconstruida.



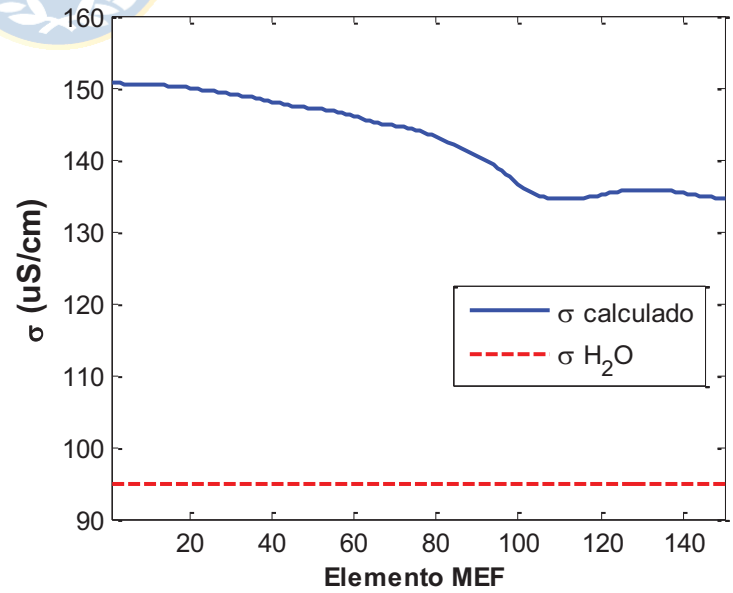
a)



b)



c)



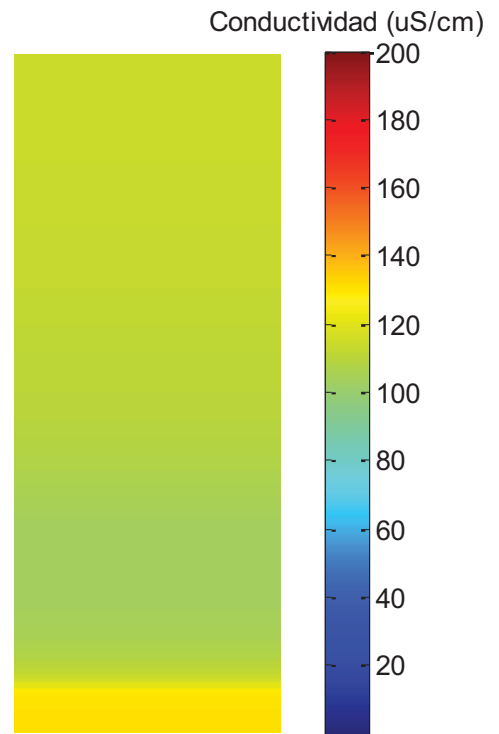
d)

Fig. 5.37 Resultados reales para situación homogénea.

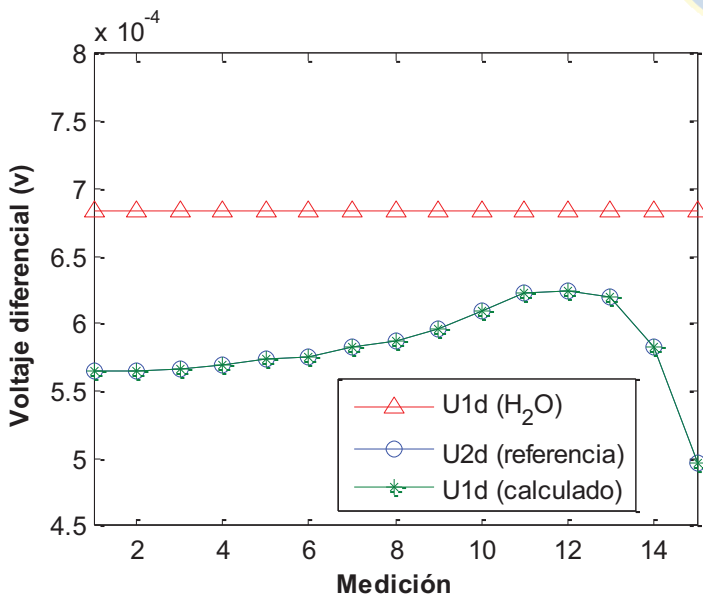
a) situación a reconstruir, b) visión de columna obtenida, c) voltajes medidos en sonda, d) conductividad en columna reconstruida.



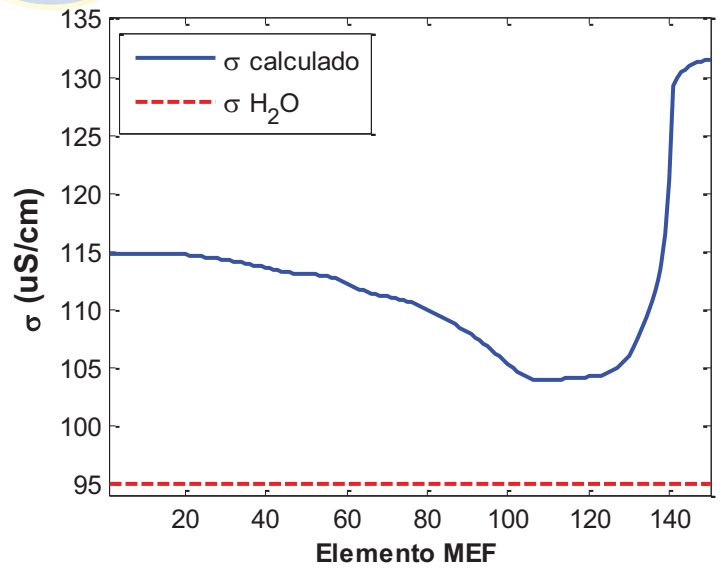
a)



b)



c)



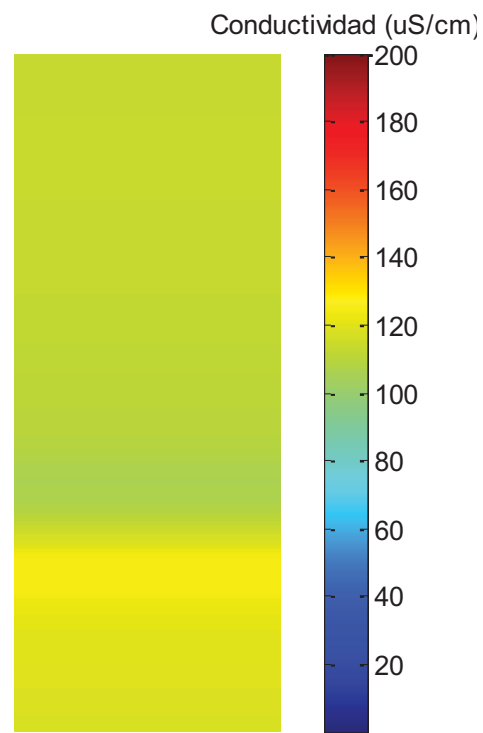
d)

Fig. 5.38 Resultados reales para primer nivel de interfaz.

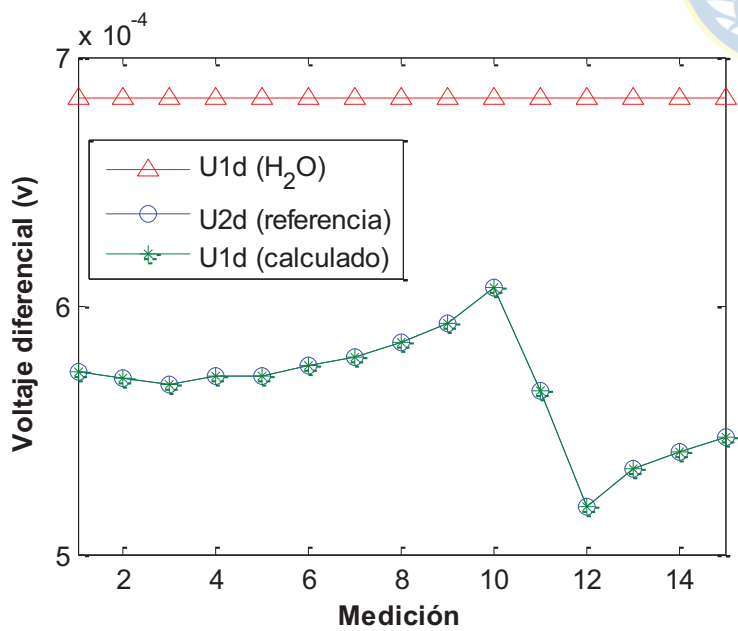
a) situación a reconstruir, b) visión de columna obtenida, c) voltajes medidos en sonda, d) conductividad en columna reconstruida.



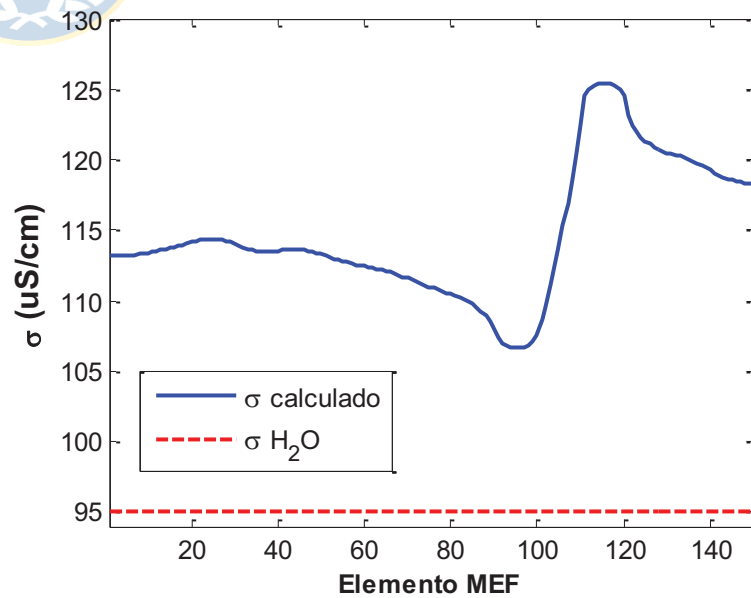
a)



b)



c)



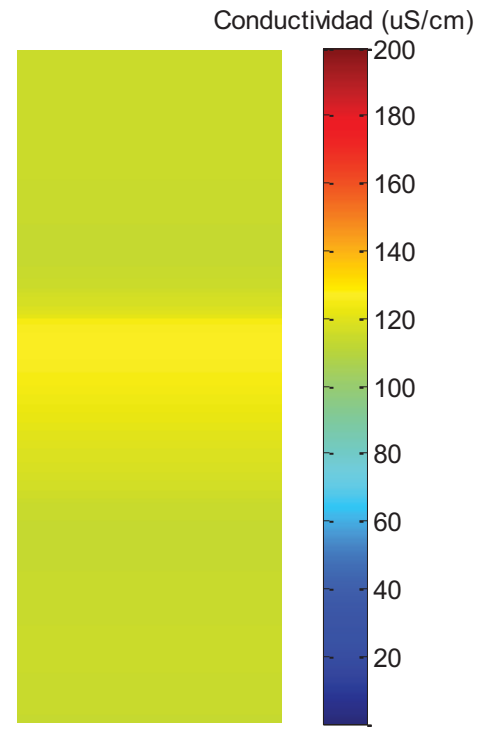
d)

Fig. 5.39 Resultados reales para segundo nivel de interfaz.

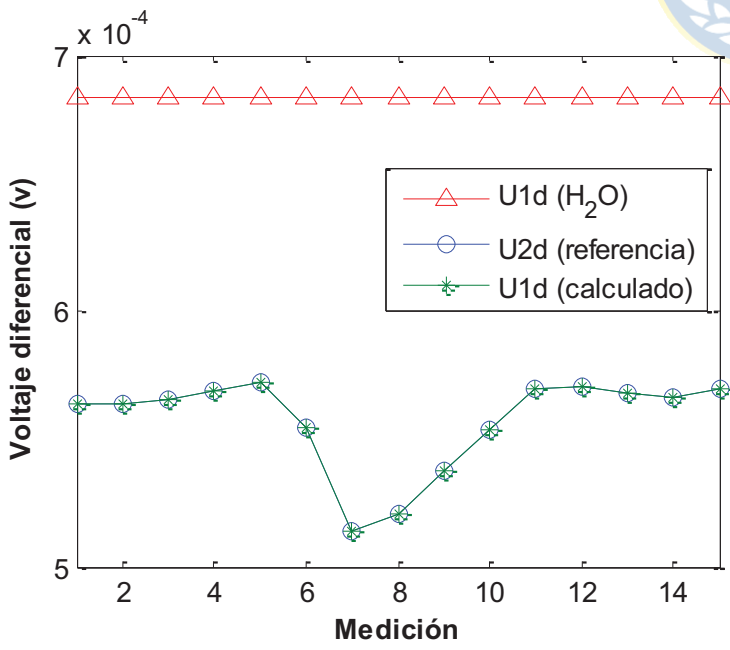
a) situación a reconstruir, b) visión de columna obtenida, c) voltajes medidos en sonda, d) conductividad en columna reconstruida.



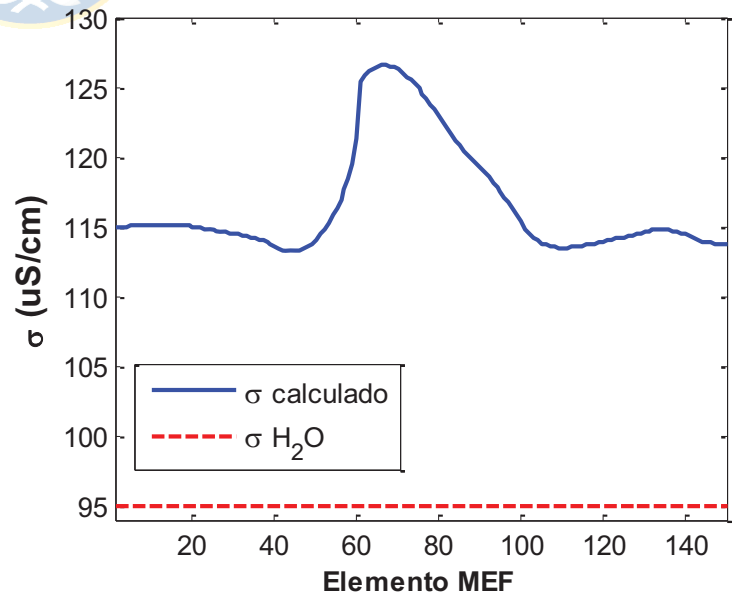
a)



b)



c)



d)

Fig. 5.40 Resultados reales para tercer nivel de interfaz.

a) situación a reconstruir, b) visión de columna obtenida, c) voltajes medidos en sonda, d) conductividad en columna reconstruida.

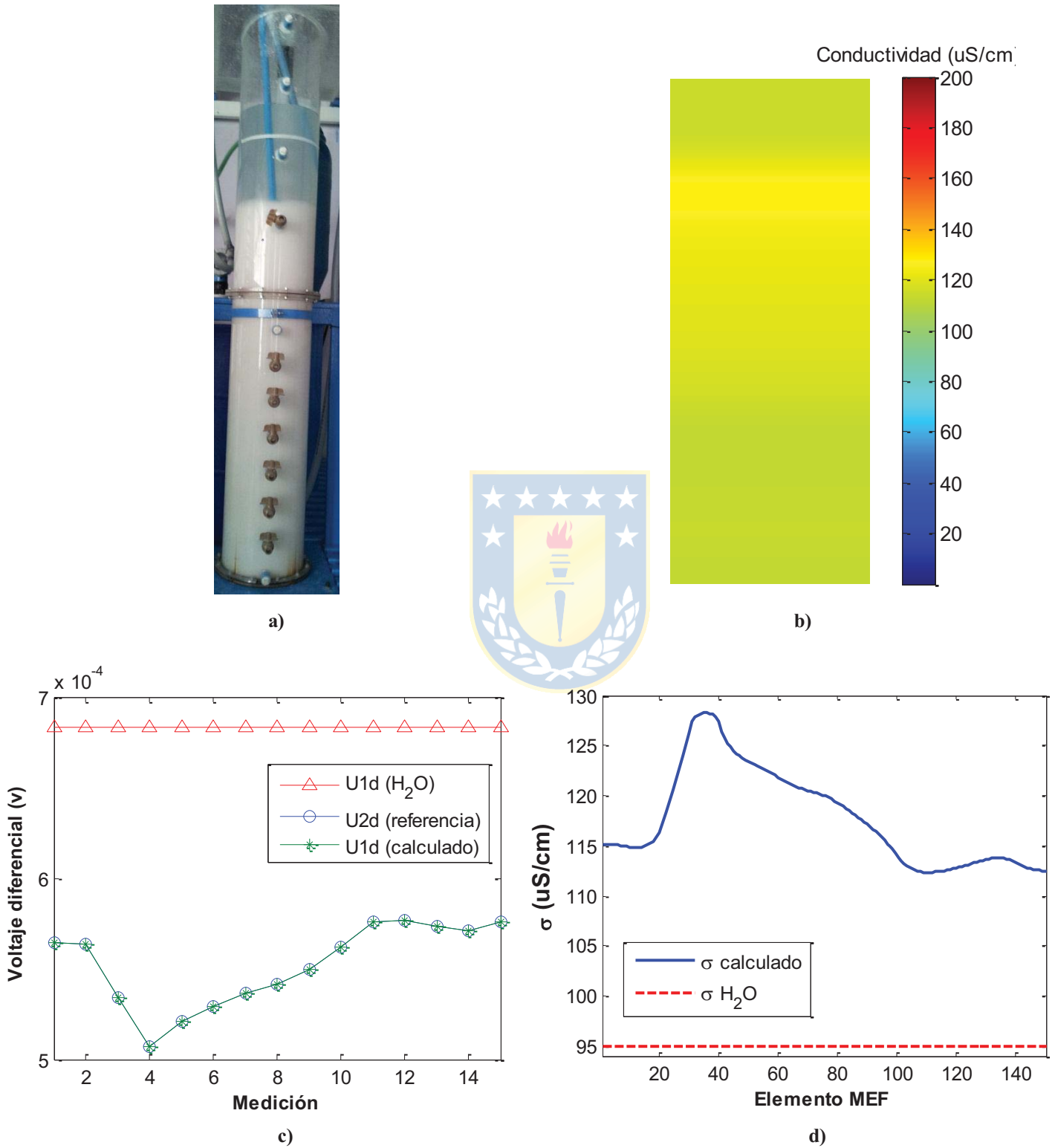
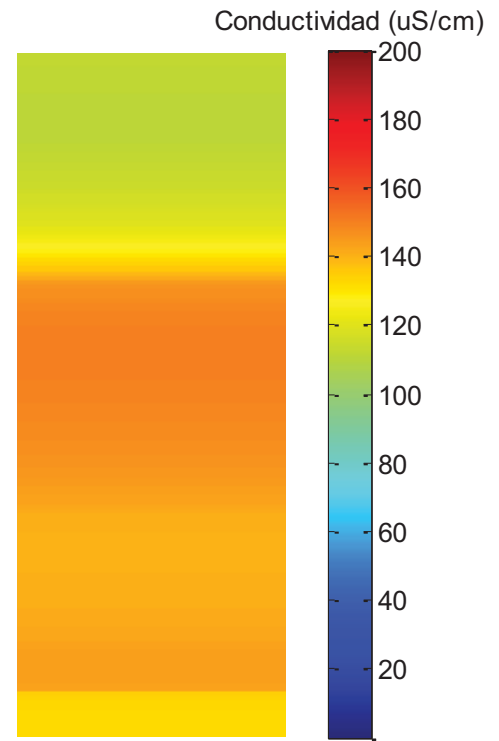


Fig. 5.41 Resultados reales para cuarto nivel de interfaz.

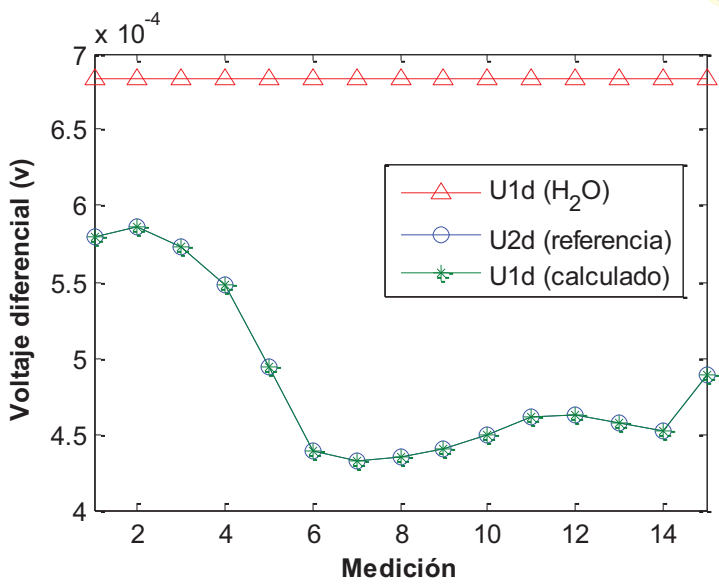
a) situación a reconstruir, b) visión de columna obtenida, c) voltajes medidos en sonda, d) conductividad en columna reconstruida.



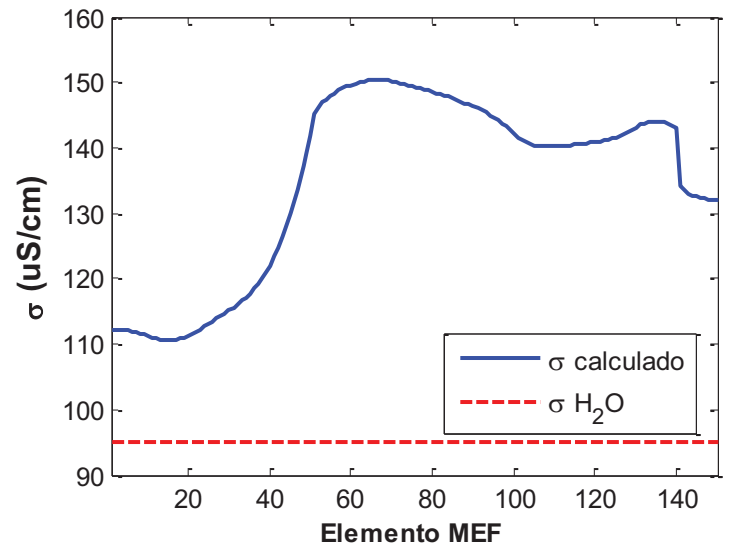
a)



b)



c)



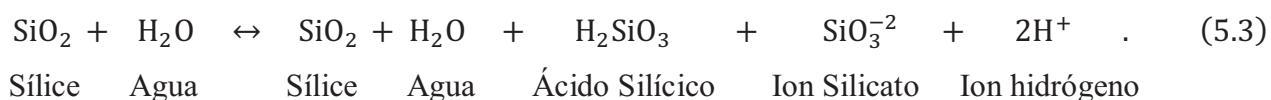
d)

Fig. 5.42 Resultados reales para nivel doble de interfaz.

a) situación a reconstruir, b) visión de columna obtenida, c) voltajes medidos en sonda, d) conductividad en columna reconstruida.

5.8.1 Análisis de los resultados con data real

Como se mencionó anteriormente se utilizó el compuesto químico llamado sílice o dióxido de silicio (SiO_2) como compuesto alterador de la conductividad. Según [21] y [22] el dióxido de silicio tiene una solubilidad en agua muy baja de alrededor de 0.012% para 20°C, siendo esta porción disuelta la que provoca un aumento de la conductividad en la columna y el porcentaje restante se mantiene como dióxido de silicio sedimentando a una velocidad que depende de la granulometría del compuesto. Además, se produce ácido silícico el cual es un ácido débil implicando que una fracción de este se descompone en iones silicatos e iones hidrógenos o hidrogeniones. La ecuación química representativa de la columna cuando se agrega dióxido de silicio se muestra a continuación,



En resumen se tiene una baja porción de sílice que se convierte en ácido silícico y este a su vez al ser un ácido débil una pequeña porción se disuelve formando iones que afectan aumentando la conductividad y el restante de sílice que no se alcanza a disolver sedimenta disminuyendo la conductividad del medio.

En los resultados observados en las Fig.5.38 a Fig.5.42 se muestra efectivamente estos efectos en la alteración de la conductividad. En los resultados sobre el primer nivel de la interfaz se tiene que la conductividad aumenta precisamente al nivel correspondiente al cambio de fase dentro de la columna. En cambio para los siguientes niveles se tiene un aumento que le sigue una pendiente negativa a medida que se alcanza el fondo efectivo medido por la sonda alcanzando el mismo valor de conductividad de la fase superior a la interfaz creada. Esta pendiente se explica a raíz que a medida que el nivel de la interfaz sube en altura, el concentrado de sílice inyectado a este nivel aporta nuevos iones que a su vez se encuentran cada vez más diluidos nivelando los valores de conductividad.

Por otro lado en la Fig.5.42 se observa este mismo comportamiento pero con una baja considerable en la conductividad efectivamente en la parte baja de la sonda, lo que se produce por el efecto de que a este nivel (línea roja mostrada en Fig.5.42(a)) se encuentra un concentrado de sílice

que no ha podido ser disuelto en agua aumentando la resistividad del medio a este nivel y por ende bajando la conductividad eléctrica.

Para el caso de la Fig.5.35 en donde se tienen los resultados para el caso donde solamente existe aire húmedo dentro de la columna, las reconstrucciones avalan la teoría de que el aire húmedo es capaz de conducir corriente a un cierto nivel y no funcionar como aislante como el caso del aire seco.



6. Conclusiones

Se ha demostrado en el transcurso de este trabajo que la tomografía por impedancia eléctrica es una técnica factible para la medición y análisis de conductividad eléctrica. Los métodos de inyección y medición adyacentes han proporcionado los datos necesarios de entrada al algoritmo de reconstrucción desarrollado. Gracias a las simulaciones realizadas se pudo conocer la importancia del valor de hiperparámetro, el cual para valores grandes el algoritmo de reconstrucción se va alejando de la convergencia de una solución, determinando la sensibilidad del método de regularización.

Se ha podido conocer la no implicancia que tiene la conductividad eléctrica con lo observado visualmente, puesto que la naturaleza química presente en los resultados permite obtener resultados que no necesariamente pueden ser deducidos a simple vista, haciendo la técnica de TIE una herramienta sumamente útil para determinados tipos de control.

En la parte de calibración, es posible mencionar que la etapa de transición entre el modelo bidimensional y unidimensional es de vital importancia para un correcto funcionamiento del algoritmo y posterior convergencia del problema inverso, puesto que sin los coeficientes de ajuste los voltajes ingresados al problema inverso del modelo unidimensional no estarían nivelados, por ende no se asegura la convergencia del algoritmo ya que se pueden producir problemas de no singularidad del problema inverso.

Durante este trabajo se ha podido aprovechar por una parte la simpleza matemática que otorga el modelo en una dimensión pero a su vez utilizando la exactitud en la obtención de datos reales, permitiendo también la predicción de resultados e información otorgada en simulaciones obtenidas por el modelo bidimensional.

En general se considera que se han cumplido los objetivos descritos al principio de este trabajo de Memoria de Título obteniendo los resultados esperados y dejando abierta la opción de potenciar los métodos vistos para una mejora futura del algoritmo.

Bibliografía

- [1] A. P. Calderón, “On an Inverse Boundary Value Problem”, *Seminar on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics, Boletim da sociedade Brasileira de Matemática*, pp. 65-73, Rio de Janeiro, 1980.
- [2] O. Casas Piedrafita, “Contribución a la obtención de imágenes paramétricas en tomografía de impedancia eléctrica para la caracterización de tejidos biológicos”, Tesis doctoral, Diciembre 1998, Departamento de Ingeniería Electrónica, Universidad Politécnica de Cataluña.
- [3] B. De Lema, P. Casan, P. Riu. “Tomografía por impedancia eléctrica. Estandarización del procedimiento para su aplicación en neumología.” *Arch Bronconeumol*, vol 42, no. 6, pp. 299-301, Noviembre 2006.
- [4] M. Vauhkonen, D. Vadász, P. A. Karjalainen, E. Somersalo, J. P. Kaipio. “Tikhonov Regularization and Prior Information in Electrical Impedance Tomography”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 17, no. 2, pp. 285-293, Abril 1998.
- [5] Documento oficial empresa Numcore, “Numcore EIST User Manual”, 29 de Julio, 2010.
- [6] O.P. Tossavainen, M. Vauhkonen, V. Kolehmainen, Kyung Youn Kim, “Tracking of moving interfaces in sedimentation processes using electrical impedance tomography”, *Chemical Engineering Science*, vol. 61, no. 23 , pp. 7717-7729, Diciembre 2006.
- [7] J. Winther, “Finite Element Method: Introduction, 1D heat conduction”, Profesor externo, Departamento Ingeniería Civil, Universidad de Aalborg, Dinamarca.
- [8] E. Somersalo, M. Cheney, D. Isaacson, “Existence and Uniqueness for Electrode Models for Electric Current Computed Tomography”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 52, no. 4, pp. 1023-1040, Agosto 1992, <http://www.jstor.org/stable/2102189>.
- [9] L. Ferragut, “Métodos Numéricos: Introducción al Método de Elementos Finitos”, Diciembre 2005, http://web.usal.es/~ferragut/apuntes/introduccion_MEF.pdf.
- [10] S. Chandía, F. Ferrada, “Configuración y Operación de un Tomógrafo Industrial”, Trabajo Proyecto Electrónico, Junio 2012, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Concepción.
- [11] A. Borsic, B. M. Graham, A. Adler, W. R. B. Lionheart, “In vivo Impedance Imaging with Total Variation Regularization”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 29, no. 1, pp. 44-54, Enero 2010.

- [12] D. Romano, S. Pisa, E. PiuZZi, “Implementation of the Newton-Raphson and Admittance Methods for EIT”, *International Journal of Bioelectromagnetism*, vol. 12, no 1, pp. 12-20, 2010.
- [13] J. M. Kang, M. S. Kim, Jae. H. Kim, Ji H. Kim, C. Y. Kim, B. Y. Choi, S. Kim, J. S. Lee, K.Y. Kim, “The modified Newton-Raphson algorithm using Region of Interes in EIT”, The 23rd International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications, 2008.
- [14] A. Adler, B. M. Graham, “Objetive selection of hyperparameter for EIT”, *Institute of Physics Publishing*, vol. 27, no. 5, pp. s65-s79, Abril 2006.
- [15] “*Finite Element Methods for Engineers*”, U. S. Dixit. Cengage Learning, 2009.
- [16] “*The Finite Element Method: Its Fundamentals and Applications in Engineering*”, Zhangxin Chen. World Scientific, 2011.
- [17] D. Silvera, D. Rye, M. Velonaki, “Improved EIT drive patterns for a robotics sensitive skin”, in *Australasian Conference on Robotics and Automation (ACRA)*, Sydney, Australia, Dic. 2-4, 2009.
- [18] M. Ramirez, “Tomografía por Impedancia Eléctrica: ¿una nueva rama de la Teoría del Caos?”, *Revista del Centro de Investigación*, Universidad La Salle, Distrito Federal de México, vol. 9, no. 34, pp. 13-20, Julio-Diciembre 2010.
- [19] A. Adler, R. Guardo, “Electrical Impedance Tomography: Regularized Imaging and Contrast Detection”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 15, no. 2, pp. 170-179, Abril 1996.
- [20] M. Gasulla Forner, “*Obtención de imágenes de la distribución eléctrica del subsuelo. Aplicación a la detección de objetos locales*”, Tesis Doctoral, Febrero 1999, Departamento de Ingeniería Electrónica, Universidad Politécnica de Cataluña.
- [21] “*Total Quality in the Clinical Laboratory*”, M. Dharan. Reverté, 1982.
- [22] “*Chemistry Volume 2*”, R. J. Gillespie, A. Beltrán. Reverté, 1990.
- [23] L. Martínez H., “*On regularization method for dynamic inverse problems*”, Tesis de Magister, 2012, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia.

Anexo A. Características del Hardware

A.1. Sonda tomográfica

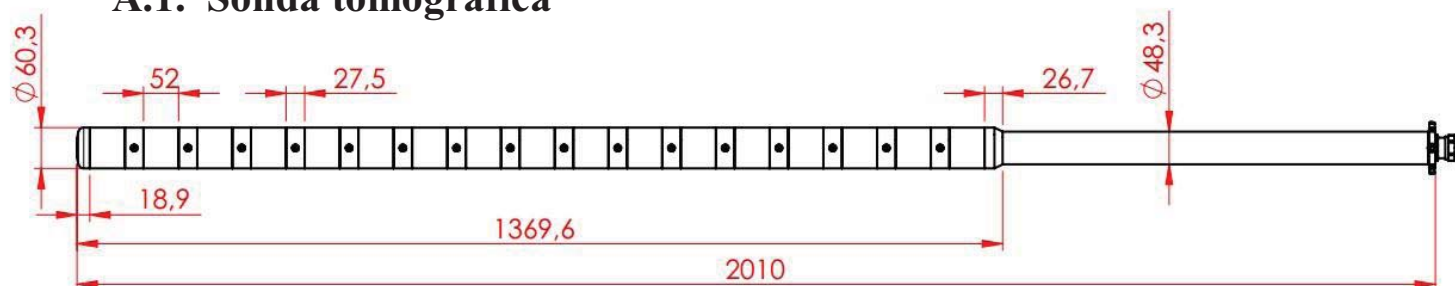


Fig. A.1 Dimensiones en mm de la sonda tomográfica.

Tabla A.1 Resumen de las especificaciones físicas de la sonda tomográfica.

Diámetro sector efectivo	60,3 mm
Diámetro sector superior	48,3 mm
Ancho de electrodos	27,5 mm
Ancho entre electrodos	52 mm
Largo sonda total	2010 mm
Largo efectivo de la sonda	1369,6 mm
Ancho superior de la zona efectiva	26,7 mm
Ancho inferior de la zona efectiva	18,9 mm

A.2. Placa P64 EIST

Tabla A.2 Especificaciones de placa dispositivo P64 EIST.

Amplitud máxima de inyección	6.5 mA
Frecuencia mínima de inyección	0 Hz
Frecuencia máxima de inyección	1 MHz
Ajuste de ángulo de fase de inyección	0°...360°
Electrodos de inyección	30 + 30
Canales paralelos de inyección	8
Componentes frecuenciales por canal de inyección	3
Máximo número de secuencia	53
Precisión máxima de medición (max. oscilación de voltaje)	153 μV ($\pm 1.25 V$)
Máxima oscilación de voltaje (max. precisión de medición)	$\pm 10 V$ (1.25 mV)
Máximo número de muestras de medición (por canal)	2048
Frecuencia máxima de muestreo	25 MHz
Número máximo de canales de medición	64



Fig. A.2 Gabinete Numcore.

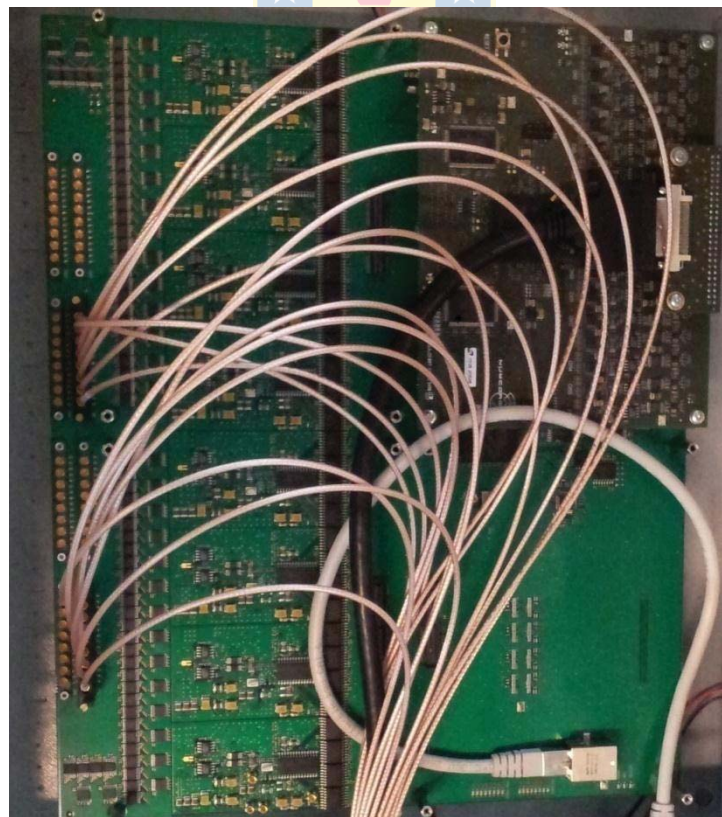


Fig. A.3 Placa maestra P64 con cableado coaxial, cable Ethernet y par trenzado a DSP.

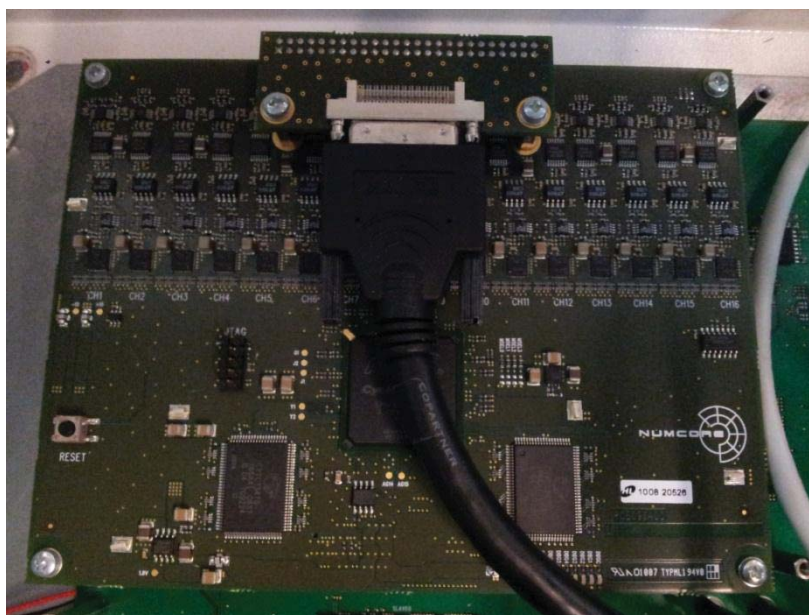


Fig. A.4 Tarjeta DSP en conexión de cable par trenzado de adquisición de datos.

A.3. Variador PowerFlex 70EC

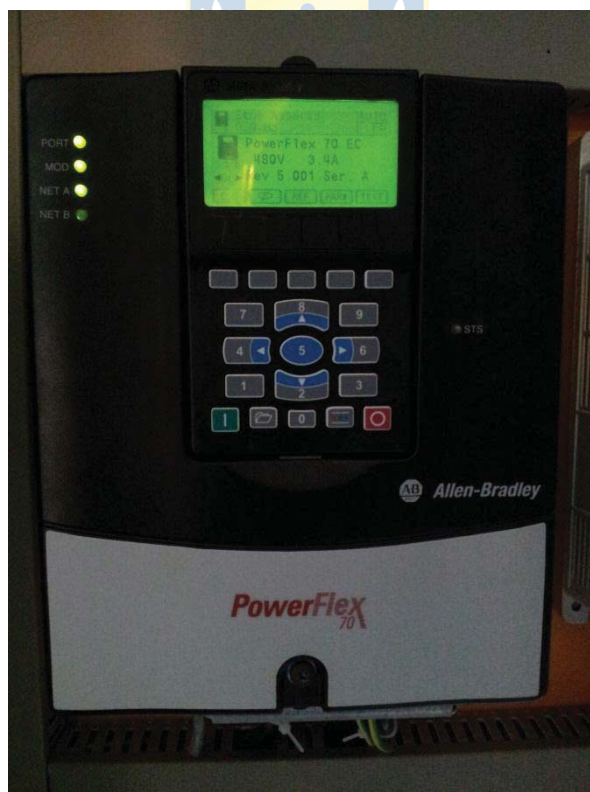


Fig. A.5 Imagen frontal del variador de frecuencia PowerFlex 70EC.

A.4. Bombas Bredel Hose SP/25



Fig. A.6 Imagen frontal bombas Bredel Hose SP/25.

A.5. PLC Allen Bradley 1756 y Switch

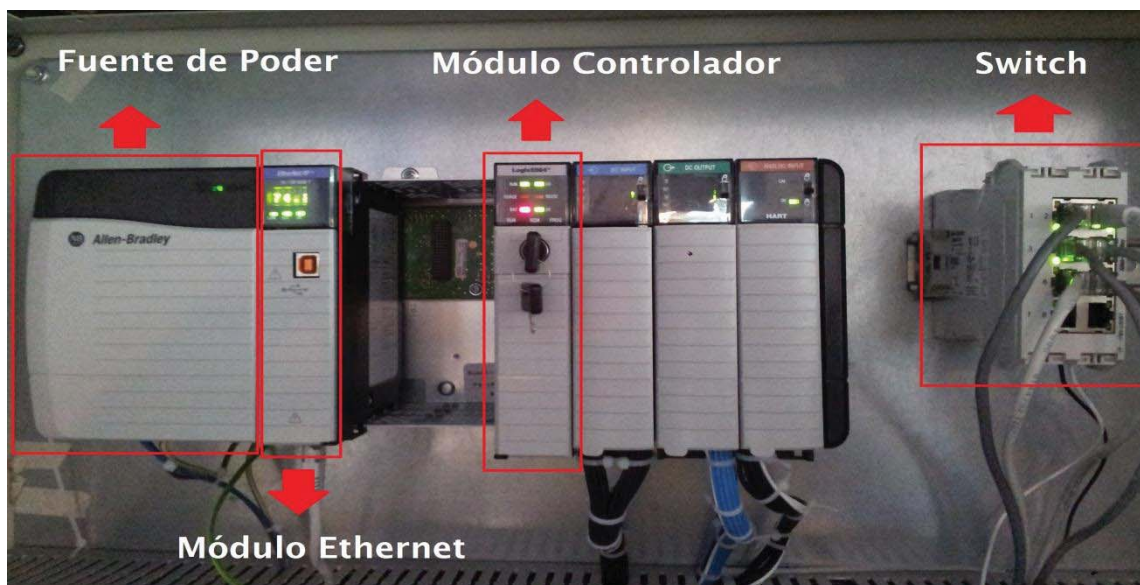


Fig. A.7 Imagen frontal PLC.

Anexo B. Diagrama de Columna y Sonda

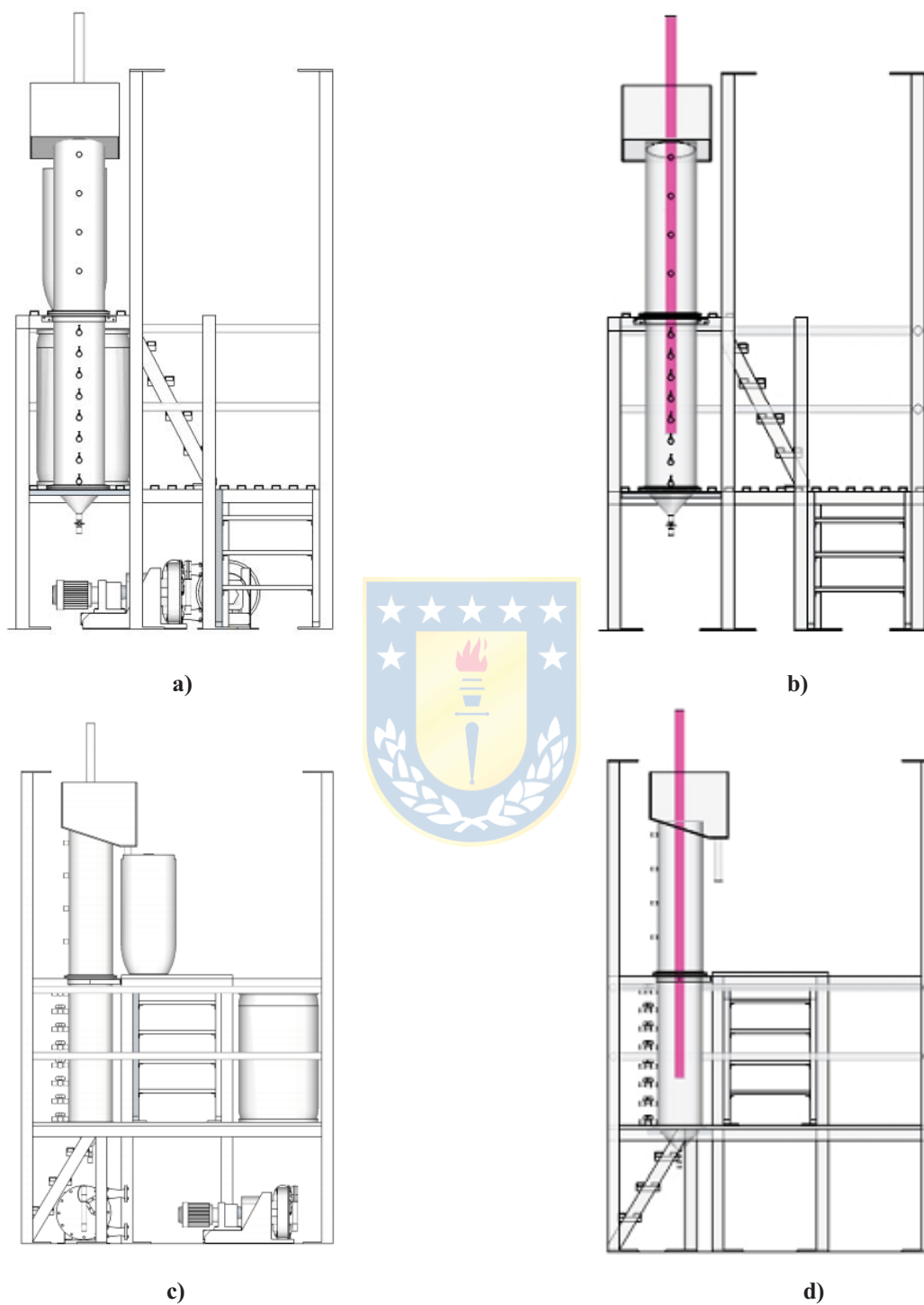


Fig. B.1 Diagrama 2D de instalación columna de sedimentación.

a) diagrama frontal con bombas, **b)** diagrama frontal resaltando ubicación de sonda tomográfica, **c)** diagrama lateral con bombas, **d)** diagrama lateral resaltando ubicación de sonda tomográfica.

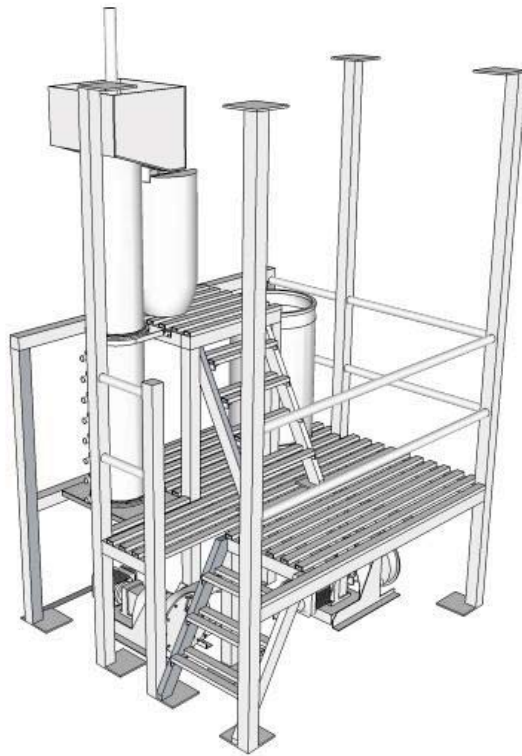


Fig. B.2 Diagrama 3D de instalación columna de sedimentación.



Fig. B.3 Instalación en terreno de la columna de sedimentación y sonda tomográfica.

Anexo C. Set-up Experimental

El hardware a utilizar consiste en una sonda tomográfica de 1.4 m (largo efectivo) con características que se muestran en el anexo A.1 y el equipo disponible en el laboratorio de control del DIE de la empresa Numcore para la etapa de inyección de corrientes y medición de voltajes por medio de una tarjeta DSP configurada como esclava y un sistema de placa maestra modelo P64 EIST, con características disponibles en anexo A.2.

La sonda tomográfica es conectada al equipo Numcore por medio de cables coaxiales para la inyección de las respectivas corrientes y un cable serial par trenzado para la medición de voltajes. Las corrientes son inyectadas por medio de la placa maestra P64 y los voltajes medidos son trabajados y demodulados en la tarjeta esclava DSP.

Por otro lado, los softwares utilizados consisten en 2 programas principales. Primero está el software que viene incluido con el hardware de Numcore, el cual permite realizar las respectivas configuraciones de cableado, secuencias de inyección de corriente, par de electrodos de medición e inyección además de establecer el muestreo de señales, frecuencias y amplitudes de inyección [5]. Segundo, se encuentra el software de programación Matlab (R2012a), que es utilizado en este trabajo de Memoria de Título en la etapa de resolver las ecuaciones del problema directo e inverso de TIE considerando un set de datos definidos a modo de prueba y posteriormente la adquisición y prueba del algoritmo de reconstrucción con datos reales medidos mediante la sonda tomográfica.

El set-up experimental es mostrado en la Fig. C.1 y consta principalmente en una columna de material acrílico de 120 litros de capacidad, diámetro interior 28,5 cm y exterior 30 cm con una altura de 2 m, en donde se encuentra en su interior la sonda tomográfica. El líquido en análisis mantendrá una circulación constante por medio de 2 bombas modelo Bredel Hose SP/25 conectadas por alimentación trifásica a variadores individuales modelo PowerFlex 70EC, a su vez comunicados vía cableado Ethernet a un Switch conectado a un módulo Ethernet IP 1756-EN2T incorporado en un PLC Allen Bradley Controllogix 1756 con módulo controlador 1756-L64. Finalmente se cuenta con dos estanques de 200 y 60 litros para la descarga y carga de la columna por medio de las bombas.

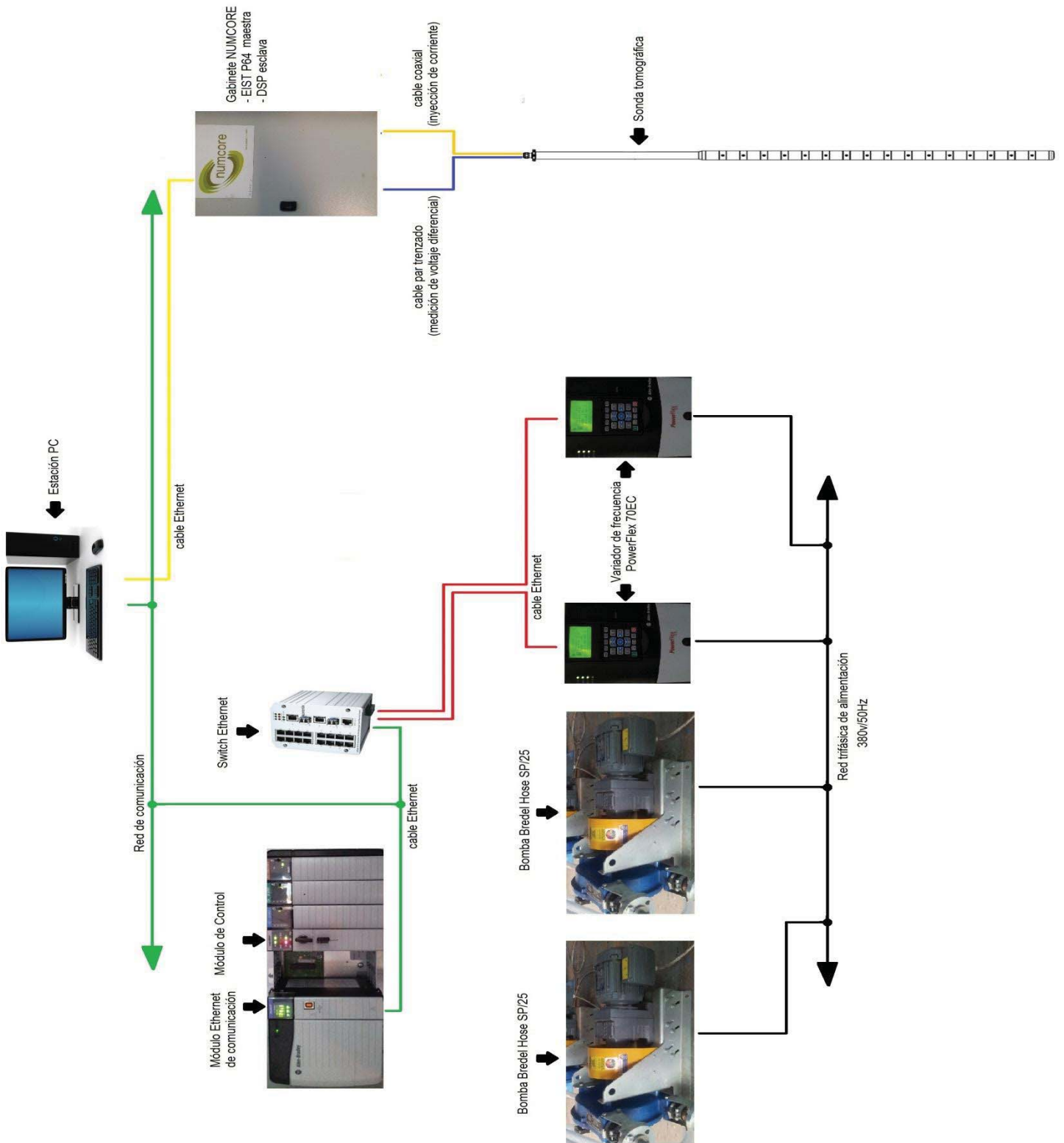


Fig. C.1 Esquema general del Set up experimental.

Anexo D. Modelo Resistivo en una Dimensión

El problema directo que se vio a lo largo de este trabajo es el representado por la ecuación (4.9) y (4.10), el cual depende del cálculo mediante la inversa de la matriz de rigidez \mathbf{B} que a su vez contiene las variables de estado de conductividad eléctrica. Provocando que el problema directo sea automáticamente un problema no lineal.

En este apartado se muestra otra opción a la solución del problema directo y su respectivo problema inverso que consta en trabajar con un modelo que permita evitar la no linealidad y que a su vez brinde la ventaja de trabajar con un problema que pueda ser resuelto en solamente una iteración para obtener resultados cercanos a los obtenidos con el modelo trabajado anteriormente.

Este modelo unidimensional consta principalmente en que se considera a la sonda y su entorno como un circuito resistivo de la forma en que se muestra en la Fig.D.1 implementando la definición de nodos y elementos vistas en el MEF.

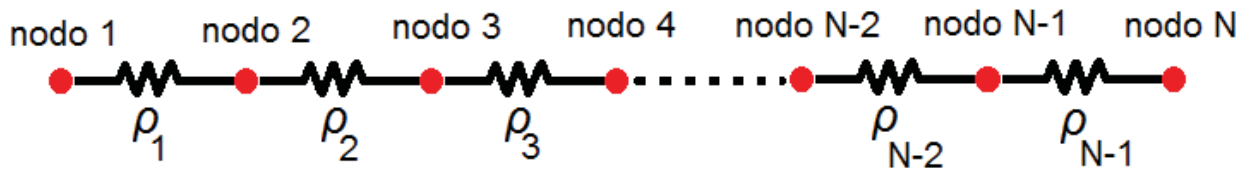


Fig. D.1 Representación circuital para modelo resistivo.

Se considera una estrategia de inyección de corriente y medición de voltaje visto en el apartado 4.6. Se mantiene el mismo número de nodos ($N = 150$) por lo que la cantidad de elementos, en este caso la cantidad de valores de resistividades del medio, es de $N - 1 = 149$. Lo que implica que cada electrodo está separado por 10 elementos. La inyección de corriente puede ser visualizada en la Fig.D.2, lo que equivale a la Fig.5.1 para el modelo no lineal trabajado anteriormente para la primera secuencia de inyección.

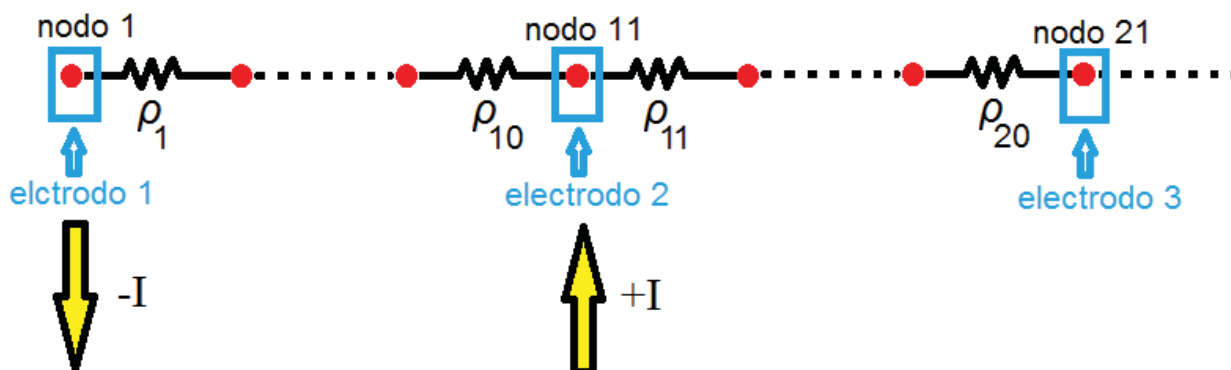


Fig. D.2 Visualización para primera secuencia de inyección del modelo resistivo.

De la Fig.D.2 es posible considerar un circuito cerrado entre la sonda y el medio formando una ecuación por secuencia de inyección (Ley de Ohm) en función de las resistividades involucradas como sigue,

$$\mathbf{U}_\rho = \mathbf{R}_\rho \cdot I, \quad (\text{D.1})$$

donde \mathbf{R}_ρ representa un vector de una columna en donde cada fila se encuentra la sumatoria de resistividades involucradas en cada inyección de corriente. \mathbf{U}_ρ es un vector de voltajes diferenciales, que para el caso de la sonda corresponde a las mediciones realizadas por el hardware para el par de electrodos que involucra la inyección de corriente en cada secuencia. La ecuación (D.1) puede ser representada como,

$$\begin{bmatrix} U_\rho^1 \\ \vdots \\ U_\rho^{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{10} \rho_i \\ \vdots \\ \sum_{i=141}^{150} \rho_i \end{bmatrix} \cdot I, \quad (\text{D.2})$$

la ecuación (D.2) puede ser escrita en función directa de las variables ρ_i ,

$$\begin{bmatrix} U_{\rho}^1 \\ \vdots \\ U_{\rho}^{15} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\rho} \cdot \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_{150} \end{bmatrix} \cdot I, \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{U}_{\rho} = \mathbf{A}_{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot I, \quad (\text{D.4})$$

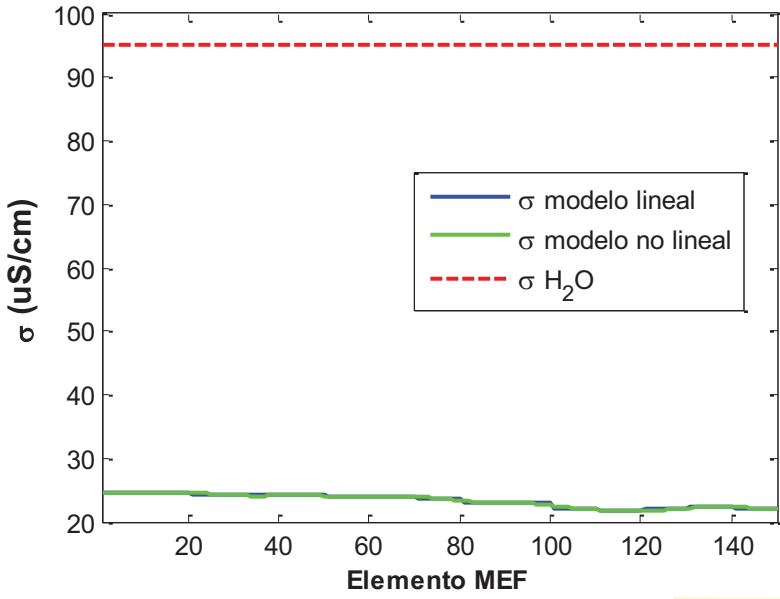
donde la matriz \mathbf{A}_{ρ} es constante de 15 filas (secuencias de inyección) y $N - 1$ columnas. Cada fila contiene valores 0 a excepción de las respectivas posiciones de ρ_i donde el valor es 1.

La ecuación (D.4) puede considerarse como un problema lineal mal condicionado dado el número de ecuaciones e incógnitas, por lo que se utiliza el mismo método de regularización de Tikhonov visto en la ecuación (4.61) con $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ la matriz identidad y el mismo valor de hiperparámetro de regularización λ utilizado en el modelo trabajado anteriormente. Para poder realizar la solución del problema inverso visto en la ecuación (4.61) se utilizó la forma explícita de la solución al método de Tikhonov [23],

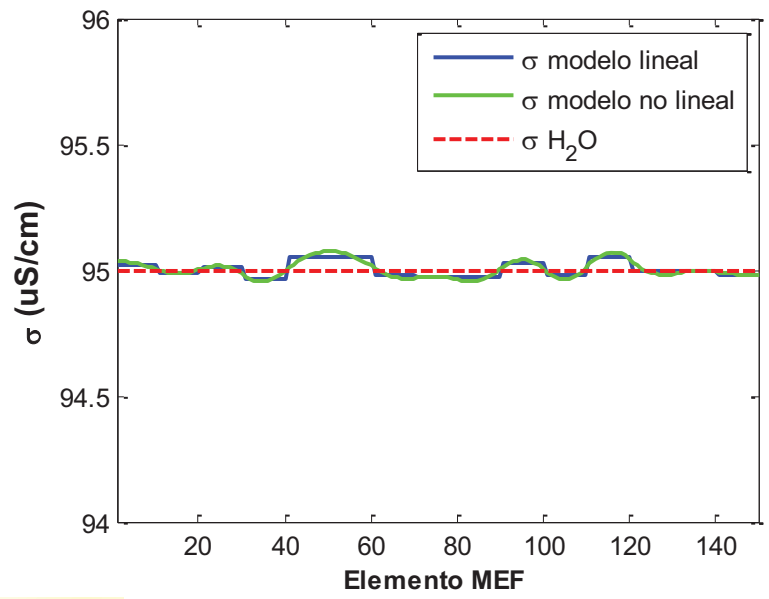
$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = ((\mathbf{A} \cdot I)^T \cdot (\mathbf{A} \cdot I) + \lambda^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot I)^T \cdot \mathbf{U}_{\rho}, \quad (\text{D.5})$$

luego se aplica la inversa a cada valor del vector $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ encontrado para convertir los valores a conductividades eléctricas.

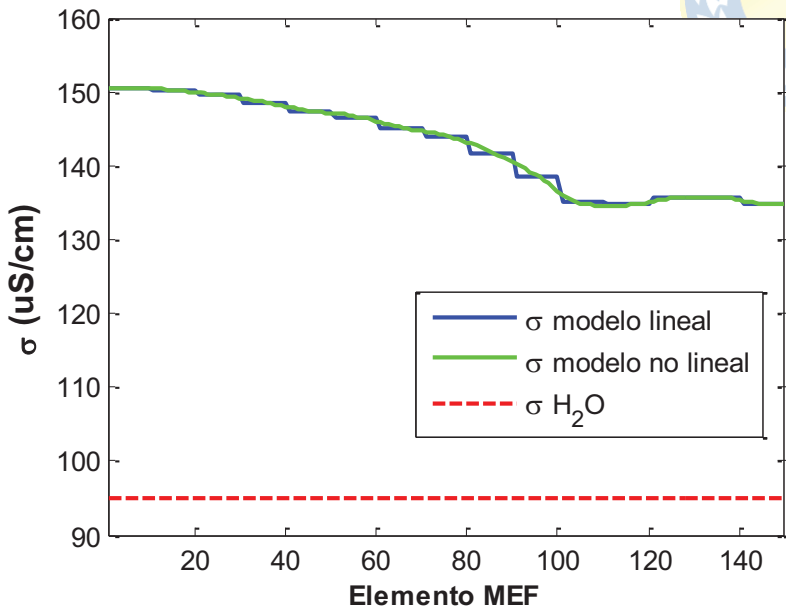
Finalmente se obtuvieron los resultados a las reconstrucciones para este modelo resistivo de una iteración y se comparan al mismo tiempo con las reconstrucciones obtenidas con el modelo no lineal desarrollado anteriormente en este trabajo.



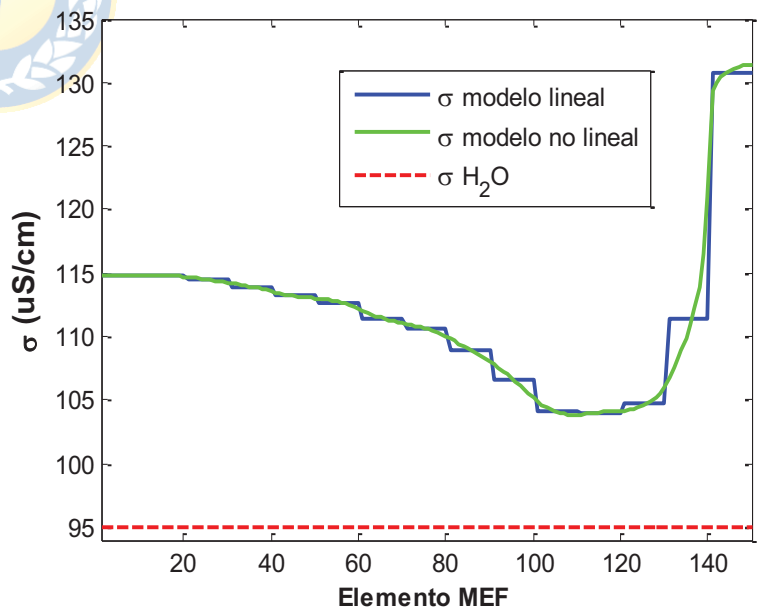
a)



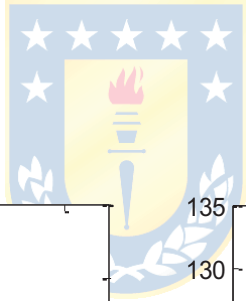
b)

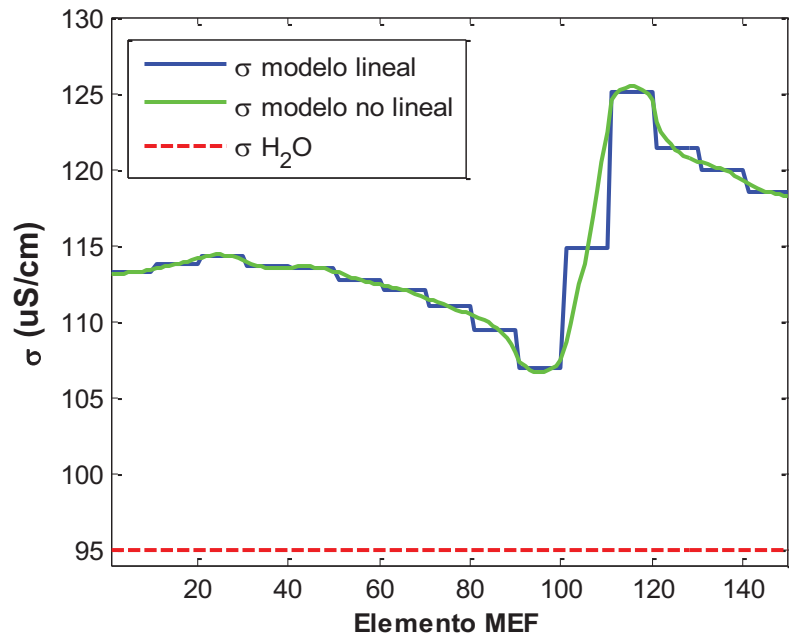


c)

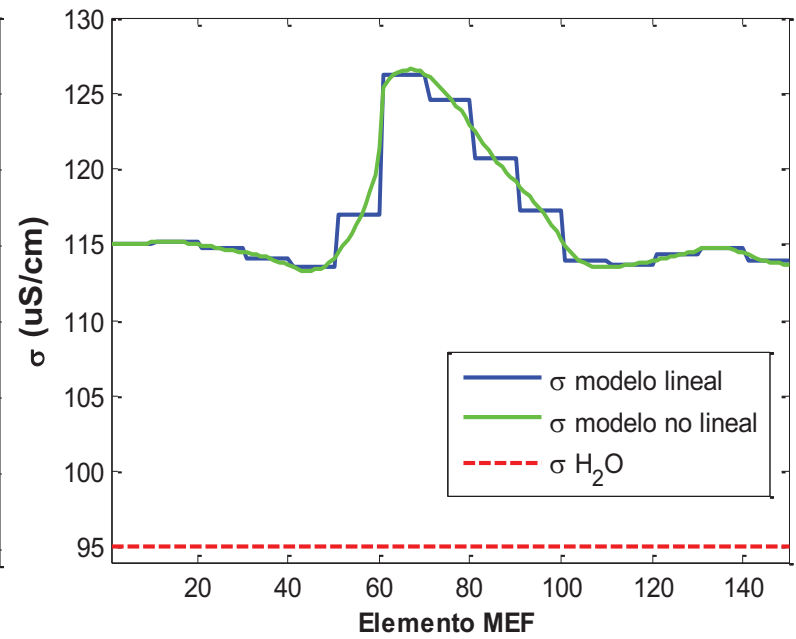


d)

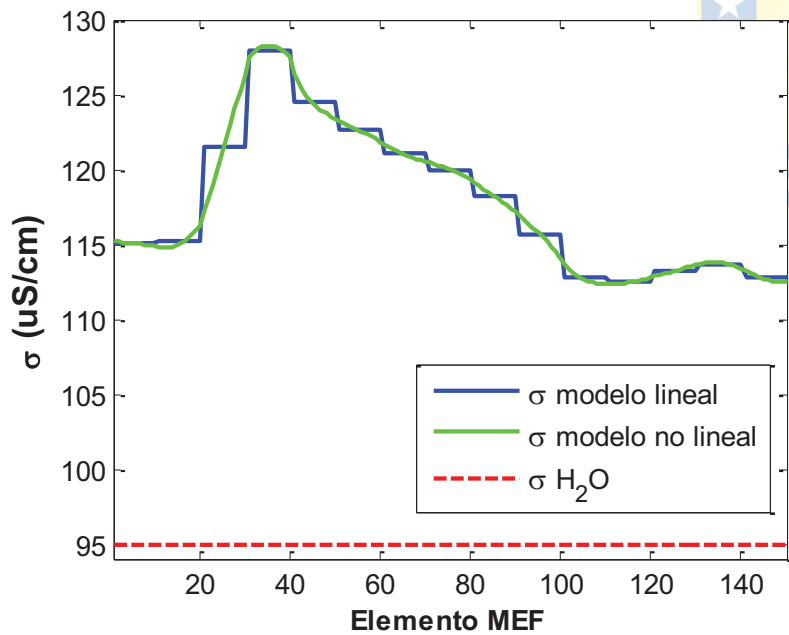




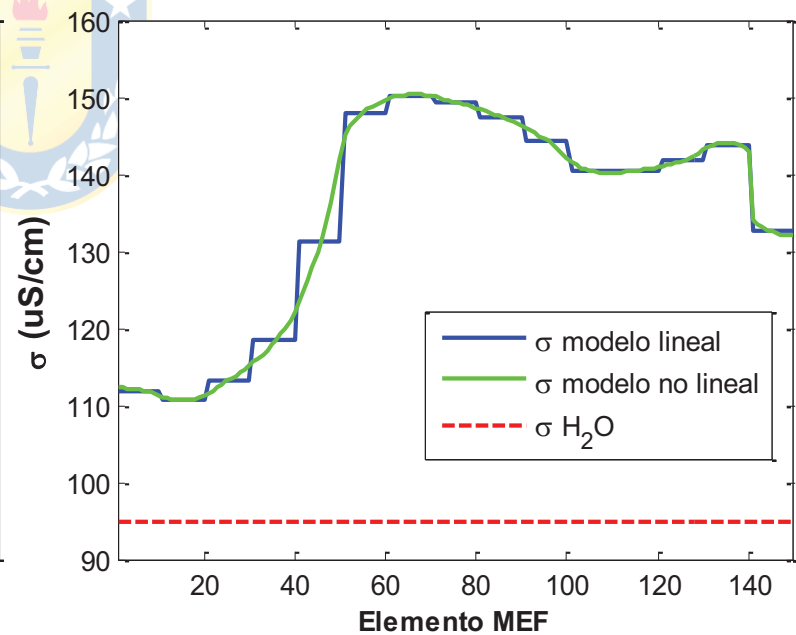
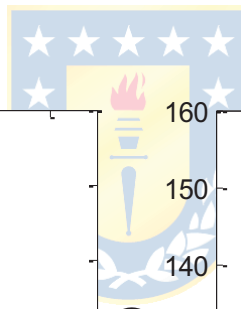
e)



f)



g)



h)

Fig. D.3 Comparación de reconstrucciones entre modelos.

a) reconstrucción para aire húmedo, b) reconstrucción para agua potable, c) reconstrucción para mezcla homogénea, d) reconstrucción para primer nivel de interfaz, e) reconstrucción para segundo nivel de interfaz, f) reconstrucción para tercer nivel de interfaz, g) reconstrucción para cuarto nivel de interfaz, h) reconstrucción para doble interfaz.

Dados los resultados obtenidos es posible observar que las reconstrucciones del modelo resistivo lineal tienen la misma tendencia que las reconstrucciones del modelo no lineal, pero presentan un estilo tipo escalón y no una tendencia a reconstruir curvas suaves del modelo no lineal. Si bien el modelo en dos dimensiones desarrollado en este trabajo permite conocer la dinámica real de la situación, también permite conocer los valores de coeficientes de ajuste los cuales se adaptan de buena manera a este modelo resistivo, comprobándose con la superposición entre los perfiles reconstruidos por ambos modelos.

Sin embargo, la naturaleza del problema nos permite establecer que los cambios de conductividad eléctrica dentro de la columna de acrílico no pueden presentar un cambio escalón demasiado pronunciado, por lo que se considera que el modelo no lineal presenta mejores resultados de reconstrucción. Sin dejar de lado que el modelo lineal presentado en este apartado presenta una opción viable al momento de la reconstrucción proporcionando una mejora sustancial en términos de procesamiento y desarrollo matemático.

