

Universidad de Concepción  
Facultad de Ingeniería  
Depto. de Ingeniería Eléctrica

Profesor Patrocinante  
Daniel Sbárbaro Hofer

# **Control Predictivo con Restricciones para una Planta de Molienda SAG**

César Arnaldo Garrido Quintana

Informe de memoria de título  
Para optar al título de

**Ingeniero Civil Electrónico**

Concepción, Marzo del 2004

## AGRADECIMIENTOS

Luego de haber finalizado esta importante etapa de mi vida, quisiera agradecer a las personas que me han acompañado en este andar por un camino que a veces se torna pedregoso, pero al igual que muchas otras cosas posee un final. Quizás una de las cosas más difíciles de este trabajo es el no dejar de mencionar a alguien en estos agradecimientos ya que en siete años de estudio, dedicación y esfuerzo son muchas las personas a las que les debo más de algo.

En primer lugar me gustaría agradecer el incondicional apoyo, amor y paciencia que he recibido por parte de mi familia, los cuales en las buenas y en las malas me han apoyando en “pro” de lograr el objetivo de terminar la carrera. Angélica, Héctor, Carla y Jenna con estas sencillas palabras quiero decirles muchas gracias. Sin su ayuda este camino hubiese sido más pedregoso e imposible de recorrer.

No quisiera dejar de mencionar a aquellos compañeros que estuvieron conmigo desde un principio en el Liceo Enrique Molina Garmendia (Leonardo, Manuel y Fabián) y a los que se unieron en el camino (Sergio, Cristóbal, Pablo y Christian). Gracias por aquellos momentos que no olvidaré y por hacer amenas esas interminables jornadas de estudio.

Quisiera agradecer al profesor Daniel Sbarbaro Hofer por su apoyo y orientación en el desarrollo de la memoria que se presenta, al profesor José Espinoza por sus siempre útiles consejos y por su ejemplo de docencia, al profesor Juan Pablo Segovia por sus siempre precisos comentarios que me han permitido simplificar las cosas cuando no son necesarias las complicaciones.

Sin duda alguna, me gustaría agradecer al profesor del Departamento de Ingeniería Metalúrgica Christian Hecker Cartes y al Ingeniero Civil Metalúrgico Manuel Vera Quintana, quienes han depositado confianza plena en mis capacidades y han permitido un desarrollo tanto en lo personal como en lo profesional en este tiempo que hemos trabajado juntos.

Estoy muy agradecido de la gente que me ha ayudado en el Concentrador Colón de la División El Teniente de CODELCO. Gracias al aporte de metalurgistas de planta, jefes de instrumentación y jefes de turno, el trabajo presentado posee un valor adicional.

Finalmente es imposible dejar de agradecer al cuerpo docente del Departamento de Ingeniería de la Universidad de Concepción por la formación técnica que me han entregado la cual sirve de base para construir lo que será mi futuro profesional.

César Garrido Quintana





To Jenna...

# INDICE

INDICE	5
RESUMEN	7
Capítulo 1: Introducción	8
1.1 Reseña Histórica	8
1.2 Revisión Bibliográfica	9
1.3 Objetivos del Trabajo	11
1.4 Metodología de Trabajo	12
1.5 Alcances	12
1.6 Contenidos	12
Capítulo 2: Descripción del proceso de Molienda SAG	15
2.1 Descripción General	15
2.2 Molino SAG	16
2.3 Hidrociclón	18
2.4 Chancador de cono	20
Capítulo 3: Modelación del proceso de Molienda SAG	22
3.1 Molino SAG	22
3.1.1 Presentación del Modelo Mecanístico	22
3.1.2 Modelo fundamental del Molino SAG	23
3.1.2.1 Cámara de Molienda	24
3.1.2.2 Interpretación física del parámetro $K_i$	27
3.1.2.3 Transporte de masa	29
3.1.2.4 Clasificación interna	30
3.1.2.5 Potencia eléctrica demandada	31
3.1.3 Modelo en ecuaciones de estado	32
3.1.4 Ajuste del modelo a datos experimentales	33
3.2 Batería de hidrociclones	36
3.2.1 Curva de eficiencia corregida	36
3.2.2 Ecuación de $d_{50}$ corregido	36
3.2.3 Ecuación del parámetro “m”	37
3.2.4 Ecuación de distribución de caudales volumétricos	38
3.2.5 Ecuación Presión-Capacidad	38
Capítulo 4: Diseño de una Estrategia de Control Predictivo con Restricciones Basado en Modelos	39
4.1 Modelo de Identificación	39
4.2 Modelo Predictivo	40
4.3 Algoritmo de Identificación	43
4.4 Manejo de Restricciones	44
4.4.1 Restricciones de banda	45
4.4.2 Restricciones en la señal de control	45
4.4.3 Restricciones en razón de cambio de la señal de control	46
4.5 Formulación del problema de Programación Lineal	46
Capítulo 5: Simulación de fenómenos característicos de un Molino SAG	49
5.1 Cambios en la granulometría de alimentación	49
5.2 Cambios en la dureza del mineral	54

5.3 Relación Potencia-Nivel de llenado	57
Capítulo 6: Diseño y Análisis Cualitativo de la Estrategia de Control Propuesta	61
6.1 Diseño de la estrategia de control	62
6.1.1 Bloque Supervisor	65
6.1.2 Bloque LPMPC	67
6.1.2.1 Modelo predictivo Flujo de pebbles	67
6.1.2.2 Modelo predictivo Nivel de llenado	68
6.1.2.3 Modelo predictivo Nivel Pozo	69
6.1.2.4 Modelo Densidad pulpa ciclones	69
6.1.2.4 Modelo Densidad pulpa ciclones	70
6.1.3 Resumen de parámetros utilizados en modelos y algoritmo LPMPC	71
6.2 Resultados simulaciones del bloque controlador	72
6.3 Resultados simulaciones del bloque controlador y supervisor	74
Capítulo 7: Conclusiones	78
7.1 Conclusiones Generales	78
7.2 Conclusiones respecto de la estrategia de control	79
7.2 Conclusiones respecto de la modelación	78
Capítulo 8: Anexos	81
8.1 Anexo A: “Glosario de términos utilizados”	81
8.2 Anexo B: “Simulador de molienda y Chancado”	83
BIBLIOGRAFIA	86



## RESUMEN

En este trabajo se desarrolla y presenta la modelación, simulación y control de una planta de molienda semiautógena SAG. Se han utilizado datos de la planta concentradora Colón de la División el Teniente de CODELCO para la conciliación de los modelos estáticos programados.

La programación de los modelos y la simulación de los mismos, se ha desarrollado en el ambiente SIMULINK de MATLAB. Los modelos estáticos desarrollados para los diferentes equipos pertenecientes a la planta SAG han sido iterados de manera de obtener una simulación dinámica y realizar el desarrollo de la estrategia de control propuesta en el trabajo.

En cierta medida se ha simplificado algunas cosas en el desarrollo de la memoria, como la consideración de algunas variables de proceso para el control del proceso. Sin embargo las variables consideradas en el control son aquellas que están disponibles en planta, lo que se respalda en la recopilación de información realizada en la Planta SAG1 de la Concentradora Colón de la División El Teniente de CODELCO.

El algoritmo de control desarrollado, es de tipo Predictivo con Restricciones Basado en Programación Lineal (LPMPC). Esta solución permite manejar al sistema en una zona estable y óptima de manera global sin violar restricciones de proceso siguiendo el objetivo principal que es maximizar el beneficio económico, o dicho de otra forma, maximizar el mineral procesado.

Los resultados obtenidos permiten concluir que es posible trabajar en la zona estable del Molino maximizando el mineral procesado y sin violar restricciones, además considerando la arquitectura de la estrategia de control, el controlador predictivo podría ser implementado dentro de un algoritmo de control que esté en funcionamiento como un Control Experto que le entregue el set point de la variable a controlar (Nivel de Llenado).

# Capítulo 1: Introducción

## 1.1 Introducción General

La conminución es el fenómeno mediante el cual se produce la reducción de tamaño de la *mena* para permitir la separación del mineral valioso de la *ganga* [18]. En la actualidad diferentes métodos de conminución son utilizados, los más conocidos son la molienda convencional, molienda semiautógena SAG y la molienda autógena AG. En términos generales, es posible considerar la molienda AG como el proceso que produce la fractura del mineral mediante la caída de colpas desde una altura cercana al diámetro del molino (dependiendo de las condiciones de operación de este). Por otro lado, la Molienda SAG es una variante de la Molienda AG, a la cual se le han agregado otros medios de molienda como barras o bolas de acero para aumentar su eficiencia y capacidad de producción [5].

Los inicios de la molienda AG se remontan al año 1908 en Sudáfrica donde se instaló un molino cónico que utilizaba colpas de 8” para producir la fractura del mineral. La molienda SAG se inicia en la década de 1930 en California, donde se instaló una máquina que mediante unas paletas levantaba el mineral y lo dejaba caer sobre unas barras de acero fijas [23]. Con el pasar del tiempo se han desarrollado distintas morfologías y configuraciones para la molienda SAG, hasta los llamados molinos SAG de tipo “Cascada” con bolas de acero como medio “externo” de molienda y relación Diámetro/Largo mayor a 1.5

En los últimos años se ha producido un incremento exponencial de la molienda SAG, principalmente de gran tamaño (hasta 40 pies de diámetro) [23]. Las moliendas AG y SAG han sido incorporadas a los sistemas de conminución para mejorar el rendimiento, reemplazando muchas veces etapas de chancado secundario, terciario y molienda de barras. Sin embargo y en contraste con lo expuesto anteriormente, la variabilidad de la granulometría de alimentación en un molino SAG y la sensibilidad de sus parámetros frente a distintas condiciones de operación (como cambios en la dureza del mineral), provocan variaciones en el nivel de llenado del molino y en la Potencia Neta demandada por el motor [5].



Muchos desarrollos en el control de procesos de conminución han sido desarrollados hasta ahora. Una gran parte de los desarrollos han sido en la Molienda Convencional ya que se tiene mayor conocimiento del proceso. La mayoría de las técnicas de control desarrolladas para molinos SAG, se basan en el *Control Experto*, el cual se desarrolla en bases a reglas empíricas determinadas para cada planta y un algoritmo que maneja estas reglas para mantener las variables del proceso en los valores permitidos y “óptimos”. Sin embargo el desempeño de estos sistemas de control (a pesar de su robustez), presenta algunas desventajas como la operación no-estacionaria en sus variables de control y la lentitud de la respuesta frente a violaciones de las restricciones de proceso [15].

## 1.2 Revisión Bibliográfica

El desarrollo de este trabajo, se ha llevado a cabo mediante el estudio de una extensa bibliografía concerniente a la modelación, control y consideraciones metalúrgicas del proceso de Molienda SAG. En esta parte del capítulo introductorio se realiza una breve reseña de la bibliografía más utilizada durante la realización del trabajo.

[1] *Nuevos Modelos de Molienda Semiautogena para simulación y control*

Tesis de Magister de la Universidad de Chile presentada por Rodrigo Améstica en el año 1993, la cual ha sido la base para el desarrollo del modelo mecanístico y las correlaciones empleadas en el resto del modelo del Molino SAG. A grandes rasgos esta tesis se compone de dos partes:

- (i) *Desarrollo del modelo y simulador*
- (ii) *Planteamiento de un Modelo identificable en línea para el proceso de molienda semiautógena.*

[9] *Model Predictive Control*

Libro de Control Predictivo escrito por Camacho y Bordón que ha servido de referencia para el desarrollo completo del algoritmo de control. Este libro explica la teoría del Control Predictivo con ejemplos de laboratorio y planta sin profundizar demasiado en lo desarrollado anteriormente en el tema. Se propone una bibliografía específica en cada

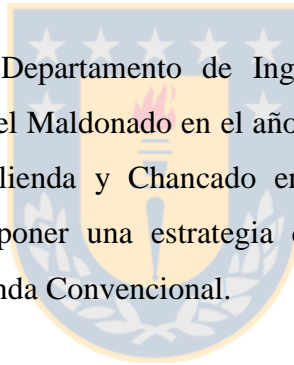
caso además de proponer soluciones propias para ciertos problemas como el Control Predictivo Basado en Modelos y Programación Lineal utilizado en esta memoria.

[23] *Estudio del Transporte de masa en molinos SAG*

Tesis de Doctorado de la Universidad de Concepción presentada en el año 1999 por Luis Magne, en este trabajo se derivan todos los supuestos del transporte de masa en el interior del molino y en la etapa de clasificación. Se proporcionan las tablas con los resultados obtenidos en los distintos ensayos que se utilizan en [1] y por lo tanto también ha sido muy importante en la comprensión de los fenómenos de transporte y los diversos supuestos metalúrgicos realizados para el desarrollo del modelo del Molino SAG.

[24] *Modelación Dinámica y Control Predictivo con Restricciones de un Circuito de Molienda de Minerales*

Memoria de título el Departamento de Ingeniería Eléctrica Universidad de Concepción realizada por Miguel Maldonado en el año 2002. En este trabajo se realiza el desarrollo del toolbox de Molienda y Chancado en lo concerniente a la Molienda Convencional, además de proponer una estrategia de Control Predictivo basado en programación lineal para Molienda Convencional.



[27] *Modelación Dinámica y Control Predictivo con restricciones para una Planta de Chancado*

Memoria de título del Departamento de Ingeniería Eléctrica Universidad de Concepción realizada por Germán Palma en el año 2002. En este trabajo se desarrolla lo concerniente al chancado del toolbox de Molienda y Chancado además de proponer una estrategia de Control Predictivo basado en programación lineal

[29] *Dimensionamiento y Optimización de Plantas Concentradoras Mediante Técnicas de Modelación Matemática*

Libro escrito por Gutiérrez y Sepúlveda que explica las teorías de conminución, clasificación y flotación. Se presentan, analizan y utilizan modelos entre los cuales se

encuentra el modelo del Hidrociclón de L.R. Plitt utilizado en el toolbox de Molienda y Chancado.

[33] *Self-tuning Systems Control and Signal Processing*, John Wiley & Sons, 1991.

Este libro escrito por Wellstead y Zarrop explica la teoría del control autosintonizante y el procesamiento de señales orientado a la identificación para la modelación de procesos. Desde esta bibliografía se ha utilizado la identificación en línea del gradiente para mantener el sistema en su nivel óptimo sin violar las restricciones.

### **1.3 Objetivos del Trabajo**

De acuerdo a lo señalado anteriormente es posible concluir que a pesar de la gran cantidad de Molinos SAG instalados hoy en día, la mayoría de las estrategias de control no son de tipo optimizante ya que se basan en la evaluación de derivadas y ajustes por medio de reglas (Control Experto).

Con lo anterior en consideración, se presenta la siguiente memoria de título al departamento de Ingeniería Eléctrica para optar al grado de Ingeniero Civil Electrónico, cuyos principales objetivos son:

- El desarrollo de una estrategia de Control Predictivo con Restricciones basada en LPMPC (Linear Programming Model Predictive Control), que permite la operación óptima de las variables de proceso de la planta de manera global.
- La contrastación de los modelos programados en el Toolbox de Molienda con datos de planta provenientes de la planta SAG1 del Concentrador Colón de la División El Teniente de CODELCO.

## **1.4 Metodología de Trabajo**

La programación tanto de los modelos como del controlador se realiza en el ambiente SIMULINK<sup>®</sup> de MATLAB<sup>®</sup> mediante el uso del Toolbox de Molienda desarrollado en el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Concepción en [24], [27] y en el presente trabajo.

El desarrollo y síntesis del sistema de control se ha desarrollado teniendo en cuenta la instrumentación utilizada actualmente en la planta Concentrador Colón, esto implica que no todas las variables del proceso están disponibles para ser utilizadas en el algoritmo de control.

## **1.5 Alcances**

Los modelos utilizados en la simulación corresponden, en su mayoría, a modelos estáticos los cuales se iteran en cada instante de muestreo, esto no pierde generalidad de acuerdo a lo propuesto en [24]. La conciliación de los datos de planta con los modelos ha sido de tipo estacionaria y no de tipo dinámica, esto implica que la transición entre un valor estacionario y otro no ha sido contrastada.

Algunas variables como la potencia de los chancadores y la corriente consumida por los mismos, a pesar de estar disponibles en el modelo, no han sido consideradas en el desarrollo de la estrategia de control por simplicidad en la cantidad de variables a manejar por el controlador.

Las correas transportadoras utilizadas en las simulaciones son de velocidad fija para simplificar la modelación. Esta consideración no provoca una gran variación en el desempeño del sistema simulado, debido a que la variación de velocidad existe solo en la correa de alimentación al molino y no en las que realimentan mineral desde el chancador de pebbles.

## **1.6 Contenidos**

En esta parte del capítulo introducción, se presenta un breve resumen de cada uno de los capítulos de la memoria destacando los temas principales tratados en cada uno.

*Capítulo 2:* Se describe de manera general la operación de una planta de Molienda SAG, se comentan las principales variables de operación además de realizar una descripción operacional de los principales equipos que conforman el circuito de Molienda SAG - El Molino SAG, el Hidrociclón y el Chancador.

*Capítulo 3:* En este capítulo se describe el modelo del Molino SAG (Améstica y Magne) y de la batería de Hidrociclones (Plitt) utilizados para la simulación del circuito de molienda SAG mediante el toolbox de Molienda y Chancado. Los modelos del chancador y el harnero vibratorio no han sido detallados en este trabajo por haber sido desarrollados en [27].

*Capítulo 4:* Se desarrolla la estrategia de Control Predictivo con restricciones basado en modelos. Se explican los conceptos fundamentales como el modelo de identificación, el modelo de predicción, el algoritmo de identificación, el manejo de restricciones. Finalmente se formula el Control Predictivo como un problema de programación lineal de manera general.

*Capítulo 5:* En este capítulo se realizan simulaciones del Molino SAG en lazo abierto, esto con el fin de constatar lo complejo que es el sistema debido a la gran influencia que tienen las perturbaciones en las variables controladas y supervisadas. Se simula un cambio en la granulometría de entrada, un cambio en la dureza del mineral y finalmente se presenta la relación no lineal existente entre la Potencia y el Nivel de llenado del Molino.

*Capítulo 6:* Se presenta el diseño y análisis cualitativo de la estrategia de control propuesta en este trabajo. Se realiza el diseño de la estrategia de control en base a lo definido en el capítulo 4, la cual consiste en un bloque supervisor y un bloque predictivo controlador. Finalmente se analiza el desempeño del bloque controlador frente a situaciones extremas como set point fuera del rango permitido para las variables

controladas y se analiza el desempeño del conjunto bloque supervisor y bloque controlador.

*Capítulo 7:* En este capítulo se presentan las conclusiones finales, producto del análisis y desarrollo del trabajo realizado. Se concluye acerca de temas generales y específicos como la modelación y la estrategia de control predictivo con restricciones propuesta.

*Capítulo 8:* El capítulo final de la memoria contiene dos anexos. El primero se refiere a la terminología utilizada en la memoria proveniente de la planta y de la metalurgia, esto es importante desde el punto de vista de aquel lector que no está familiarizado con la jerga utilizada en planta y publicaciones. El segundo anexo presenta el toolbox de Molienda y Chancado de manera superficial, se presenta la interfaz de la librería programada en MATLAB<sup>®</sup> además del circuito utilizado en el desarrollo de la estrategia de control



## Capítulo 2: Descripción del proceso de Molienda SAG

### 2.1 Descripción General

En este trabajo se ha considerado el esquema de molienda SAG utilizado en la línea “SAG1” del Concentrador Colón de la División El Teniente de CODELCO. Este esquema contempla una etapa de Molienda SAG primaria y una Molienda Secundaria Convencional que se encuentra en circuito cerrado directo, además este esquema posee una etapa de clasificación intermedia luego del harnero vibratorio con una variante opcional de recirculación de pulpa al molino SAG, esta se representa con la línea segmentada en la figura 1.

El mineral proveniente de chancado es llevado mediante una correa transportadora al stock pile desde el cual se alimenta el molino SAG mediante alimentadores y una correa transportadora, este mineral es conocido como *Alimentación Fresca del Molino*. En la entrada del molino SAG se agrega agua para maximizar la velocidad de fractura del mineral, manteniendo una densidad de la pulpa (% de sólidos) de alimentación en un rango determinado dependiendo de las características del mineral y del conocimiento del operador.

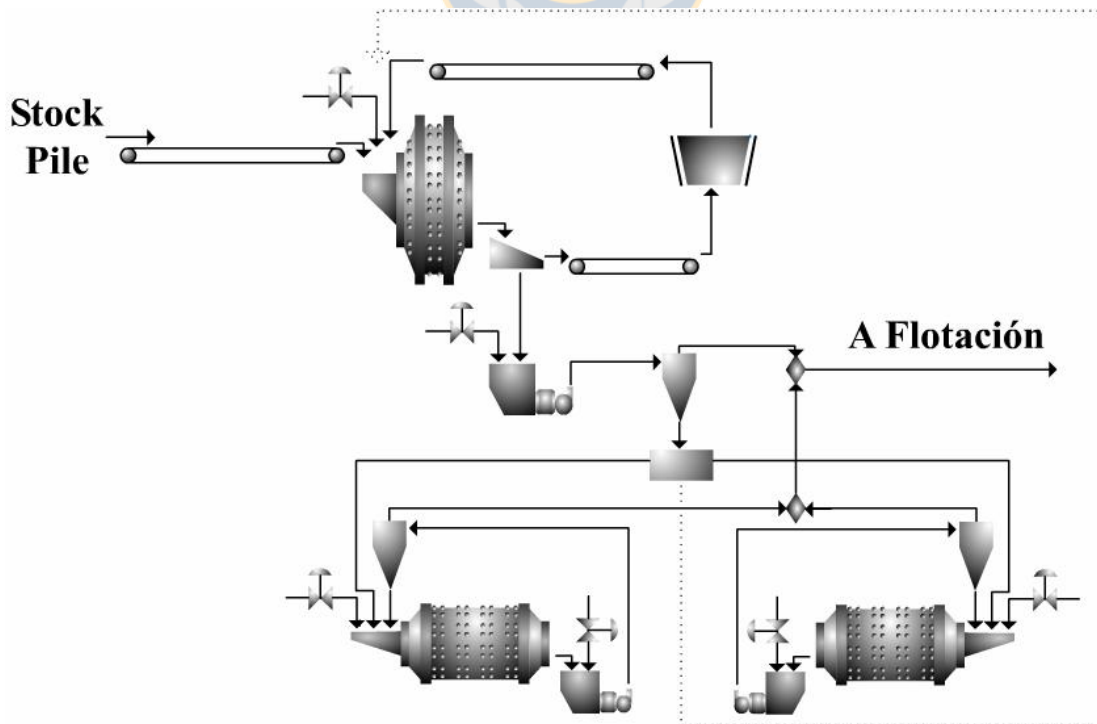


Figura 2.1: Diagrama de Proceso Planta Molienda SAG

La pulpa producto del molino SAG es clasificada en un harnero vibratorio el cual separa las partículas de tamaño fino de los *Pebbles*. En la práctica, es necesario disminuir el tamaño de estas colpas en una segunda etapa de chancado para su posterior recirculación al molino SAG y evitar el sobrellenado.

El producto de bajo tamaño del harnero es enviado a un pozo donde nuevamente se agrega agua a la pulpa. Mediante la acción de una bomba se conduce la pulpa hacia una batería de hidrociclones la cual clasifica el mineral para ser enviado a la etapa de flotación (rebalse) o a un cajón repartidor (descarga). Desde el Cajón Repartidor se distribuye la pulpa hacia los Molinos de Bolas los cuales operan en “Circuito Cerrado Directo”, esto significa que la pulpa producto del molino de bolas es clasificada por una batería de hidrociclones para ser enviada a flotación (rebalse) o recirculada a la entrada del molino (descarga).

## 2.2 Molino SAG

El Molino Semiautógeno SAG es un cilindro rotado en su eje longitudinal cuyo diámetro es mayor al largo, generalmente la razón diámetro/largo de los molinos tipo cascada es mayor a 1.5. En su interior, el Molino SAG posee una parrilla en la zona de descarga, la cual retiene las partículas de gran tamaño y permite la evacuación de las partículas finas. Las aberturas de las parrillas varían de 1 a 3 plg y sus formas son diversas, siendo las mas comunes las de forma alargada y transversales al eje radial del molino [23].

La tabla 1.1 muestra las principales características del Molino SAG de la Planta SAG1 del Concentrador Colón de la División El Teniente de CODELCO. Una foto de este molino SAG, se muestra en la figura 2.2.

Dimensiones, D x L pies	36x17
Potencia, HP	15.000
Capacidad de Procesamiento diseño, t/h	1.200
Nivel de llenado de bolas, %	8-12
Tipo de accionamiento	Gear-less
Consumo específico de energía, kWh/t	11,5

Tabla 1.1: Características principales molino SAG1 del Concentrador Colón





*Figura 2.2: Molino SAG perteneciente a la planta SAG1 del Concentrador Colón*

A diferencia de la molienda convencional, en donde el material se tritura por la acción de agentes adicionales agregados a la carga (normalmente barras y bolas), el mineral se recibe directamente del chancador primario con tamaños aproximados de 8 pulgadas, el que se mezcla en una solución de agua, cal y bolas de acero de 5 pulgadas de diámetro que en definitiva ocupan en promedio el 12 % de la capacidad total del molino. Todas estas características sumadas a las propiedades dinámicas y mecánicas del sistema, logran un efecto de chancado y molienda más efectivo, con menor consumo de energía y con un resultado final para el proceso, de minerales con granulometría no superior a los 180 micrones [28].

Los diversos eventos de reducción de tamaño ocurridos al interior del molino, son los siguientes:

- Fractura de colpas de mineral al caer sobre el lecho (autofractura)
- Fractura colpa de mineral - colpa de mineral, producida por la colisión entre dos colpas de mineral (autofractura).
- Fractura bola – colpa de mineral, producida por el choque entre una bola y una colpa de mineral.
- Atricción de colpas y partículas de mineral, es una acción combinada de abrasión y astillamiento.

## 2.3 Hidrociclón

El hidrociclón es un estanque cilíndrico de fondo cónico con una alimentación tangencial en su parte superior, este dispositivo se utiliza para la clasificación de partículas generalmente operando en circuito cerrado tal que:

- La alimentación al circuito de molienda consiste en parte, o totalmente, del producto grueso (descarga hidrociclón) proveniente de un clasificador.
- El producto final del circuito de molienda, generalmente corresponde al producto fino (rebalse hidrociclón) del clasificador.

La figura 2.3 muestra un recorrido esquemático de las partículas finas y gruesas dentro de un hidrociclón. Se puede considerar que para un material de densidad homogénea la separación de partículas finas y gruesas se realiza por efecto de la fuerza centrífuga y de la gravedad.

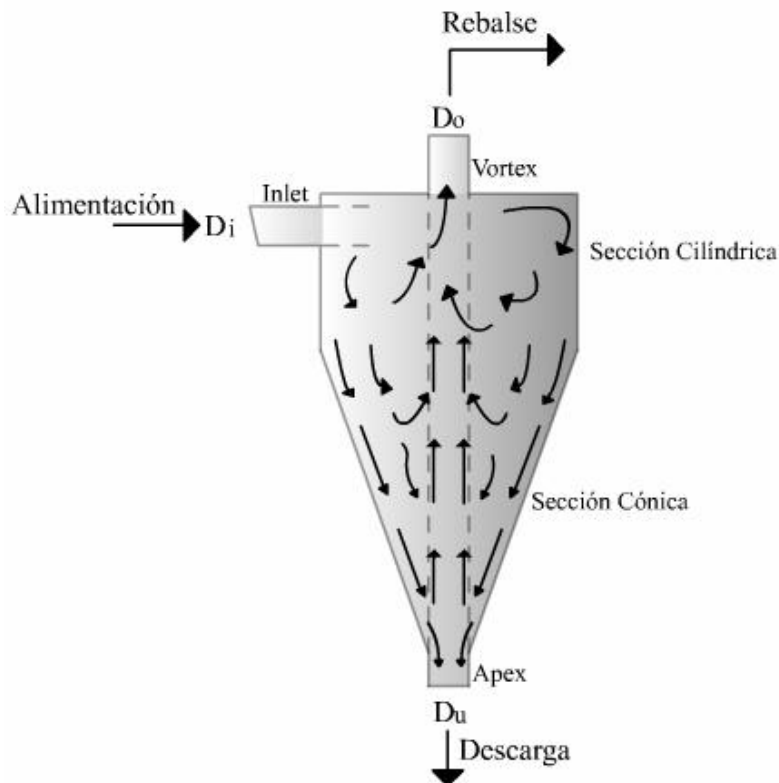


Figura 2.3: Recorrido de partículas finas y gruesas en un hidrociclón

Dentro del hidrociclón, la masa de agua y de partículas seguirá una trayectoria helicoidal, creando un vórtice de baja presión el cual permite que las partículas finas salgan por el *Vortex Finder*. Las partículas más gruesas se ubicarán en las paredes del hidrociclón, abandonándolo por el *Apex*.

Desde el punto de vista de la clasificación, se puede suponer que el producto grueso en la descarga está formado por:

- Partículas gruesas como resultado del proceso de clasificación explicado anteriormente.
- Partículas finas que son arrastradas por el agua hacia la descarga del hidrociclón. A este fenómeno se le conoce como “Cortocircuito” del proceso de clasificación.

La figura 2.4 muestra las curvas de eficiencia Real y Corregida de clasificación típicas de un hidrociclón, las cuales representan la corrección del fenómeno de cortocircuito en el hidrociclón [29].

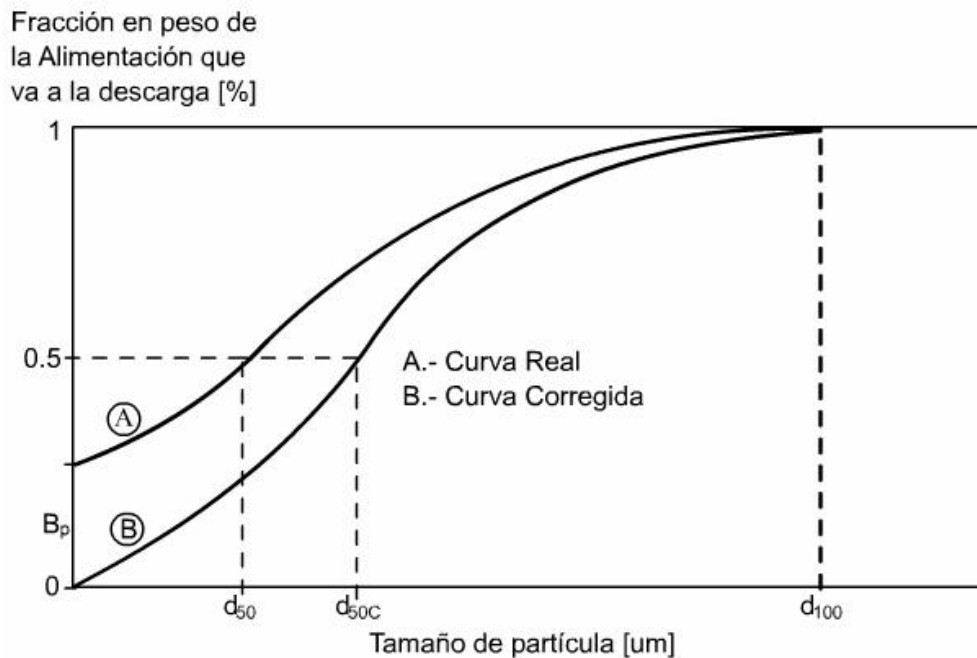


Figura 2.4: Curvas de eficiencia de clasificación Real y Corregida

## 2.4 Chancador de cono

En un chancado de cono, el material es triturado entre dos superficies rígidas en donde el movimiento de la superficie móvil es independiente de la carga contenida en el chancador. Estas características son comunes para chancadores de cono y giratorios, los cuales producen el chancado del material por un movimiento giratorio excéntrico del eje pivote principal figura 2.5. De esta manera el fenómeno que se busca interpretar en un modelo de chancador es la compresión del material, donde las partículas se trituran por la compresión entre el manto y la concavidad [27].

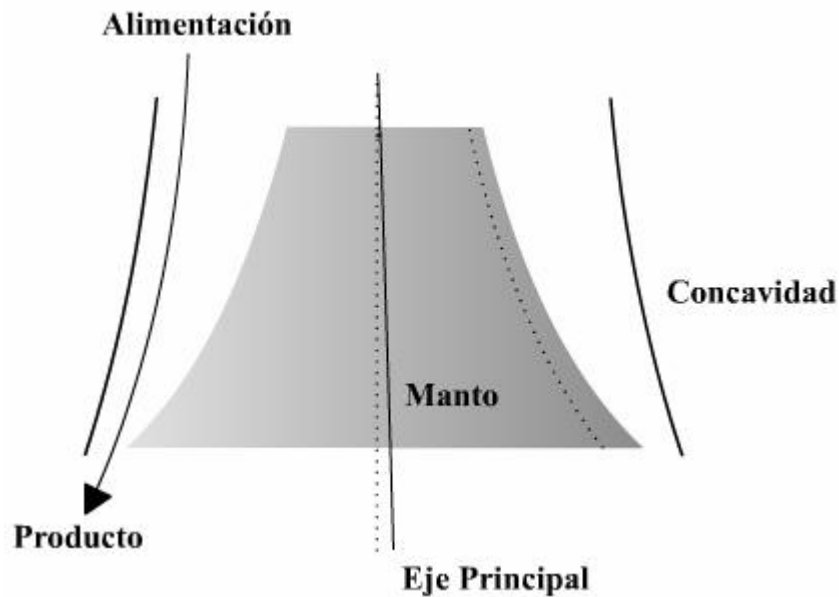


Figura 2.5: Cámara de un chancador de cono

Los fenómenos de conminución producidos en un chancador son el quiebre de *partícula simple* y el *quiebre de interparticular*. El primero está asociado a la trituración provocada entre el manto y la concavidad, el segundo está relacionado con la trituración producida por el choque entre dos o más partículas [27].

En la operación de un chancador se debe considerar que el manto y la concavidad deben ser reemplazados constantemente debido a que estas son las partes involucradas directamente en la trituración y por lo tanto sufren un mayor desgaste. Una correcta operación debe privilegiar el quiebre interparticular, esto para evitar un mayor desgaste y para obtener un mejor perfil granulométrico [12].

El producto del chancador es el resultado de la interacción entre la roca y el chancador, a su vez de la interacción depende de la geometría de la cámara, características de la roca y dinámica del equipo [27].

Si se considera la sección de cruce del chancador mostrado en la figura 2.5, el manto se mueve en forma cíclica con respecto a la concavidad. Durante la constricción, el material está sujeto a un campo de tensión compresivo lo que provocará la fractura. Durante el relajo, el material fluye a través de la cámara debido a la fuerza de gravedad y al movimiento del manto [27].

En un punto fijo considerado dentro de la cámara, la distancia entre el manto y la concavidad varía desde la posición abierto y cerrado de manera cíclica. El movimiento puede ser descrito como una función de un ángulo excéntrico que describe la posición del eje principal. Esta oscilación sumada a la alta velocidad que caracteriza a estos equipos, permite que el material que pasa a través de la cámara de chancado este sujeto a varias compresiones antes de abandonarla [27].



## **Capítulo 3: Modelación del proceso de Molienda SAG**

En este capítulo se describen los modelos del Molino SAG y de la batería de hidrociclones utilizados para la simulación del circuito de molienda SAG de la División El Teniente de CODELCO. Los modelos de chancador y harnero vibratorio han sido detallados en [27].

### **3.1 Molino SAG**

El modelo del molino SAG utilizado en este trabajo es el desarrollado por Gonzalez y Améstica en [1].

#### **3.1.1 Presentación del Modelo Mecánico**

Los modelos más completos y representativos de molienda son de tipo fenomenológico, presentando una estructura sumamente compleja con una cantidad de parámetros que los hace prácticamente inalcanzables en su determinación a partir de la data experimental.

Los modelos que funcionan a partir de datos experimentales presentan un esquema simplificado y utilizan una cantidad reducida de parámetros, esto, por una combinación de elementos empíricos y estimaciones debido a la no linealidad de los estados y parámetros. Cabe destacar que la validación del modelo es posible sólo en el entorno de un punto de operación, requiriendo que los parámetros sean actualizados para las nuevas condiciones de operación.

Un modelo mecánico de un sistema se refiere a individualizar la complejidad fenomenológica del proceso mediante mecanismos caracterizables por parámetros específicos. La individualización del proceso de molienda se obtiene a partir de consideraciones de balance másico entre flujos y los bloques de la figura 3.1.

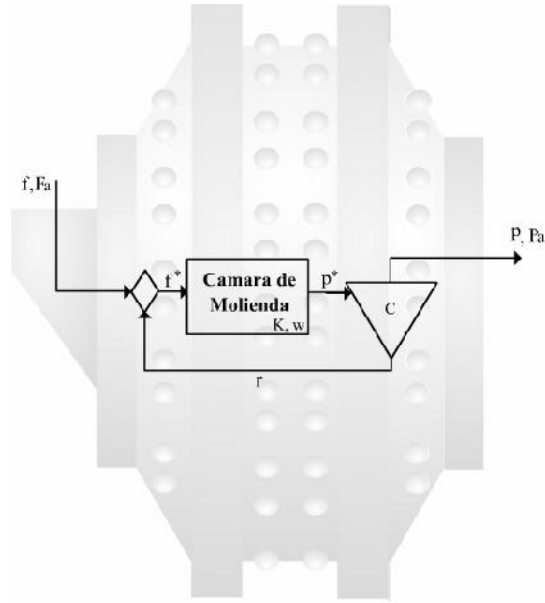


Figura 3.1: Representación mecánica fundamental de un molino SAG

La nomenclatura utilizada se detalla a continuación:

- $f$  : Vector flujo másico de mineral en la alimentación del molino.
- $F_A$  : Flujo másico de Agua en la alimentación del molino.
- $f^*$  : Vector flujo másico de mineral ingresado a la cámara de molienda.
- $K$  : Matriz diagonal de velocidades de molienda por intervalo de tamaño.
- $w$  : Vector de masa retenida en el interior del molino por intervalo de tamaño.
- $p^*$  : Vector flujo másico de mineral ingresado a clasificación.
- $C$  : Matriz diagonal de eficiencias de clasificación en la parrilla interna del molino.
- $r$  : Vector flujo másico recirculado internamente por la parrilla.
- $p$  : Vector flujo másico por intervalo de tamaño en la descarga del molino.
- $P_A$  : Flujo másico de agua en la descarga del molino.

### 3.1.2 Modelo fundamental del Molino SAG

Analizando su estructura geométrica se pueden distinguir 2 etapas en un molino SAG, la primera de ellas es la cámara de molienda, dónde se registra la reducción de tamaño de las partículas y el transporte de masa, la segunda etapa es el sistema de descarga y clasificación compuesta por las parrillas y los alzadores de pulpa. En esta

etapa, el material retenido en la cámara de molienda es clasificado en forma interna respondiendo a una función de probabilidad característica y que presenta un comportamiento que difiere para algunos tamaños de las curvas convencionales de clasificación conocidas. Esto, entre otros fenómenos, hace a los molinos SAG diferentes de los de bolas o barras.

El balance másico consiste en que el material ingresado a la cámara de molienda puede permanecer aquí o atravesar la parrilla hacia la descarga del molino, desde dónde los alzadores, ubicados entre las parrillas y la tapa externa de descarga, evacuarán o retornarán la pulpa al interior generando una recirculación.

A continuación se detallan cada uno de los componentes fundamentales que forman parte del modelo Mecanístico.

### 3.1.2.1 Cámara de Molienda

La hipótesis fenomenológica que postulan Gonzalez y Améstica [1] para la molienda de un molino SAG es la siguiente:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Tasa de desaparición} \\ \text{del mineral más GRUESO} \\ \text{que la malla } i+1 \end{array} \right] = K_i \left[ \begin{array}{l} \text{masa retenida sobre} \\ \text{la malla } i+1 \end{array} \right] \quad [3.1]$$

$K_i$  : Tasa efectiva del mineral sobre la malla  $i+1$ .

El parámetro cinético  $K_i$  es el factor de proporcionalidad que relaciona la tasa de desaparición con la masa retenida en la malla  $i+1$ . Este parámetro concentra el efecto total de los mecanismos combinados de conminución que actúan en el interior del molino, estos fenómenos se producen entre colpas, bolas y partículas de manera simultánea.

Los intervalos de tamaño empleados para describir granulométricamente el mineral, se expresan como vectores cuyos elementos son los flujos en unidades físicas del mineral. Los tamaños asociados a cada intervalo entre mallas (de 1 hasta  $N$ ) se calculan de la siguiente manera:



$$X_i = \sqrt{X_i^m * X_{i+1}^m} \quad \forall i < N$$

$$X_N = \frac{X_N^m}{2} \quad [3.2]$$

$X_i^m$  : Abertura en milímetros de la malla  $i$ -ésima utilizada en el tamizado.

$X_i$  : Abertura asignada el  $i$ -ésimo intervalo de tamaño.

Se definen las matrices que permiten el planteamiento del sistema de ecuaciones para el modelo, ya sea en función de las granulometrías retenidas por malla o en función de las retenidas acumuladas sobre malla. La matriz  $R$  es triangular inferior y relaciona la granulometría retenida por malla con la retenida acumulada por malla.

$$R_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & i < j \\ 1 & i \geq j \end{pmatrix} \quad [3.3]$$

En general, para cualquier vector de flujo másico, se tiene la siguiente ecuación:

$$M = R \cdot m \quad [3.4]$$

$M$  : vector granulometría retenida acumulada sobre malla.

$m$  : vector granulometría retenida por intervalo de tamaño en la malla.

Para los parámetros cinéticos de molienda se emplea la matriz  $K$ , matriz diagonal de dimensión  $N$ .

$$K = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_N) \quad [3.5]$$

El elemento  $K_N$  se define como la tasa de desaparición del material total en el sistema por lo tanto, respetando la ley de conservación de masa se tiene que:

$$K_N = 0$$

De esta manera es posible establecer un balance másico por intervalos de tamaño, entre los flujos de entrada y salida de la cámara de molienda que describen la acumulación de masa en el interior del molino o *Hold up* ( $W_m$ ).

$$\frac{dW_m}{dt} = F^* - P^* - K * W_m \quad [3.6]$$

$$W_m = R w$$

$$F^* = R f$$

$$P^* = R p^*$$

La ecuación 3.6 considera los flujos de granulometría acumulada retenida por malla, luego en su forma retenida por intervalos, que es más intuitiva, la ecuación se escribe:

$$\frac{dw}{dt} = f^* - p^* - R^{-1} K R w \quad [3.7]$$

Se definen los parámetros específicos de molienda, que permiten representar mejor las características intrínsecas del sistema por ser menos sensibles a la condición de operación del molino. La energía específica, que representa la energía necesaria para moler una tonelada de mineral, se define como:

$$E = \frac{M_p}{F_M} \left[ \frac{kWh}{ton} \right] \quad [3.8]$$

$F_M = \sum_{i=1}^N f_i$  : Flujo neto de alimentación al molino [ton/h].

$M_p$  : Potencia eléctrica demandada [kW]

Los parámetros específicos que se obtienen al introducir el concepto de energía específica se denominan  $K_i^E$  [ton/kW hora], estos se relacionan con los parámetros  $K_i$  de la siguiente forma:

$$K_i = E * K_i^E \quad [3.9]$$

$K_i^E$  : Tasa específica de Molienda [ton/kWh].

En un molino SAG la granulometría en la descarga aparece menos sensible al flujo másico de material procesado, que se diferencia de la molienda convencional. Por esto se modifica la aplicación de  $E$  asociando la variación con el mineral retenido en el interior del molino, que tiene a su vez efecto directo sobre la potencia eléctrica demandada si se considera una velocidad de rotación fija  $w_c$ .

Leonard G. Austin postula en [5] que el producto entre la masa de mineral retenido en el molino  $W_m$  y las tasas de molienda  $K_i$ , es proporcional a la potencia demandada  $M_P$ :

$$K_i = \frac{M_P}{W_m} K_i^E = \frac{M_P}{F_M} \frac{F_M}{W_m} K_i^E = \frac{F_M}{W_m} * E * K_i^E \quad [3.10]$$

El término que se incorpora a la ecuación le da carácter dinámico y permite considerar el efecto de las variaciones de mineral retenido en el molino debido a las variaciones en el flujo de la alimentación, de esta manera se busca que los parámetros específicos concentrados en  $K_i^E$  sean realmente representativos de las cualidades intrínsecas del sistema, como la dureza, y menos sensibles a las condiciones de operación, como el tonelaje de material procesado.

Luego, el modelo simplificado para la cámara de molienda SAG se puede escribir como:

$$\frac{dw}{dt} = f^* - p^* - \frac{F_M}{W_M} E R^{-1} K^E R w \quad [3.11]$$

### 3.1.2.2 Interpretación física del parámetro $K_i$

El modelo generalizado para la cinética de fractura tratado por Austin y Concha en [2], hace uso de dos parámetros:

- (i) Velocidades de Molienda  $S_i$ .
- (ii) Parámetros de distribución primaria de fractura  $b_{i,j}$ .

Los distintos mecanismos que se combinan en la reducción del mineral dentro del molino se concentran en los parámetros del modelo simplificado, dichos mecanismos afectan al comportamiento de los parámetros generales  $S_i$  y  $b_{ij}$  los cuales permiten escribir el balance másico de cinéticas de primer orden presentado en [5] de la siguiente forma:

$$\frac{dw}{dt} = f^* - p^* - (I - b) S \cdot w \quad [3.12]$$

$$b = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

$b_{ij}$  : Fracción de partícula de mineral de tamaño  $X_j$  que se reporta en el tamaño  $X_i$ , luego de haber sido sometida a un evento aislado de conminución.

$$S = \text{diag}\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$$

$S$  : Tasa a la cual se verifican los eventos de conminución en el  $i$ -ésimo tamaño [1/h].

Las ecuaciones (3.7) y (3.12), son equivalentes si, y solo si:

$$(I - b)S = (R^{-1}K R) \quad [3.13]$$

Igualando los elementos diagonales y luego los elementos triangulares inferiores, se establece la siguiente relación entre los parámetros  $b_{ij}$  y  $S_i$  del modelo general y los parámetros simplificados:

$$b_{ij}S_j = \mathbb{E}(i) = K_{i-1} - K_i \quad \forall i \geq j \quad [3.14]$$

La multiplicación de los parámetros  $b_{ij}$  y  $S_i$ , se obtiene la tasa de producción del material  $X_i$  a partir del tamaño  $X_j$ , fenómeno que es independiente del tamaño  $X_j$ . Luego se tiene una expresión unidimensional en función de  $\mathbb{E}(i)$ , la cual es llamada *Condición de compensación*.

$$\sum_{k=i+1}^N b_{k,j}S_j = S_j \left( \sum_{k=i+1}^N b_{k,j} \right) = B_{ij} \cdot S_j \quad [3.15]$$

$$B_{ij} = \sum_{k=i+1}^N b_{k,j}$$

$B_{ij}$  : Fracción acumulada de partícula de mineral de tamaño  $X_j$  que se reporta en el tamaño  $X_i$ , luego de haber sido sometida a un evento aislado de conminución.

La suma desde  $i+1$  hasta  $N$  para la función  $\mathbb{E}(i)$  definida en (3.14) resulta:

$$\mathbb{E}(i) = K_{i-1} - K_i \quad [3.16]$$

$$\sum_{k=i+1}^N \mathbb{E}(k) = (K_i - K_{i+1}) + (K_{i+1} - K_{i+2}) + \dots + (K_{N-1} - K_N) = K_i - K_N = K_i$$

De esta forma, la condición de compensación a su forma acumulada se escribe como:

$$B_{ij} \cdot S_j = K_i \quad i > j \quad [3.17]$$

Físicamente la ecuación (2.17) establece que los parámetros  $K_i$  propuestos por el modelo son la tasa de producción de mineral bajo la malla  $X_{i+1}^m$ , por el efecto de molienda sobre el mineral más grueso que la malla  $X_{i+1}^m$  contenido en el molino. Se relacionan los parámetros del modelo general cinético de molienda ( $b_{ij}$  y  $S_i$ ), con los parámetros  $K_i$ , que adquieren de esta manera el significado físico de *tasa efectiva de molienda* del material sobre  $X_{i+1}^m$  milímetros, por lo tanto representan la velocidad a la que desaparece el material sobre la malla  $i+1$ .

Esta tasa efectiva  $K_i$  se produce debido al efecto combinado de los mecanismos conminución no superficiales debidos a fractura. Se hace esta aclaración pues si ocurrieran hipotéticamente fenómenos superficiales de reducción de tamaño, sean abrasión o *chipping*, el núcleo de la colpa permanecería en el intervalo original de tamaño  $X_i$  y en consecuencia esos eventos no contribuirían a la desaparición de material.

El análisis realizado, permite obtener el significado fenomenológico del modelo simplificado de molienda semiautógena, el cual se reduce a la expresión:

$$K_i = (1 - b_{ii}) S_i \quad [3.18]$$

### 3.1.2.3 Transporte de masa

En los molinos SAG utilizados en la minería, la relación diámetro/largo es mayor que uno, luego es posible considerar que la carga interna se mezcla perfectamente. Como consecuencia de esto, la granulometría del flujo  $p^*$  inyectado al clasificador es la misma que la del mineral retenido en la cámara de molienda, de esta manera es posible escribir el vector de flujo de mineral que se presenta al clasificador en su forma retenida por intervalo de tamaño como:

$$p^* = \frac{P^*}{W_M} w \quad [3.19]$$

De la misma manera, el transporte de agua se estudia bajo el concepto de mezcla perfecta, luego la acumulación en el molino es representada por una función de transferencia de primer orden como se presenta en (3.20).

$$\begin{aligned} \frac{dW_A}{dt} &= F_A - P_A \\ P_A &= r_A W_A \end{aligned} \quad [3.20]$$

$W_A$  : Masa de agua retenida en el molino.

$F_A$  : Flujo másico de agua en la alimentación.

$P_A$  : Flujo másico de agua en la descarga del molino.

$r_A$  : Parámetro de descarga de agua.

El modelo presentado en (3.30) es llamado “compacto”, ya que no contiene un flujo interno que se presente a la parrilla de clasificación como el flujo de mineral, sin embargo este fenómeno se concentra en el parámetro  $r_A$ .

#### 3.1.2.4 Clasificación interna

Observando la figura 3.1 y utilizando la ecuación (3.19), se tiene:

$$\begin{aligned} p &= (I - C) p^* = \frac{P^*}{W_M} (I - C) w \\ r &= C p^* = \frac{P^*}{W_M} C w \end{aligned} \quad [3.21]$$

La representación de los sistemas de descarga debe contener los efectos de la parrilla de clasificación interna y de los alzadores de pulpa, luego se considera que el sistema es expuesto a dos instancias de clasificación. La forma de relacionar los efectos de clasificación se esquematiza en la figura 3.2:

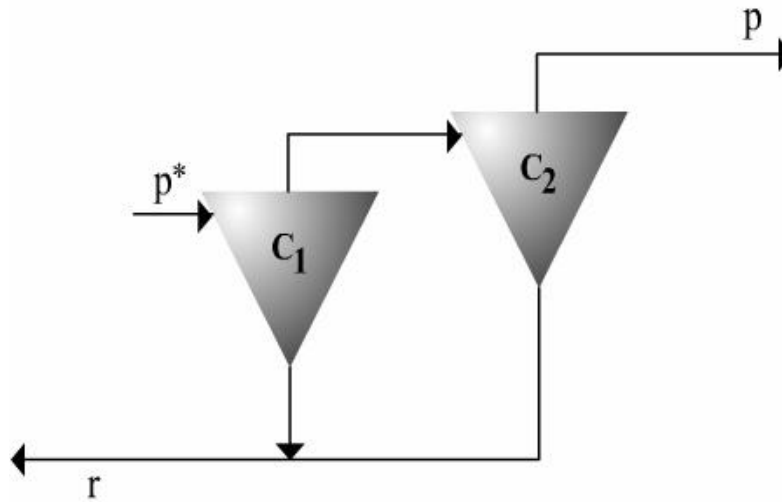


Figura 3.2: Modelo de clasificadores asociado a la eficiencia global de clasificación

Realizando el desarrollo algebraico, se concluye que la clasificación global del sistema está dada por:

$$C_i = C_i^1 + C_i^2 - C_i^1 * C_i^2 \quad [3.22]$$

### 3.1.2.5 Potencia eléctrica demandada

Se considera un modelo basado en un balance de torques en torno al eje axial, donde se estima que el conjunto Bolas, Mineral y Agua, forman un elemento compacto de densidad  $\dots_c$ . Mediante algunas aproximaciones de tipo geométrico, Austin propone para la potencia:

$$\begin{aligned} M_p &= K D^{2.5} L J (1 - A J) \dots_c \\ \dots_c &= \frac{W_M + W_A + W_B}{J V_m} \\ \Rightarrow M_p &= K D^{2.5} L (1 - A J) \frac{W_M + W_A + W_B}{V_m} \end{aligned} \quad [3.23]$$

- $M_p$  : Potencia demandada por el molino.
- $\dots_c$  : Densidad aparente de la carga.
- $J$  : Fracción volumétrica ocupada por la carga interna.
- $W_B$  : Masas de la carga de bolas en el moino.
- $V_m$  : Volumen interno del molino.
- $D$  : Diámetro interno del molino.

$L$  : Largo interno del molino.

$K$  y  $A$  : Parámetros del modelo.

Asociado al modelo de la potencia, existe un sub-modelo que permite calcular el nivel de llenado  $J$  del molino. Austin en [5] supone que la carga de mineral y bolas se mezclan en forma aditiva para obtener el nivel de llenado  $J$ , cada carga caracterizada por su densidad y sus porosidades. Luego considerando que  $\epsilon_B$  es la porosidad equivalente de la carga interna completa y  $J_B$  el nivel de carga de bolas en el interior del molino, el *Hold up* del mineral y el nivel de llenado total se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W_M &= V_M \left[ (1 - v_B) J_{\dots M} - 0.6 J_{B \dots M} \right] \\ \Rightarrow J &= \frac{1}{1 - v_B} \left( \frac{W_M}{\dots M V_M} + 0.6 J_B \right) \end{aligned} \quad [3.24]$$

### 3.1.3 Modelo en ecuaciones de estado

Una representación en ecuaciones de estado, permite conocer la evolución de los estados del sistema con solo conocer las entradas en el intervalo de estudio y la condición inicial de los estados. Para un sistema en general, se definen las siguientes variables:

$X$  : Vector de estado.

$U$  : Vector de entradas.

$Y$  : Vector de salidas.

$\mu$  : Vector de parámetros.

De esta manera un modelo en ecuaciones de estado tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= f(X, U, \mu) \\ Y &= g(X, U, \mu) \end{aligned} \quad [3.25]$$

Considerando las ecuaciones anteriormente descritas, el modelo del molino SAG puede ser escrito como:

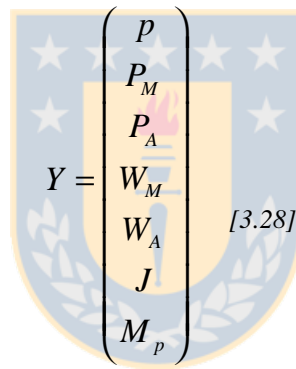


$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= f + \frac{P^*}{W_M} C w - \frac{P^*}{W_M} w - \frac{F_M}{W_M} E R^{-1} K^E R w \\ \frac{dW_A}{dt} &= -r_A W_A + F_A \end{aligned} \quad [3.26]$$

Reordenando se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= - \left[ \frac{P^*}{W_M} (I - C) + \frac{F_M}{W_M} E R^{-1} K^E R \right] w + f \\ \frac{dW_A}{dt} &= -r_A W_A + F_A \end{aligned} \quad [3.27]$$

Finalmente considerando que las salidas de un sistema, son funciones no lineales de las variables de estado, se definen las siguientes salidas para el modelo:



$$Y = \begin{pmatrix} p \\ P_M \\ P_A \\ W_M \\ W_A \\ J \\ M_p \end{pmatrix} \quad [3.28]$$

Las ecuaciones (3.27) conforman un sistema en ecuaciones de estado, en efecto, a partir de la condición inicial conocida y las entradas futuras, se puede determinar la evolución de las variables de estado. De la misma manera las salidas (y algunos parámetros) dependen de las variables de estado, algunas relaciones ya han sido presentadas, las demás serán analizadas en el siguiente punto.

### 3.1.4 Ajuste del modelo a datos experimentales

Mediante un conjunto de 16 pruebas experimentales, Améstica en [1] y Magne en [23] obtienen datos que permiten ajustar los parámetros del modelo desarrollado anteriormente a un Molino SAG de escala piloto. Estas pruebas han sido realizadas en estado estacionario, luego para cada punto de operación se calculan los parámetros que representan los diversos fenómenos que ocurren en el molino

Luego de analizar las tablas de datos, mediante ajuste de mínimos cuadrados y optimización no lineal, se parametrizaron curvas que correlacionan variables representativas de los distintos puntos de operación del molino.

(i) *Tasa específicas de molienda*

La correlación de estos parámetros no lineales es propuesta por Austin es:

$$K_i^E = a(X_i)^r \frac{1}{1 + \left(\frac{X_i}{\sim}\right)^{\}} + a_s \left(\frac{X_i}{152.4}\right)^{r_s} \quad [3.29]$$

Donde los parámetros calculados son los siguientes.

$$\begin{pmatrix} a \\ r \\ \sim \\ \} \\ a_s \\ r_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.165 \\ 0.368 \\ 6.36J^{-0.552} \\ 0.495J^{-0.327} \\ 0.199 \\ 5.89 \end{pmatrix} \quad [3.30]$$

De esta manera, la curva de las tasas específicas de molienda es la mostrada a continuación.

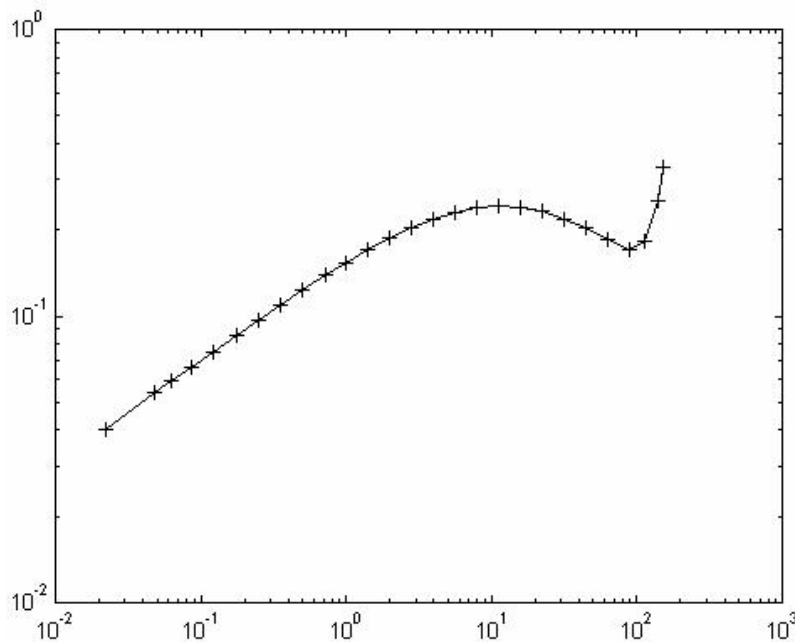


Figura 3.3: Tasas específicas de Molienda [1/kWh]

Si se observa la figura 3.3, se puede apreciar la diferencia que existe con el molino de Bolas, ya que la curva indica que las tasas de Molienda disminuyen para tamaños intermedios (Pebbles). Esto es un factor que toma mucha importancia en la modelación fenomenológica y hace que el control de este tipo de molinos sea más complicado.

(ii) *Eficiencias de clasificación*

Obtenidas experimentalmente, las curvas que caracterizan este fenómeno son las siguientes.

$$C_i^1 = \frac{1}{1 + \left(\frac{X_i}{X_{50}}\right)^{\lambda_c}} \quad [3.31]$$

$$C_i^2 = \mathbb{E} s (X_i, M)^{s-1} \exp(-\mathbb{E} (X_i, M)^s)$$

$$(\mathbb{E} \quad s \quad M \quad X_{50} \quad \lambda_c)^T = \left( 743 C_p^{-13.12} \quad 1.8 \quad \frac{C_p^{16.53}}{255} \quad 12 \quad 7.6 \right)^T \quad [3.32]$$

$$C_p = \frac{\sum_{i=i_p}^N w_i}{\sum_{i=1}^N w_i + W_A} = \frac{w_p}{W_M + W_A} \quad [3.33]$$

$i_p$  : índice de tamaño tal que  $X_{ip}$  corresponde a 5.6 mm.

(iii) *Transporte de masa del mineral y agua*

Las funciones de correlación ajustadas son:

$$P^* = 29 W_M^{0.5}$$

$$r_A = 16.86 + \frac{0.102}{W_M^4} \quad [3.34]$$

## 3.2 Batería de hidrociclones

El modelo de hidrociclón utilizado en este trabajo es el desarrollado por L.R.Plitt en 1976. Los mecanismos de clasificación y bypass de este modelo se detallan a continuación.

### 3.2.1 Curva de eficiencia corregida

El modelo de Plitt adopta la siguiente ecuación para describir la curva de eficiencia corregida del hidrociclón

$$Y_c = 1 - \exp \left[ - \ln a \left( \frac{d}{d_{50}(corr)} \right)^m \right] \quad [3.35]$$

Esta ecuación ha sido obtenida mediante resultados empíricos y efectuando un detallado análisis estadístico. Las restricciones que deben ser cumplidas para el correcto desempeño del modelo son las siguientes

- a)  $Y_c = 0.5$ , para  $d = d_{50}(corr)$
- b)  $Y_c = 0$ , para  $d = 0$
- c)  $Y_c = 1$ , para  $d \rightarrow \infty$

Considerando estas restricciones, la ecuación (3.35) puede ser escrita como

$$Y_c = 1 - \exp \left[ - 0.69315 \left( \frac{d}{d_{50}(corr)} \right)^m \right] \quad [3.36]$$

Observando la ecuación (3.35), se puede constatar que el parámetro “m” constituye una medida directa de la eficiencia global de clasificación. De esta forma, si  $m > 3$ , se tendrá el caso de una clasificación nítida de partículas gruesas y finas en los flujos de descarga y rebalse del hidrociclón respectivamente. Aquellos valores de “m” inferiores a 2 indicarán una separación relativamente pobre entre partículas gruesas y finas.

### 3.2.2 Ecuación de $d_{50}$ corregido

La ecuación utilizada por Plitt que describe el parámetro  $d_{50}(corr)$  es la siguiente

$$d_{50}(corr) = \frac{A_0 D_c^{A_1} D_i^{A_2} D_o^{A_3} \exp(A_4 S_v)}{D_u^{A_5} h^{A_6} Q^{A_7} (\dots - \dots)^{A_8}} \quad [3.37]$$

Donde:

- $d_{50}(corr)$  : Valor de  $d_{50}$  corregido (um).
- $D_c$  : Diámetro interno del hidrociclón, medido en la parte inferior del vortex finder (pulg.).
- $D_i$  : Diámetro interno de la abertura de alimentación al hidrociclón (pulg.).
- $D_o$  : Diámetro interno de la abertura de rebalse del hidrociclón (pulg.).
- $D_u$  : Diámetro interno de la abertura de descarga del hidrociclón (pulg.).
- $S_v$  : % Volumétrico de sólidos en pulpa de alimentación (%).
- $h$  : Distancia entre la parte inferior del vortex y la parte superior del apex (pulg.).
- $Q$  : Flujo volumétrico de pulpa alimentado al hidrociclón (pie<sup>3</sup>/min).
- $\dots_s, \dots_l$  : Densidades del sólido y del líquido respectivamente (g/cm<sup>3</sup>).
- $A_0 \dots A_8$  : Constantes del modelo ajustado dependientes del mineral y del equipo.

### 3.2.3 Ecuación del parámetro “ $m$ ”

Plitt propone la siguiente ecuación para calcular el parámetro “ $m$ ” en función de las variables de operación y de diseño del hidrociclón.

$$m = \exp \left( K_0 + K_1(1 - R_v) + K_2 \ln \left( D_c^2 \frac{h}{Q} \right) \right) \quad [3.38]$$

Donde:

$$R_v = \frac{Q_u}{Q} = \frac{S}{1 + S}$$

- $S$  : Distribución de caudales volumétricos de rebalse y descarga.
- $Q, Q_u$  : Flujos volumétricos de alimentación y descarga respectivamente (pie<sup>3</sup>/min).
- $K_0, K_1, K_2$  : Constantes del modelo ajustado.

### 3.2.4 Ecuación de distribución de caudales volumétricos

$$S = \frac{B_0 \left( \frac{D_u}{D_o} \right)^{B_1} h^{B_2} (D_u^2 + D_o^2)^{B_3} \exp(B_4 S_v)}{H^{B_5} D_c^{B_6}} \quad [3.39]$$

Con

$H$  : Presión estática de pulpa en la alimentación (pies)

$P$  : Presión de alimentación (psig).

... : Densidad de la pulpa de alimentación ( $\text{g/cm}^3$ ).

$B_0 \dots B_3$  : Constantes del modelo ajustado.

### 3.2.5 Ecuación Presión-Capacidad

$$P = \frac{C_0 Q^{C_1} \exp(C_2 S_v)}{D_c^{C_3} D_i^{C_4} h^{C_5} (D_u^2 + D_o^2)^{C_6}} \quad [3.40]$$

Con

$P$  : Presión alimentación (psi).

$Q$  : Flujo volumétrico de alimentación ( $\text{pie}^3/\text{min}$ ).

$C_0 \dots C_6$  : Constantes del modelo ajustado.

## Capítulo 4: Diseño de una Estrategia de Control Predictivo con Restricciones Basado en Modelos

### 4.1 Modelo de Identificación

La mayoría de las plantas de tipo SISO (una entrada y una salida), operando en un punto alrededor de un set-point y luego de una linealización, pueden ser descritas por la siguiente ecuación

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})e(t) \quad [4.1]$$

Donde  $u(t)$  e  $y(t)$  son respectivamente, las secuencias de entrada y salida del sistema en cuestión y  $e(t)$  es un ruido de media nula. A, B y C son polinomios en el operador  $z^{-1}$ . Este tipo de modelo es conocido como CARMA y ha sido utilizado en muchas aplicaciones. Sin embargo, se ha demostrado que para aplicaciones industriales con perturbaciones no estacionarias los modelos CARIMA son más apropiados y presentan un mejor desempeño. El modelo CARIMA está dado por la siguiente ecuación

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \quad [4.2]$$

Donde

$$\Delta = 1 - z^{-1}$$

En la práctica, el polinomio  $C(z^{-1})$  se considera igual a la unidad para simplificar el trabajo del algoritmo de identificación en el caso de un ruido de media nula.

La extensión de los modelos comentados anteriormente puede ser desarrollada para sistemas MIMO de manera análoga, donde  $u(t)$  e  $y(t)$  son respectivamente, los vectores de secuencias de entrada y salida del sistema en cuestión y  $e(t)$  es el vector ruido de media nula. A, B y C son matrices de polinomios en el operador  $z^{-1}$ .

## 4.2 Modelo Predictivo

La teoría del Control Predictivo Generalizado (GPC) consiste en calcular y aplicar a la planta una secuencia de control que minimice un funcional de costo, el cual puede tener diferentes estructuras (lineal, cuadrático, etc.).

Para calcular la secuencia de control que permita llevar a la variable controlada al valor del Set-Point y manejar las restricciones de proceso, es necesario utilizar un modelo que permita predecir el comportamiento del sistema en el futuro. Con esto en mente, se han desarrollado diversos esquemas de GPC con diferentes modelos, funcionales y algoritmos. El modelo utilizado en este trabajo para predecir el comportamiento del sistema es el modelo CARIMA con múltiples entradas y una salida (MISO).

$$\Delta y(k) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i \Delta y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i \Delta u_1(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i \Delta u_2(k-i) + e(t) \quad [4.3]$$

Donde:

- $y(t)$  : Salida del sistema
- $u_1(t), u_2(t)$  : Entradas al sistema
- $e(t)$  : Ruido de media nula asociado a la medición
- $a_i, b_i, c_i$  : Parámetros del modelo
- $\Delta$  :  $1 - z^{-1}$

La estimación para el siguiente instante de tiempo es:

$$\Delta \hat{y}(k+1) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i \Delta \hat{y}(k+1-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i \Delta u_1(k+1-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i \Delta u_2(k+1-i) \quad [4.4]$$

Luego podemos realizar una estimación para un instante de tiempo “j” incrementando el modelo presentado anteriormente de manera recursiva, así se obtiene:

$$\Delta \hat{y}(k+j) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i \Delta \hat{y}(k+j-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i \Delta u_1(k+j-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i \Delta u_2(k+j-i) \quad [4.5]$$

Con  $j = 1, 2, \dots, T_p$ , donde  $T_p$  es el horizonte de predicción utilizado. Por otro lado, si se observa que



$$\begin{aligned}
\Delta \hat{y}(k+j) &= \hat{y}(k-j) - \hat{y}(k-j-1) \\
\Delta u_1(k+j) &= u_1(k-j) - u_1(k-j-1) \\
\Delta u_2(k+j) &= u_2(k-j) - u_2(k-j-1)
\end{aligned}$$

Se puede escribir recursivamente la expresión de predicción para el instante de tiempo “ $j$ ” en función de las variables conocidas en el instante “ $k$ ” y las variables de control futuras, luego

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{y}(k+j) &= \sum_{i=1}^{n_a} \hat{e}_i^j \Delta \hat{y}(k+j-i) + \sum_{i=1}^{n_b} \hat{g}_i^j \Delta u_1(k+j-i) + \sum_{i=0}^{j-2} \hat{g}_i^{j+1} \Delta \hat{a}_1(k+j-1-i) + \dots \\
&\dots + \sum_{i=1}^{n_b} \hat{d}_i^j \Delta u_2(k+j-i) + \sum_{i=0}^{j-2} \hat{d}_i^{j+1} \Delta \hat{a}_2(k+j-1-i) \quad j = 1, 2, \dots, T_p
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Los coeficientes  $\hat{e}_i^j$ ,  $\hat{g}_i^j$  y  $\hat{d}_i^j$  son obtenidos en forma recursiva a partir de  $a_i$ ,  $b_i$  y  $c_i$  mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_i^j &= \hat{e}_1^{j-1} \hat{a}_i + \hat{e}_{i+1}^{j-1} & i = 1, 2, \dots, n_a & \quad j = i = 1, 2, \dots, T_p \\
\hat{g}_i^j &= \hat{e}_1^{j-1} \hat{b}_i + \hat{g}_{i+1}^{j-1} & i = 1, 2, \dots, n_b & \quad j = i = 1, 2, \dots, T_p \\
\hat{d}_i^j &= \hat{e}_1^{j-1} \hat{c}_i + \hat{d}_{i+1}^{j-1} & i = 1, 2, \dots, n_c & \quad j = i = 1, 2, \dots, T_p
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_i^1 &= \hat{a}_i & i = 1, 2, \dots, n_a \\
\hat{g}_i^1 &= \hat{b}_i & i = 1, 2, \dots, n_b \\
\hat{d}_i^1 &= \hat{c}_i & i = 1, 2, \dots, n_c \\
\hat{e}_{n_a+1}^1 &= 0 & j = i = 2, \dots, T_p \\
\hat{g}_{n_a+1}^1 &= 0 & j = i = 2, \dots, T_p \\
\hat{d}_{n_a+1}^1 &= 0 & j = i = 2, \dots, T_p
\end{aligned}$$

Para incluir el modelo desarrollado en el algoritmo de control, es necesario despejar todo en función de la variable de salida en el instante “ $j$ ”. Esto es:

$$\begin{aligned}
\hat{y}(k+j) &= y(k) + \sum_{i=1}^{n_a} \hat{y}_i^j \Delta \hat{y}(k+j-i) + \sum_{i=1}^{n_b} \hat{x}_i^j \Delta u_1(k+j-i) + \sum_{i=0}^{j-2} \hat{x}_i^{j+1} \Delta \hat{a}_1(k+j-1-i) + \dots \\
&\dots + \sum_{i=1}^{n_b} \hat{z}_i^j \Delta u_2(k+j-i) + \sum_{i=0}^{j-2} \hat{z}_i^{j+1} \Delta \hat{a}_2(k+j-1-i) \quad j = 1, 2, \dots, T_p
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
y_i^j &= \sum_{l=1}^j e_i^l & i=1, 2, \dots, n_a \\
x_i^j &= \sum_{l=1}^j g_i^l & i=1, 2, \dots, n_b \\
\hat{c}_i^j &= \sum_{l=1}^j \hat{d}_i^l & i=1, 2, \dots, n_c
\end{aligned}$$

Finalmente, las ecuaciones desarrolladas pueden ser escritas en una forma matricial de la siguiente manera:

$$\hat{Y} = Iy(k) + E\Delta Y_k + G\Delta U_{1k} + G_a\Delta \hat{U}_1 + D\Delta U_{2k} + D_a\Delta \hat{U}_2 \quad [4.9]$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{Y} &= [\Delta \hat{y}(k+1) \quad \Delta \hat{y}(k+2) \quad \dots \quad \Delta \hat{y}(k+T_p-1)]^T \\
\Delta \hat{U}_1 &= [\Delta \hat{u}_1(k) \quad \Delta \hat{u}_1(k+1) \quad \dots \quad \Delta \hat{u}_1(k+T_p-1)]^T \\
\Delta \hat{U}_2 &= [\Delta \hat{u}_2(k) \quad \Delta \hat{u}_2(k+1) \quad \dots \quad \Delta \hat{u}_2(k+T_p-1)]^T \\
\Delta Y_k &= [\Delta y(k) \quad \Delta y(k-1) \quad \dots \quad \Delta y(k-n_a+1)]^T \\
\Delta U_{1k} &= [\Delta u_1(k-1) \quad \Delta u_1(k-2) \quad \dots \quad \Delta u_1(k-n_b+1)]^T \\
\Delta U_{2k} &= [\Delta u_2(k-1) \quad \Delta u_2(k-2) \quad \dots \quad \Delta u_2(k-n_c+1)]^T \\
E &= \begin{bmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \dots & y_{n_a}^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_{n_a}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{T_p} & y_2^{T_p} & \dots & y_{n_a}^{T_p} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$G = \begin{bmatrix} x_2^1 & x_3^1 & \dots & x_{n_b}^1 \\ x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_{n_b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{T_p} & x_3^{T_p} & \dots & x_{n_b}^{T_p} \end{bmatrix} \quad G_a = \begin{bmatrix} x_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1^2 & x_1^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{T_p} & x_1^{T_p-1} & \dots & x_1^1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \hat{c}_2^1 & \hat{c}_3^1 & \dots & \hat{c}_{n_b}^1 \\ \hat{c}_2^2 & \hat{c}_3^2 & \dots & \hat{c}_{n_b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{c}_2^{T_p} & \hat{c}_3^{T_p} & \dots & \hat{c}_{n_b}^{T_p} \end{bmatrix} \quad D_a = \begin{bmatrix} \hat{c}_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{c}_1^2 & \hat{c}_1^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{c}_1^{T_p} & \hat{c}_1^{T_p-1} & \dots & \hat{c}_1^1 \end{bmatrix}$$

### 4.3 Algoritmo de Identificación

Diferentes algoritmos de identificación de parámetros han sido desarrollados hasta ahora, entre estos podemos destacar *Recursive-Least-Square* RLS, *Least-Mean-Square* LMS, *Recursive-Extended-Least-Square* RELS y *Aproximated-Maximum-Likelihood* AML entre otros [33]. En este trabajo se utiliza la identificación RLS con factor de olvido variable VFFRLS por su robustez y velocidad de convergencia. Este método de identificación, es una solución al problema del “Blow-Up” de la traza de la matriz de covarianza, que es un índice de calidad de la información contenida en ella [27]. El desarrollo del algoritmo VFFRLS se muestra a continuación.

- 1.- Cálculo de la predicción

$$\hat{y} = w(t-k-1)^T \hat{u}(t-1) \quad [4.10]$$

- 2.- Cálculo el error de estimación

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad [4.11]$$

- 3.- Determinación de la ganancia

$$K(t) = \frac{P(t-1)w(t-k-1)}{1 + w(t-k-1)^T P(t-1)w(t-k-1)} \quad [4.12]$$

- 4.- Estimación de nuevos parámetros

$$\hat{u}(t) = \hat{u}(t-1) + K(t)e(t) \quad [4.13]$$

- 5.- Cálculo del factor de olvido

$$\check{f}(t) = 1 - \frac{(1 - w(t-k-1)^T K(t))e(t)^2}{\Sigma_0} \quad [4.14]$$

- 6.- Actualización de la matriz de covarianza

$$P(t) = \frac{[1 - K(t)w(t-k-1)^T]P(t-1)}{\check{f}(t)} \quad [4.15]$$

La identificación del modelo, se inicia con una excitación del sistema mediante una secuencia Pseudo-Random Binary Sequence PRBS, la cual posee un espectro de frecuencia mayor a la señal cuadrada utilizada frecuentemente en identificación y

comparte la característica de poseer dos niveles de amplitud [33]. Un ejemplo de esta señal se muestra a continuación en la figura 4.1.

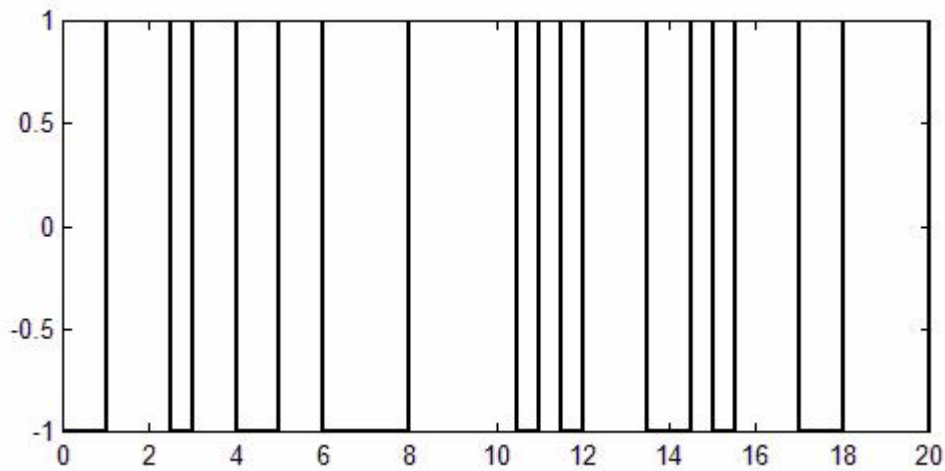


Figura 4.1: Secuencia PRBS utilizada en la identificación

#### 4.4 Manejo de Restricciones

Si se tiene un sistema representado por la siguiente ecuación en forma matricial:

$$\hat{Y} = Iy(k) + E\Delta Y_k + G\Delta U_{1k} + G_a\Delta \hat{U}_1 \quad [4.16]$$

Se puede definir un vector que contiene la información conocida hasta el instante de muestreo “ $k$ ”, luego

$$f = Iy(k) + E\Delta Y_k + G\Delta U_{1k} \quad [4.17]$$

Reemplazando 4.17 en 4.16 se tiene:

$$\hat{Y} = f + G_a\Delta \hat{U}_1 \quad [4.18]$$

La ecuación 4.18, será utilizada para definir las restricciones que se deben considerar al momento de calcular la acción de control mediante el modelo propuesto en la ecuación 4.9. Cabe destacar que a modo de simplificación se ha omitido el efecto de una entrada al proceso, pero su desarrollo es análogo al presentado en las ecuaciones 4.16 a 4.18.

#### 4.4.1 Restricciones de banda

En algunas situaciones, es necesario manejar la trayectoria de variables de proceso dentro de una banda establecida como “de operación”. En el caso de un Molino SAG, es necesario mantener la Potencia demandada por el Molino dentro de sus límites de potencia máxima y mínima, ya que la violación de esta restricción puede provocar daños en el circuito eléctrico o un *atollo* respectivamente.

Para evitar la violación de una restricción de banda, es necesario que la variable de proceso futura, como resultado de las acciones de control calculadas, cumpla la siguiente relación:

$$\underline{y}(t) \leq \hat{y}(t) \leq \bar{y}(t) \quad [4.19]$$

En notación matricial se tiene:

$$\underline{Y} \leq \hat{Y} \leq \bar{Y} \quad [4.20]$$

La ecuación 4.20 puede ser escrita en función del modelo predictivo descrito por la ecuación 4.18 como se muestra a continuación.

$$\underline{Y} - f \leq G_a \Delta \hat{U}_1 \leq \bar{Y} + f \quad [4.21]$$

#### 4.4.2 Restricciones en la señal de control

La mayoría de los actuadores disponibles en la práctica, poseen límites en su rango de acción. Un ejemplo de esto es una válvula completamente abierta., la cual no permitirá el paso de un flujo mayor.

Para asegurar que la secuencia de control calculada considere la restricción en los actuadores, se debe cumplir la siguiente relación:

$$\underline{u}(t) \leq \hat{u}(t) \leq \bar{u}(t) \quad [4.22]$$

En su forma matricial, y considerando como variable dependiente la variación futura de la variable control, se puede escribir 4.22 de la siguiente manera

$$1(\underline{u} - u(k-1)) \leq T \Delta \hat{U}_1 \leq 1(\bar{u}(t) - u(k-1)) \quad [4.23]$$

En 4.23, 1 es un vector cuyos elementos son unos y T es una matriz triangular inferior

### 4.4.3 Restricciones en razón de cambio de la señal de control

Una variable de proceso o un actuador, pueden tener límites en la razón de cambio debido a condiciones especiales del proceso o por el diseño del mismo. Esta restricción puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\underline{\Delta u}(t) \leq \Delta \hat{u}(t) \leq \overline{\Delta u}(t) \quad [4.24]$$

La cual puede ser escrita en su forma matricial como

$$\underline{\Delta U} \leq \Delta \hat{U} \leq \overline{\Delta U} \quad [4.25]$$

## 4.5 Formulación del problema de Programación Lineal

Los métodos tradicionales de control predictivo han sido desarrollados en base a la minimización de una función objetivo de tipo cuadrática. Entre los controladores predictivos que utilizan este tipo de índices se encuentran *Dynamic matrix Control*, *Predictive Functional Control*, *Extended Prediction Self Adaptive Control*, *Extended Horizon Adaptive Control* y *Generalized Predictive Control*.

Todos estos métodos permiten de una manera eficiente realizar el cálculo de la secuencia de control, sin embargo, Camacho en [9] propone un método que considera la minimización de un funcional de primer orden el cual considera valores absolutos. Este controlador es llamado “Norma 1” y posee la siguiente estructura:

$$J(u) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \sum_{i=1}^n |y_i(t+j) - w_i(t+j)| + \sum_{j=1}^{N_u} \sum_{i=1}^m |\Delta u_i(t+j-1)| \quad [4.26]$$

, donde  $N_1$  y  $N_2$  definen el horizonte de predicción y  $N_u$  define el horizonte de control. Cabe destacar, que a diferencia de los métodos tradicionales de control predictivo, esta solución considera el valor absoluto de la diferencia entre la variable controlada y la referencia y el valor absoluto de la variación de la señal de control. Esto permite que el sistema siga la referencia minimizando el error y la variación en la variable de control para lograr el estado estacionario.

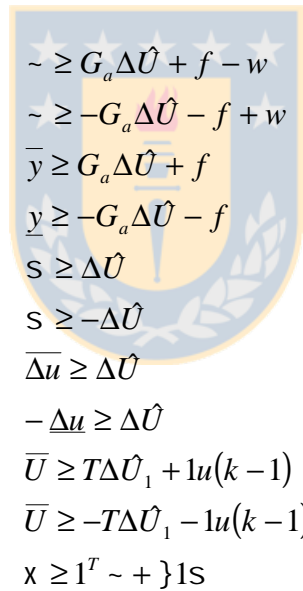
Si se tiene una serie de  $\tilde{r}_i > 0$  y  $s_i > 0$  tales que:

$$\begin{aligned}
 -\tilde{r}_i &\leq (y_i(t+j) - w_i(t+j)) \leq \tilde{r}_i & i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, N \\
 -s_i &\leq \Delta u_i(t+j-1) \leq s_i & i=1, \dots, m \quad j=1, \dots, N_u \\
 0 &\leq \sum_{i=1}^{nxN} \tilde{r}_i + \sum_{i=1}^{nxN_u} s_i \leq x
 \end{aligned} \quad [4.27]$$

La variable  $x$  es la cota superior del funcional a minimizar. Luego el problema se reduce a minimizar la cota superior  $x$ . Si se consideran las restricciones desarrolladas en 4.4.1 a 4.4.3, el problema se puede resolver mediante programación lineal de la siguiente manera

$$\min_{x, \tilde{r}, s, \Delta u} x \quad [4.28]$$

Sujeto a:



$$\begin{aligned}
 \tilde{r} &\geq G_a \Delta \hat{U} + f - w \\
 \tilde{r} &\geq -G_a \Delta \hat{U} - f + w \\
 \bar{y} &\geq G_a \Delta \hat{U} + f \\
 \underline{y} &\geq -G_a \Delta \hat{U} - f \\
 s &\geq \Delta \hat{U} \\
 s &\geq -\Delta \hat{U} \\
 \bar{\Delta u} &\geq \Delta \hat{U} \\
 -\underline{\Delta u} &\geq \Delta \hat{U} \\
 \bar{U} &\geq T \Delta \hat{U}_1 + 1u(k-1) \\
 \bar{U} &\geq -T \Delta \hat{U}_1 - 1u(k-1) \\
 x &\geq 1^T \tilde{r} + \sum s
 \end{aligned}$$

Luego el problema puede ser presentado de la siguiente forma:

$$\min_x c^T x \quad [4.29]$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
 Ax &\leq b \\
 x &\geq 0
 \end{aligned}$$

, donde

$$A = \begin{bmatrix} G_a & -I & 0 & 0 \\ -G_a & -I & 0 & 0 \\ G_a & 0 & 0 & 0 \\ -G_a & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & -I & 0 \\ -I & 0 & -I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 & 0 \\ -T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^T & 1^T & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -G_a \Delta \hat{U} - f + w \\ G_a \Delta \hat{U} + f - w \\ \bar{y} - G_a \Delta \hat{U} - f \\ -\bar{y} + G_a \Delta \hat{U} + f \\ -\Delta u \\ \Delta u \\ \bar{\Delta u} - \Delta u \\ \bar{U} - T\Delta u - 1u(k-1) \\ -\bar{U} + T\Delta u + 1u(k-1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

El número de variables utilizadas para resolver el problema de programación lineal es  $2 \times m \times N_u + n \times N + 1$ , mientras que el número de restricciones a manejar por el algoritmo es  $4 \times n \times N + 5 \times m \times N_u + 1$ . Si un proceso de 5 entradas y 5 salidas con un horizonte de control  $N_u=10$  y horizonte de costo de  $N=30$ , el número de variables es 251 mientras que el número de restricciones a considerar es de 851. Esta cantidad de variables y restricciones puede ser manipulada por cualquier algoritmo de programación lineal, lo que permite la utilización de este controlador en diversas aplicaciones con diversos resultados que dependen de las condiciones de la planta, dinámicas asociadas y del modelo de predicción utilizado [9].



## Capítulo 5: Simulación de fenómenos característicos de un Molino SAG

Como se ha comentado anteriormente, la variabilidad de la granulometría de alimentación en un molino SAG y la sensibilidad de sus parámetros frente a distintas condiciones de operación (como cambios en la dureza del mineral), provocan variaciones en el nivel de llenado del molino y en la Potencia Neta demandada por el molino [5].

Con el fin de constatar la variabilidad en la operación de los molinos SAG, en este capítulo se simulan algunos fenómenos característicos que pueden ocurrir en una planta SAG, además se analizan los efectos que provocan estos fenómenos en las variables de proceso.

Para efectos de simulación se ha considerado el molino SAG actuando en lazo abierto donde la alimentación suministrada simula ser la alimentación compuesta por mineral fresco y la recirculación del chancador de pebbles. Las variables de proceso analizadas son el nivel de llenado total y la potencia consumida por el molino.

### 5.1 Cambios en la granulometría de alimentación

Se han simulado 4 granulometrías de entrada para analizar los efectos que produce en la operación de un molino SAG un cambio en esta. La composición granulométrica en función del porcentaje de tamaños finos, medios y gruesos se muestra en la tabla 5.1.

Granulometría	% finos	% medios	% gruesos
Normal	62.5	10.7	26.8
Aumento fino y medios, disminución gruesos	64.02	14.34	21.64
Aumento gruesos y finos, disminución medios	40.63	8.34	51.03
Solo finos y gruesos	65.1	0	34.9

Tabla 5.1: Granulometrías de entrada simuladas

El tamaño fino ha sido definido en este trabajo como aquella partícula con un tamaño menor a 50mm, el tamaño mediano un tamaño entre 50 mm y 100 mm (pebbles), finalmente el tamaño grueso ha sido definido como aquella partícula de tamaño mayor a 100 mm.

Es importante destacar que los cambios en granulometría utilizados son completamente teóricos y han sido escogidos de manera de visualizar en un corto tiempo los efectos. Sin embargo la granulometría definida como *Normal*, ha sido considerada de acuerdo a la data facilitada por la División El Teniente de CODELCO.

Las condiciones de simulación son las siguientes:

- Flujo de alimentación se mantiene constante en 1100 t/h
- Se asume un control de razón Agua-Mineral para mantener 76% de sólidos en peso en la entrada del molino
- Se mantiene la velocidad del molino en 9.5 RPM
- No hay cambio en la dureza del mineral

La simulación contempla en un comienzo una alimentación *Normal* hasta los 300 minutos, luego de esto, una granulometría con *Aumento de tamaños finos* se suministra hasta los 340 minutos tiempo en el cual se ingresa una granulometría con un *Aumento de de tamaños gruesos* hasta el minuto 600. Finalmente una granulometría con una *disminución en los tamaños medios* es ingresada al molino hasta el final de la simulación.

Los perfiles granulométricos utilizados en la alimentación se muestran a continuación en las figuras 5.1 a 5.4.

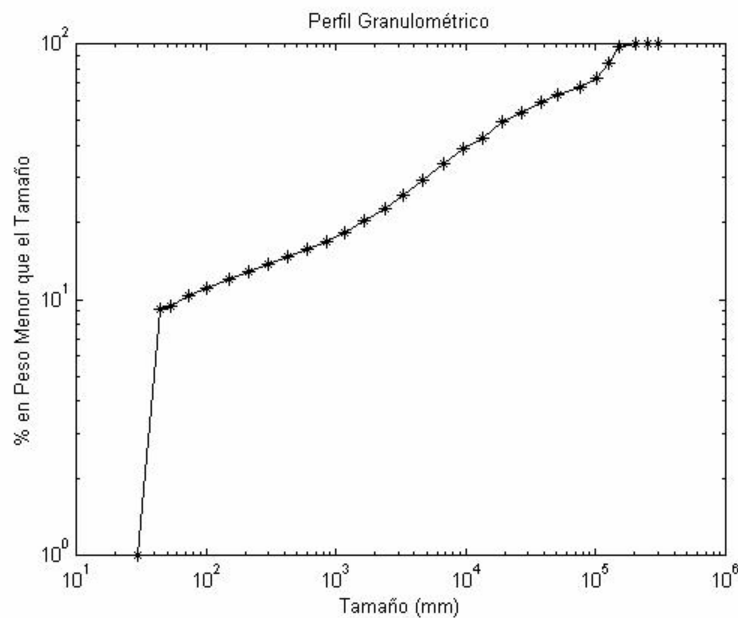


Figura 5.1: Perfil granulométrico normal ingresado en la alimentación

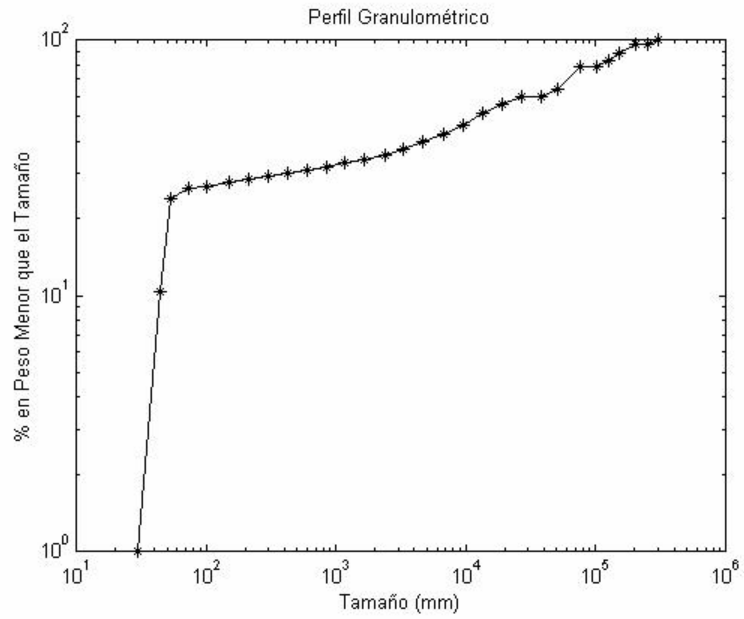


Figura 5.2: Perfil granulométrico con Aumento de finos y medios, disminución gruesos

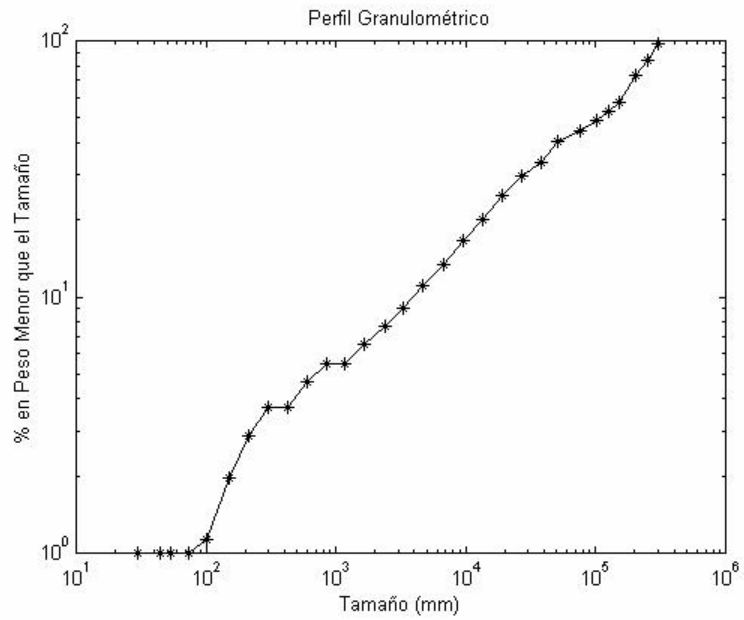


Figura 5.3: Perfil granulométrico con aumento de gruesos y finos, disminución medios

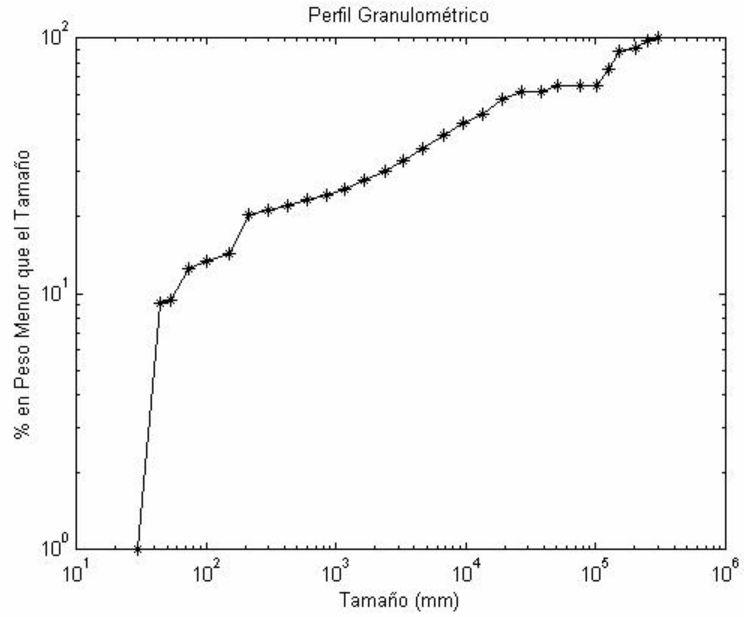


Figura 5.4: Perfil granulométrico con solo partículas finas y gruesas

El nivel de llenado total y la potencia consumida por el molino se muestran en la figura 5.5.

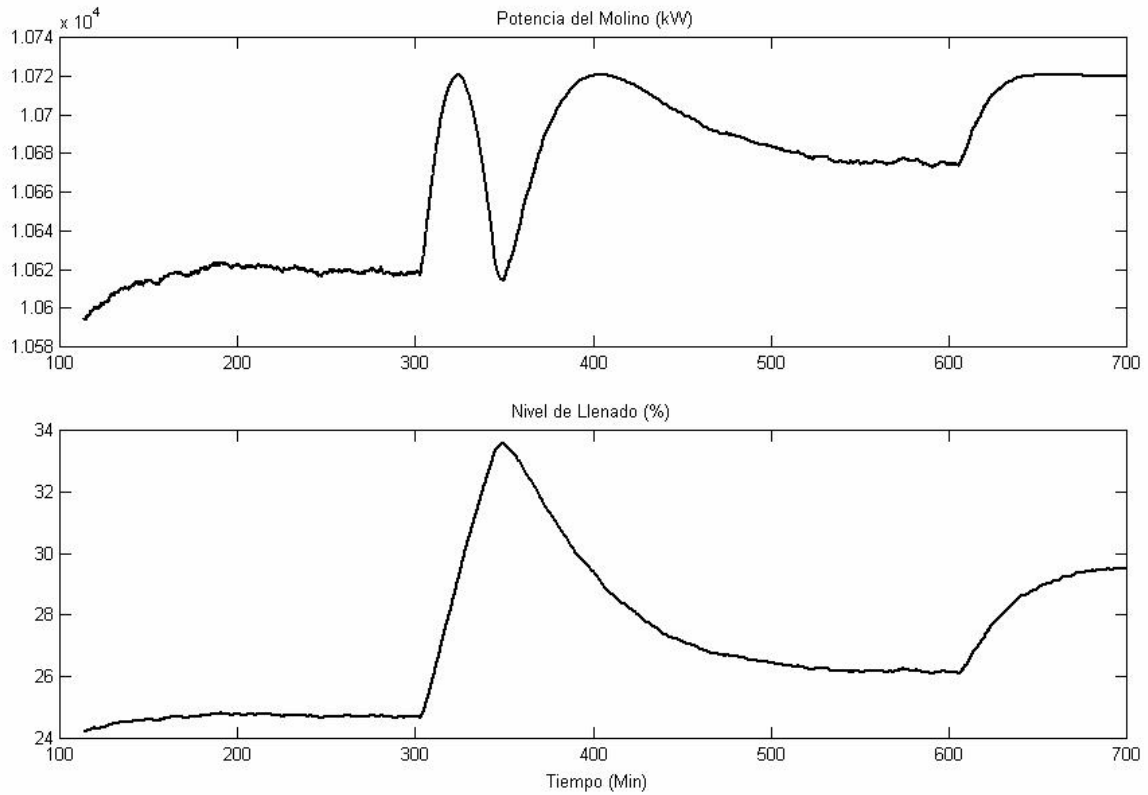
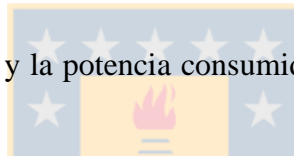


Figura 5.5: Nivel de llenado total y Potencia consumida por el molino

La figura 5.5 muestra que para una alimentación *Normal* se puede operar en estado estacionario con un nivel de llenado cercano al 25% y una potencia consumida de 10.6 MW. En el minuto 300 se alimenta con una granulometría que carece de partículas gruesas, se puede apreciar entonces que el nivel de llenado del molino y la potencia consumida comienzan a aumentar hasta a un punto en que la potencia llega a un “peak” y comienza una disminución de la potencia y un aumento en el nivel, esta es una zona de operación inestable que será comentada posteriormente. Desde el minuto 340 se alimenta al molino con una alimentación que posee un porcentaje menor de partículas medias, este cambio permite salir de la zona inestable de operación aumentando la potencia consumida hasta en el cual decrece junto con el nivel de llenado total. Desde el minuto 600 se alimenta el molino sin partículas de tamaño medio con lo cual se produce un aumento en el nivel y la potencia y una operación en estado estacionario con un nivel de llenado de 29.7% y una potencia de 10.72 MW.

Un punto importante de destacar es que contrariamente a lo supuesto por mucha personas, el trabajar con una granulometría de alimentación que no posee tamaños medios (pebbles) no es beneficioso del todo ya que aumenta el nivel de llenado total del molino a pesar de no poseer tamaños con cinética de fractura menor. Es necesario, mediante análisis en terreno de datos, la determinación de las proporciones de tamaños que permitan operar el molino con un nivel de llenado y potencia menor [15].

Luego de analizar la figura 5.5, comentar la evolución de las variables principales del molino SAG, y teniendo en cuenta que la granulometría de entrada al molino no siempre es posible medir ni controlar con precisión (perturbación al sistema), se puede concluir que la operación del molino SAG es muy sensible a esta perturbación no medible y el control del molino debe ser robusto frente a cambios en esta.

## 5.2 Cambios en la dureza del mineral

Para analizar los efectos causados por un cambio en la dureza del mineral, se han simulado dos experiencias. Estas contemplan la operación del molino bajo las siguientes condiciones:

- Granulometría de entrada constante
- Flujo de alimentación constante (1095 ton/h y 1200 ton/h)
- Se asume un control de razón Agua-Mineral para mantener 76% de sólidos en peso en la entrada del molino
- Velocidad del molino constante (9.5 RPM)
- La simulación considera un cambio en la dureza del mineral en un 30 %. Esto se lleva a cabo modificando las velocidades de fractura del mineral [16].

La granulometría de entrada utilizada y la granulometría de salida obtenida de acuerdo a las condiciones mencionadas anteriormente se muestran a continuación en la figura 5.6. Esta, a pesar del cambio en el tonelaje, no varía significativamente debido principalmente a las características de clasificación interna del molino SAG.

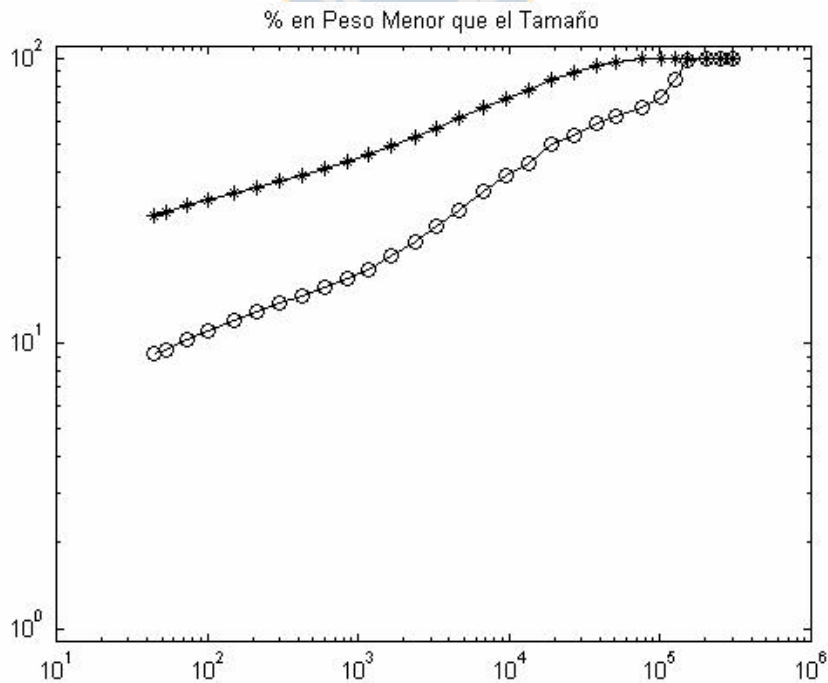


Figura 5.6: Granulometrías de entrada y salida del molino SAG

En la primera experiencia, se simula una alimentación de 1095 ton/h correspondientes a la alimentación compuesta por mineral fresco y carga circulante del chancado de pebbles. La Potencia y el Nivel de llenado del molino se muestran en la figura 5.7.

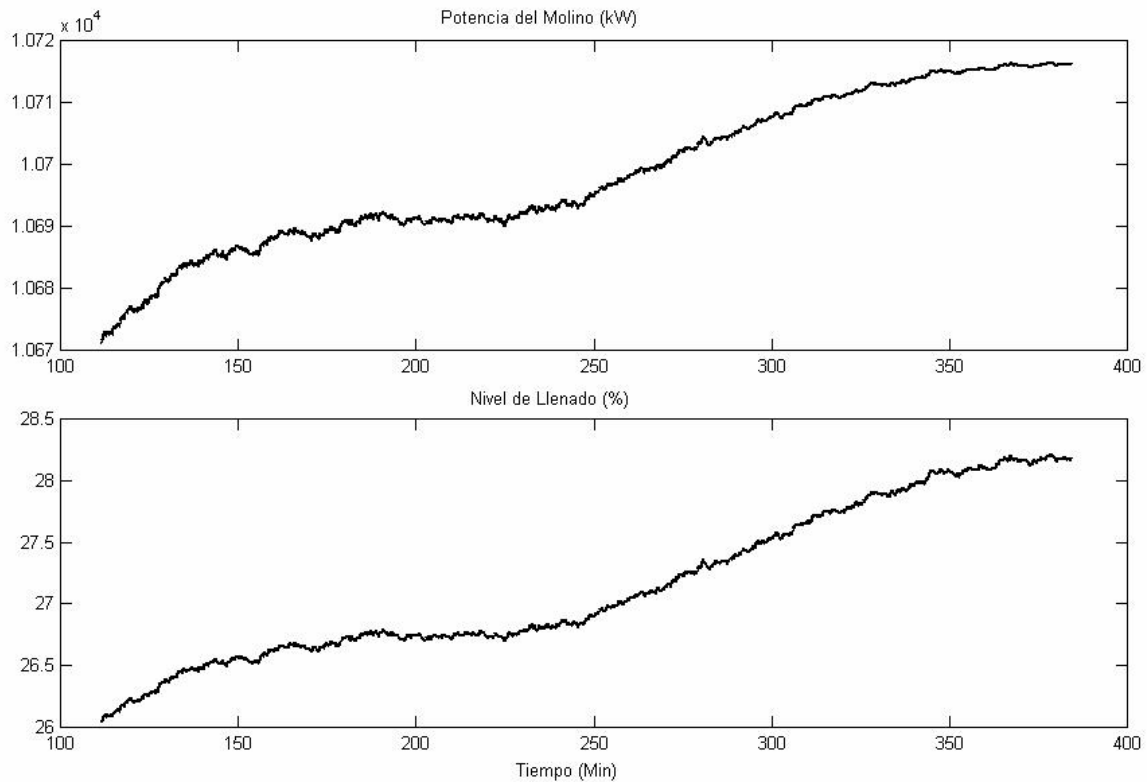


Figura 5.7: Potencia y nivel de llenado del Molino SAG para cambio en la dureza

Un cambio sostenido de la dureza entre 200 y 300 minutos provoca un aumento en el nivel de llenado y en la potencia consumida por el molino el cual comienza a ser significativo en el minuto 250. Se puede apreciar que luego del cambio en la dureza del mineral, el molino sigue operando en una zona estable y por lo tanto en estado estacionario alrededor de 28.2 % en el nivel de llenado y 10.715 MW en la Potencia consumida.

La segunda experiencia simulada para analizar el efecto de un cambio en la dureza del mineral, considera una alimentación compuesta de 1200 ton/h. La Potencia y el Nivel de llenado del molino se muestran en la figura 5.8.

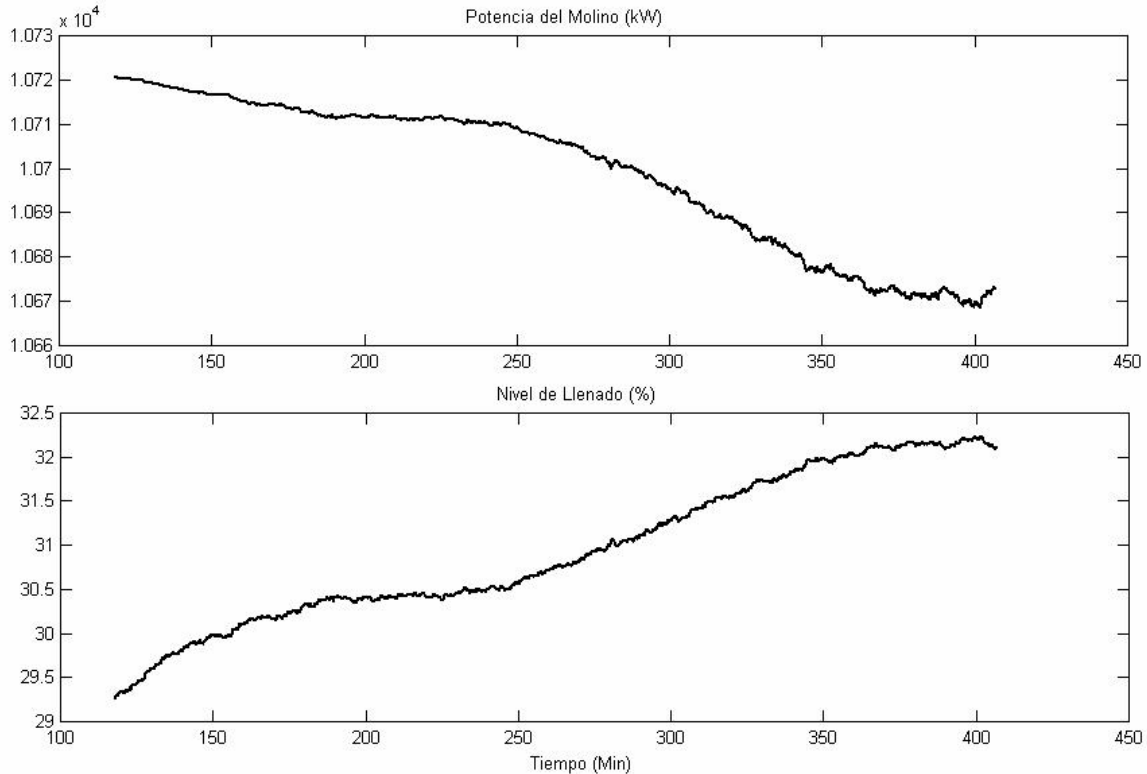


Figura 5.8: Potencia y nivel de llenado del Molino SAG para cambio en la dureza

En la figura 5.8, se observa que alrededor del minuto 190 el molino tiende al estado estacionario de 30.5 % de llenado y 10.71 MW de potencia consumida. Sin embargo, al producirse el cambio de dureza en el minuto 200, el nivel comienza a crecer y la potencia del molino decrece entrando en una zona inestable de operación.

Estas dos experiencias, reflejan que un cambio en la dureza del mineral (dependiendo de las condiciones de operación) puede provocar una inestabilidad en la operación del molino. Esto es un aspecto importante a considerar ya que no son muchas las aplicaciones dedicadas a la determinación de un índice de la dureza “en línea” que permita predecir que ocurrirá con las variables controladas del molino. Por lo tanto, la dureza del mineral debe ser considerada una perturbación a pesar de ser un factor con una influencia significativa en la operación del molino [15].



### 5.3 Relación Potencia-Nivel de llenado

La relación entre el nivel de llenado y la potencia consumida por el molino SAG es una función de tipo cuadrática, esta se muestra a continuación en la figura 5.9.

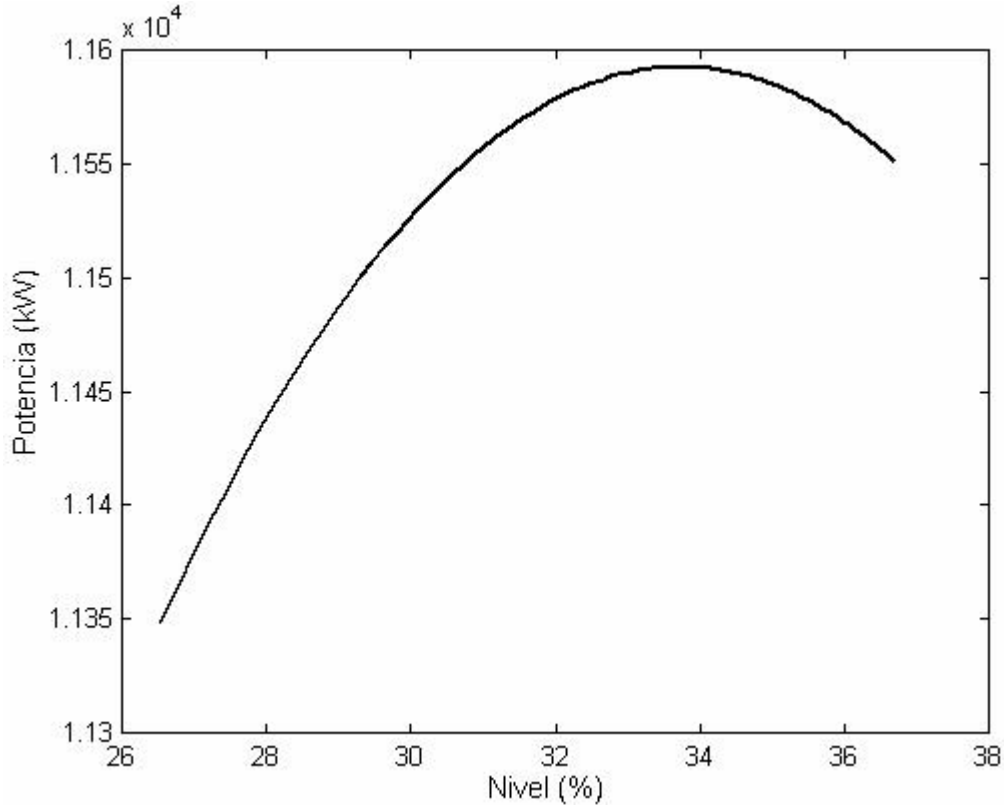


Figura 5.9: Relación entre la Potencia y nivel de llenado del Molino SAG

Este fenómeno característico en la operación de los molinos SAG, se produce por la relación existente entre la masa retenida de mineral en el molino y el torque necesario para mover el molino con el material retenido [15].

El torque es una cantidad rotacional correspondiente a la fuerza de los sistemas con movimiento rectilíneo, este es una medida de cuanto una fuerza actuando sobre un cuerpo provoca su rotación [31]. El cuerpo gira en torno a un eje que llamado pivote y denotado por “o” en la figura 5.10, la relación que permite calcular el torque a partir de la fuerza aplicada, el brazo de momento y el ángulo entre ambos vectores es:

$$\left| \vec{\tau} \right| = \left| \vec{r} \times \vec{F} \right| = \left| \vec{r} \right| \left| \vec{F} \right| \text{sen}(\alpha) \quad [5.1]$$

donde

$r$  : Brazo de momento

$F$  : Fuerza aplicada

$\theta$  : Ángulo existente entre la línea de acción de la fuerza y el brazo de momento

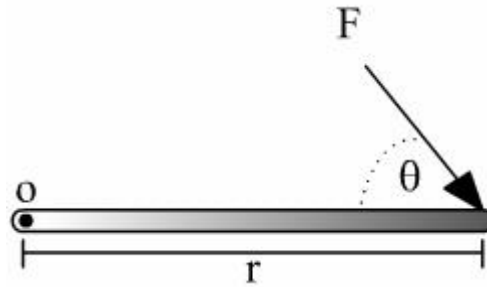


Figura 5.10: Magnitudes físicas consideradas en el cálculo del torque

Observando la ecuación 5.1 podemos concluir que al mantener una fuerza aplicada sobre un cuerpo en el mismo ángulo y disminuyendo el brazo de momento, el torque disminuye provocando una disminución de la velocidad de rotación debido a la analogía existente entre fuerza en movimientos rectilíneos y torque en movimientos rotacionales [31].

Se puede establecer una analogía sencilla entre el sistema de la figura 5.10 y el molino SAG. La figura 5.11 muestra un corte transversal del molino SAG para una masa retenida con un centro de masa "C", una fuerza  $F$  aplicada en el centro de masa con un brazo de momento  $r$  respecto del centro de masa del molino  $O$  [15]

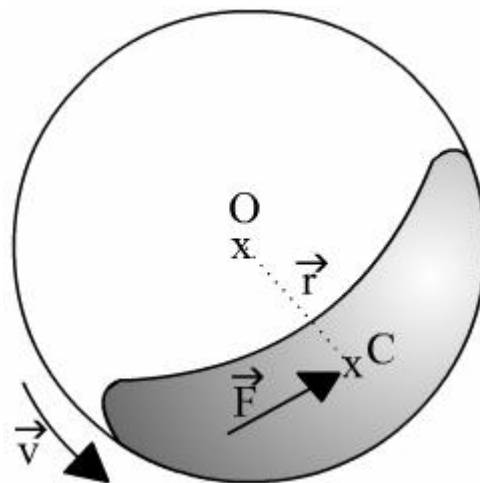


Figura 5.11: Corte transversal de un molino SAG

Cuando el molino opera en la zona estable, un aumento de la masa retenida disminuirá la distancia “ $r$ ” entre ambos centros de masa, esto implica un aumento en el nivel de llenado y un aumento en el torque del molino (potencia) para mantener la velocidad de operación como se muestra en la figura 5.7.

Mientras el centro de masa del mineral retenido posea una distancia considerable con respecto al centro de masa del molino, se mantendrá la operación en la región estable y la proporción directa entre el torque y el nivel de llenado. Por el contrario, cuando los centros de masa se encuentran muy cerca uno del otro, el torque del molino comienza a disminuir ya que la fuerza aplicada a la masa retenida posee un brazo muy pequeño para mantener la velocidad de giro. Esto implica un aumento en el nivel de llenado y una disminución en la potencia consumida por el molino como se muestra en la figura 5.8.

Cuando el molino SAG entra en esta región de operación se produce el llenado del molino y su detención, fenómeno que en la industria se conoce como “atollo de molino” e implica una detención de varias horas (aproximadamente un turno) del proceso y la correspondiente pérdida de dinero por dejar de producir [15]. La figura 5.12 muestra las variables de proceso del molino SAG1 del Concentrador Colón en el momento de producirse un “atollo” [15].

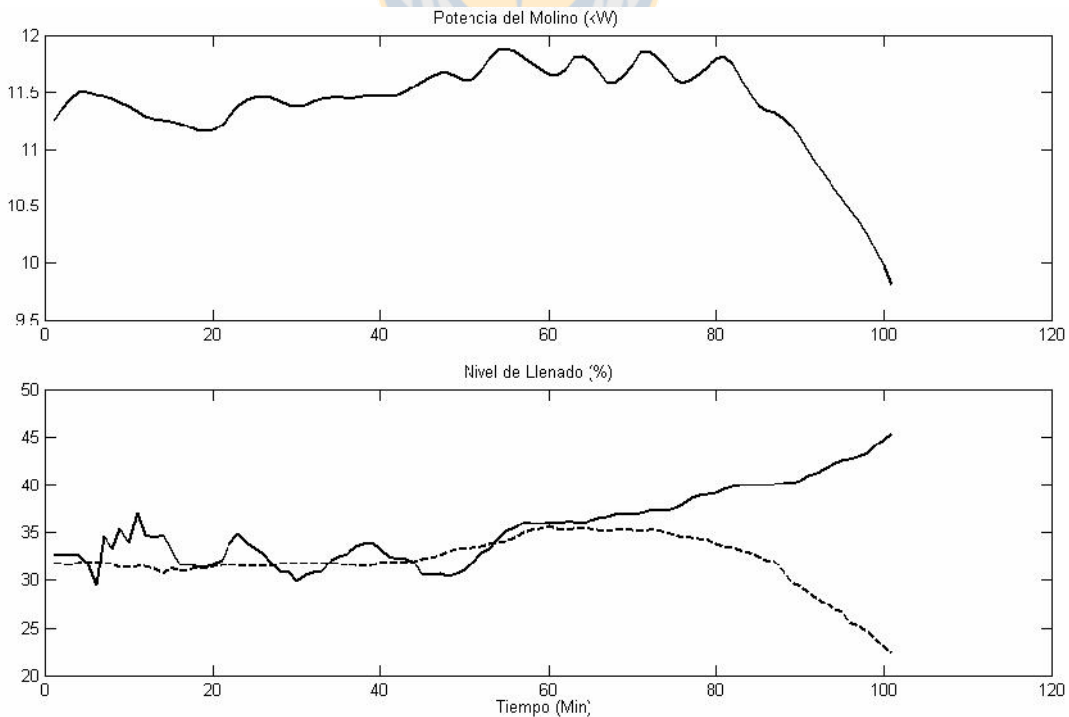


Figura 5.12: Atollo ocurrido en la línea SAG1 del Concentrador Colón

En la figura 5.12 se puede apreciar la tendencia entre la potencia consumida por el molino y el nivel de llenado. La línea pespunteada corresponde a una medición del nivel de llenado del molino en función del torque y la línea continua corresponde al nivel de llenado estimado por un dispositivo en desarrollo llamado “oreja electrónica” que considera más variables y otorga una estimación mas representativa de lo que ocurre con el nivel de llenado.

En el minuto 65 las mediciones del nivel de llenado se separan, debido a la disminución del torque del molino y luego de 18 minutos la potencia del molino comienza a disminuir ocurriendo el “atollo” hasta llegar a un nivel de llenado de 46% momento en el cual se detiene el molino.

Luego de lo comentado en este capítulo, se puede concluir que un sistema de control de molienda SAG debe ser robusto frente a cambios en la granulometría, cambios en la dureza del mineral y debido a la necesidad de operar el molino para obtener el máximo beneficio (maximizar el mineral), se requiere trabajar cerca del máximo de la curva mostrada en la figura 5.9. Esto implica que el molino SAG teóricamente, debe operar en el máximo de la curva y muy cerca de la zona inestable por lo que el sistema de control debe ser capaz de actuar de manera rápida frente a un cambio que provoque la operación en la zona inestable y por ende un “atollo”.

## **Capítulo 6: Diseño y Análisis Cualitativo de la Estrategia de Control Propuesta**

La operación de un molino SAG se basa en el control del nivel volumétrico de llenado, expresado en porcentaje del volumen total ocupado por bolas, agua y mineral. En las plantas SAG que operan hoy en día, el nivel de llenado de medios de molienda fluctúa entre 8 y 14% y el nivel de llenado total de la carga fluctúa entre 26 y 32% dependiendo del diseño del molino [23]. Estas dos variables en conjunto con la energía necesaria para reducir el tamaño del mineral, definen la potencia demandada por el molino y el accionamiento a utilizar. De esta manera, la estrategia de control del molino SAG se basa en mantener el nivel de llenado y la potencia del molino dentro de una banda determinada [23].

Por otro lado, es común pensar que la utilización de una mayor cantidad de energía implica una mejor molienda. Sin embargo, en molinos SAG de velocidad variable el supuesto de variables mecánicas constantes no es válido y evidentemente, el volumen de carga, su composición y la velocidad son variables que modifican el consumo de energía en el proceso complicando el sistema [28].

Como en todo proceso productivo la principal idea es producir cuanto es posible de acuerdo a la disponibilidad y planificación, se debe considerar la maximización del flujo procesado por el molino sin descuidar las restricciones de operación comentadas anteriormente [15]. Sin embargo la mayoría de las aplicaciones de control para molienda SAG y AG previenen los “atollos” trabajando generalmente en la zona estable y muy pocas veces en la zona óptima [21].

Con estos antecedentes comentados, y considerando los fenómenos y restricciones características del proceso de molienda SAG, se propone la siguiente estrategia de control para el circuito de molienda SAG de la figura 6.1.

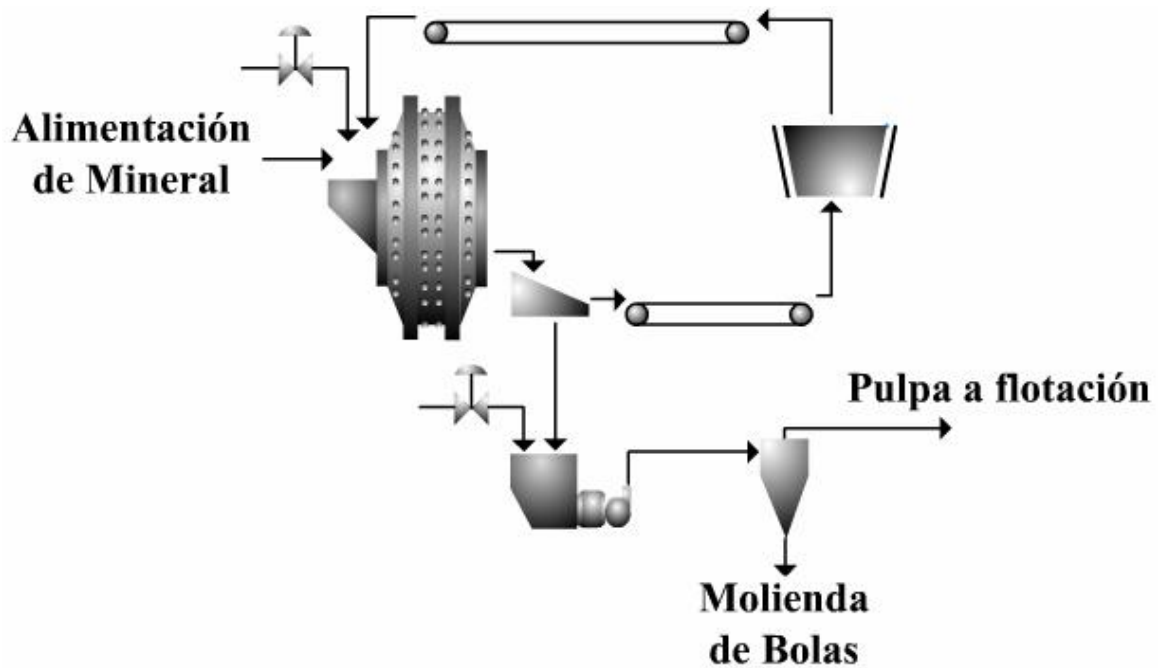


Figura 6.1: Proceso de molienda SAG utilizado en el diseño de la estrategia de control

## 6.1 Diseño de la estrategia de control

Desde un punto de vista *macro*, el proceso de molienda SAG puede ser considerado como un sistema MIMO de 4 entradas, 5 salidas y 2 perturbaciones no medibles como se muestra en la figura 6.2.

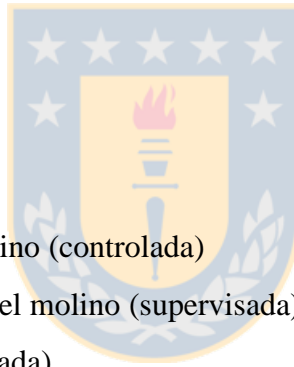


Figura 6.2: Proceso de molienda SAG considerado como un sistema MIMO de 4x4

Las variables utilizadas para el desarrollo del algoritmo de control han sido escogidas de acuerdo a la instrumentación actualmente disponible en terreno en la planta Concentrador Colon. Esto es importante destacar ya que muchas estrategias de control incluyen una medición en línea del tamaño de partícula, sin embargo la poca mantención y el mismo diseño de los equipos PSM y PSI los dejan fuera de operación constantemente y son utilizados en forma *offline*. Las variables consideradas en el desarrollo de la estrategia de control son mencionadas a continuación.

#### VARIABLES DE ENTRADA

- Tonelaje de alimentación
- Flujo de agua fresca al molino (control de razón mineral-agua)
- Velocidad del Molino
- Flujo bomba
- Flujo de agua a pozo



#### VARIABLES DE SALIDA

- Nivel de llenado del molino (controlada)
- Potencia consumida por el molino (supervisada)
- Nivel del pozo (supervisada)
- Densidad de pulpa en batería de hidrociclones (controlada)
- Flujo de pebbles hacia chancado (supervisada)

#### PERTURBACIONES NO MEDIBLES

- Granulometría del mineral de entrada
- Dureza del mineral

#### OTRAS VARIABLES

- Presión en el inlet de la batería de hidrociclones

La estrategia de control propuesta en este trabajo, contempla la maximización del mineral de entrada, considerando la operación del molino en la zona óptima de nivel de llenado y potencia sin violar las restricciones intrínsecas del sistema. Las variables de salida han sido clasificadas como “controladas” aquellas que poseen un valor deseado durante la operación y “supervisadas” aquellas que son requeridas dentro de un rango de operación.

El nivel del pozo es controlado mediante la acción de la bomba, del flujo de pulpa proveniente del bajo tamaño del harnero y del flujo de agua adicionado. La densidad de la pulpa en la batería de hidrociclones es controlada mediante la adición de agua al pozo en función de la pulpa proveniente del bajo tamaño del harnero y de su densidad. El flujo de pebbles hacia los chancadores de pebbles es supervisado bajo un máximo permitido debido a las características de diseño. La presión del inlet de la batería de hidrociclones es utilizada para regular el encendido o apagado de los ciclones y asegurar una correcta clasificación en el overflow.

Un diagrama esquemático de la estrategia de control propuesta se muestra a continuación en la figura 6.3.

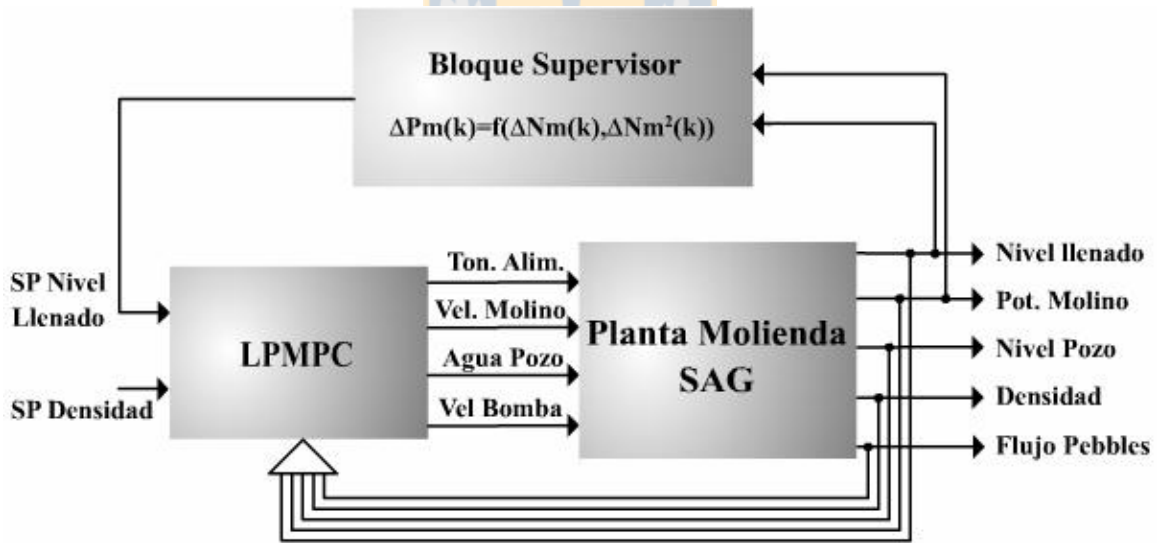


Figura 6.3: Diagrama esquemático de la estrategia de control



### 6.1.1 Bloque Supervisor

El bloque supervisor proporciona el Set point óptimo para el nivel de llenado en función de la estimación “on-line” del gradiente de la curva mostrada en la figura 5.9 mediante un algoritmo recursivo del tipo RLS, el cual se detalla a continuación y puede ser estudiado en [33].

Si se tiene una función cuadrática entre dos variables como se muestra en la figura 6.4, es posible asumir que la ecuación que describe su relación es:

$$y(t) = y_0 - a_0(u(t) - u_0)^2 \quad [6.1]$$

, donde  $y_0$  es el valor máximo de  $y(t)$ ,  $u_0$  es el valor que maximiza a  $y(t)$  y  $a_0$  es el factor de sensibilidad de la curva cuadrática (parámetro de curvatura).

Para realizar la optimización del algoritmo que permite calcular el máximo de la función 6.1 se utilizará el método de Gauss-Newton por su velocidad de convergencia [33], esto es:

$$u(k) = u(k-1) - \alpha \left[ \frac{dy/d^2 y}{du/d^2 u} \right]_{u=u(k-1)} \quad [6.2]$$

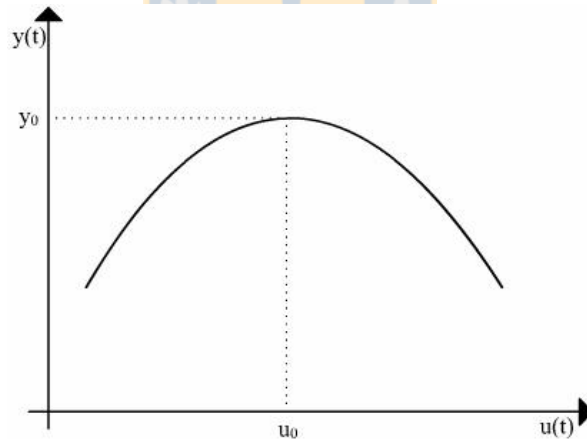


Figura 6.4: Relación cuadrática entre variables  $u(t)$  e  $y(t)$

Si la ecuación 6.1 desea ser minimizada mediante el método de Gauss-Newton, este podría converger en un instante de tiempo [33], en efecto si se tiene

$$y(t) = y_0 - a_0(u(t) - u_0)^2$$

Entonces

$$\left[ \frac{dy}{du} \right]_{u=u(k-1)} = 2a_0(u_0 - u(k-1)) \quad [6.3]$$

y

$$\frac{d^2y}{d^2u} = -2a_0 \quad [6.4]$$

reemplazando 6.3 y 6.4 en 6.2 se obtiene

$$u(k) = u(k-1) - \{u(k-1) - u_0\} = u_0$$

que es la convergencia en un paso del algoritmo de Gauss-Newton para la función 6.1.

Por otro lado, la ecuación 6.1 puede ser escrita en una forma expandida

$$y(t) = n_0 + n_1 u(t) + n_2 u^2(t) \quad [6.5]$$

El coeficiente constante  $n_0$ , puede ser eliminado considerando un modelo incremental en la estimación, esto es diferenciando la ecuación 6.5 para un tiempo  $k-1$  y  $k$ .

$$\Delta y(t) = n_1 \Delta u(t) + n_2 \Delta u^2(t) \quad [6.6]$$

La entrada que maximiza  $y(t)$  es:

$$u(k) = -\frac{\hat{n}_1}{2\hat{n}_2} \quad [6.7]$$

La convergencia del algoritmo se logra cuando los parámetros estimados convergen a los valores

$$\begin{aligned} n_1 &= 2u_0 a_0 \\ n_2 &= -a_0 \end{aligned}$$

Es en este punto, donde la curva se encuentra en su posición óptima [33]. Este análisis para las variables  $u(t)$  e  $y(t)$  ha sido realizado considerando las variables Nivel de llenado y Potencia del molino SAG en el bloque supervisor, lo que permite la generación del set-point de nivel que maximiza la curva que relaciona el Nivel de llenado y la Potencia del molino.

## 6.1.2 Bloque LPMPC

El bloque del controlador LPMPC contiene 5 subsistemas que corresponden a los modelos estimados para las 4 variables (considerando que la Potencia consumida por el molino ha sido considerada como supervisada al generar el set point óptimo del nivel de llenado) y el algoritmo de optimización considerando la predicción mediante estos modelos.

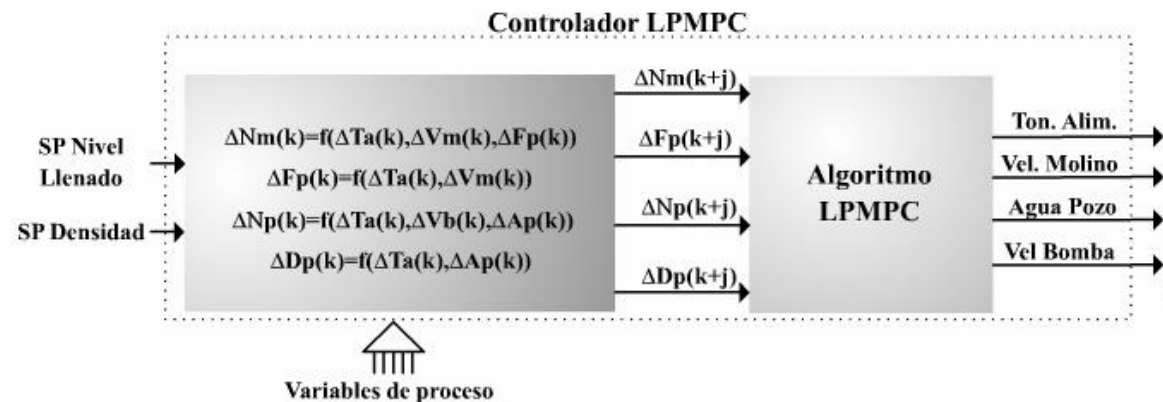


Figura 6.5: Esquema interno controlador LPMPC

La nomenclatura considerada en la figura 6.5 y en adelante es la siguiente:

$T_a$	:	Tonelaje de Alimentación
$V_m$	:	Velocidad molino
$N_m$	:	Nivel de llenado molino
$D_p$	:	Densidad pulpa ciclones
$F_p$	:	Flujo chancado pebbles
$N_p$	:	Nivel del Pozo
$V_b$	:	Velocidad Bomba
$A_p$	:	Agua a pozo

### 6.1.2.1 Modelo predictivo Flujo de pebbles

El modelo predictivo utilizado para estimar el flujo de pebbles considera las siguientes variables independientes:

- Alimentación fresca molino
- Velocidad del molino

Es necesario considerar estas variables con un tiempo de retardo debido a la utilización de correas transportadoras. Con esto en consideración, la estructura del modelo predictivo para el flujo de pebbles es la siguiente:

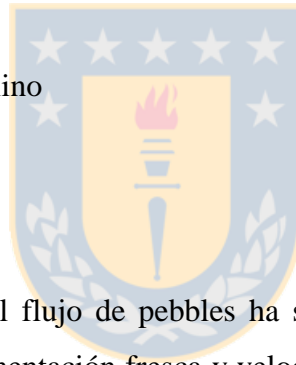
$$\Delta F_p(k) = z^{-1}A(z)\Delta F_p(k) + z^{-19}B(z)\Delta T_a + z^{-18}C(z)\Delta V_m$$

donde  $A(z)$ ,  $B(z)$  y  $C(z)$  son polinomios en el operador  $z$  de orden 1, 4 y 5 respectivamente.

### 6.1.2.2 Modelo predictivo Nivel de llenado

El modelo que permite la predicción del nivel de llenado, considera la estimación recursiva del nivel con las siguientes variables independientes en la identificación:

- Alimentación fresca molino
- Velocidad del molino
- Flujo de pebbles



De la misma manera, el flujo de pebbles ha sido modelado como una variable dependiente del tonelaje de alimentación fresca y velocidad del molino con un retardo de transporte producido por las correas transportadoras utilizadas en este lazo. Esto provoca que el sistema de molienda SAG posea un reciclo interno que es necesario considerar para minimizar las variaciones en las señales de control y evitar oscilaciones en estas.

El problema del reciclo interno del proceso de molienda SAG ha sido solucionado en este trabajo mediante la consideración del modelo recursivo del flujo de pebbles en la estimación recursiva del nivel con las siguientes variables independientes:

- Alimentación fresca molino
- Velocidad del molino
- Alimentación fresca molino (menos tiempo de retardo)
- Velocidad del molino (menos tiempo de retardo)

Con esto en consideración, la estructura del modelo predictivo del nivel de llenado es el siguiente:

$$\Delta N_n(k) = z^{-1}A(z)\Delta N_m(k) + z^{-1}B(z)\Delta T_a + z^{-1}C(z)\Delta V_m + z^{-19}D(z)\Delta T_a + z^{-18}E(z)\Delta V_m$$

donde  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z)$ ,  $D(z)$  y  $E(z)$  son polinomios en el operador  $z$  de orden 1, 10, 6, 4 y 2 respectivamente.

### 6.1.2.3 Modelo predictivo Nivel Pozo

El modelo predictivo utilizado para estimar el Nivel del pozo considera las siguientes variables independientes:

- Alimentación fresca molino
- Velocidad de la bomba
- Agua adicionada al pozo



La estructura del modelo predictivo del Nivel de pozo es la siguiente:

$$\Delta N_p(k) = z^{-1}A(z)\Delta N_p(k) + z^{-11}B(z)\Delta T_a + z^{-1}C(z)\Delta V_b + z^{-1}D(z)\Delta A_p$$

donde  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z)$  y  $D(z)$  son polinomios en el operador  $z$  de orden 1. El orden 1 ha sido escogido debido a que la dinámica de este sistema es más rápida que los otros lazos.

### 6.1.2.4 Modelo Densidad pulpa ciclones

El modelo predictivo utilizado para estimar la Densidad de la pulpa que va a los ciclones considera las siguientes variables independientes:

- Alimentación fresca molino
- Agua adicionada al pozo

La estructura del modelo predictivo del Nivel de pozo es la siguiente:

$$\Delta D_p(k) = z^{-1}A(z)\Delta D_p(k) + z^{-1}B(z)\Delta T_a + z^{-1}C(z)\Delta A_p$$

donde  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z)$  y  $D(z)$  son polinomios en el operador  $z$  de orden 1. De la misma manera el orden 1 ha sido escogido debido a que la dinámica de este sistema es más rápida que los otros lazos.

### 6.1.2.5 Índice de Costo utilizado por el algoritmo LPMPC

Luego de haber definido las variables a utilizar en el algoritmo de control y considerando la ecuación 4.26, se presenta el índice de costo a minimizar por el controlador LPMPC desarrollado en este trabajo.

$$J(u) = \sum_{j=1}^{T_p} |N_m(t+j) - N_m^{ref}(t+j)| + \sum_{j=1}^{T_p} |D_p(t+j) - D_p^{ref}(t+j)| + |\Delta T_a(t+j)| + |\Delta V_m(t+j)| \dots$$

$$\dots + |\Delta V_b(t+j)| + |\Delta A_p(t+j)|$$

sujeto a

$$N_{mMIN} \leq N_m \leq N_{mMAX}$$

$$D_{pMIN} \leq D_p \leq D_{pMAX}$$

$$F_{pMIN} \leq F_p \leq F_{pMAX}$$

$$T_{aMIN} \leq T_a \leq T_{aMAX} \quad \Delta T_{aMIN} \leq \Delta T_a \leq \Delta T_{aMAX}$$

$$V_{mMIN} \leq V_m \leq V_{mMAX} \quad \Delta V_{mMIN} \leq \Delta V_m \leq \Delta V_{mMAX}$$

$$V_{bMIN} \leq V_b \leq V_{bMAX} \quad \Delta V_{bMIN} \leq \Delta V_b \leq \Delta V_{bMAX}$$

$$A_{pMIN} \leq A_p \leq A_{pMAX} \quad \Delta A_{pMIN} \leq \Delta A_p \leq \Delta A_{pMAX}$$

Donde  $T_p = 15$ , es el horizonte de predicción sobre el cual se realiza la optimización. Cabe destacar que las variables supervisadas no se incluyen en este funcional, sin embargo estas variables son consideradas por el algoritmo a ser ingresadas por medio de la ecuación 4.21.

### 6.1.3 Resumen de parámetros utilizados en modelos y algoritmo LPMPC

Las siguientes tablas resumen los parámetros y variables utilizadas en los modelos predictivos descritos anteriormente

	Autoregresivo	Media Movil	
	na	nb	nc
<b>Parametros</b>	1	4	5
<b>Variables</b>	Fp	Ta	Vm

Tabla 6.1: Resumen de parámetros modelo Flujo de Pebbles

	Autoregresivo	Media Movil	
	na	nb	nc
<b>Parametros</b>	1	10 (4)	6 (2)
<b>Variables</b>	Nm	Ta	Vm

Tabla 6.2: Resumen de parámetros modelo Nivel de llenado molino

	Autoregresivo	Media Movil		
	na	nb	nc	nd
<b>Parametros</b>	1	1	1	1
<b>Variables</b>	Np	Ta	Vb	Ap

Tabla 6.3: Resumen de parámetros modelo Nivel del pozo

	Autoregresivo	Media Movil	
	na	nb	nc
<b>Parametros</b>	1	1	1
<b>Variables</b>	Dp	Ta	Ap

Tabla 6.4: Resumen de parámetros modelo Densidad pulpa ciclones

Los valores entre paréntesis de la tabla 6.2, corresponden a los parámetros considerados para las mismas variables pero con el retardo correspondiente debido a la consideración del reciclo del flujo de Pebbles.

## 6.2 Resultados simulaciones del bloque controlador

En esta parte se simula y analiza el desempeño del bloque controlador sin incluir el bloque supervisor. Los set point ingresados al sistema han sido escogidos de manera de observar el comportamiento del controlador frente a requerimientos de variables fuera de los valores permitidos.

Las condiciones de simulación consideran la operación con una granulometría fija con un control de razón alimentación-agua molino constante para mantener 76% en sólidos en la entrada y un cambio en la dureza del mineral en el minuto 260. Las variables de entrada calculadas por el controlador se muestran en la figura 6.6 y las salidas del sistema se muestran en la figura 6.7.

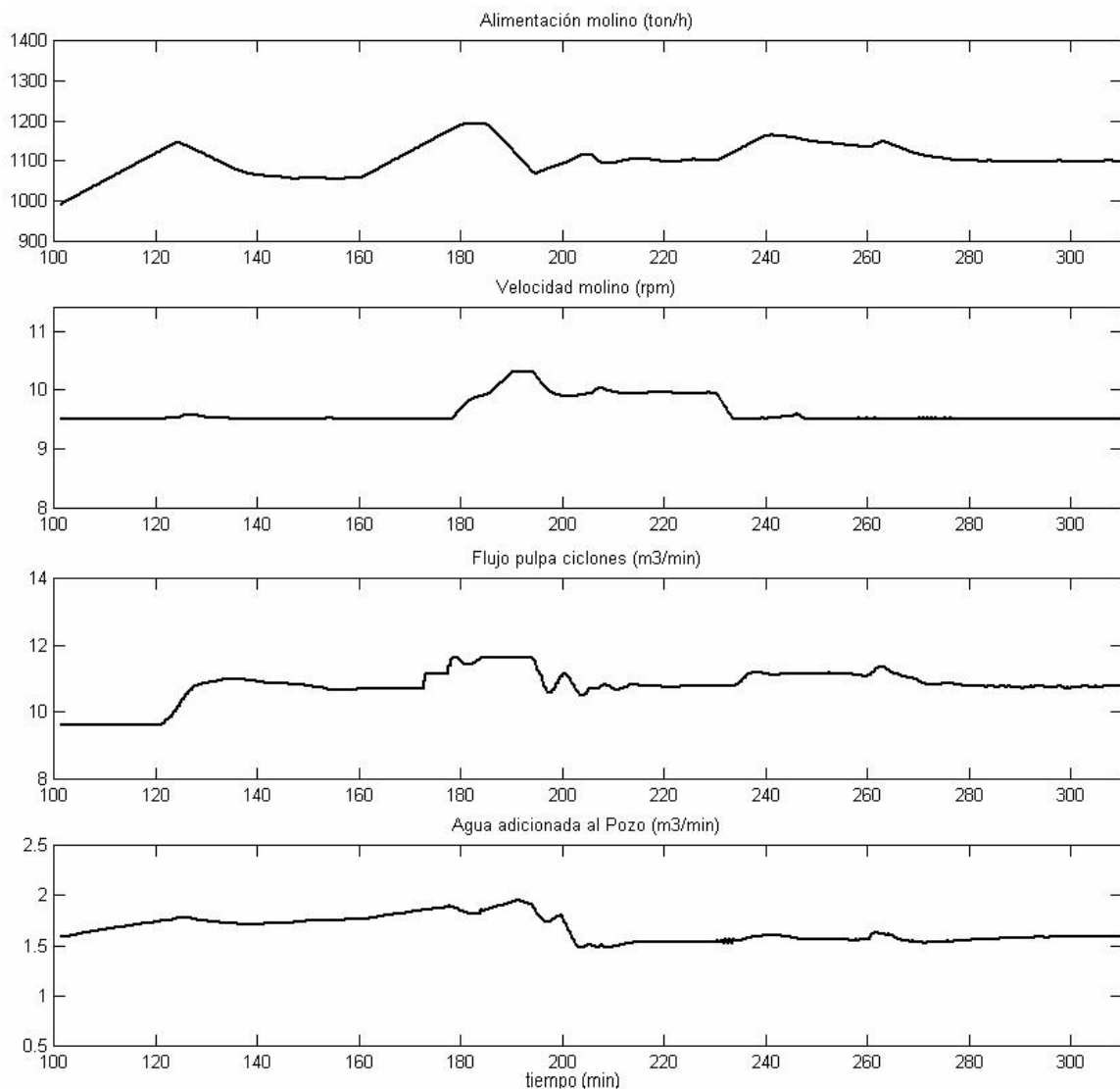


Figura 6.6: Entradas del proceso de molienda SAG



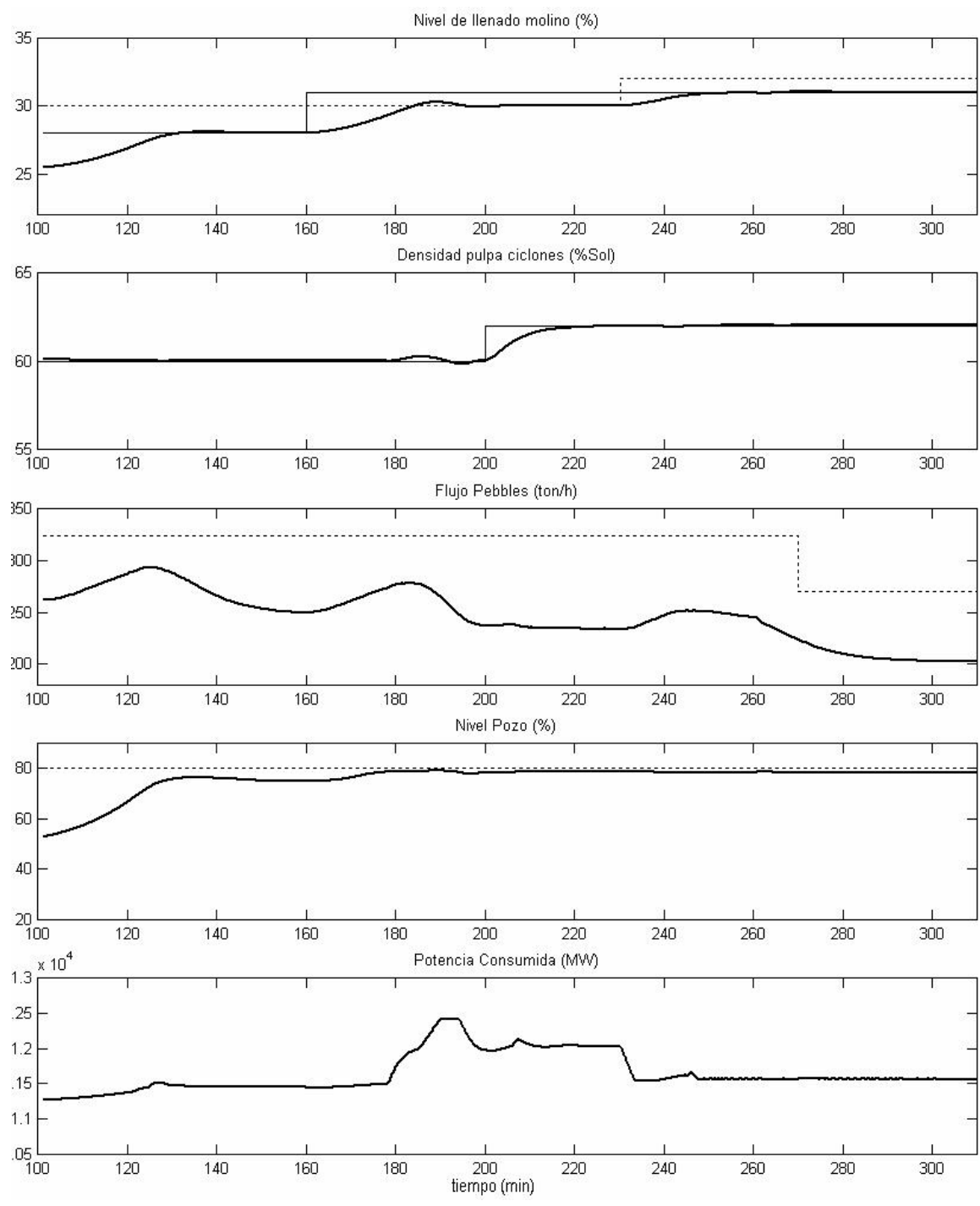


Figura 6.7: Salidas del proceso de molienda SAG

Observando las figuras 6.6 y 6.7 se puede concluir que el controlador respeta las restricciones maximizando el tonelaje de alimentación. En efecto, desde el minuto 100 hasta el minuto 160 se genera un set point menor al valor de la restricción, y el controlador estabiliza las señales para seguir este set point. Por otro lado, en el minuto 160 se genera un set point mayor al valor de la restricción y el controlador estabiliza el nivel de llenado en la restricción con una penalización a la maximización de la alimentación. En el minuto 230 nuevamente se genera un set point menor al valor de la restricción, y el controlador estabiliza las señales para seguir este valor.

Por otro lado, la densidad de la pulpa que va a los ciclones se ve perturbada cuando el nivel de llenado activa la restricción y se prioriza la no violación de esta, frente al seguimiento del set point. Finalmente las variables supervisadas se mantienen dentro del rango permitido, confirmando el manejo global de la planta por medio del controlador.

### **6.3 Resultados simulaciones del bloque controlador y supervisor**

En este capítulo se simula el desempeño del controlador considerando los bloques supervisor y controlador. El set point del nivel de llenado se genera por el bloque supervisor, el cual en función del gradiente estimado de manera recursiva. Además se considera un cambio en la dureza del mineral en el minuto 250.

Las variables de entrada calculadas por el controlador se muestran en la figura 6.8 y las salidas del sistema se muestran en la figura 6.9.

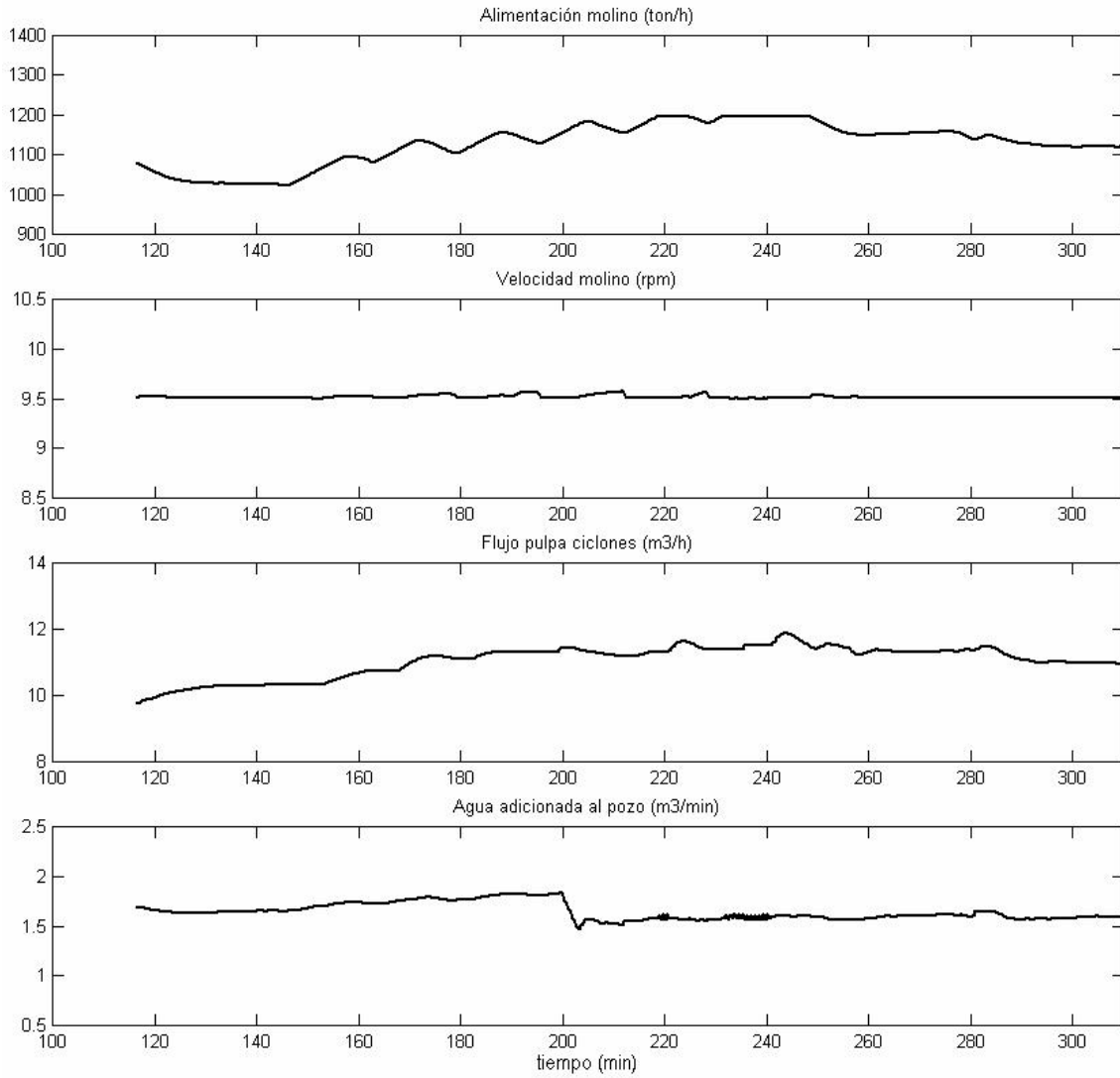


Figura 6.8: Entradas del proceso de molienda SAG

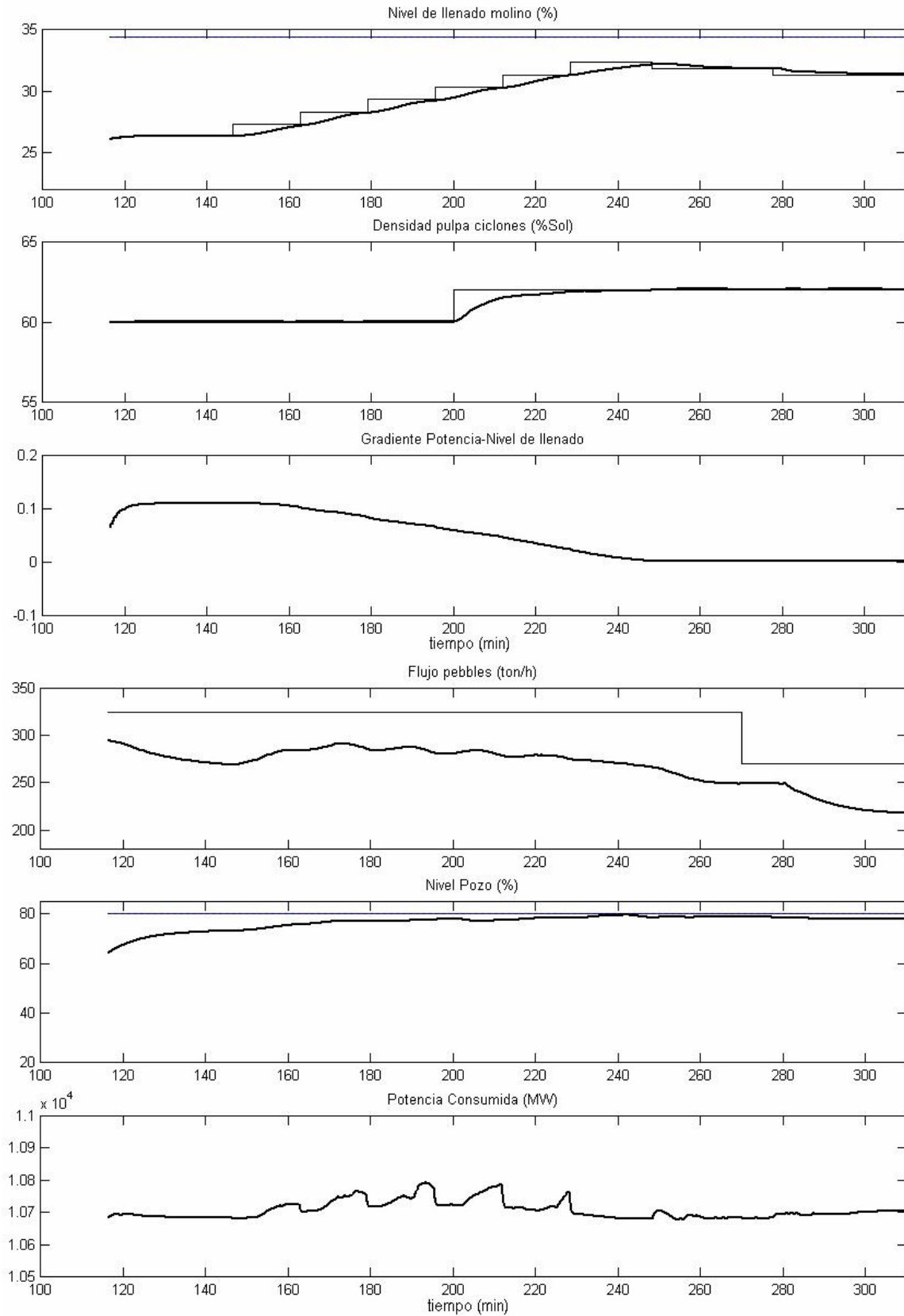


Figura 6.9: Salidas del proceso de molienda SAG

Observando las figuras 6.8 y 6.9 se puede concluir que el bloque supervisor genera el set point del nivel de llenado el objetivo de mantener el gradiente entre la Potencia y el Nivel de llenado en un valor nulo, lo que corresponde al valor máximo de la curva y por lo tanto la operación del molino en el punto óptimo de acuerdo a las condiciones de operación (Granulometría, Dureza y Velocidad del molino).

Por otro lado, las variables controladas siguen las referencias si violar las restricciones. En el minuto 250 se produce el cambio en la dureza del mineral lo que provoca una disminución del tonelaje de alimentación para mantener el gradiente en cero. Esto permite la operación estable del molino obteniendo el máximo beneficio como se habían propuesto los objetivos de diseño.



## **Capítulo 7: Conclusiones**

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas luego de realizar el trabajo de memoria de título. Se han dividido las conclusiones en tres secciones que permiten profundizar los conceptos específicos de las tareas desarrolladas a lo largo del trabajo.

### **7.1 Conclusiones Generales**

El trabajo de memoria realizado se presenta como una alternativa académica para abordar el control predictivo con restricciones de una planta de Molienda SAG. Cabe destacar que se han considerado las variables más importantes en el desarrollo de la estrategia de control debido a una simplificación derivada de los modelos utilizados y de los objetivos del trabajo que consideran utilizar solo las variables disponibles en terreno.

Al analizar la operación de un molino SAG, se puede constatar el grado de dificultad que tiene el control de estos equipos. Estos antecedentes, sumado al hecho de que la mayoría de las técnicas de control para molienda SAG han sido desarrolladas en base a reglas empíricas y un algoritmo que maneja estas reglas para mantener las variables del proceso en los valores permitidos y “óptimos”, motivan el estudio y aplicación de las técnicas de control predictivo a procesos SAG con restricciones.

### **7.2 Conclusiones respecto de la modelación**

Los modelos utilizados en la programación del Toolbox de molienda pertenecen a la bibliografía citada y han sido conciliados con datos tomados desde la planta Concentrados Colón de la División El Teniente de CODELCO. Esto implica que los modelos no han sido modificados en su estructura, presentando algunas desventajas como la no consideración de algunas variables de interés (Torque del Molino SAG).

Algunos modelos, como el del hidrociclón, utilizados en la modelación son de tipo estático, sin embargo al ser utilizados de manera iterativa en cada instante de tiempo y debido a la respuesta casi instantánea de estos equipos frente a cambios en las condiciones de entrada, es posible considerar el uso de estos modelos para la modelación dinámica [24].

La integración de los diferentes modelos en el Toolbox de Molienda y Chancado permite la simulación de circuitos de molienda y chancado con las ventajas de trabajar en el ambiente SIMULINK® el cual permite el desarrollo de estrategias de control con estructura compleja (Control Predictivo, Redes Neuronales, Control Experto, etc...).

### **7.3 Conclusiones respecto de la estrategia de control**

La estrategia de control desarrollada en este trabajo está basada en LPMPC (Linear Programming Model Predictive Control), y permite la operación óptima de las variables de proceso de la planta de manera global mediante la utilización de un bloque supervisor y un bloque controlador predictivo.

El bloque supervisor del controlador desarrollado, mediante la estimación del gradiente en línea de la Potencia consumida y el Nivel de llenado, realiza la modificación del set point del nivel de llenado del molino SAG. El bloque controlador, mediante la estimación predictiva de variables y el algoritmo programado, calcula las variables de entrada al sistema que permiten llevar al proceso a los valores deseados. Esto permite al controlador operar en la zona denominada óptima maximizando el tonelaje de alimentación a procesar sin violar las restricciones impuestas por el proceso.

Considerando la arquitectura Supervisor-Controlador, es posible reemplazar el bloque supervisor por un sistema experto que opere en planta utilizando un controlador predictivo para el manejo de restricciones, o desarrollar una estrategia híbrida que permita utilizar el conocimiento, equipos y programas existentes en planta con una estrategia de control predictivo adecuada.

La operación del bloque controlador predictivo sin el bloque supervisor, permite el seguimiento de los set point si violar las restricciones. Esto es importante debido a que un algoritmo experto o supervisor está sujeto a fallas debido a problemas numéricos por simplemente fallas en algún actuador [15], [24].

Las variables de entrada manipuladas por el controlador, permiten seguir las referencias de manera óptima estabilizándose sin provocar oscilaciones. Además las variaciones en las señales de entrada se minimizan siempre y cuando no se esté cerca de violar un restricción, momento en el cual se prioriza la no violación de esta.

En la actualidad es posible implementar en una planta real un algoritmo predictivo basado en LPMPC. En efecto, para el desarrollo del controlador se ha utilizado un tiempo de muestreo de 24 segundos (debido a las constantes de tiempo y a la identificación del sistema) y el proceso ha sido considerado como un sistema MIMO de 4 entradas y 5 salidas, lo que implica una matriz  $A$  de  $481 \times 151$  variables según se ha desarrollado en el capítulo 4.5. Luego, es posible utilizar cualquier algoritmo que permita resolver un problema de programación lineal sin utilizar más de 5 segundos en obtener los resultados, lo que permite una holgura de varios segundos para poder realizar supervisión de las variables y restricciones en caso de alguna falla o emergencia.



## Capítulo 8: Anexos

### 8.1 Anexo A: “Glosario de términos utilizados”

#### Mena

Roca que contiene metales o elementos valiosos además de *ganga*. Se puede decir que se diferencian de una roca común ya que tienen valor comercial. Sin embargo es necesario considerar la factibilidad técnica-económica de extracción para considerar a una roca como *mena* [18].

#### Ganga

Son especies sin valor comercial que se asocian a las especies minerales. En general la ganga se compone de óxidos sulfuros refractarios (silicatos o aluminatos) químicamente estables [18].

#### Pebbles

Son colpas de tamaño generalmente entre 2” y 4” que poseen una velocidad de molienda menor por encontrarse en la zona de fractura anormal [2].

#### CARMA

*Controller Auto-Regresive Moving-Average*. Modelo recursivo de identificación que posee parte autoregresiva y de media móvil [9].

#### CARIMA

*Integrated Controller Auto-Regresive Moving-Average*. Modelo recursivo de identificación que posee parte autoregresiva y de media móvil integrada, es decir considera las variaciones en las variables de proceso para generar el modelo [9].

#### LPMPC

*Linear Programing Model Predictive Control*. Control predictivo basado en modelos y programación lineal [9].

## PRBS

*Pseudo-Random Binary Sequence*. Secuencia binaria aleatoria utilizada para excitar el sistema con el objetivo de identificar los parámetros del modelo [9].

## MIMO

*Multi-Input Multi-Output*. Sistema dinámico con múltiples entradas y múltiples salidas [9].

## SISO

*Single-Input Single-Output*. Sistema dinámico con una entrada y una salida [9].



## 8.2 Anexo B: “Toolbox Simulador de Molienda y Chancado”

Como se ha mencionado en este trabajo, para la síntesis y desarrollo del controlador y estudio del proceso de planta SAG, se ha utilizado el Toolbox de molienda programado en ambiente SIMULINK® de MATLAB® en el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Concepción.

La interfaz del Toolbok de Molienda y Chancado se muestra en la figura 8.1

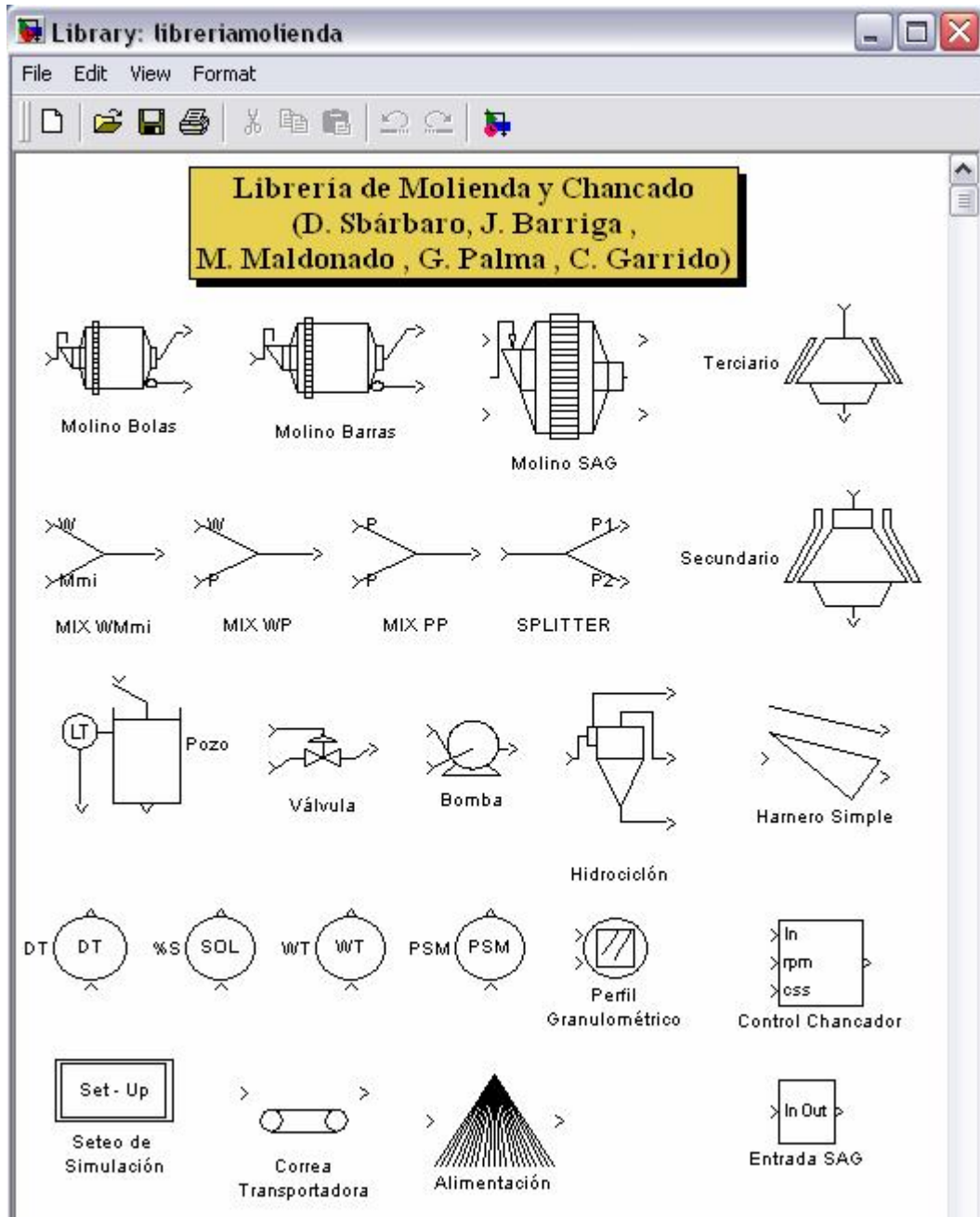


Figura 8.1: Interfaz del Toolbox de Molienda y Chancado

Específicamente en este trabajo se han integrado los distintos modelos programados en distintas memorias de título, como son los modelos de molinos de bolas [24], el chancador y harnero vibratorio [27]. Además, se han mejorado algunos modelos como el del hidrociclón y se ha agregado el modelo del molino SAG. Todo esto integrado permite la simulación de circuitos de molienda y chancado con las ventajas de trabajar en el ambiente SIMULINK® el cual permite el desarrollo de estrategias de control con estructura compleja (Control Predictivo, Redes Neuronales, Control Experto, etc...).

El circuito simulador de la planta SAG1 del Concentrador Colón de la División El teniente de CODELCO es mostrado a continuación en la figura 8.2. En esta, se puede apreciar la interacción de los diferentes modelos y el controlador diseñado, además de la magnitud del trabajo realizado en el cual cada modelo debió ser conciliado con datos de planta y luego agregado al circuito que necesita una conciliación general de los modelos.



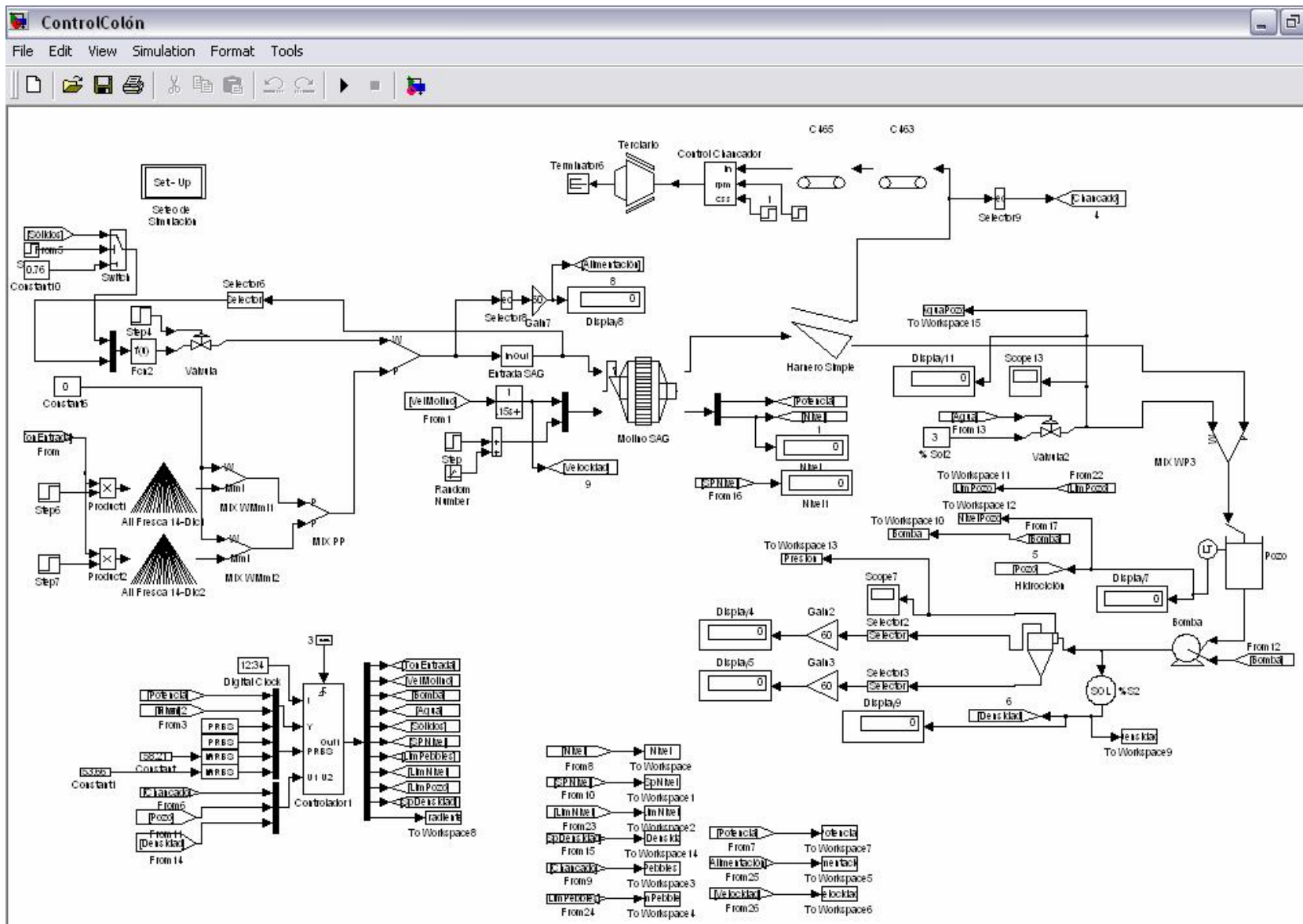


Figura 8.2: Circuito simulador de Planta Molienda SAG Concentrador Colón

## ***BIBLIOGRAFIA***

- [1] Amestica, R., 1993<sup>a</sup>. *Nuevos Modelos de Molienda Semiautógena para Simulación y Control*. Tesis de Magister en ciencias de la Ing. Msc. Ing. Eléctrica, Universidad de Chile, Santiago, (1993).
- [2] Amestica, R., Gonzalez, G.D., Barría, J., Menacho, J. and Castro, O., *A SAG Mill Circuit Dynamic Simulator Based on a Simplified Mechanistic Model*, XVIII International Mineral Processing Congress, Sydney, Australia, (1993).
- [3] Amestica, R., Gonzalez, G., Menacho, J and Barria, J., *A Mechanistic State Equation Model for Semiautogenous Mills*, International Journal of Mineral Processing, 44-45 (1996) 349-360.
- [4] Apelt, T. A., *Inferential Measurement Models for Semi-Autogenous Grinding Mills*, Ph.D. Thesis, Dept. of Chemical Eng, University of Sydney, Australia, (2002).
- [5] Austin, L.G., Concha, F., *Diseño y simulación de Circuitos de Molienda y Clasificación*, CYTED, Concepción, Chile, (1994).
- [6] Austin, Leonard G. *Seminario Especial de Postgrado “Avances en la Molienda y Clasificación de minerales”*, Facultad de Ingeniería, Universidad de Concepción – Junio 2002.
- [7] Broussaud, A., Valdebenito, M., *Advanced Optimizing Control Systems for SAG Mills*, Workshop de Molienda SAG, Viña del Mar, 2001.
- [8] Cáceres, J., Bassaure F., Collado, R., Cipriano, A. y Muñoz, C., *Control de Molino Semiautógeno con Velocidad Variable*, Minería Chilena N° 141.
- [9] Camacho E., Bordons C., *Model Predictive Control*, Springer, 1999.
- [10] Cifuentes, I., Meech, J. A., Mular, L., Raabe, H. and Mitchell, J., *Qualitative Modeling of a Semi-Autogenous Grinding Circuit at Highland Valley Copper (HVC) Mine*, IEEE 0-7803-2559-1/95, (1995).
- [11] Edwards, R., Perry, R., *Svedala Technology and the Science of SAG Control*, Workshop de Molienda SAG, Viña del Mar, 2001.
- [12] Evertsson, C. M., *Output Prediction of Cone Crushers*, Mineral engineering, Vol 12, N° 12, Diciembre 1999.
- [13] Fernández, R.<sup>1</sup>, Viennet, E.<sup>1</sup>, Goles, E.<sup>2</sup>, Barrientos, R.<sup>R</sup> and Telias<sup>3</sup>, W., *On-line Coarse Ore Granulometric Analyzer Using Neural Networks*, ILIPN Institut Galilée, Université Paris

Nord, 2Depto. Ing. Matemática, Universidad de Chile, 3Centro de Investigaciones Minero-Metalúrgicas, Santiago, Chile.

[14] Flintoff, B.C., Bradburn, R. G. and Mular, A. L., *Canadian Trends in the Control of Mineral Processes*; a case of study At Brenda Mines Ltd..

[15] Garrido C., *Recopilación de antecedentes e información en la planta Concentrador Colón de la División El Teniente, reuniones y entrevistas con jefes de turno, instrumentistas de planta y metalúrgicos de proceso*. Octubre 2003 – Marzo 2004.

[16] Gonzalez G., *Control de Plantas de Procesamiento de Minerales*, Programa de capacitación e innovación tecnológica para la minería, Universidad de Chile, 2002.

[17] Gonzalez, G., Barahona, C., Castelli, L., Cipriano, A., Hernández, L and Yacher L., *Control Strategy Testing for a SAG Mill Using a Qualitative SAG Model Designed for that Purpose*.

[18] Hecker C., Garrido, J., González, M., Herrera, R., *Manual de procesos Concentrador Colón División El Teniente "Colón '98"*. Departamento Ingeniería Metalúrgica Universidad de Concepción, 1998.

[19] Herbst, J. A., Pate, W. T. and Oblad, A. E., *Model-Based Control of Mineral Processing Operations*, Powder Technology, 69 (1992) 21-32.

[20] Jones, R. and Wright, A., *Selecting and Configuring Load Cells for AG/SAG Grinding Mill Applications*, George Kelk Corporation, Toronto, Canadá.

[21] Lestage R., Pomerleau A., *Pole-placement optimizing and application to a simulated autogenous grinding circuit*, Groupe de reserche sur les Applications de l'Informatique à l'Industrie Minérale Département de génie électrique et de informatique, Université Laval, Quebec, Canada.

[22] Magne, L., Titichoca, G., *Plantas de Molienda Semiautógena en Chile*, Workshop de Molienda SAG, Viña del Mar, 2001.

[23] Magne, Luis A. "*Estudio del Transporte de masa en molinos SAG*", Tesis D. Sc. Dimet, Universidad de Concepción - Abril 1999.

[24] Maldonado M., *Modelación Dinámica y Control Predictivo con Restricciones de un Circuito de Molienda de Minerales*, Memoria de título Departamento de Ingeniería Eléctrica Universidad de Concepción, 2002.

- [25] Morrel, S. and Latchireddi, S., *The operation and interaction of grates and pulp lifters in autogenous and semi-autogenous mills*, The AusIMM Proceedings Vol. 306 N° 1, (2001).
- [26] Napier-Munn, T.J., Morrel, S., Morrison, R.D. and Kojovic, T., *Mineral Comminution Circuits: Their Operation and Optimization*, Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre, Queensland, Australia, (1996).
- [27] Palma G., *Modelación Dinámica y Control Predictivo con restricciones para una Planta de Chancado*, Memoria de título Departamento de Ingeniería Eléctrica Universidad de Concepción, 2002.
- [28] Ravanal P., *Problemas y aplicaciones de procesos Mineros con Molinos SAG*, Seminario de Proyecto de Titulación para Ingeniería Civil Electrónica.
- [29] Sepúlveda J., Gutierrez R., *Dimensionamiento y Optimización de Plantas Concentradoras Mediante Técnicas de Modelación Matemática*, Centro de Investigación minera metalúrgica CIMM, 1986.
- [30] Sepúlveda, J., *Un modelo fenomenológico de la molienda semiautógena*, GSI/Moly-Cop Sud América, III Simposio de Ing. Metalúrgica, Lima, Perú, 2000.
- [31] Serway A., Robert J., *Física Vol I*, McGraw-Hill Interamericana, 5 a. Edición 2001.
- [32] Valery, W. and Morrel, S., *The Development of a Dynamic Model for Autogenous and Semi-Autogenous Grinding*, Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre, Queensland, Australia, (1995).
- [33] Wellstead P. E., Zarrop M. B., *Self-tuning Systems Control and Signal Processing*, John Wiley & Sons, 1991.