



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
CIENCIAS FÍSICAS

---

# SOLUCIONES TAUB-NUT/BOLT-ADS CON PELO EN LA TEORÍA DE HORNDESKI

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Física

por

Leonardo Nicolás Sanhueza Mardones

---

Director de Tesis : Dr. Cristóbal Corral Badiola

Comisión : Dr. Julio Oliva Zapata  
Dr. Adolfo Cisterna Roa  
Dr. Fernando Izaurieta Aranda

CONCEPCIÓN • CHILE  
AGOSTO 2021



© 2021, Leonardo Nicolás Sanhueza Mardones

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

# Tabla de Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>viii</b>
<b>Resumen</b>	<b>x</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Teorías de Gauge</b>	<b>5</b>
2.1. Monopolo Magnético	6
2.2. Aproximación punto silla de la teoría de Yang-Mills	13
2.2.1. Instantón de Belavin-Polyakov-Schwarz-Tyupkin (BPST)	16
<b>3. Relatividad General</b>	<b>18</b>
3.1. Ecuaciones de campo	19
3.2. Términos de Borde	27
3.2.1. Gibbons-Hawking-York	27
3.2.2. Contratérminos de Emparan-Johnson-Myers	33
3.3. Soluciones a las Ecuaciones de Campo	35
3.3.1. Solución de Schwarzschild y Teorema de Birkhoff	35
3.3.2. Solución de Schwarzschild Anti-de Sitter	41
3.3.3. Taub - NUT	43
<b>4. Teoría de Horndeski de la Gravedad</b>	<b>51</b>
4.1. Lagrangiano de Horndeski	52

## TABLA DE CONTENIDO

---

4.2. Taub-NUT-AdS y Taub-Bolt-AdS . . . . .	55
4.2.1. Modo cero del escalar de Horndeski con métrica de fondo Taub-NUT . . . . .	55
4.2.2. Soluciones de Taub-NUT/Bolt con un campo escalar auto- gravitante . . . . .	56
4.2.3. Branas Taub-NUT/Bolt y Solitones con Campos Axiónicos en Altas Dimensiones . . . . .	72
<b>5. Conclusiones</b>	<b>80</b>
<b>Referencias</b>	<b>82</b>





*A mi madre.*





# Agradecimientos

A mi parecer esta parte es la que más complicada de escribir, puesto que uno tiene a tantas personas en mente que fueron cruciales para llegar a estas instancias. Una de las personas que más agradezco es a mi mamá, por su apoyo incondicional y por aguantar mis pataletas. Sin ella no hubiese podido llegar hasta acá, porque es mi pilar fundamental en la vida. Mis dos hermanos y mi querida hermana, siempre confiaron en mis capacidades, dándome aliento para seguir adelante y ayudándome a superar obstáculos emocionales. Muchas gracias familia.

Durante mi estadía en la universidad he conocido muchas personas que fueron parte de mi formación académica. Entre ellos los profesores que impartieron asignaturas fundamentales y que me entregaron conocimiento base para este camino. Quiero agradecer al Dr. Juan Crisóstomo, Dr. Fernando Izaurieta, Dr. Guillermo Rubilar, Dr. Claudio Faúndez, Dr. Jaime Araneda, Dra. Myrna Sandoval. Agradezco al Dr. Andrés Anabalón por todo el tiempo que me dedicó desde mis inicios en el programa de magíster y a los desafíos que propuso que hicieron que me exigiera con tal de mejorar mis capacidades como futuro investigador. También quiero destacar a las personas que me ayudaron especialmente en mi formación, dedicando gran parte de su tiempo para ello. Primero quiero agradecer profundamente al profesor Julio Oliva por su compromiso, dedicación hacia sus estudiantes y toda la paciencia que me tuvo, en donde destaco que puso todos sus esfuerzos en enseñarnos contenidos de relevancia para ser investigador. El es un pilar fundamental en el proceso que estoy llevando a cabo. Además, quiero añadir a los increíbles profesores que conocí a lo largo del magíster; a mi director de tesis, al Dr. Cristóbal Corral, con quien colaboré para lograr mi primera publicación y del cual aún me queda mucho que aprender. Agradecer la infinita paciencia que tuvo durante mi proceso de escribir la

tesis. Al Dr. Adolfo Cisterna, una tremenda persona, con quien tuve la oportunidad de colaborar en mi segunda publicación.

Además de profesores, mis amigos fueron de vital importancia en mi proceso de formación. Personas especiales con las cuales hemos compartidos muchos momentos gratos en la licenciatura y magíster. Quiero agradecer a Macarena y a mis amigos Nicolás Mora, Patricio Escalona, Gonzalo Barriga, la nueva Dra. Carla Henríquez, Jeremy Echeverría, José Figueroa, Nicolás Cáceres, Ricardo Stuardo, Marcelo Oyarzo, César Riquelme, Esteban Arratía, más conocido como Stiven Jimmy Hendrix Joking Peich, Matías Cardenas, Daniel Concha, Marcel Yañez. Si me olvido de alguien por favor que me perdone.

Esto no hubiese sido posible sin la ayuda del proyecto de cooperación internacional 2019/13231-7, FONDECYT 1170279, FONDECYT N°11200025 "Gravitational Instantons Beyond General Relativity, y a la Dirección de Postgrado de la Universidad de Concepción por otorgarme la beca de articulación.



# Resumen

En esta tesis, estudiamos soluciones Euclídeas tipo instantones gravitacionales en la teoría tensor-escalar de Horndeski. En específico, presentamos diferentes soluciones Taub-NUT/Bolt-AdS en un sector que posee acoplamiento cinético no-minimal de los campos escalares al tensor de Einstein. En cuatro dimensiones, encontramos una solución analítica que es localmente AdS, sostenida por un campo escalar de perfil radial que gravita como la constante cosmológica. Estudiamos la termodinámica usando la acción Euclídea on-shell renormalizada y encontramos que la solución posee ciertas semejanzas con AdS foliado no trivialmente. Sin embargo, la presencia de la cuerda de Misner induce una entropía constante; similar a lo que ocurre en procesos reversibles dentro de sistemas termodinámicos aislados. Posteriormente, encontramos una solución numérica que se aproxima asintóticamente a la primera solución y encontramos su masa analíticamente usando el formalismo de Balasubramanian-Kraus para la renormalización del tensor de energía-momentum del borde. En más dimensiones, obtuvimos p-branas y también solitones con carga de NUT; ambos soportados por la existencia de p campos escalares de Horndeski con perfil axiónico. Estudiamos las propiedades termodinámicas de estas soluciones a partir de métodos Euclídeos y encontramos que se satisface la primera ley de la termodinámica. Además, encontramos restricciones del espacio de parámetros de la teoría de Horndeski y también de la carga de NUT, a partir de la positividad de la masa, entropía y el calor específico de las p-branas y del soliton.

# Abstract

In this thesis, we study Euclidean solutions regarded as gravitational instantons in Horndeski's scalar-tensor theory. Specifically, we present different Taub-NUT/Bolt-AdS solutions in a particular sector possessing non-minimal kinetic coupling to the Einstein tensor. In four dimensions, we find an analytic solution which is locally AdS, supported by a scalar field with a radial profile that gravitates as the cosmological constant. We study their thermodynamics using the renormalized Euclidean on-shell action and we find that the solution bears a close resemblance with AdS with non-trivial slicing. However, the presence of the Misner string induces a constant entropy; similar to what happens in reversible processes within isolated thermodynamic systems. Then, we find a numerical solution that approaches asymptotically to the former and we find their mass analytically through the renormalized boundary stress-tensor proposed by Balasubramanian-Kraus. In higher dimensions, we find p-branes and solitons with NUT charge; both supported by the existence of p Horndeski scalar field with an axionic profile. We study the thermodynamic properties through Euclidean methods and we find that the first law of thermodynamics is satisfied. Moreover, constraints on the parameter space of Horndeski gravity and NUT charge are obtained by demanding positivity of the mass, entropy, and specific heat of the p-branes and soliton.



# Capítulo 1

## Introducción

Las soluciones estacionarias no singulares Euclídeas de las ecuaciones de Yang-Mills con acción finita, también conocidas como instantones, tienen gran relevancia en teoría cuántica de campos [1, 2]. Estos representan efectos no perturbativos a nivel cuántico y aparecen como principales contribuciones a observables físicos. En formalismo de integrales de camino, los instantones proporcionan puntos de silla que pueden ser utilizados para calcular amplitudes de transición entre vacíos topológicamente inequivalentes [3, 4]. La existencia de estos en las teorías de Yang-Mills implica una estructura no trivial del vacío, el cual tiene efectos observables a niveles cuánticos [5, 6].

El análogo gravitacional de los instantones ha llamado la atención de los investigadores puesto que se podría esperar que jueguen un rol similar en gravedad cuántica [7]. Una clase particular de métricas que admiten esta interpretación, corresponden a la versión Euclídea de una solución encontrada por Taub-Tamburino-Unti-Newman [8, 9], conocida como Taub-NUT, cuyo distintivos observacionales han sido estudiadas en [10, 11]. Su topología no trivial es caracterizada por el índice de Pontryagin, que entrega la diferencia entre formas armónicas duales y anti-autoduales sobre la variedad [12]. Ellas tienen conexión con el teorema de índices del operador de Dirac, lo cual contribuye a la anomalía gravitacional axial a nivel cuántico [13, 14].

En signatura Lorentziana y cuando se considera la variedad base esférica, la posición de la cuerda de Misner (análogo gravitacional a la cuerda de Dirac) se puede

hacer inobservable imponiendo periodicidad a la coordenada temporal. Sin embargo, esta condición implica la presencia de curvas tipo tiempo cerradas. Es por ello que en general se considera la contraparte Euclídea, que comúnmente se interpreta como un instantón gravitacional. Es prudente mencionar que la continuación analítica de este espaciotiempo, con variedades localmente hiperbólicas y planas, admiten soluciones no singulares ni con curvas tipo tiempo cerradas [15–17]. Además, la extensión en coordenadas de Kruskal puede obtenerse en signatura Lorentziana abandonando la periodicidad de la coordenada temporal [18]. De hecho, desarrollos recientes muestran que los resultados de que el espaciotiempo resultante es geodésicamente completo, libre de patologías para observadores en caída libre, y su termodinámica de fase extendida, está ausente de volumen termodinámico negativo [19–21]; algo que no está garantizado en el caso Euclídeo [22, 23].

Una aplicación de interés de la geometría de Taub-NUT es la construcción del monopolo de Kaluza-Klein [24, 25], el cual ha sido motivado por diferentes estudios, desde la física teórica a la geometría diferencial [26–29]. La solución de Taub-Bolt está dotada de un horizonte y es semejante a los agujeros negros Euclídeos [30]. Debido a esto, sus propiedades termodinámicas es un área de investigación que atrae y se encuentra activa, que van desde su estructura de fase extendida hasta los motores térmicos holográficos [21, 22, 31–35]. Una de las propiedades más destacables de este espaciotiempo es que rompe la relación área/entropía por la presencia y contribución no trivial de la cuerda de Misner [36–38]. Adicionalmente, la carga magnética de los campos diónicos en espacios Taub-Bolt se encuentra que son de naturaleza cuántica topológica, mientras que la carga eléctrica es cuantizada similarmente que en el caso del monopolo de Dirac [39]. Los aspectos holográficos de estos espaciotiempos que poseen de carga de NUT han sido estudiados en el contexto de la correspondencia de Kerr/Teoría de campos conformes (Kerr/CFT) para los agujeros negros Kerr-NUT-AdS [40–43]. De hecho, los fluidos holográficos con vorticidad no trivial pueden ser descritos en la frontera considerando que la geometría interior posea carga de NUT [44–47]. Algunas soluciones Taub-NUT/Bolt han sido encontrada con teorías más allá de relatividad general, e.g. en el límite de bajas energías de teoría de cuerdas [48–50], en gravedad de Lovelock [51–54] y más allá [55], teorías conformalmente acopladas [56], gravedad modificada de Chern-Simons [57], y teoría de gauge

---

de la gravedad [58, 59].

Por otro lado, el límite de bajas energías de extensiones ultravioleta de la gravedad [60–63], usualmente predice campos escalares en su espectro de partículas [64, 65], así como correcciones a la curvatura de orden superior al principio de acción [66]. De hecho, la reducción dimensional de este último también induce campos escalares en la teoría efectiva [67, 68]. Desde el punto de vista de la correspondencia AdS/CFT, los campos escalares son relevantes cuando describen sistemas fuertemente acoplados [69–71], dado que estos introducen nuevas fuentes en la teoría cuántica de campos dual en la frontera. Estos pueden ser usados para describir superconductores holográficos [72–74] como también mesones a través de AdS/QCD [75–77]. Estos hechos muestran que el campo escalar juega un rol importante en nuestra descripción de la naturaleza.

El objetivo de este trabajo es mostrar que las soluciones de Taub-NUT/Bolt-AdS, también existen en un sector particular de la teoría de gravedad de Horndeski. Para lograr este cometido, nos enfocamos en el acoplamiento no minimal del campo escalar al tensor de Einstein, donde encontramos diferentes soluciones. En primer lugar, obtenemos el modo cero del escalar de Horndeski propagándose en una métrica de fondo Taub-NUT, y mostramos que la densidad de energía se anula en los puntos fijos<sup>1</sup>, mientras que la norma de la corriente conservada asociada a la simetría de desplazamiento, diverge. Sin embargo, se sabe que esta condición puede ser removida demandando que la componente radial de la corriente escalar se anule. Considerando su backreaction y la condición de regularidad de la corriente conservada en los puntos fijos, se obtiene una solución Euclídea localmente AdS originada por un campo escalar auto-gravitante cuyo tensor energía-momentum on-shell gravita como una constante cosmológica. Las propiedades termodinámicas de la solución fueron encontradas a partir de métodos Euclídeos introduciendo contratérminos que regularizan la acción on-shell. Luego, analizamos el comportamiento de la métrica cerca de un conjunto de puntos fijos de cero y dos dimensiones, y resolviendo este sistema numéricamente para encontrar soluciones Euclídeas localmente asintótica AdS. Calculamos la masa de la solución numérica analíticamente evaluando el

---

<sup>1</sup>Los puntos fijos de los vectores de Killing corresponden al conjunto de puntos en donde estos se anulan.

tensor de energía-momentum de la frontera renormalizada en el infinito. En más dimensiones, encontramos p-branas Taub-NUT/Bolt-AdS analíticas considerando un espacio producto entre el espacio de fibrado de Hopf Kähler y  $\mathbb{R}^p$ , soportado por p-escalares de Horndeski acoplados no minimalmente con un perfil axiónico. Obtenemos restricciones en el espacio de parámetros demandando positividad en la entropía y calor específico. Los resultados de este trabajo fueron publicados el 2021 en Physical Review D (ver [78]).

Esta tesis se organiza de la siguiente manera: El Capítulo 2 introduce una pequeña parte de lo vasto que son las teorías de gauge, donde principalmente se describe las implicancias de suponer una carga magnética en las ecuaciones de Maxwell, y se explica la acción de Yang-Mills y el instantón Belavin-Polyakov-Schwartz-Tyupkin (BPST). En el Capítulo 3 se abordan los términos correctivos de la acción de Einstein Hilbert, así como las soluciones de Schwarzschild y Taub-NUT como sus variantes en AdS. Por otro lado el Capítulo 4 se motiva la utilización de la teoría de Horndeski y se muestran el grueso de los cálculos en sector de Horndeski con simetría de desplazamiento. Aquí estudiamos las soluciones, tanto analíticas como numéricas de Taub-NUT/Bolt-AdS en la teoría de Horndeski que estamos interesados. Además, en este capítulo se analizan branas y solitones con campos axiónicos para las soluciones Taub-NUT/Bolt. Finalmente, el Capítulo 5 presentamos las conclusiones y detalles finales.

## Capítulo 2

# Teorías de Gauge

Las teorías de gauge han sido un recurso muy valioso para los físicos a la hora de estudiar la naturaleza, la cual se rige por cuatro interacciones fundamentales; electromagnetismo, fuerza nuclear débil, fuerza nuclear fuerte y la gravitación. ¿Pero que es una teoría de gauge? Corresponde a una teoría de campo estrechamente relacionada con los grupos de simetría. Estos nos permiten estudiar si una teoría es invariante local bajo transformaciones, tales como las traslaciones, rotaciones, entre otros. Este concepto surge luego de que Hermann Weyl en 1918 diera las bases matemáticas de una teoría de gauge no-abeliana en un intento de describir en una sola teoría al electromagnetismo y la gravitación. En el trabajo realizado por este, fue la primera vez que aparece el concepto de invarianza y transformación de gauge. A pesar de que es una idea genuina, fue solo un intento puesto que esta falla como una teoría física. Sin embargo, esto nos permitió entender lo que es la invarianza de gauge. Esto hizo que Weyl hiciera una reinterpretación de su teoría, pero aún así, la comunidad no aceptó su trabajo, pues no aportaba física nueva; era meramente matemática, lo cual no fue motivación para los físicos.

Años más tarde, la idea de la invarianza de gauge como un principio de simetría, fue retomada por Yang y Mills quienes generalizaron los grupos de gauge no-abeliano, lo cual da una descripción bien lograda de las interacciones débiles y fuertes. Hoy en día se sabe, que el estudio de estas interacciones no podrían ser estudiadas sin la descripción teórica de los gauge.

Esta forma de entender la física nos conduce a pensar que estas interacciones

pueden ser estudiadas a partir de una sola interacción fundamental, es decir, de una teoría de gran unificación y que sería regida bajo el principio de gauge. En este capítulo trataremos las consecuencias que surgen al agregar un monopolo magnético en las ecuaciones de Maxwell. Por otro lado, se trata la importancia de la aproximación de punto silla en el contexto de los instantones en la teoría de Yang-Mills.

## 2.1. Monopolo Magnético

Una de los aspectos topológicos más intrigantes que esconde las ecuaciones de Maxwell, corresponden a la ausencia de los monopolos magnéticos. Para dilucidar la naturaleza de este, en caso que exista, vamos a definir un monopolo con la siguiente densidad de carga

$$\rho_m(\vec{r}, t) = q_m \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.1.1)$$

con  $\vec{r}' = \vec{r}'(t)$ . Así, las ecuaciones de Maxwell en presencia de  $\rho_m$  corresponden a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad (2.1.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m, \quad (2.1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.1.5)$$

donde

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \rho_e = \rho_e(\vec{r}, t) = q_e \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (2.1.6)$$

$$\vec{J}_e = \rho_e(\vec{r}, t) \vec{v}. \quad (2.1.7)$$

Si nos enfocamos en la ecuación de Ampère-Maxwell, entonces se infiere que el movimiento de la carga magnética generará una corriente magnética  $\vec{J}_m = \rho_m(\vec{r}, t) \vec{v}$ . Entonces, a partir de la ecuación de continuidad sabemos que la carga magnética se conserva,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0. \quad (2.1.8)$$

Comprobemos que (2.1.8) sea consistente con las ecuaciones de Maxwell. Para ello, consideremos la ecuación de Faraday-Lenz

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad / \quad \vec{\nabla} \cdot, \quad (2.1.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right), \quad (2.1.10)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}, \quad (2.1.11)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0. \quad (2.1.12)$$

Se observa que no se encuentra el término de la corriente magnética. Para dar solución a este problema hacemos una modificación de la ley de Ampere, es decir

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{C}, \quad (2.1.13)$$

donde  $\vec{C}$  es un campo vectorial a determinar. Aplicando la divergencia en ambos lados de la ecuación

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{C} \right), \quad (2.1.14)$$

$$0 = -\mu_0 \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{C}. \quad (2.1.15)$$

A partir de esta ecuación es directo ver que si  $\vec{C} = -\mu_0 \vec{J}_m$ , entonces la ecuación de continuidad se satisface. A partir de esta ecuación tenemos que la ley de Faraday-Lenz modificada corresponde a

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{J}_m \quad (2.1.16)$$

de la cual es totalmente compatible con la ecuación (2.1.8).

Naturalmente podemos preguntarnos, ¿Cuál es el campo magnético generado por el monopolo?

Para dar respuesta a esto, vamos a suponer que el monopolo se ubica en el centro

del sistema de coordenadas, integrando la ley de Gauss para el monopolo sobre un volumen  $V$  con frontera  $S$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d^3r &= \mu_0 \int_V \rho_m d^3r, \\
 \oint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{r} &= \mu_0 q_m \int_V \delta^{(3)}(\vec{r}) d^3r, \\
 |\vec{B}| \cdot 4\pi r^2 &= \mu_0 q_m, \\
 \implies \vec{B} &= \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \hat{r}.
 \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Debemos notar que las definiciones usadas para la descripción de las cargas puntuales

$$\rho_e = q_e \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'), \tag{2.1.18}$$

$$\rho_m = q_m \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'). \tag{2.1.19}$$

Por otro lado, estudiemos el comportamiento del potencial vectorial. Para ello consideremos lo siguiente

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 q_m}{4\pi r} \cot \theta \hat{\phi} \equiv A_\phi \hat{\phi}. \tag{2.1.20}$$

Debemos asegurarnos que este potencial nos conduce a la ecuación (2.1.17), así

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ 0 & 0 & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}, \\
 &= -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) \hat{r}, \\
 &= \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \hat{r},
 \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

lo cual nos conduce al resultado esperado.

Notemos que al momento de querer definir un potencial vectorial  $\vec{A}$ , nos encon-

tramos que hay problema a nivel global. Pues, de  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , se tiene

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{r} = \oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d^2\vec{r} = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (2.1.22)$$

Al analizar este término, nos encontramos con una contradicción al comparar con el flujo generado por el campo magnético (2.1.17), pues se sabe que la esfera es compacta, y no posee borde, i.e.  $\partial S = \emptyset$ . Entonces, la noción de flujo definida a través del potencial vectorial anterior está en contradicción de la siguiente relación encontrada

$$\oint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{r} = \mu_0 q_m. \quad (2.1.23)$$

Para solucionar este problema se considera una esfera que será dividida en dos parches (figura (2.1.1)),  $S = S^+ \cup S^-$ , y además se definirán potenciales vectoriales en cada parche.

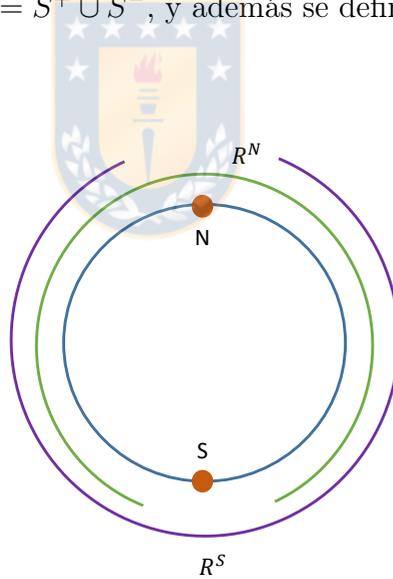


Figura 2.1.1: División de la esfera en su hemisferio norte “N”, en donde se excluye  $\theta = \pi$ , y en su hemisferio sur “S”, que excluye  $\theta = 0$ .

Ahora, vamos a considerar potenciales vectoriales definidos en cada uno de los parches, dados por

$$\vec{A}_+ = -\frac{\mu_0 q_m (\cos \theta - 1)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\phi}, \quad (2.1.24)$$

$$\vec{A}_- = -\frac{\mu_0 q_m (\cos \theta + 1)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\phi}. \quad (2.1.25)$$

Notemos que en  $\vec{A}_+$  es singular en  $\theta = \pi$ , por lo que es válido solo para la región  $S^+$ ; en esta región se excluye ese punto, siendo válido en el rango  $\theta \in [0, \pi)$ . Así mismo  $\vec{A}_-$  es singular en  $\theta = 0$ . Entonces el rango de coordenadas válido para este corresponde a  $\theta \in (0, \pi]$ , la cual es la región  $S^-$ . Los potenciales son válidos en su propia región, por lo que para estudiar el sistema debemos considerar la región donde hay solapamiento. Estas singularidades son las conocidas *cuerdas de Dirac* y el tratamiento de que estamos utilizando fue dado por Wu y Yang [79].

Por otro lado, calculemos el flujo magnético asociado a los potenciales dados anteriormente, se tiene

$$\begin{aligned}
 \oint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{r} &= \int_{S^+} \vec{B} \cdot d^2\vec{r}_+ + \int_{S^-} \vec{B} \cdot d^2\vec{r}_-, \\
 &= \int_{S^+} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_+) \cdot d^2\vec{r}_+ + \int_{S^-} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_-) \cdot d^2\vec{r}_-, \\
 &= \int_{\gamma^+} \vec{A}_+ \cdot d\vec{r}_+ + \int_{\gamma^-} \vec{A}_- \cdot d\vec{r}_-, \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{(\cos \theta_0 - 1)}{r \sin \theta_0} \hat{\phi} \right] \cdot (\hat{\phi} r \sin \theta_0 d\phi) \\
 &+ \int_{2\pi}^0 \left[ -\frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \left( \frac{\cos \theta_0 + 1}{r \sin \theta_0} \right) \hat{\phi} \right] \cdot (\hat{\phi} r \sin \theta_0 d\phi), \\
 &= -\frac{\mu_0 q_m}{2} (\cos \theta_0 - 1) + \frac{\mu_0 q_m}{2} (1 + \cos \theta_0), \\
 &= \mu_0 q_m.
 \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

En resumen, el cálculo anterior nos permite señalar que

$$\oint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{r} = \mu_0 q_m. \tag{2.1.27}$$

lo cual concuerda con (2.1.23). Sin embargo, a partir de la definición de los dos potenciales vectoriales, nos encontramos que  $\vec{A}$  no está globalmente definido.

A partir de los potenciales vectoriales,

$$\vec{A}_{\pm} = A_{\phi}^{(\pm)} \hat{\phi} = -\frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{(\cos \theta \mp 1)}{r \sin \theta} \hat{\phi}, \tag{2.1.28}$$

podemos calcular el valor del campo magnético asociado a ambos potenciales. Entonces, a partir de

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\pm} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ 0 & 0 & r \sin \theta A_\theta^\pm \end{vmatrix}, \\
 &= -\frac{\hat{r}}{r^2 \sin \theta} \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta \mp 1), \\
 &= \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \hat{r}, \\
 &= \vec{B},
 \end{aligned} \tag{2.1.29}$$

donde se reporta que para ambos potenciales vectoriales, el campo magnético es el mismo. Esto da indicios de que los potenciales deben estar relacionados de alguna forma. La relación que estos mantienen se establece mediante una transformación de gauge, dada por

$$\vec{A}_+ = \vec{A}_- + \vec{\nabla} \Lambda \tag{2.1.30}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \Lambda &= \vec{A}_+ - \vec{A}_-, \\
 &= -\frac{\mu_0 q_m}{4\pi r \sin \theta} (\cos \theta - 1 - \cos \theta - 1) \hat{\phi}, \\
 &= \frac{\mu_0 q_m}{2\pi r \sin \theta} \hat{\phi}.
 \end{aligned} \tag{2.1.31}$$

Si consideramos el gradiente  $\vec{\nabla} \Lambda$  en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} \hat{\phi}, \tag{2.1.32}$$

e igualando (2.1.31) y (2.1.32),

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 q_m}{2\pi r \sin \theta} \hat{\phi}, \tag{2.1.33}$$

es posible deducir las siguientes ecuaciones

$$\hat{r} : \frac{\partial \Lambda}{\partial r} = 0 \rightarrow \Lambda = \Lambda(\theta, \phi), \quad (2.1.34)$$

$$\hat{\theta} : \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \Lambda = \Lambda(\phi), \quad (2.1.35)$$

$$\hat{\phi} : \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} = \frac{\mu_0 q_m}{2\pi r \sin \theta} \rightarrow \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi} = \frac{\mu_0 q_m}{2\pi}, \quad (2.1.36)$$

De (2.1.36) observamos que hay una ecuación diferencial, la cual al integrarla se obtiene que

$$\Lambda = \frac{\mu_0 q_m}{2\pi} \phi. \quad (2.1.37)$$

No es difícil ver que la función es multivaluada, pues para  $\phi = 0 \rightarrow \Lambda(0) = 0$  y  $\phi = 2\pi \rightarrow \Lambda(2\pi) = \mu_0 q_m$ , en donde  $\phi = 0$  y  $\phi = 2\pi$  físicamente representan el mismo punto. A nivel cuántico, esto tiene una consecuencia muy importante que fue observada por Dirac en [80]. Consideremos la ecuación de Dirac para una partícula cargada y sin masa

$$\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi = 0. \quad (2.1.38)$$

Esta ecuación transforma covariantemente bajo una transformación de gauge  $U(1)$ , es decir,  $\psi \rightarrow \psi' = e^{ie\Lambda(x)} \psi$  y  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x)$ . Dado que  $\Lambda$  es multivaluada tenemos que

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{ie\Lambda(x)} \psi = e^{i\frac{e\mu_0 q_m}{2\pi} \phi} \psi. \quad (2.1.39)$$

Para  $\phi = 0$  y  $\phi = 2\pi$  la función de onda transformada corresponde a

$$\psi' = \psi, \quad (2.1.40)$$

$$\psi' = e^{ie\mu_0 q_m} \psi, \quad (2.1.41)$$

respectivamente. Dado que ambos valores de  $\phi$  representan al mismo punto y para evitar que la función de onda sea multivaluada, esto implica que el argumento de la exponencial de la última ecuación debe ser múltiplo entero de  $2\pi$ , i.e.,

$$e\mu_0 q_m = 2\pi n, \quad (2.1.42)$$

en donde  $n \in \mathbb{Z}$ . Esta es la celebrada condición de cuantización de la carga magnética

que descubrió Dirac<sup>2</sup>.

## 2.2. Aproximación punto silla de la teoría de Yang-Mills

A la hora de realizar cuantización, el método de la integral de caminos es una aproximación muy útil para aplicarla sobre las teorías de gauge. La bondad de esta aproximación viene del hecho que la integral de caminos, desde el punto de vista geométrico, es capaz de capturar la topología global de los potenciales de gauge, mientras que la teoría de perturbación canónica, como método para realizar la cuantización, solo es sensible a la topología local de estos potenciales. Si bien la formulación de la integral de camino se define con espaciotiempos de signatura Euclídea, es decir,  $(+, +, +, +)$ , uno se inclinaría a pensar que esto puede significar una dificultad. Sin embargo, se pueden obtener respuestas significativas al volver a la signatura Lorentziana dada por  $(-, +, +, +)$ . Para el método de la integral de camino la configuración para el campo  $\phi(x)$  es pesada por el factor de Boltzmann, es decir

$$(\text{Contribución de } \phi(x)) = e^{-I[\phi]}, \quad (2.2.1)$$

o también

$$Z = e^{-I[\phi]}, \quad (2.2.2)$$

donde  $Z$  corresponde a la función de partición.

La acción Euclídea para la teoría de Yang-Mills corresponde a<sup>3</sup>

$$I[A] = +\frac{1}{4} \int \sqrt{g} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a d^4x = -\frac{1}{2} \int \text{Tr}(F \wedge *F), \quad (2.2.3)$$

que es definida positiva. Por lo tanto, la contribución a la integral de camino de cada potencial de gauge o conexión  $A_\mu(x)$  es cerrada y con buen comportamiento. El funcional generatriz completo para las amplitudes de transición de una teoría se

<sup>2</sup>Construcción a partir de [81].

<sup>3</sup>Escribiremos  $A_\mu = A_\mu^m T^m$  y  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$ . La derivada covariante adjunta es  $D_\mu X = \partial_\mu X - i[A_\mu, X]$ . La convención para la métrica de Killing-Cartan del grupo interno es  $\text{Tr}[T^A T^B] = -\frac{1}{2} \delta^{AB}$

obtiene sumando (o integrando funcionalmente) todas las configuraciones de campo inequivalentes. Dado que a primer orden la variación funcional de la acción se anula para las soluciones de las ecuaciones de movimiento, estas configuraciones corresponden a puntos estacionarios (puntos donde la derivada es cero) en el espacio funcional. Por lo tanto en la aproximación de integral de camino, primero vamos a buscar soluciones de las ecuaciones de campo Euclídeas con una mínima acción y con calcular las fluctuaciones de mecánica cuánticas alrededor de estos puntos.

Al variar la acción (2.2.3) se encuentran las ecuaciones de campo de Yang-Mills que corresponden

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.2.4)$$

mientras que la identidad de Bianchi es

$$D_\mu * F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.2.5)$$

donde  $D_\mu$  corresponde a la derivada covariante con respecto a la conexión de gauge del grupo interno. Las ecuaciones (2.2.4) y (2.2.5) implican que  $F$  es armónica.

Los instantones corresponden a soluciones Euclídeas a las ecuaciones de Yang-Mills y tiene como característica fundamental que son anti-auto-duales,

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^A = \pm\alpha F_{\mu\nu}^A. \quad (2.2.6)$$

Al aplicar el dual dos veces sobre  $F_{\mu\nu}^A$ , se tiene

$$\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu}^A = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\tilde{F}^{\lambda\rho A} = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\epsilon^{\lambda\rho\sigma\tau}F_{\sigma\tau}^A = \frac{1}{4}\sigma 2!2!\delta_{[\mu}^{[\sigma}\delta_{\nu]}^{\tau]} = \sigma F_{\mu\nu}^A, \quad (2.2.7)$$

donde  $\sigma = +1$  para la signatura Euclídea y  $\sigma = -1$  es para la signatura Lorentziana. Luego, si reemplazamos la ecuación (2.2.7)

$$\begin{aligned} \pm\alpha\tilde{F}_{\mu\nu}^A &= \sigma F_{\mu\nu}^A, \\ \alpha^2 F_{\mu\nu}^A &= \sigma F_{\mu\nu}^A, \\ \therefore \alpha &= \sqrt{\sigma}, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

## 2.2. APROXIMACIÓN PUNTO SILLA DE LA TEORÍA DE YANG-MILLS

---

es decir, la autodualidad en el Lorentziano involucra números complejos. A raíz de este hecho, de ahora en adelante consideramos la signatura Euclídea.

Consideremos la acción de Yang-Mills

$$I_{\text{YM}} = +\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu A}, \quad (2.2.9)$$

cuyas ecuaciones de movimiento son resueltas por las configuraciones auto-duales, las cuales obedecen a la identidad de Bianchi (2.2.5). El integrando de la acción puede ser escrito como

$$\left(F_{\mu\nu}^A \pm \tilde{F}_{\mu\nu}^A\right) \left(F_{\mu\nu}^A \pm \tilde{F}_{\mu\nu}^A\right) = F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}^A \tilde{F}^{A\mu\nu} \pm 2F_{\mu\nu}^A \tilde{F}^{A\mu\nu}, \quad (2.2.10)$$

donde los  $\tilde{F}$  corresponden a los duales de  $F$ . Ahora, estudiemos el término  $\tilde{F}_{\mu\nu}^A \tilde{F}^{A\mu\nu}$ ,

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^A \tilde{F}^{A\mu\nu} = \left(\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{A\lambda\rho}\right) \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau}^A\right) = \frac{1}{4} 2! 2! \delta_{[\lambda}^{[\sigma} \delta_{\rho]}^{\tau]} F^{A\lambda\rho} F_{\sigma\tau}^A = F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}. \quad (2.2.11)$$

Notar que el lado derecho de (2.2.10) es mayor o igual a cero. Por lo tanto, podemos escribir lo siguiente

$$\begin{aligned} \left(F_{\mu\nu}^A \pm \tilde{F}_{\mu\nu}^A\right) \left(F^{\mu\nu A} \pm \tilde{F}^{\mu\nu A}\right) &= 2 \left(F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}\right) \geq 0, \\ \frac{1}{4} \int d^4x \left(F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}\right) &= \frac{1}{8} \int d^4x \left(F_{\mu\nu}^A \pm \tilde{F}_{\mu\nu}^A\right) \left(F^{A\mu\nu} \pm \tilde{F}^{A\mu\nu}\right). \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Por otro lado, podemos definir el índice de Chern-Pontryagin, el cual corresponde a

$$c = -\frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \tilde{F}_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}. \quad (2.2.13)$$

Este es un invariante topológico relacionado con la segunda clase de Chern para el grupo de gauge en cuestión. Esto nos permite reescribir (2.2.12) en términos del

índice de Chern-Pontryagin de la siguiente manera

$$\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} \pm \frac{1}{4}(-32\pi^2 c) = \frac{1}{8} \int d^4x \left( F_{\mu\nu}^A \pm \tilde{F}_{\mu\nu}^A \right) \left( F^{A\mu\nu} \pm \tilde{F}^{A\mu\nu} \right) \geq 0, \quad (2.2.14)$$

donde la bondad de la saturación nos indica que la acción es minimizada para las configuraciones que son (anti-) auto-duales

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^A = \pm F_{\mu\nu}^A. \quad (2.2.15)$$

Finalmente, combinando (2.2.9) y (2.2.13), la acción de Yang-Mills se puede expresar como

$$I_{\text{YM}} = \pm 8\pi^2 c. \quad (2.2.16)$$

Estas configuraciones especiales de campo son llamadas *instantones*, dado que en el caso  $|c| = 1$  su intensidad de campo se centra alrededor de algún punto en el espacio-tiempo y alcanza su máximo valor en algún instante de tiempo.

### 2.2.1. Instantón de Belavin-Polyakov-Schwarz-Tyupkin (BPST)

Anteriormente vimos las soluciones (anti-)auto-duales (2.2.15). Esta solución representa la contribución dominante a la integral de camino Euclídea. Belavin, Polyakova, SchwartzYu, Tyupkin [82] consideraron el siguiente potencial

$$A_\mu = if(r)U(x)^{-1}\partial_\mu U(x), \quad (2.2.17)$$

donde  $r \equiv |x|$  y  $U \in SU(2)$ . Cuando  $f(r) \rightarrow 1$ , y  $r \rightarrow \infty$  entonces,

$$U(x) = \frac{1}{r} (\mathbb{I} + i\sigma^i x_i), \quad (2.2.18)$$

donde  $\sigma^i$  son las matrices de Pauli. Ahora si reemplazamos (2.2.17) en (2.2.15) se obtiene

$$r \frac{df(r)}{dr} = 2f(r)(1 - f(r)). \quad (2.2.19)$$

## 2.2. APROXIMACIÓN PUNTO SILLA DE LA TEORÍA DE YANG-MILLS

---

La solución que satisface las condiciones, enunciadas más arriba, es

$$f(r) = \frac{r^2}{r^2 + \lambda^2}, \quad (2.2.20)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro que indica el tamaño del instantón. Si reemplazamos (2.2.20) en (2.2.17), encontramos que

$$A_\mu(x) = \frac{ir^2}{r^2 + \lambda^2} U(x)^{-1} \partial_\mu U(x), \quad (2.2.21)$$

y la correspondiente intensidad de campo

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{4r^2}{r^2 + \lambda^2} \sigma_{\mu\nu}, \quad (2.2.22)$$

con

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4i} [\sigma_i, \sigma_j], \quad \sigma_{i0} = \frac{1}{2} \sigma_i = -\sigma_{0i}. \quad (2.2.23)$$

Es posible observar que el instantón BPST resuelve las ecuaciones de Yang-Mills con  $|c| = |\pm 1| = 1$ . Aunque el espaciotiempo de la solución parece ser  $\mathbb{R}^4$ , las condiciones de frontera en infinito permite que el espacio sea compactificado en  $S^4$ , con la segunda clase de Chern  $C_2 = -1$ . Dado que la acción del instantón BPST es  $I = 8\pi^2$ , tiene una posible mínima acción para una topología no trivial y por lo tanto es considerada dentro de la familia de soluciones importantes la teoría de Yang-Mills. Notamos que el instantón BPST es, de hecho, una conexión en el fibrado de Hopf  $\pi : S^7 \rightarrow S^4$  y por esta razón puede ser obtenido de las combinaciones auto-duales de la conexión estándar de Riemann sobre  $S^4$ .

# Capítulo 3

## Relatividad General

El siglo XX fue una época muy fructífera para el desarrollo de nuevas teorías físicas que nos daban más indicios del comportamiento de la naturaleza. Una de estas teorías llega de la mano con el gran físico Albert Einstein. Ya en 1905 da un gran paso con la formulación de la Relatividad Especial, pudiendo explicar fenómenos que no habían sido capaces de ser explicadas hasta entonces e introduciendo el espacio-tiempo. Sin embargo, a fines del 1915 Einstein logró establecer una teoría en la cual es posible incluir la gravedad, la gran denominada Relatividad General. Esta corresponde a una teoría clásica de campos en donde el campo dinámico viene dado por el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , que permite dar una descripción de la geometría del espacio tiempo.

Einstein siguiendo un proceso meramente físico logró escribir matemáticamente las ecuaciones de campo para la teoría (con constante cosmológica), las que corresponden

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (3.0.1)$$

donde,  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico,  $R$  es el escalar de curvatura,  $\Lambda$  es la constante cosmológica y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor energía-momentum. En esta ecuación se aprecia que la gravedad es una consecuencia netamente de la geometría del espacio tiempo que depende de la materia contenida.

Al mismo tiempo que Einstein obtenía las ecuaciones de campo para esta nueva teoría, David Hilbert se embarcó a obtener las mismas ecuaciones, pero utilizando

un método puramente matemático, de la cual obtuvo lo que hoy en día se conoce como la acción de Einstein-Hilbert

$$I[g_{\mu\nu}] = \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M, \quad (3.0.2)$$

donde  $\mathcal{M}$  es una variedad pseudo-Riemanniana 4-dimensional,  $\mathcal{R}$  es el escalar de Ricci,  $\Lambda$  es la constante cosmológica,  $g$  corresponde al determinante de la métrica,  $\kappa = (16\pi G)^{-1}$ , y  $\mathcal{L}_M$  es el término de materia.

### 3.1. Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de movimiento de un sistema pueden ser fácilmente calculados a partir de la variación de un principio de acción bien definido. En este caso vamos a considerar la ecuación (3.0.2) sin materia<sup>4</sup>

$$I[g_{\mu\nu}] = \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (3.1.1)$$

variando con respecto a la métrica

$$\begin{aligned} \delta I[g_{\mu\nu}] &= \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta (\sqrt{-g} (R - 2\Lambda)), \\ &= \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x [\delta(\sqrt{-g}) (R - 2\Lambda) + \sqrt{-g} \delta R] = 0. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Comenzaremos con el análisis del término  $\delta(\sqrt{-g})$ . Se sabe que el operador variación cumple con la regla de Leibniz, por lo cual se tiene que

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g. \quad (3.1.3)$$

A partir de la fórmula de Jacobi se obtiene una expresión para la derivada del

---

<sup>4</sup>Construcción a partir de [83]

determinante, que corresponde a

$$\delta \det g_{\mu\nu} = \text{Tr} (\text{adj}(g_{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu}) , \quad (3.1.4)$$

$$= g^{\mu\nu} g \delta g_{\mu\nu} , \quad (3.1.5)$$

donde se ha reemplazado la definición de matriz adjunta. Ahora, insertando en la ecuación (3.1.3)

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} . \quad (3.1.6)$$

Ahora, utilizando la siguiente propiedad del tensor métrico,  $g_{\mu\nu} g^{\nu\gamma} = \delta^\gamma_\mu$  y variando éste se obtiene

$$\begin{aligned} \delta (g_{\mu\nu} g^{\nu\gamma}) &= 0 , \\ \delta g_{\mu\nu} g^{\nu\gamma} + g_{\mu\nu} \delta g^{\nu\gamma} &= 0 , \\ \delta g_{\mu\nu} g^{\nu\gamma} &= -g_{\mu\nu} \delta g^{\nu\gamma} , \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

aplicando la traza a esta última expresión, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\delta g_{\mu\nu} g^{\nu\gamma}) &= \text{Tr} (-g_{\mu\nu} \delta g^{\nu\gamma}) , \\ g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Finalmente reemplazando en (3.1.6)

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} . \quad (3.1.9)$$

Ahora, analicemos un término que nos será de utilidad más adelante. Consideremos la definición del símbolo de Christoffel,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\gamma} (\partial_\mu g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}) . \quad (3.1.10)$$

Si realizamos la contracción de dos índices se consigue lo siguiente,

$$\begin{aligned}
 \Gamma^\mu_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} (\partial_\mu g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}) , \\
 &= \frac{1}{2} \left( g^{\mu\gamma} \partial_\mu g_{\gamma\nu} + g^{\mu\gamma} \partial_\nu g_{\mu\gamma} - g^{\mu\gamma} \partial_\gamma g_{\mu\nu} \right) , \\
 &= \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} \partial_\nu g_{\mu\gamma} ,
 \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

en donde hemos renombrado los índices y usado la simetría de la métrica. Además, es fácil mostrar que  $\partial_\lambda \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu}$ . Por lo tanto, con esto y (3.1.11) se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial_\lambda \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu} , \\
 &= \Gamma^\mu_{\mu\lambda} .
 \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Por otro lado para estudiar  $\delta R$ , partimos por la definición del escalar de Ricci

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} , \tag{3.1.13}$$

entonces al variar esta expresión

$$\delta R = \delta(g^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \delta(R_{\alpha\beta}) . \tag{3.1.14}$$

Para obtener la variación del tensor de Ricci vamos a considerar la definición de éste, por lo que

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{\beta\alpha} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\mu\alpha} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} , \tag{3.1.15}$$

entonces, variando el tensor se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \delta R_{\alpha\beta} &= \partial_\mu (\delta \Gamma^\mu_{\beta\alpha}) - \partial_\nu (\delta \Gamma^\mu_{\mu\alpha}) + \delta \Gamma^\mu_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} \\
 &\quad + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} - \delta \Gamma^\mu_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} .
 \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Notar que  $\delta \Gamma$  corresponde a un tensor, por lo tanto se puede definir lo siguiente para

simplificar la notación

$$T^{\alpha}_{\beta\gamma} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, \quad (3.1.17)$$

entonces, la ecuación (3.1.17) se reescribe como

$$\delta R_{\sigma\nu} = \partial_{\mu}T^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}T^{\mu}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}T^{\mu}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}T^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}T^{\mu}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}T^{\lambda}_{\mu\sigma} \quad (3.1.18)$$

De esta expresión surge la siguiente pregunta: ¿es posible escribir esta ecuación en términos de derivadas covariantes? Para responder la incógnita vamos a considerar lo siguiente

$$\nabla_{\mu}T^{\mu}_{\nu\sigma} = \partial_{\mu}T^{\mu}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}T^{\mu}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}T^{\mu}_{\nu\lambda}, \quad (3.1.19)$$

y también,

$$\nabla_{\nu}T^{\mu}_{\mu\sigma} = \partial_{\nu}T^{\mu}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}T^{\mu}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}T^{\mu}_{\nu\lambda}. \quad (3.1.20)$$

Restando (3.1.19) y (3.1.20) obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}T^{\mu}_{\nu\sigma} - \nabla_{\nu}T^{\mu}_{\mu\sigma} &= \partial_{\mu}T^{\mu}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}T^{\mu}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}T^{\mu}_{\nu\lambda} \\ &\quad - \left( \partial_{\nu}T^{\mu}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}T^{\mu}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}T^{\mu}_{\nu\lambda} \right). \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Si comparamos este resultado con la ecuación (3.1.18), se puede observar un resultado importante, que corresponde a

$$\begin{aligned} \delta R_{\sigma\nu} &= \nabla T^{\mu}_{\nu\sigma} - \nabla T^{\mu}_{\mu\sigma}, \\ &= \nabla_{\mu}(\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\sigma}), \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

cambiando los índices se obtiene que

$$\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}) - \nabla_{\beta}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha}). \quad (3.1.23)$$

Esta relación corresponde a la conocida identidad de Palatini. Ahora, reemplazando en la ecuación (3.1.14) y usando condición de metricidad se obtiene la siguiente

expresión

$$\begin{aligned}
 \delta R &= \delta(g^{\alpha\beta})R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta(R_{\alpha\beta}), \\
 &= \delta(g^{\alpha\beta})R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} [\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}) - \nabla_\beta(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha})], \\
 &= \delta(g^{\alpha\beta})R_{\alpha\beta} + \nabla_\lambda(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}) - \nabla_\beta(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}), \\
 &= \delta(g^{\alpha\beta})R_{\alpha\beta} + \nabla_a (g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - g^{\alpha\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}), \\
 &= \delta(g^{\alpha\beta})R_{\alpha\beta} + \nabla_\gamma T^\gamma,
 \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

donde  $T^\gamma$  se ha definido como

$$T^\gamma \equiv g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - g^{\alpha\gamma}\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}. \tag{3.1.25}$$

Teniendo este principal ingrediente, procedemos a reemplazar en la ecuación (3.1.2)

$$\begin{aligned}
 \delta I[g_{\mu\nu}] &= \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[ \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} (R - 2\Lambda) + \sqrt{-g} (R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + \nabla_\gamma T^\gamma) \right], \\
 &= \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} (R - 2\Lambda) g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \\
 &\quad + \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_\alpha T^\alpha = 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Por otro lado, analicemos el último término de la expresión obtenida. A partir de la definición de derivada covariante es posible expresarlo de la siguiente manera

$$\nabla_\alpha T^\alpha = \partial_\alpha T^\alpha + \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} T^\lambda. \tag{3.1.27}$$

A partir de la ecuación (3.1.12), el símbolo de Christoffel puede ser reescrito de

manera conveniente, por lo que

$$\begin{aligned}
 \nabla_\alpha T^\alpha &= \partial_\alpha T^\alpha + \left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \sqrt{-g} \right) T^\alpha, \\
 &= \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha T^\alpha + \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\alpha \sqrt{-g}) T^\alpha, \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} [\sqrt{-g} \partial_\alpha T^\alpha + (\partial_\alpha \sqrt{-g}) T^\alpha], \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} T^\alpha).
 \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

Así, reemplazando en la ecuación (3.1.26) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \delta I[g_{\mu\nu}] &= \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} (R - 2\Lambda) g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \\
 &\quad + \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda (\sqrt{-g} T^\lambda), \\
 &= \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} (R - 2\Lambda) g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \\
 &\quad + \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\lambda (\sqrt{-g} T^\lambda).
 \end{aligned} \tag{3.1.29}$$

Recordemos de (3.1.7) que  $\delta g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = -g_{\alpha\beta} \delta g^{\beta\gamma}$ , por lo cual (3.1.29) se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \delta I[g_{\mu\nu}] &= \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} (R - 2\Lambda) (-g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}) + \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \\
 &\quad + \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\lambda (\sqrt{-g} T^\lambda), \\
 &= \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} + \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\lambda (\sqrt{-g} T^\lambda).
 \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Por ahora enfoquemos nuestra atención en el último término de la expresión (3.1.30).

Si lo trabajamos,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\lambda(\sqrt{-g}T^\lambda) &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda(\sqrt{-g}T^\lambda), \\
 &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda T^\lambda, \\
 &= \int_{\partial\mathcal{M}} d\Sigma_\lambda T^\lambda,
 \end{aligned} \tag{3.1.31}$$

donde de la segunda a la tercera línea se ha utilizado el teorema de Gauss. La naturaleza de  $d\Sigma_\lambda$  corresponde al diferencial de superficie, por lo cual puede ser descompuesto como  $d\Sigma_\lambda = n_\lambda d\Sigma$ , donde  $n_\lambda$  corresponde a vector normal a la superficie estudiada y  $d\Sigma = \sqrt{-h} d^3x$ , donde  $h$  es el determinante de la métrica inducida. Notar que este último está en términos del determinante de la métrica inducida  $h$  y de las coordenadas del borde<sup>5</sup>.

Recordemos la definición de los símbolos de Christoffel, dado por (3.1.10). La variación de este último es dada por

$$\begin{aligned}
 \delta\Gamma^\gamma_{\mu\nu} &= \delta \left( \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} [\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}] \right), \\
 &= \frac{1}{2} (\delta g^{\gamma\lambda} [\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}] \\
 &\quad + g^{\gamma\lambda} [\partial_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu}]) .
 \end{aligned} \tag{3.1.32}$$

Sin embargo, a partir de las condiciones de Dirichlet, es decir,  $\delta g^{\mu\lambda}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ , la ecuación (3.1.32) se reescribe de la siguiente manera

$$\delta\Gamma^\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} (\partial_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu}) . \tag{3.1.33}$$

Si además recordamos la definición de  $T^\lambda$ , que es dada por (3.1.25), y al insertar

<sup>5</sup>Esto será estudiado con mayor profundidad en la siguiente sección.

(3.1.33) entonces

$$\begin{aligned}
 T^\lambda &= g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\lambda\mu} \delta \Gamma^\nu_{\nu\mu}, \\
 &= \frac{1}{2} \left[ g^{\mu\nu} g^{\lambda\gamma} (\partial_\mu \delta g_{\gamma\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma \delta g_{\mu\nu}) - g^{\lambda\mu} g^{\nu\gamma} \partial_{\nu\gamma} g_{\mu\lambda} \right], \\
 &= \frac{1}{2} \left[ g^{\lambda\gamma} \left( g^{\mu\nu} \partial_{\nu\gamma} g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \partial_\nu \delta g_{\mu\gamma} - 2g^{\mu\nu} \partial_\gamma \delta g_{\mu\nu} \right) \right], \\
 &= g^{\lambda\gamma} g^{\mu\nu} (\partial_\nu \delta g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma \delta g_{\mu\nu}), \tag{3.1.34}
 \end{aligned}$$

por lo tanto, (3.1.31) se reescribe como

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\mathcal{M}} d\Sigma_\lambda T^\lambda &= \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{-h} n_\lambda g^{\lambda\gamma} g^{\mu\nu} (\partial_\nu \delta g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma \delta g_{\mu\nu}), \\
 &= \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{-h} n^\gamma (h^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu) (\partial_\nu \delta g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma \delta g_{\mu\nu}), \\
 &= - \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{-h} n^\gamma h^{\mu\nu} \partial_\gamma \delta g_{\mu\nu}. \tag{3.1.35}
 \end{aligned}$$

Finalmente, la variación de la acción (3.1.30) corresponde a

$$\begin{aligned}
 \delta I[g_{\mu\nu}] &= \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} + \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\lambda (\sqrt{-g} T^\lambda), \\
 &= \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} \\
 &\quad - \kappa \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{-h} n^\gamma h^{\mu\nu} \partial_\gamma \delta g_{\mu\nu} = 0. \tag{3.1.36}
 \end{aligned}$$

Con esta expresión tenderíamos a pensar que las ecuaciones de campo han sido encontradas, sin embargo, al aplicar las condiciones de borde de Dirichlet, i.e.,  $\delta g_{\alpha\beta}|_{\partial\mathcal{M}} = \delta g^{\alpha\beta}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$  se observa que tenemos un principio variacional mal definido. Gibbons, Hawking y York se dieron cuenta de este problema y lo solucionaron agregando un término extra a la acción.

## 3.2. Términos de Borde

En esta sección nos enfocaremos a estudiar los términos de borde la acción de Einstein-Hilbert. Por mucho tiempo se había obviado el hecho de que la variación de la acción dejaba un término remanente. Esto fue estudiado en profundidad por Gibbons-Hawking-York, llegando a la conclusión que para obtener un principio de acción bien definido, i.e., con condiciones de Dirichlet bien comportadas, se debía agregar un término que contrarrestara el término remanente de la variación. Con el paso de los años, los métodos de contratérminos se fueron refinando; esto fue a causa de que la acción tomó una mayor relevancia en el contexto de obtener las propiedades termodinámicas de objetos tales como los agujeros negros. El método de Gibbons-Hawking-York es un método frecuentemente utilizado para obtener estas propiedades, sin embargo, a medida que se fueron estudiando espaciotiempos más complicados se comenzaron a producir ciertas ambigüedades. De hecho, en los espacios que son AdS, la acción es divergente puesto que el volumen es divergente tanto para  $\mathcal{M}$  y  $\partial\mathcal{M}$  por lo cual la contribución de GHY no fue suficiente. Ese es el caso de la solución Taub-NUT-AdS, en donde reconocer la métrica de fondo no es trivial. Es por esta razón que Emparan-Johnson-Myers repararon en una forma de regularizar la acción sin tener las divergencias de los volúmenes de AdS, y que además fuera totalmente independiente de la métrica de fondo.

### 3.2.1. Gibbons-Hawking-York

Para explicar el término de Gibbons-Hawking-York [84, 85] es necesario hablar de teoría de subvariedades. Consideremos el siguiente dibujo

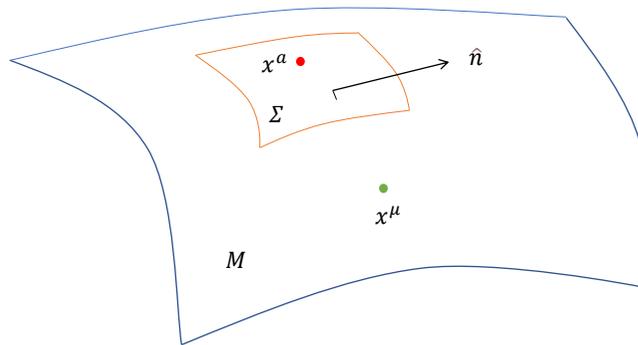


Figura 3.2.1: Variedad y subvariedad.

donde  $x^\mu$  representa las coordenadas de la variedad ambiente, mientras que  $x^a$  son las coordenadas de la hipersuperficie que *vive* en esta variedad ambiente.  $\hat{n}$  es el vector normal a la hipersuperficie. Se definen los vectores base de la hipersuperficie como

$$e_a = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} e_\mu. \quad (3.2.1)$$

Con esto se puede definir la métrica inducida en la hipersuperficie,

$$\begin{aligned} h_{ab} &= e_a \cdot e_b, \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a} e_\mu \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x^b} e_\nu, \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^b} g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Esta métrica tiene las mismas propiedades que la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Por otro lado, podemos construir un proyector de tensores sobre la variedad  $\mathcal{M}$  en tensores de  $\Sigma$ , el cual sea capaz de actuar sobre un vector tal que entregue vectores ortogonales a la normal  $\hat{n}$ . A partir de las nociones de  $\mathbb{R}^3$ , es fácil obtener que un proyector con estas características

$$\begin{aligned} v^\mu - \sigma(n_\alpha v^\alpha) n^\mu &= v^\mu - \sigma n_\alpha n^\mu v^\alpha, \\ &= v^\alpha \delta^\mu_\alpha - \sigma n_\alpha n^\mu v^\alpha, \\ &= (\delta^\mu_\alpha - \sigma n_\alpha n^\mu) v^\alpha, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

donde  $\sigma = n^a n_a$ . Se define el proyector como

$$h^\alpha{}_\beta \equiv \delta^\alpha{}_\beta - \sigma n^\alpha n_\beta. \quad (3.2.4)$$

El proyector nos permite proyectar tensores de  $\mathcal{M}$  a la hipersuperficie  $\Sigma$  de interés. Para ahondar en las propiedades de este operador, consideremos un vector  $v^\mu$  en  $T_p\mathcal{M}$ . Como se dijo anteriormente, el proyector  $h_{\mu\nu}$  proyectará el vector  $V^\mu$  tangente a la hipersuperficie que es ortogonal a  $n^\mu$ . Así

$$\begin{aligned} (h_{\mu\nu} V^\mu) n^\nu &= g_{\mu\nu} V^\mu n^\nu - \sigma n_\mu n_\nu V^\mu n^\nu \\ &= V^\mu n_\nu - \sigma^2 V^\mu n_\nu \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Ahora, consideremos dos vectores  $V^\mu$  y  $W^\nu$  tangentes a la hipersuperficie  $\Sigma$ . El tensor proyector actúa como una métrica,

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} V^\mu W^\nu &= g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu - \sigma n_\mu n_\nu V^\mu W^\nu \\ &= g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

La idempotencia se puede ver fácilmente al actuar dos o más veces el operador, lo cual nos arrojará el mismo resultado que si sólo actuamos una vez con el, es decir

$$\begin{aligned} h^\mu{}_\lambda h^\lambda{}_\nu &= (\delta^\mu{}_\lambda - \sigma n^\mu n_\lambda) (\delta^\lambda{}_\nu - \sigma n^\lambda n_\nu) \\ &= (\delta^\mu{}_\nu - \sigma n^\mu n_\nu - \sigma n^\mu n_\nu + \sigma^3 n^\mu n_\nu) \\ &= h^\mu{}_\nu. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

El proyector es denominado como la *primera forma fundamental de la hipersuperficie* ya que actúa como una métrica en vectores tangentes a  $\Sigma$ . Agregar que en muchos casos la hipersuperficie suele ser espacial, por lo cual no es raro encontrar que en la literatura la denominación métrica espacial.

En este punto hay que distinguir entre la curvatura intrínseca, la cual es medida por el tensor de Riemann, y la curvatura extrínseca, la cual depende de cómo el

espacio está embebido en uno más grande. Para tener intuición acerca de esto, consideremos un toro dos dimensional. Este puede tener una métrica plana, pero si este es embebido en un espacio  $\mathbb{R}^3$ , lo veremos curvo. Para dar formalidad a la definición vamos a considerar una familia de hipersuperficies  $\Sigma$  con un conjunto de vectores unitarios  $n^\mu$ , el cual se extiende a través de cualquier región. Con esto, dar paso a la definición de la curvatura extrínseca de la hipersuperficie, la cual es dada por la derivada de Lie del proyector a lo largo del campo vectorial unitario,

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{\mu\nu}. \quad (3.2.8)$$

Muchas veces la curvatura extrínseca se denomina la segunda forma fundamental de la subvariedad y tiene una interpretación dada a cómo cambia el proyector a lo largo del campo vectorial normal. Anteriormente nos referimos al hecho de que el vector unitario se extiende a través de cualquier región. Observamos que esto es independiente de la extensión hecha para  $n^\mu$  de  $\Sigma$ . Con esto, es posible reescribir la expresión como la derivada de Lie de la métrica proyectada a sí misma, es decir,

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu \mathcal{L}_n g_{\alpha\beta}. \quad (3.2.9)$$

A partir de la derivada de Lie de una métrica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v g_{\mu\nu} &= v^\sigma \nabla_\sigma g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu v^\lambda) g_{\lambda\nu} + (\nabla_\nu v^\lambda) g_{\mu\lambda}, \\ &= \nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

entonces, la ecuación (3.2.9) se puede reescribir como

$$K_{\mu\nu} = h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu \nabla_{(\alpha} n_{\beta)}. \quad (3.2.11)$$

Si se asume que las curvas integrales de  $n^\mu$  no son geodésicas, podemos definir a la aceleración de la siguiente manera

$$a^\mu = n^\nu \nabla_\nu n^\mu. \quad (3.2.12)$$

De esta manera la ecuación (3.2.11) es equivalente a

$$K_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} n_{\nu} - \sigma n_{\mu} a_{\nu}. \quad (3.2.13)$$

Es fácil ver de esta expresión que la curvatura extrínseca es simétrica. Además, es ortogonal a la dirección normal <sup>6</sup>

$$\begin{aligned} n^{\mu} K_{\mu\nu} &= n^{\mu} \nabla_{\mu} n_{\nu} - \sigma n^{\mu} n_{\mu} a_{\nu}, \\ &= a_{\nu} - \sigma^2 a_{\nu}, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Es posible construir derivadas covariantes actuando a lo largo de la hipersuperficie,  $\mathcal{D}_{\mu}$ , considerando una derivada covariante corriente y a esta proyectarla. Consideremos el siguiente ejemplo, sea un tensor  $X^{\mu}_{\nu}$  (1, 1) entonces,

$$\mathcal{D}_{\sigma} X^{\mu}_{\nu} = h^{\alpha}_{\sigma} h^{\mu}_{\beta} h^{\gamma}_{\nu} \mathcal{D}_{\alpha} X^{\beta}_{\gamma}. \quad (3.2.15)$$

Para esto, vamos a definir el tensor de curvatura  $R^{\hat{\rho}}_{\sigma\mu\nu}$  sobre la hipersuperficie considerando el conmutador de la derivada covariante actuando sobre un campo vectorial  $v^{\mu}$  tangente a la hipersuperficie

$$[\mathcal{D}_{\mu}, \mathcal{D}_{\nu}] V^{\rho} = \mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} v^{\sigma}. \quad (3.2.16)$$

Se sabe que hay dos ecuaciones muy importantes que relacionan el tensor de Riemann n-dimensional, el tensor de Riemann de la hipersuperficie y la curvatura extrínseca. La primera corresponde a la ecuación de Gauss-Codazzi

$$\mathcal{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = h^{\rho}_{\alpha} h^{\beta}_{\sigma} h^{\gamma}_{\mu} h^{\delta}_{\nu} R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + \sigma (K^{\rho}_{\mu} K_{\sigma\nu} - K^{\rho}_{\nu} K_{\sigma\mu}). \quad (3.2.17)$$

Si se traza esta ecuación, entonces se obtiene el escalar de curvatura de la hipersuperficie

$$\mathcal{R} = h^{\sigma\nu} \mathcal{R}^{\lambda}_{\sigma\lambda\nu} = R - \sigma (2R_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} + K^2 - K^{\mu\nu} K_{\mu\nu}), \quad (3.2.18)$$

---

<sup>6</sup>Puramente espacial.

con  $K = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ . La segunda ecuación corresponde a la de Codazzi-Mainardi

$$\mathcal{D}_{[\mu} K_{\nu]}{}^{\mu} = \frac{1}{2} h^{\alpha}{}_{\nu} R_{\rho\sigma} n^{\rho}. \quad (3.2.19)$$

Hasta aquí llega la introducción a teoría de subvariedades, es decir, de como se define la curvatura extrínseca. Revisemos la solución al problema presentado en la ecuación (3.1.36). Para hacer frente al término que hace que el principio variacional no esté bien definido, Gibbons-Hawking-York propusieron añadir el siguiente término de frontera para regularizar la acción

$$I[g_{\mu\nu}]_{\text{GHY}} = 2\kappa \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{h} K, \quad (3.2.20)$$

donde,  $\sqrt{h}$  es el determinante de la métrica inducida, y  $K$  corresponde a la traza de la curvatura extrínseca, la cual se define como

$$K = g^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} n_{\beta}, \quad (3.2.21)$$

variando esta expresión

$$\begin{aligned} 2\kappa \delta \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{h} K &= 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \left( \delta \sqrt{h} K + \sqrt{h} \delta K \right), \\ &= 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \left[ \delta \left( -\frac{1}{2} \sqrt{-h} h_{ab} \delta h^{ab} \right) K + \sqrt{h} \delta K \right], \\ &= 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \left( (g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} n_{\beta}) \right), \\ &= 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \left( \delta (h^{\alpha\beta} + n^{\alpha} n^{\beta}) \nabla_{\alpha} n_{\beta} \right), \\ &= 2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \left( \delta \left( h^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} n_{\beta} + \cancel{n^{\alpha} n^{\beta} \nabla_{\alpha} n_{\beta}} \right) \right), \\ &= 2\kappa \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \left( \delta h^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} n_{\beta} + h_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \delta n_{\beta} - h_{\alpha\beta} \delta \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} n_{\gamma} - h_{\alpha\beta} \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} \delta n_{\gamma} \right), \\ &= -2\kappa \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y h_{\alpha\beta} n_{\gamma} \delta \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}, \\ &= \kappa \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y n^{\nu} h^{\alpha\beta} \partial_{\nu} \delta g_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

donde se ha hecho uso de (3.1.33) en la penúltima línea. Notar que si se considera el siguiente principio de acción

$$I[g_{\mu\nu}] = \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x (R - 2\Lambda) + 2\kappa \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{h} K, \quad (3.2.23)$$

entonces, este tendrá un buen comportamiento para las condiciones de frontera tipo Dirichlet. Finalmente de la variación de esta expresión, se obtiene la famosa ecuación de campo de Einstein con constante cosmológica en el vacío, que es dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.2.24)$$

### 3.2.2. Contratérminos de Emparan-Johnson-Myers

En el contexto de la correspondencia de AdS/CFT [69–71], la equivalencia viene dada entre un espacio tiempo que es Anti-de Sitter en  $d$ -dimensiones y una teoría de campos conformes que vive en la frontera  $(d-1)$ -dimensional del espacio tiempo. Precisamente la formulación viene dada por la igualdad de dos funciones de partición de las dos teorías, es decir

$$Z_{\text{AdS}}(\phi_0, i) = Z_{\text{CFT}}(\phi_0, i). \quad (3.2.25)$$

donde los campos  $\phi_0, i$  representan: por el lado gravitacional, a los valores de frontera para los campos del interior  $\phi_i$  los cuales se propagan por el espacio AdS. Mientras que por el lado de la teoría de campos, corresponden a las fuentes externas de corrientes que están acopladas a varios operadores de la teoría de campos conformes.

Para ciertos casos, es útil considerar la función de partición de AdS evaluada en la aproximación de punto de silla, dando como resultado la siguiente expresión

$$e^{-I_{\text{AdS}}(\phi_i)} = \langle e^{\int \phi_{0,i} \mathcal{O}^i} \rangle_{\text{CFT}}, \quad (3.2.26)$$

donde la acción gravitacional viene dada por  $I_{\text{AdS}}(\phi_i)$  y  $\mathcal{O}^i$  son los operadores de la CFT dual. Esta formulación ha tenido un impacto muy importante a la hora de estudiar gravedad cuántica, pero en particular en la investigación acerca de la

termodinámica de agujeros negros y AdS. Consideremos un espacio tiempo en cuatro dimensiones, entonces su acción Euclídea tiene dos contribuciones (las cuales ya han sido estudiadas en la sección anterior) [86]

$$I + I_{\text{superf}} = -\frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} (R + 2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} K, \quad (3.2.27)$$

donde la constante cosmológica viene dada por  $\Lambda = -3/l^2$  para el espacio AdS. Los volúmenes de  $\mathcal{M}$  y  $\partial\mathcal{M}$  son infinitos, lo que trae como consecuencia que estas dos contribuciones sean divergentes. Una forma de resolver este problema es hacer sustraer la métrica de fondo. Sin embargo, se requiere que la frontera asintótica de la métrica de referencia y la principal puedan ser unidas para obtener una contribución superficial finita. En el caso de la solución de Schwarzschild-AdS no es problema seguir este procedimiento, pero en ciertos casos la métrica de fondo es ambigua o desconocida, como es el caso de las soluciones de Taub-NUT-AdS y Taub-Bolt-AdS.

A pesar de que en la ecuación no es fácil dilucidar una métrica de fondo para regularizar la acción, el espacio de AdS permite regularizar estas divergencias a partir de un método de contratérminos. Las divergencias que aparecen en la ecuación (3.2.27) son proporcionales a las integrales locales de la métrica de fondo de la CFT. Esto quiere decir que

$$\begin{aligned} I_{\text{ct}} &= \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} F(l, \mathcal{R}, \nabla\mathcal{R}), \\ &= \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} \left( \frac{3}{l} + \frac{l}{2} \mathcal{R} - \frac{l^3}{2} \left( \mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab} - \frac{3}{8} \mathcal{R}^2 \right) + \dots \right), \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

donde se observa que la acción adicional depende solo de la curvatura y sus derivadas de la métrica inducida  $h_{ij}$  en la frontera.

El término extra añadido por Gibbons-Hawking-York es muy útil para calcular propiedades termodinámicas de los agujeros negros. Sin embargo, hay una dificultad en esta técnica que corresponde a que se necesita sustraer el fondo utilizado. En el caso de Taub-NUT-AdS y Taub-Bolt-AdS esto se vuelve muy engorroso. Este método para regularizar la acción Euclídea no depende del fondo utilizado.

### 3.3. Soluciones a las Ecuaciones de Campo

#### 3.3.1. Solución de Schwarzschild y Teorema de Birkhoff

Poco después de que Einstein publicara las ecuaciones de campos para la relatividad general, Karl Schwarzschild encontró una solución la cual es independiente del tiempo y esféricamente simétrica, que describe el campo gravitacional fuera de una masa esféricamente simétrica en reposo, i.e., el caso del campo central en el vacío. Esta solución es denominada la solución de Schwarzschild.

La condición para que el espaciotiempo tenga simetría esférica quiere decir que existen tres vectores de Killing tipo espacio que satisfacen el álgebra del grupo de rotaciones  $SO(3)$ .

**Teorema de Birkhoff:** Toda solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, es independiente del tiempo y es asintóticamente plana.

Aquí es interesante notar la siguiente diferencia. En la literatura es posible encontrar espaciotiempos que son *estacionarios* y *estáticos*. Este último es más restringido, puesto que se necesita que las coordenadas sean independiente del tiempo (vector de Killing tipo tiempo) y que sea invariante bajo  $t \rightarrow -t$ . Por otro lado, el espaciotiempo estacionario impone que las coordenadas sean independiente del tiempo.

A partir de la condición de isometría y de la elección de las coordenadas  $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$  es posible escribir el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = -f(r, t)dt^2 + g(r, t)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (3.3.1)$$

donde  $f(r, t)$  y  $g(r, t)$  son funciones métricas que dependen de la coordenada radial y temporal. De manera muy conveniente, es posible escribir las funciones métricas

de la siguiente forma

$$f(r, t) = e^{\alpha(r,t)}, \quad (3.3.2)$$

$$g(r, t) = e^{\beta(r,t)}, \quad (3.3.3)$$

por lo que el elemento de línea se reescribe como

$$ds^2 = -e^{\alpha(r,t)} dt^2 + e^{\beta(r,t)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.3.4)$$

A partir de esta expresión es claro observar que el tensor métrico es de la forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{\alpha(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.3.5)$$

Por otro lado, las ecuaciones del campo gravitatorio se pueden resolver analíticamente en el caso de un campo central en el vacío, es decir, en la región en la que no está la materia que genera el campo. En este caso se considera la siguiente ecuación

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0, \quad (3.3.6)$$

la que corresponde a la ecuación de Einstein en el vacío. Usando la métrica obtenida anteriormente, las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \beta(r,t)}{\partial r} - \frac{e^{\beta(r,t)}}{r^2} = 0, \quad (3.3.7)$$

$$\frac{\partial \beta(r,t)}{\partial t} = 0, \quad (3.3.8)$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial r} - \frac{e^{\beta(r,t)}}{r^2} = 0, \quad (3.3.9)$$

### 3.3. SOLUCIONES A LAS ECUACIONES DE CAMPO

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \alpha(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \alpha(r, t)}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha(r, t)}{\partial r} \frac{\partial \beta(r, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \alpha(r, t)}{\partial r} - \frac{\partial \beta(r, t)}{\partial r} \right) \\ & - \frac{1}{e^{\alpha(r, t)}} \left( \frac{\partial \beta(r, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha(r, t)}{\partial t} \frac{\partial \beta(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \beta(r, t)}{\partial t} \right)^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Restando (3.3.7) con (3.3.8), se obtiene

$$\frac{\partial \alpha(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial \beta(r, t)}{\partial r} = 0, \quad (3.3.11)$$

por lo que

$$\alpha(r, t) + \beta(r, t) = f(t), \quad (3.3.12)$$

con  $f(t)$  es una función dependiente de la coordenada temporal. Por otra parte de la ecuación (3.3.8) se infiere que la función  $\beta(r, t) = \beta(r)$ , es decir contiene dependencia radial. Por lo tanto, (3.3.12) se reescribe como

$$\alpha(r, t) = f(t) - \beta(r). \quad (3.3.13)$$

A consecuencia de la separación (3.3.13), es posible fijar  $f(t) = 0$ , sin pérdida de generalidad. De esta forma

$$\alpha(r) = -\beta(r). \quad (3.3.14)$$

Se observa de (3.3.14) que las componentes de la métrica son independientes de la coordenada temporal. La condición (3.3.14) lleva que (3.3.7) se convierta en (3.3.9). Finalmente, si hacemos que  $A = e^\alpha$ , la ecuación se reduce a

$$rA' + A - 1 = 0. \quad (3.3.15)$$

A modo de reducir la expresión, introducimos el siguiente cambio de variable  $u := A - 1$ , pudiendo reescribir la expresión como

$$ru' + u = 0, \quad (3.3.16)$$

$$u(r) = -\frac{2MG}{r}. \quad (3.3.17)$$

Notemos que  $M$  es una constante de integración relacionada con la masa del agujero

negro y  $G$  es la constante de Newton. Además, el  $-2$  se introduce a conveniencia. Estas piezas nos permiten construir la solución completa, por lo cual el elemento de línea para la solución a las ecuaciones de movimiento en el vacío, corresponde a

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (3.3.18)$$

con

$$f(r) = g(r) = 1 - \frac{2MG}{r} . \quad (3.3.19)$$

### Propiedades Termodinámicas de los Agujeros Negros

Anteriormente se ha presentado el método de contratérminos de Emparan-Johnson-Myers. Este método, al ser independiente del fondo utilizado, es muy efectivo a la hora de calcular propiedades termodinámicas.

Considerando (3.3.18) y haciendo una rotación de Wick  $\tau = it$  se obtiene

$$ds_E^2 = f(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2 . \quad (3.3.20)$$

Utilizando una expansión en serie de Taylor en torno al horizonte de eventos  $r_+$

$$f(r) = f'(r_+) (r - r_+) + \mathcal{O}(r - r_+)^2 , \quad (3.3.21)$$

reemplazando en (3.3.20) se tiene

$$ds^2 = f'(r_+) (r - r_+) dt^2 + \frac{dr^2}{f'(r_+) (r - r_+)} + r^2 d\Omega^2 . \quad (3.3.22)$$

Consideremos el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{dr}{\sqrt{f'(r_+) (r - r_+)}} , \\ \rho &= -\frac{2}{\sqrt{f'(r_+)}} \sqrt{r - r_+} , \\ \Rightarrow (r - r_+) &= \frac{f'(r_+)}{4} \rho^2 . \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Si introducimos (3.3.23) en (3.3.22), para  $\theta, \phi$  fijos, se tiene

$$ds^2 = d\rho^2 + \frac{(f'(r_+))^2}{4}\rho^2 d\tau^2, \quad (3.3.24)$$

$$= d\rho^2 + \rho^2 d\left(\frac{f'(r_+)}{2}\tau\right)^2. \quad (3.3.25)$$

Para evitar exceso o déficit angular, debemos pedir que  $\tau$  sea periódico, es decir:  $\tau \in [0, \beta]$ , en donde

$$\frac{f'(r_+)}{2}\beta = 2\pi, \quad (3.3.26)$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{4\pi}{f'(r_+)}. \quad (3.3.27)$$

Entonces,

$$T = \frac{\hbar}{k_b} \frac{1}{f'(r_+)} = \frac{f'(r_+)}{4\pi}, \quad (3.3.28)$$

lo cual corresponde a la **Temperatura de Hawking del agujero negro**.<sup>7</sup>

Por otro lado, la entropía y la energía libre pueden ser calculados a partir del método de Gibbons-Hawking-York. En este caso vamos a considerar el caso asintóticamente plano

$$I_{\text{reg}} = -\frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} R - \frac{1}{8\pi G} \left( \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} K - \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h_0} K_0 \right), \quad (3.3.29)$$

donde el background a considerar es Minkowski, dado por  $K_0$ . Como estamos considerando Schwarzschild, el escalar de curvatura es  $R = 0$ , por lo cual  $I[g_{\mu\nu}]_{\text{EH}} = 0$ . A raíz de este hecho la expresión (3.3.29) se reduce a

$$I_{\text{reg}} = -\frac{1}{8\pi G} \left( \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} K - \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h_0} K_0 \right). \quad (3.3.30)$$

<sup>7</sup>En este trabajo se considera a la constante de Planck y de Boltzmann;  $\hbar = k_b = 1$ , respectivamente

Para calcular la métrica inducida utilizamos la ecuación (3.2.2)

$$h_{ij} = g_{ij} - n_i n_j. \quad (3.3.31)$$

En nuestro caso, estamos interesados en el determinante de la métrica inducida tanto para el caso de Schwarzschild como para Minkowski. Entonces,  $\sqrt{h} = \sqrt{f(r)r^2 \sin^2 \theta}$  y  $\sqrt{h_0} = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta}$ , respectivamente. Por otro lado, necesitamos calcular la curvatura extrínseca. Por ello haremos uso de la ecuación (3.2.13), así la traza de la curvatura extrínseca de Schwarzschild y Minkowski son

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2MG}{r}}} \frac{2r - 3MG}{r^2}, \quad K_0 = \frac{2}{r} \quad (3.3.32)$$

respectivamente. Ahora, debemos considerar que la temperatura es arbitraria para contribución de Minkowski. Para solucionar esto, debemos hacer que asintóticamente la métrica coincida con la solución de Schwarzschild. Esto implica que debemos hacer coincidir la longitud de los círculos del tiempo Euclídeo,

$$\int_0^{\beta_\tau} d\tau \sqrt{h_{\tau\tau}} = \int_0^{\beta_0} d\tau \sqrt{h_{0\tau\tau}}, \quad (3.3.33)$$

$$\beta_\tau \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) = \beta_0. \quad (3.3.34)$$

Notemos que cuando  $r \rightarrow \infty$ , se obtiene que  $\beta = \beta_0$ . Evaluando en la ecuación (3.3.30), la acción Euclídea regularizada es dada por

$$I_{\text{reg}} = 16\kappa\pi^2 r_+^2 \quad (3.3.35)$$

con  $r_+ = 2MG$ ,  $\kappa = (16\pi G)^{-1}$  y  $r_+$  es el radio del horizonte. Ahora, podemos calcular las propiedades termodinámicas. Para la masa y entropía se tiene

$$\mathcal{M} = \frac{\partial I_{\text{reg}}}{\partial \beta_\tau} = \frac{\partial I_{\text{reg}}}{\partial r_+} \left( \frac{\partial \beta_\tau}{\partial r_+} \right)^{-1} = 8\pi\kappa r_+ = M, \quad (3.3.36)$$

$$\mathcal{S} = \left( \beta_\tau - \frac{\partial}{\partial \beta_\tau} \right) I_{\text{reg}} = 16\kappa\pi^2 r_+^2 = \frac{\pi r_+^2}{G} = \frac{A}{4G}, \quad (3.3.37)$$

respectivamente. Notamos que la entropía corresponde a la establecida por Bekenstein-Hawking, y que la constante de integración  $M$  está relacionada con la energía interna del sistema. Además, se justifica el factor de  $-2$  incorporado anteriormente.

### 3.3.2. Solución de Schwarzschild Anti-de Sitter

Cuando las ecuaciones de Einstein son resueltas con la constante cosmológica, se desprenden algunas consecuencias que son muy interesantes presentarlas. Consideremos el siguiente ansatz en 4 dimensiones

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (3.3.38)$$

Al resolver la ecuación (3.2.24) usando como ansatz a (3.3.38) se obtiene la siguiente función métrica

$$f(r) = 1 - \frac{2MG}{r} - \frac{1}{3}r^2\Lambda . \quad (3.3.39)$$

Por otro lado  $\Lambda$  corresponde a la constante cosmológica. En esta tesis utilizaremos  $\Lambda = -3/l^2$ , donde  $l$  corresponde al radio de curvatura de Anti-de Sitter. Con esto la solución se reescribe

$$f(r) = 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{r^2}{l^2} . \quad (3.3.40)$$

El radio del horizonte se define a partir de  $f(r_+) = 0$ . Por otro lado, para utilizar el método (3.3.22), la derivada de la función evaluada en el horizonte de eventos, está dada por

$$f'(r_+) = \frac{2r_+}{l^2} + \frac{2MG}{r_+^2} . \quad (3.3.41)$$

Considerando (3.3.40), aplicamos la condición  $f(r_+) = 0$  para obtener  $M$  en términos de  $r_+$ , es decir

$$MG = \frac{(r_+^2 + l^2)r_+}{2l^2} , \quad (3.3.42)$$

por lo que la ecuación (3.3.41) se reescribe como

$$f'(r_+) = \frac{3r_+^2 + l^2}{r_+l^2} . \quad (3.3.43)$$

Por lo tanto, el período del tiempo Euclídeo corresponde a

$$\beta_\tau = \frac{4\pi l^2 r_+}{3r_+^2 + l^2}, \quad (3.3.44)$$

así la temperatura es

$$T = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{3r_+}{l^2} + \frac{1}{r_+} \right). \quad (3.3.45)$$

Ahora, calculamos la masa. Se define un vector normal a la hipersuperficie a  $r =$  constante, como

$$n^\mu = \delta^\mu_r f(r), \quad (3.3.46)$$

que cumple con la condición  $n^\mu n_\mu = 1$ . Usando la ecuación (3.2.2) se obtiene la métrica inducida  $h_{ab}$ . Utilizando la ecuación (3.2.21) se obtiene

$$K = \frac{1}{2} \frac{r f'(r) + 4f(r)}{r \sqrt{f(r)}}. \quad (3.3.47)$$

Por otro lado, la raíz del determinante de la métrica inducida en el borde, corresponde a  $\sqrt{h} = \sqrt{f(r)} r^2 \sin \theta$ . Si combinamos esto último con la ecuación (3.3.47), nos permiten calcular lo siguiente,

$$\begin{aligned} I_{\text{EH}} + I_{\text{GHY}} &= \frac{8\pi\kappa\beta_\tau}{l^2} (r_\mu^3 - r_+^3) - \frac{16\pi\kappa\beta_\tau}{l^2} \left( \left( r_\mu - \frac{3}{4}r_+ \right) l^2 + \frac{3}{2}r_\mu^3 - \frac{3}{4}r_+^3 \right), \\ &= -\frac{16\pi\kappa\beta_\tau}{l^2} \left( \left( r_\mu - \frac{3}{4}r_+ \right) l^2 + r_\mu^3 - \frac{1}{4}r_+^3 \right), \end{aligned} \quad (3.3.48)$$

en donde hemos realizado la integración radial desde  $r_+$  hasta  $r_\mu$ , siendo  $r_\mu$  un regulador que será eliminado al final del cálculo tomando el límite  $r_\mu \rightarrow \infty$ . Sin embargo, es evidente observar de la ecuación anterior que la acción Euclídea diverge cuando no insertamos un regulador. Para regularizarla, agregamos el contratérmino de Emparan-Johnson-Myers [86], es decir

$$\begin{aligned} I_{\text{EH}} + I_{\text{GHY}} + I_{\text{CT}} &= I_{\text{EH}} + I_{\text{GHY}} - \kappa \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} (\zeta_1 + \zeta_2 \mathcal{R}), \\ &= I_{\text{EH}} + I_{\text{GHY}} - \kappa \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sin \theta \sqrt{f(r)} (r^2 \xi_1 + 2\xi_2). \end{aligned} \quad (3.3.49)$$

Haciendo expansión en serie de Taylor para  $r_\mu \rightarrow \infty$  logramos obtener los coeficientes

$$\xi_1 = -\frac{4}{l}, \quad \xi_2 = -l. \quad (3.3.50)$$

Finalmente la acción Euclídea regularizada corresponde a

$$I_{\text{reg}} = \frac{16\pi^2 \kappa r_+^2}{l^2 + 3r_+} (l^2 - r_+^2). \quad (3.3.51)$$

A primer orden en la aproximación de punto silla, la ecuación (3.3.51) permite obtener las propiedades termodinámicas del sistema. La masa, entropía vienen dadas

$$\mathcal{M} = \frac{\partial I_{\text{reg}}}{\partial \beta_\tau} = \frac{\partial I_{\text{reg}}}{\partial r_+} \left( \frac{\partial \beta_\tau}{\partial r_+} \right)^{-1} = \frac{8\pi \kappa r_+}{l^2} (l^2 + r_+^2) = M, \quad (3.3.52)$$

$$\mathcal{S} = \left( \beta_\tau - \frac{\partial}{\partial \beta_\tau} \right) I_{\text{reg}} = 16\pi^2 \kappa r_+^2 = \frac{\pi r_+^2}{G} = \frac{A}{4G}, \quad (3.3.53)$$

donde la entropía cumple con la ley del cuarto de área. Como conclusión, es fácil verificar que tanto para el caso de Schwarzschild y Schwarzschild-AdS, se cumple la primera ley de la termodinámica.

### 3.3.3. Taub - NUT

Para encontrar más soluciones es necesario relajar las condiciones mencionadas o acoplar la gravedad a términos de materia más generales. Si consideramos la teoría de Einstein (-Maxwell) se pueden explorar soluciones que sean axialmente simétricas y estáticas o considerar que la solución sea estacionaria, lo que implica que se debe relajar la condición de la simetría esférica y buscar espacios tiempos que sean estacionarios y axisimétricos. Este último caso es de particular interés, pues se encuentran los agujeros negros Kerr-Newman con momentum angular y carga eléctrica o magnética, y también se encuentra la solución de Taub-NUT (Newman-Unti-Tambourino), la cual podría incluir carga.

La solución de Taub-NUT no describe un agujero negro porque no asintóticamente plano. De hecho, los únicos agujeros negros estacionarios, axisimétricos de la teoría de Einstein-Maxwell pertenecen a la familia de soluciones de Kerr-Newman.

Por lo general las soluciones axisimétricas y estacionarias solamente contienen dos vectores de Killing, que corresponden a  $K = \partial_t$  y  $m = \partial_\varphi$ . Estos generan traslaciones temporales y rotaciones alrededor de la simetría del eje  $z$ , respectivamente. En general, estos vectores de Killing no son ortogonales entre sí, lo cual implica que las componentes de la métrica fuera de la diagonal  $g_{t\varphi} = k^\mu m_\mu$  no se anula (para que se anule se debería tener en cuenta una solución estática). Además, las componentes de la métrica pueden depender de otras coordenadas, las cuales se llamaremos  $r$  y  $\theta$  en  $d = 4$ . La siguiente ecuación corresponde a un ansatz general para las soluciones descritas

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2, \quad (3.3.54)$$

donde todas las componentes pueden depender de  $r$  y  $\theta$ . El término interesante es la componente  $g_{t\varphi}(r, \theta)$ . Si asintóticamente la componente

$$g_{t\varphi} \sim 2N \cos \theta, \quad (3.3.55)$$

entonces la solución describe un objeto con carga de NUT  $N$ . Si se tienen en cuenta las características mencionadas, la solución más simple en el vacío de Relatividad General es la de Taub-NUT, que se describe por el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = -f(r) (dt + 2N \cos \theta d\varphi)^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + (r^2 + N^2)d\Omega_{(2)}^2, \quad (3.3.56)$$

donde

$$f(r) = \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2 + N^2}, \quad (3.3.57)$$

$$r_\pm = M \pm r_0, \quad (3.3.58)$$

$$r_0^2 = M^2 + N^2, \quad (3.3.59)$$

$$d\Omega_{(2)}^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.3.60)$$

el que corresponde a una generalización de la solución de Schwarzschild, en la cual se añade la carga de NUT. Es fácil verificar que si  $N = 0$ , entonces se recupera la solución de Schwarzschild.

La masa de esta solución puede ser encontrada por métodos estándares y corres-

### 3.3. SOLUCIONES A LAS ECUACIONES DE CAMPO

ponde a  $M$ . En particular, se sabe que para determinar la masa hay que estudiar la expansión de campo débil y para hacer contacto con el límite Newtoniano. El campo gravitacional Newtoniano es dada en la aproximación  $\phi \sim (g_{tt} - 1)/2 = -M/r$ . Las componentes de la diagonal se mantienen relacionadas con el potencial Newtoniano  $\phi$ , sin embargo, Taub-NUT tiene una componente no nula fuera de la diagonal, que corresponde a  $g_{t\varphi}$ , la cual relacionan al potencial Newtoniano gravitomagnético  $\vec{A}$ . De acuerdo a las coordenadas utilizadas para la descripción de esta solución se ve que el campo gravitacional de Taub-NUT, tiene como componentes del potencial gravitomagnético a

$$A_\varphi = g_{t\varphi} = 2N \cos \theta. \quad (3.3.61)$$

Esto es esencialmente el campo electromagnético de un monopolo magnético de carga proporcional a  $N$ . Por tanto, la carga de NUT  $N$  puede ser considerada una suerte de *masa magnética* [87–91]. Es decir, Taub-NUT puede ser interpretada como un dyon gravitacional.

Analizando el comportamiento de cuando  $M \rightarrow 0$  se observa que no es trivial, pues se podría interpretar como un campo gravitacional de spin máximo.

Por otro lado, anteriormente se mencionó el hecho de que esta solución tiene un comportamiento que no es asintóticamente plano. Esto hace que se defina su propia clase de comportamiento asintótico, es decir, espaciotiempo asintóticamente Taub-NUT etiquetado por  $N$  que se caracteriza por la componente fuera de la diagonal  $g_{t\varphi}$ , la cual no se anula en infinito, con la condición de que la coordenada temporal sea periódica para evitar ciertas singularidades y no perder la simetría esférica. La métrica de Taub-NUT no tiene singularidades de curvatura y de hecho es regular cuando  $r = 0$ . Pero, la métrica tiene singularidades tipo *cuerdas* en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , lo cual no permite que sea invertible. Lamentablemente, las singularidades no pueden ser solucionadas de manera simultánea. Sin embargo, no todo está perdido. Misner, en [92] encontró la forma de hacer que la métrica sea regular introduciendo dos parches coordenados. Un parche cubre la región cercana al polo norte  $\theta \geq \pi/2$ , en donde cambiamos el tiempo coordenado de  $t$  a  $t_N$ , es decir

$$t = t_N - 2N\varphi, \quad (3.3.62)$$

por lo cual, la métrica queda

$$ds_N^2 = -f(r) (dt_N - 2N(1 - \cos \theta d\varphi))^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + (r^2 + N^2)d\Omega^2, \quad (3.3.63)$$

donde  $d\Omega^2$  corresponde a la 2-esfera. Luego, el segundo parche cubre la región cercana al polo sur  $\theta \leq \pi/2$ , donde el tiempo coordenado es cambiado de  $t$  a  $t_S$ ,

$$t = t_S + 2N\varphi, \quad (3.3.64)$$

entonces,

$$ds_S^2 = -f(r) (dt_S + 2N(1 + \cos \theta d\varphi))^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + (r^2 + N^2)d\Omega^2. \quad (3.3.65)$$

La región que es superpuesta por ambas regiones, tendremos que  $t_N = t_S + 4N\varphi$ . Dado que  $\varphi$  es una coordenada compacta con periodo  $2\pi$ ,  $t_N$  y  $t_S$  tienen que ser compactos con periodo  $8\pi N$ . Notar que el tratamiento de la eliminación de estas cuerdas, que son denominadas *cuerdas de Misner*, son idénticas a las usadas para eliminar la cuerda de Dirac del monopolo magnético, pues el problema matemático que surge en la métrica es el mismo. Entoces, la condición de cuantización de Dirac se traduce en una relación entre la periodicidad de la coordenada de tiempo y la carga NUT.

Por otro lado, la métrica admite tres vectores de Killing cuyos brackets de Lie son aquellos de la álgebra de Lie de  $SO(3)$ . Cuando el periodo de las coordenadas temporales es  $8\pi N$ , la simetría local puede ser integrada para dar una simetría  $SO(3)$  global y por lo cual la métrica es esféricamente simétrica [93]. Vale la pena mencionar, que la métrica tendrá una topología diferente, es decir, las hipersuperficies a  $r$  constante son  $S^3$  construidas como una fibración de Hopf de  $S^2$ , donde la fibra corresponde al tiempo  $S^1$ . Por lo tanto la topología de la métrica es  $\mathbb{R}^4$ .

Una característica de la función métrica  $f(r)$  es que tiene dos ceros en  $r = r_{\pm}$  y por lo cual existen singularidades coordenadas en estos puntos. Para  $r > r_+$  y  $r < r_-$ , para donde la coordenada  $t$  es temporal y  $r$  es espacial, la métrica contiene curvas tipo tiempo cerradas. Por lo tanto, a pesar de que la forma de la métrica es similar a la solución de Reissner-Nordström, Taub-NUT no tiene interpretación de

agujero negro. Además, el parámetro extremal  $r_0$  se anula para  $M = N = 0$ .

Finalmente, consideremos **la solución de Taub-NUT Euclídea**, la cual será de gran utilidad en el trabajo realizado. Esta solución se obtiene a partir de una rotación de Wick en la coordenada temporal, i.e.,  $t = i\tau$  y para mantener a la métrica real, se agrega una rotación de Wick en la carga de NUT  $N = in$ . Esta solución corresponde a la familia de métricas Euclídeas inhomogéneas [94]. Estas se construyen sobre una línea compleja del fibrado en variedades de Kähler como

$$ds^2 = f(r) (d\tau + 2n\mathcal{A}_{(k)})^2 + \frac{dr^2}{h(r)} + (r^2 - n^2) d\Sigma_{(k)}^2, \quad (3.3.66)$$

donde  $\tau$  es el tiempo Euclídeo,  $n$  es la carga de NUT y  $\Sigma_{(k)}^2$  es el elemento de línea de la variedad de base, dónde la curvatura es constante con  $k = 0, \pm 1$ , para el caso plano, esférico e hiperbólico, respectivamente. Los fibrados son etiquetados por la primera clase de Chern, pues se relaciona con la carga de NUT [36]. En la ecuación (3.3.66) se tiene  $\mathcal{A}_{(k)}$  que corresponde al potencial de Kähler. Este se puede categorizar en diferentes variedades de base las cuales corresponden a [56]

$$\mathcal{A}_{(k)} = \begin{cases} \cos \theta d\varphi & \text{cuando } d\Sigma_{(k=1)}^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ \frac{1}{2}(\theta d\varphi - \varphi d\theta) & \text{cuando } d\Sigma_{(k=0)}^2 = d\theta^2 + d\varphi^2 \\ \cosh \theta d\varphi & \text{cuando } d\Sigma_{(k=-1)}^2 = d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\varphi^2 \end{cases} \quad (3.3.67)$$

$\mathcal{A}_{(k)}$  se relaciona con la variedad de base a partir de la forma fundamental  $\Omega_{(k)}$ , asociada a la métrica de Kähler, como  $\Omega_{(k)} = d\mathcal{A}_{(k)}$ . Considerar que cuando  $d\Sigma_{(k=1)}^2$ , entonces este es localmente isomorfo a  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , a pesar de que la equivalencia entre  $\mathbb{C}\mathbb{P}^p$  y  $\mathbb{S}^{2p}$  no se mantiene para  $p \geq 2$  puesto que para este caso las hiperesferas no están permitidas en la estructuras de Kähler.

Para tener hipersuperficies Euclídeas regulares donde se encuentren puntos fijos que sean cero o dos-dimensional (nuts o bolt, respectivamente) [25, 30], se deben

imponer las siguientes condiciones

$$\text{Para NUT: } f(r)|_{r=n} = 0 \quad \text{y} \quad \sqrt{f'(r)h'(r)}\Big|_{r=n} = \frac{4\pi}{\beta_\tau}, \quad (3.3.68a)$$

$$\text{Para Bolt: } f(r)|_{r=r_b} = 0 \quad \text{y} \quad \sqrt{f'(r)h'(r)}\Big|_{r=r_b} = \frac{4\pi}{\beta_\tau}, \quad (3.3.68b)$$

donde también la función métrica  $h(r)$  se anula en los puntos fijos. Observar que las primas representan la diferenciación con respecto a la variable  $r$ ,  $\beta_\tau$  es el periodo del tiempo Euclídeo y el horizonte de Taub-Bolt satisface que  $r_b > n$ . Cabe destacar que cuando  $k = 1$ , la inobservabilidad de la cuerda de Misner impone que  $\beta_\tau = 8\pi n$ . Esta condición más la ausencia de singularidades cónicas, permite asegurar vía (3.3.68), que  $r_b$  se relaciona con la carga de NUT.

### Taub-NUT/Bolt-AdS

Analicemos lo que ocurre cuando resolvemos las funciones métricas para la ecuación de Einstein con constante cosmológica. Las funciones métricas corresponden a

$$f(r) = h(r) = k \left( \frac{r^2 + n^2}{r^2 - n^2} \right) - \frac{2MGr}{r^2 - n^2} - \frac{\Lambda}{3} \frac{(r^4 - 6n^2r^2 - 3n^4)}{r^2 - n^2}, \quad (3.3.69)$$

donde  $M$  es una constante que se obtiene de la acción Euclídea en la on-shell [86] evaluando el tensor energía-estrés de la frontera regularizada en infinito [95], la cual se relaciona con la masa. Observar que cuando  $n \rightarrow 0$  se reduce al agujero negro de Schwarzschild- AdS con signatura Euclídea.

En el caso de Taub-NUT, la condición de regularidad (3.3.68a) implica que

$$MG = kn + \frac{4}{3}\Lambda n^3 \equiv M_n G, \quad (3.3.70)$$

dónde se ve  $\beta_\tau = (8\pi n)/k$  y  $M_n$  representa la masa para el caso de NUT.

Analicemos la solución para los diferentes valores de  $k$ . Para el caso  $k = 0$  se obtiene un tiempo Euclídeo no compacto. Para  $k = -1$  se tiene un horizonte antes de  $r = n$ , con lo cual se contradice con la hipótesis de NUT. Para  $k = 1$ , el espacio es

topologicamente equivalente  $\mathbb{R}^4$  puesto que representa el fibrado de Hopf del tiempo Euclídeo en  $S^2$ . En este caso, el tensor de Weyl es globalmente auto-dual y cuando se añade la densidad de Pontryagin, la masa es cero [89].

Ahora, consideremos el caso de Taub-Bolt, donde la solución es provisto con un horizonte en  $r = r_b > n$  [30]. De las condiciones de regularidad (3.3.68b) implica que la constante de integración se fija como

$$MG = \frac{k}{2r_b} (r_b^2 + n^2) - \frac{\Lambda (r_b^4 - 6n^2 r_b^2 - 3n^4)}{6r_b} \equiv M_b G, \quad (3.3.71)$$

donde, analogamente al caso de NUT,  $M_b$  representa la masa de bolt. Al contrario del caso de Taub-NUT, aquí el tensor de Weyl ya no es globalmente auto-dual, incluso sin la constante cosmológica encendida. Esto se puede determinar pues el  $\beta_\tau$  es

$$\beta_\tau = \frac{4\pi r_b}{k - \Lambda (r_b^2 - n^2)}. \quad (3.3.72)$$

Anteriormente se mencionó que la inobservabilidad de la cuerda de Misner cuando  $k = 1$ , requiere que  $\beta_\tau = 8\pi n$ , lo cual impone una relación entre  $r_b$  y  $n$  que corresponde a

$$r_b = -\frac{1 \pm \sqrt{1 + 16\Lambda n^2 (\Lambda n^2 + 1)}}{4\Lambda n}. \quad (3.3.73)$$

Entonces a partir de este resultado, se debe cumplir la condición  $r_b > n$  y además pedir que el argumento de la raíz cuadrada sea positiva. Estas condiciones aseguran que exista la solución de Taub-Bolt.

Por otro lado, como hemos visto, las propiedades termodinámicas se obtienen a partir de la acción Euclídea regularizada. Consideremos el caso de Taub-NUT-AdS auto-dual, la cual se obtiene a partir de la métrica Euclídea (3.3.66) con  $k = 1$  y la condición (3.3.70), lo cual conduce a

$$f(r) = \frac{(r - n) (l^2 - 3n^2 + 2nr + r^2)}{(n + r) l^2}. \quad (3.3.74)$$

Esto nos permite obtener el periodo del tiempo Euclídeo, el cual es dado por

$$\beta_\tau = 8\pi n. \quad (3.3.75)$$

Por otro lado, usando los métodos aplicados en la sección 3.3.2, se deduce que la raíz cuadrada de la métrica inducida es  $\sqrt{h} = \sqrt{f(r)} (r^2 - n^2) \sin(\theta)$ . Con esto, es posible obtener la traza de la curvatura extrínseca, que corresponde a

$$K = \frac{1}{2} \frac{f'(r)}{\sqrt{f(r)}} + \frac{2r\sqrt{f(r)}}{(r^2 - n^2)}. \quad (3.3.76)$$

Sabemos que la acción de Einstein-Hilbert sumado con la acción de Gibbons-Hawking-York, diverge cuando  $r \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, recurrimos al método de los contratérminos. Al analizar la acción resultante, notamos que los coeficientes que regularizan a la acción son exactamente los de la ecuación (3.3.50), por lo cual la acción Euclídea renormalizada es

$$I_{ren} = 64\kappa n^2 \pi^2 \left( 1 - \frac{2n^2}{l^2} \right). \quad (3.3.77)$$

Al igual que en el caso de Schwarzschild-AdS la ecuación (3.3.77) nos permite obtener las propiedades termodinámicas de la solución a primer orden en la aproximación de punto de silla. Así, la masa y entropía vienen dadas por

$$\mathcal{M} = \frac{\partial I_{reg}}{\partial \beta_\tau} = \frac{\partial I_{reg}}{\partial r_+} \left( \frac{\partial \beta_\tau}{\partial r_+} \right)^{-1} = M, \quad (3.3.78)$$

$$\mathcal{S} = \left( \beta_\tau - \frac{\partial}{\partial \beta_\tau} \right) I_{reg} = \frac{4\pi n^2}{G} \left( 1 - \frac{6n^2}{l^2} \right), \quad (3.3.79)$$

respectivamente. En esta tesis, solo presentamos el caso de Taub-NUT-AdS a modo de simpleza. Sin embargo, el caso para Taub-Bolt-AdS se realiza de manera análoga (ver [78]).

Es importante señalar que Taub-NUT no tiene horizonte, por lo que se hubiese esperado que la entropía fuese cero. No obstante, se observa de (3.3.79) que es distinta de cero. Esto tiene que ver con el hecho que la *cuerda de Misner* (el análogo gravitacional de la cuerda de Dirac) contribuye de manera no trivial a la entropía [36, 37, 96].

## Capítulo 4

# Teoría de Horndeski de la Gravedad

Sin duda alguna Relatividad General es una teoría bastante exitosa, la cual es el modelo estándar de la gravedad. Las ecuaciones de campo de la Relatividad General pueden ser obtenidas de forma elegante a partir de un principio de mínima acción y con condiciones de frontera apropiadas. Al analizar los términos que están en el sector geométrico de la acción, vemos que nos encontramos con el escalar de Ricci y la constante cosmológica. La variación de estos términos nos entrega la parte geométrica de las ecuaciones de campo. Por otro lado, la variación del sector de materia define el tensor de energía-momentum, es decir la parte material de las ecuaciones de campo. La conservación covariante de la energía-momentum requiere que la esta contribución sea libre de divergencias, sin embargo, esta se satisface por el sector geométrico debido a que las identidades de Bianchi se satisfacen. Entonces, una pregunta natural es, ¿qué otras posibilidades hay para el lado izquierdo de las ecuaciones de campo?, ¿cuál es el tensor simétrico más general y libre de divergencias que puede ser construido a partir del tensor métrico, y de sus primeras y segundas derivadas? El teorema de Lanczos-Lovelock [97,98], en cuatro dimensiones, nos indica que el tensor de Einstein es el único que cumple con la simetría, que sea libre de divergencias, de rango dos y que no contiene derivadas más de segundo orden de la métrica.

Sin embargo, Relatividad General no está libre de problemas, pues en el régimen de ultra violeta se espera que la teoría tenga una ruptura, perdiendo predictibilidad. Por otro lado, en el régimen infrarrojo, si se asume que Relatividad General es válida,

entonces se necesita invocar la existencia de un sector oscuro. Si uno relaja esta suposición y motivado por la materia oscura o la expansión acelerada del universo, se ha mostrado que las modificaciones de la gravedad [99–101] son severamente desafiadas por las observaciones [102, 103]. Si bien la aceleración cósmica es bien explicada por la constante cosmológica y Relatividad General, los cálculos, que son atribuidos a fluctuaciones cuánticas de los campos de materia, exceden por muchos órdenes a lo observado [104].

En gravitación, la teoría tensor-escalar más general en cuatro dimensiones con características similares a Relatividad General, es decir, invariante a difeomorfismos y ecuaciones de campo de segundo orden, es conocida como la teoría de Horndeski de la gravedad [105]. Su espacio de soluciones está dotado de agujeros negros con pelo [106–110], estrellas bosónicas [111], estrellas de neutrones con ecuaciones de estado realista y politrópica, que además pueden ser con o sin rotación [112, 113]. En el contexto de holografía, diferentes aspectos de esta teoría han sido explorados, por ejemplo, agujeros negros asintóticamente Lifshitz con exponente crítico fraccional [114], entropía de entrelazamiento holográfico [115], y modelos con disipación espontánea de momentum [116–121], entre otros [122, 123]. Recientemente el motor de calor holográfico fueron analizados en [124], como también el crecimiento complejo [125], y el transporte de carga de corriente alterna holográfica [126]. La termodinámica de esas soluciones han sido exploradas en [116, 127], y se ha mostrado que los métodos Euclídeos no llevan al mismo resultado cuando es comparada con el formalismo de Noether-Wald [128]. Desde el punto de vista cosmológico, estas teorías producen la expansión acelerada del universo sin el problema de la constante cosmológica [129], y en un sector particular es compatible con las restricciones impuestas por los multimensajeros astronómicos [130–137].

En la próxima sección vemos el lagrangiano de Horndeski y los cálculos realizados a partir de la teoría.

## 4.1. Lagrangiano de Horndeski

El lagrangiano de Horndeski [105] define la teoría de gravedad más general para una métrica local en cuatro dimensiones que posee invarianza de Lorentz y de difeo-

morfismos, que suplementa con un grado de libertad extra a Relatividad General con ecuaciones de movimiento de segundo orden. Esta condición permite evadir las inestabilidades de Ostrogradsky [138, 139].

El lagrangiano viene dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & c_1\phi + c_2X - c_3X\Box\phi + \frac{c_4}{2}X^2R + c_4X [(\Box\phi)^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}] \\ & + c_5X^2G^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} - \frac{c_5}{3}X [(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi\phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} + 2\phi_{\mu\nu}\phi^{\nu\lambda}\phi_{\lambda}^{\mu}] , \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

donde  $G_2, G_3, G_4$  y  $G_5$  son funciones arbitrarias de  $\phi$  y  $X$ .

Consideremos un sector con simetría de desplazamiento en el espacio de los campos escalares de esta teoría, el cual viene descrito por el siguiente principio de acción mínimamente acoplado [122, 123]

$$I[g_{\mu\nu}, \phi] = I_H + I_{\text{GHY}} + I_{\text{CT}} , \quad (4.1.2)$$

donde

$$\begin{aligned} I_H &= \int_{\mathcal{V}} d^Dx \sqrt{-g} \left[ \kappa(R - 2\Lambda) - \frac{1}{2}(\alpha g_{\mu\nu} - \beta G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \right] , \\ &\equiv \int_{\mathcal{V}} d^Dx \sqrt{-g} \mathcal{L}_H \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$$I_{\text{GHY}} = 2\kappa \int_{\partial\mathcal{V}} d^{D-1} \sqrt{-h} K \quad (4.1.4)$$

$$\begin{aligned} I_{\text{CT}} &= \int_{\partial\mathcal{V}} d^{D-1} \sqrt{-h} [\zeta_1 + \zeta_2 \mathcal{R} + \zeta_3 \mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu} \\ &+ \zeta_4 \mathcal{R}^2 + \zeta_5 \mathcal{G} + \zeta_6 h^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \zeta_7 h^{\mu\nu} \nabla_\mu \Box \phi \nabla_\nu \phi + \dots] . \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Aquí, la constante gravitacional viene dada por  $\kappa = (16\pi G)^{-1}$ ,  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein, mientras que las constantes que controlan los términos canónicos y cinéticos vienen dados  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Además,  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$  corresponde a la métrica inducida en la frontera  $\partial\mathcal{V}$ ,  $h$  es su determinante, y  $n^\mu$  es el vector unitario normal espacial con  $n^\mu n_\mu = 1$  y  $n^\mu h_{\mu\nu} = 0$ . La curvatura extrínseca asociada a las hipersuperficies pueden ser expresadas como  $K_{\mu\nu} = h^\lambda{}_\mu \nabla_\lambda n_\nu$ , cuya traza es  $K = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ . Se añade que  $\mathcal{G} = \mathcal{R}^2 - 4\mathcal{R}_{\mu\nu} \mathcal{R}^{\mu\nu} + \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda\rho} \mathcal{R}^{\mu\nu\lambda\rho}$  es el término de

Gauss-Bonnet de la frontera, donde  $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$  es el tensor de Riemann,  $\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$  es el tensor de Ricci y finalmente  $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$  es el escalar de Ricci. Todos ellos son cantidades intrínsecas que dependen de  $h_{\mu\nu}$ , que pueden ser obtenidas de las ecuaciones de Gauss-Codazzi, y por lo tanto contracciones de ella.

En la sección 3.2.1 comentamos acerca de los términos de borde, i.e., el término de Gibbons-Hawking-York [84,85] y los contratérminos de Emparan-Johnson-Myers [86]. Estos se añaden para que el sector métrico tenga un principio variacional con buen comportamiento y que tenga condiciones de frontera de Dirichlet.

Las ecuaciones de movimiento de la ecuación (4.1.2) son obtenidas al realizar variaciones estacionarias con respecto a la métrica y el campo escalar. Estas corresponden a

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{2\kappa} T_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{\beta}{2\kappa} T_{\mu\nu}^{(2)} = 0, \quad (4.1.6)$$

$$\mathcal{E} \equiv \nabla_\mu J^\mu = 0, \quad (4.1.7)$$

respectivamente, en donde,

$$T_{\mu\nu}^{(1)} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi R - 2 \nabla_\lambda \phi \nabla_{(\mu} \phi R_{\nu)}^\lambda - \nabla^\lambda \phi \nabla^\rho \phi R_{\mu\lambda\nu\rho} \\ & - (\nabla_\mu \nabla_\lambda \phi) (\nabla_\nu \nabla^\lambda \phi) + (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \square \phi + \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi \\ & - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [(\square \phi)^2 - (\nabla_\lambda \nabla_\rho \phi) (\nabla^\lambda \nabla^\rho \phi) - 2 \nabla^\lambda \phi \nabla^\rho \phi R_{\lambda\rho}], \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

$$J^\mu = (\alpha g^{\mu\nu} - \beta G^{\mu\nu}) \nabla_\nu \phi. \quad (4.1.10)$$

Las soluciones de esta teoría han sido ampliamente estudiadas en diferentes contextos y se han encontrado una gran cantidad de resultados analíticos y numéricos. Aquí estamos interesados en las configuraciones Euclídeas estacionarias con perfil escalar regular en los puntos fijos. Estas soluciones no han sido consideradas en la literatura y son relevantes para las distintas aplicaciones descritas en el Capítulo 1. Para lograr este cometido, estudiaremos la geometría de Taub-NUT/Bolt-AdS para resolver las ecuaciones de movimiento (4.1.6) y (4.1.7).

## 4.2. Taub-NUT-AdS y Taub-Bolt-AdS

### 4.2.1. Modo cero del escalar de Horndeski con métrica de fondo Taub-NUT

En el límite de campo de prueba, el campo escalar de modo cero con perfil radial  $\phi = \phi(r)$ , donde la solución de fondo es Taub-NUT/Bolt-AdS, satisface la ecuación de Klein-Gordon (4.1.7), la cual corresponde a

$$\frac{\alpha + \Lambda\beta}{r^2 - n^2} \frac{d}{dr} [(r^2 - n^2) f \phi'] = 0, \quad (4.2.1)$$

donde  $f = f(r)$  es dada por la ecuación (3.3.67). Se observa que la derivada es una constante (eventualmente puede ser cero). Entonces

$$\phi'(r) = \frac{\mu}{(r^2 - n^2) f}, \quad (4.2.2)$$

donde  $\mu$  corresponde a la constante de integración.

Por otro lado, el tensor energía-momentum del escalar de Horndeski se define como  $T_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}^{(1)} + \beta T_{\mu\nu}^{(2)}$ . Si de este tensor proyectamos sobre componente temporal usando vielbein  $e^\mu_a$ , se tiene  $T_{ab} = e^\mu_a e^\nu_b T_{\mu\nu}$ , por lo cual la densidad de energía del modo cero en el fondo Taub-NUT-AdS es

$$\rho(r) = T_{00} = f^{-1} T_{tt} = \frac{\mu^2}{18f(r^2 - n^2)^5} \left\{ 2 [3r^2 + 2n^2] [k(r^2 + n^2) - 2GMr] - (r^2 - n^2)^3 - \frac{\Lambda}{3} (9r^6 - 41n^2r^4 - 33n^4r^2 - 15n^6) \right\}. \quad (4.2.3)$$

Notar que cuando se consideran los límites  $r \rightarrow n$  o  $r \rightarrow r_b$ , (4.2.3) se anula en los puntos fijos cero y dos-dimensional (nuts y bolt, respectivamente). Además, el comportamiento asintótico del tensor energía-momentum, es  $\rho(r) \sim -\Lambda r^2/3$ , el cual es como una constante cosmológica. Luego, si analizamos la normal de la corriente escalar (4.1.7), esta es divergente para los puntos fijos. Este problema puede ser resuelto sin dificultad, anulando la componente radial de la corriente para un campo

escalar auto-gravitante [106–108, 140].

### 4.2.2. Soluciones de Taub-NUT/Bolt con un campo escalar auto-gravitante

En esta sección se analiza el caso  $k = 1$ , donde también consideramos que  $\phi = \phi(r)$ , lo cual nos permite encontrar soluciones Euclídeas con campo escalar auto-gravitante. Para asegurarnos de la regularidad de la norma de la corriente escalar en los puntos fijos se considera [140],

$$J^r = (\alpha g^{rr} - \beta G^{rr}) \phi' = 0. \quad (4.2.4)$$

Luego de que el campo escalar es no trivial, se entiende que la rama de interés en este caso es  $\alpha g^{rr} - \beta G^{rr} = 0$ , donde se repara que hay una relación entre las funciones métricas, que corresponde a

$$h(r) = -\frac{f \{f\beta n^2 - (r^2 - n^2) [\beta + \alpha (r^2 - n^2)]\}}{r\beta [(r^2 - n^2) f' + rf]}. \quad (4.2.5)$$

Esto nos permite evadir el teorema de no-pelo [141]. La relación (4.2.5) resuelve automáticamente la ecuación de Klein-Gordon (4.1.7). Con esto,  $\mathcal{E}_{rr} = 0$  se resuelve gracias al siguiente campo escalar

$$\phi'^2(r) = -\frac{2r\kappa (r^2 - n^2)^2 (\Lambda\beta + \alpha) [(r^2 - n^2) f' + fr]}{f [\alpha (r^2 - n^2)^2 + \beta (r^2 - n^2) - \beta f n^2]^2}. \quad (4.2.6)$$

Si reemplazamos la ecuación (4.2.5) y (4.2.6) en  $\mathcal{E}_{tt} = 0$ , entonces se obtiene

$$\begin{aligned}
 0 = & \left[ f\beta n^2 - (r^2 - n^2) (\beta + \alpha [r^2 - n^2]) \right] \left[ (\Lambda\beta - \alpha) (r^2 - n^2)^2 - 2\beta \{r^2 - n^2 (f + 1)\} \right] f'' \\
 & - \beta n^2 \left[ (\Lambda\beta + 3\alpha) (r^2 - n^2)^2 + 2\beta \{r^2 - n^2 (f + 1)\} \right] f'^2 + \frac{1}{r (r^2 - n^2)} \left[ 2\beta^2 n^4 (n^2 + 7r^2) f^2 \right. \\
 & - \beta n^2 (r^2 - n^2) \left\{ (\Lambda\beta - 3\alpha) n^4 + (4\beta - 8\Lambda\beta r^2 - 18\alpha r^2) n^2 + (7\Lambda r^4 + 18r^2) \beta + 21\alpha r^4 \right\} f \\
 & + (r^2 - n^2) \left\{ \Lambda\beta^2 (2r^6 - n^6 + 4n^4 r^2 - 5n^2 r^4) - \alpha n^2 (\Lambda\beta - \alpha) (r^2 - n^2)^3 \right. \\
 & \left. \left. + \beta [3\alpha (2r^6 + n^6 - 3n^2 r^4) + 2\beta (2r^4 - n^4 - n^2 r^2)] \right\} \right] f' + \frac{1}{r (r^2 - n^2)^2} \left[ 8f^3 \beta^2 n^4 r^3 \right. \\
 & - 4n^2 \beta r^3 (r^2 - n^2) [2\Lambda\beta (r^2 - n^2) + 3\alpha (r^2 - n^2) + 2\beta] f^2 + 2r^3 (r^2 - n^2)^3 \left\{ 2\Lambda\beta^2 \right. \\
 & \left. \left. + \alpha (\Lambda\beta - \alpha) (r^2 - n^2) \right\} f \right]. \tag{4.2.7}
 \end{aligned}$$

Esta es la ecuación maestra para la función métrica  $f(r)$ . A pesar de que la ecuación se ve complicada de resolver analíticamente para  $n \neq 0$ , como veremos en la próxima sección, es posible. Notar que cuando  $n \rightarrow 0$ , entonces se resuelve con la versión Euclídea del agujero negro reportado en [107, 108].

### Espacio Taub-NUT-AdS localmente Euclídeo con campo escalar no trivial

Antes de analizar la solución numérica de la ecuación maestra (4.2.7), se reporta la siguiente solución analítica para el campo escalar no trivial,

$$f(r) = \frac{r^2 - n^2}{4n^2}, \tag{4.2.8a}$$

$$h(r) = \frac{[r^2 - n^2] [3\beta + 4\alpha (r^2 - n^2)]}{12\beta r^2}, \tag{4.2.8b}$$

$$\phi(r) = \phi_0 \pm \frac{\sqrt{-6\kappa (\Lambda\beta + \alpha)}}{2\alpha} \ln [3\beta + 4\alpha (r^2 - n^2)], \tag{4.2.8c}$$

dónde  $\phi_0$  es una constante de integración, que a partir de la simetría de desplazamiento  $\phi \rightarrow \phi + \text{constante}$  esta puede ser fijada a cero, sin pérdida de generalidad. Cabe destacar que en el argumento de la raíz cuadrada del campo escalar se obtiene que  $\Lambda\beta + \alpha < 0$ . Además, se añade que la solución tiene un *nut*, ya que se

anula cuando  $r = n$  y el periodo del tiempo Euclídeo corresponde a  $\beta_\tau = 8\pi n$ . De este modo la temperatura de Hawking es  $T = (8\pi n)^{-1}$ . Por otro lado, al analizar los vectores de Killing de la métrica nos encontramos que son diez, y que ésta es localmente  $AdS_4$  con signatura Euclídea cuyo tensor de Riemann es

$$R^{\lambda\rho}{}_{\mu\nu} = -\frac{2\alpha}{3\beta} \delta_{[\mu}^{\lambda} \delta_{\nu]}^{\rho}. \quad (4.2.9)$$

De (4.2.9) se puede interpretar el radio de la curvatura efectiva como  $l_{\text{ef}} = \alpha/(3\beta)$ . Además, es fácil ver que la densidad de Pontryagin es cero. Ahora bien, el tensor de energía-momentum del escalar de Horndeski gravita on-shell como una constante cosmológica, es decir

$$(T_{\mu\nu}^{(1)} + T_{\mu\nu}^{(2)}) \Big|_{\text{on-shell}} = \left( \frac{\alpha}{\beta} + \Lambda \right) g_{\mu\nu}. \quad (4.2.10)$$

Este comportamiento se ha reportado en [110], y generaliza sus configuraciones del campo escalar en presencia de la carga de NUT.

El análisis de la solución también implica estudiar las propiedades termodinámicas. Estas pueden ser obtenidas a partir de la relación  $Z \approx -I$  al orden más bajo de la aproximación de punto de silla [85]. Recordando la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}_H$ ,

$$\mathcal{L}_H = \kappa(R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} (\alpha g_{\mu\nu} - \beta G_{\mu\nu}) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi, \quad (4.2.11)$$

evaluando el ansatz métrico,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = \kappa & \left[ -\frac{f'' h}{f} + \frac{f'^2 h}{2f^2} - \left( \frac{h'}{2f} + \frac{2hr}{f(r^2 - n^2)} \right) f' - \frac{2h'r}{r^2 - n^2} \right. \\ & \left. + \frac{2[(r^2 - n^2)(1 - h) - n^2(f - h)] - 2\Lambda}{(r^2 - n^2)^2} - \frac{\alpha}{2} h \phi'^2 \right. \\ & \left. + \frac{\beta h \phi'^2}{2f(r^2 - n^2)} \left[ f'hr - f + \frac{fhr^2 + f^2 n^2}{r^2 - n^2} \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Estudiando la métrica del borde, donde se define un vector espacial unitario  $n^\mu$ , encontramos los escalares de curvatura extrínseca y la intrínseca, los cuales son

respectivamente,

$$K = \frac{\sqrt{h} [(r^2 - n^2) f' + 4fr]}{2f (r^2 - n^2)} \quad \text{y} \quad \mathcal{R} = \frac{2[r^2 - n^2(1 + f)]}{(r^2 - n^2)^2}. \quad (4.2.13)$$

Estos nos permiten calcular el término de Gibbons-Hawking-York y contratérminos que regularizan la acción. Sin embargo, en el caso del método de Emparan-Johnson-Myers, no solo basta con el escalar de curvatura, sino que también es necesario que los parámetros de los contratérminos sean

$$\zeta_1 = \frac{2\kappa(\Lambda\beta - \alpha)}{\sqrt{3\alpha\beta}} \quad \text{y} \quad \zeta_2 = -\frac{\kappa\sqrt{3\beta}(\Lambda\beta + 3\alpha)}{2\alpha^{3/2}}, \quad (4.2.14)$$

para que la acción Euclídea evaluada en la solución (4.2.8) on-shell sea finita cuando  $r \rightarrow \infty$ . Por lo tanto la acción Euclídea regularizada es

$$I_{\text{reg}} = \frac{3\pi\beta(\Lambda\beta + 2\alpha)}{2G\alpha^2}. \quad (4.2.15)$$

A priori podríamos esperar que los términos de curvatura de mayor y las derivadas de los términos del escalar contribuyan en la acción, sin embargo, para la expansión asintótica en  $D = 4$  estos son términos subleading, por lo cual no logran aportar. No está demás mencionar que el término de Gauss-Bonnet no logra una contribución en  $D = 4$ , pues se anula. Este comienza a tomar relevancia en  $D \geq 5$ .

Uno de los objetivos de obtener la acción Euclídea regularizada (4.2.15), es calcular las propiedades termodinámicas de la solución. Para ello la definición de energía libre, masa, entropía y calor específica, respectivamente son

$$\mathcal{F} = \beta_\tau^{-1} I_{\text{reg}}, \quad \mathcal{M} = \frac{\partial I_{\text{reg}}}{\partial \beta_\tau}, \quad \mathcal{S} = \beta_\tau \frac{\partial I_{\text{reg}}}{\partial \beta_\tau} - I_{\text{reg}}, \quad \mathcal{C} = -\beta_\tau \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta_\tau}. \quad (4.2.16)$$

Se observa que (4.2.15) no depende del periodo del tiempo Euclídeo, lo que implica que la masa es cero. Por otro lado, Robert Mann reportó en [37], que la cuerda de Misner hace una contribución no trivial a la entropía del espaciotiempo con variedad de base esférica. Este es el caso estudiado en este trabajo, por lo cual la entropía de esta solución pertenece meramente a la cuerda de Misner y corresponde

a

$$\mathcal{S} = -\frac{3\pi\beta(\Lambda\beta + 2\alpha)}{2G\alpha^2}. \quad (4.2.17)$$

Se aprecia que la entropía no depende del periodo del tiempo Euclídeo, por lo tanto la primera ley de la termodinámica se satisface completamente y que el calor específico se anule. Mencionar que la energía libre es proporcional a la temperatura de Hawking. Para que la entropía sea definida positiva, se tiene que cumplir que  $\Lambda\beta + 2\alpha < 0$ . Esta compatibilidad junto a los campos reales escalares y a la ausencia de fantasmas, implica que  $\Lambda < 0$ ,  $\beta > 0$  y  $0 < \alpha < -\Lambda\beta/2$ .

### Soluciones AdS Taub-NUT/Bolt asintóticamente localmente Euclídeas

Esta sección está dedicada al análisis de las soluciones numéricas arrojadas tanto para el caso de Taub-NUT como para el Bolt. Primero, es importante tener las condiciones iniciales tal que sean compatibles con las ecuaciones de campo. Para el caso NUT, las condiciones de regularidad (3.3.68a) nos permiten hacer una expansión en serie de Taylor centrada en  $r = n$ , es decir

$$f(r) = f_1 [(r - n) + f_2 (r - n)^2 + f_3 (r - n)^3 + f_4 (r - n)^4 + \dots]. \quad (4.2.18)$$

Reemplazando esta expansión en serie de la función  $f(r)$  en (4.2.7) encontramos los coeficientes que acompañan a  $(r - n)$ . Encontramos que  $f_1$  se determina a partir de las ecuaciones de campo, dando  $f_1 = 1/2n$ . Luego, para los coeficientes  $f_i$  con  $i \geq 3$ , se obtienen recursivamente en términos del  $f_2$ , el cual es un parámetro libre. Se observa que en la teoría de relatividad general este coeficiente se relaciona con la masa. Al imponer la condición (3.3.68a), éste parámetro se fija completamente en función de la carga de NUT. Es importante observar, que a pesar de imponer la condición de NUT, el coeficiente  $f_2$  aún sigue siendo libre. Esto nos induce a pensar que este parámetro libre se interpreta como un pelo escalar de la solución. A modo de ilustrar la recursividad mencionada anteriormente, los coeficientes  $f_3$  y  $f_4$  son

dados por

$$f_3 = \frac{1}{48n^2} [40\Lambda n^2 + 30nf_2 + 9] [2nf_2 - 1], \quad (4.2.19)$$

$$f_4 = \frac{1}{144\beta^2 n^3} \left[ 160\Lambda^2 \beta^2 n^4 - 128\Lambda \alpha \beta n^4 + 336\Lambda \beta^2 n^3 f_2 - 64\alpha^2 n^4 + 126\beta^2 n^2 f_2^2 + 12\Lambda \beta^2 n^2 + 9\beta^2 n f_2 - 18\beta^2 \right] [2nf_2 - 1]. \quad (4.2.20)$$

Es fácil ver que cuando  $f_2 = 1/2n$  los coeficientes  $f_i$  con  $i \geq 3$  se anulan. Esto nos lleva al estado fundamental comentado anteriormente (ecuaciones (4.2.8)).

Notar que (4.2.7) es singular cuando  $r = n$ , lo cual podría significar un problema a la hora de usar métodos numéricos. Para solucionar este obstaculo se introduce un regulador  $\epsilon \ll 1$ , por lo cual las condiciones iniciales son<sup>8</sup>

$$f(r = n + \epsilon) = f_1 (\epsilon + f_2 \epsilon^2 + f_3 \epsilon^3 + \dots), \quad (4.2.21a)$$

$$f'(r = n + \epsilon) = f_1 (1 + 2\epsilon f_2 + 3\epsilon^2 f_3 + \dots). \quad (4.2.21b)$$

Agregar que cuando nos acercamos asintóticamente a (4.2.9),  $f_2$  debe estar sujeta a la condición  $f_2 \neq 1/2n$ . Finalmente el periodo del tiempo Euclídeo para este caso es  $\beta_\tau = 8\pi n$ . El resultado numérico para las funciones métricas y los invariantes de curvatura, con diferentes valores de  $f_2$ , son representados gráficamente en la figura 4.2.1 y figura 4.2.2, respectivamente.

<sup>8</sup>Se considera hasta tercer orden de tal forma tener una mayor precisión numérica.

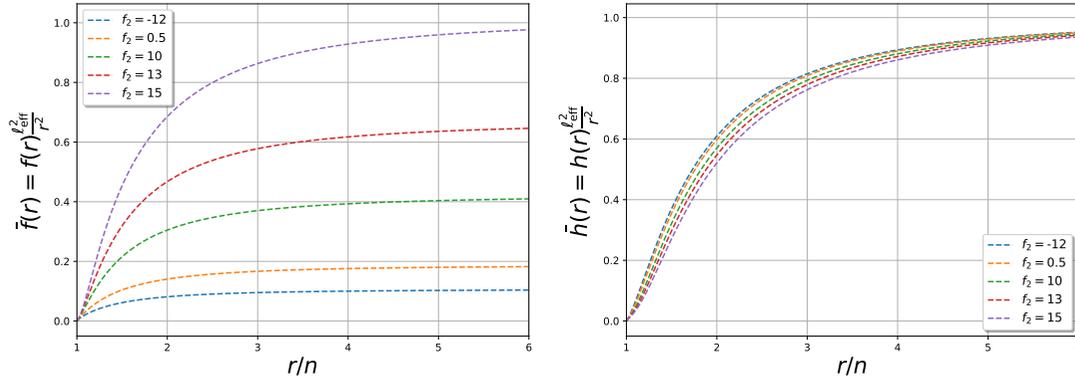


Figura 4.2.1: Solución numérica de (4.2.7), con los siguientes parámetros:  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Lambda = -10$ ,  $n = 1$ , y con condiciones iniciales presentadas en (4.2.21). Se define  $\bar{f}(r) := f(r)l_{\text{ef}}^2/r^2$  y  $\bar{h}(r) = h(r)l_{\text{ef}}^2/r^2$ . Notar que a medida que varía  $f_2$ , la función  $\bar{f}(r)$  tiene distintos valores asintóticos. Este hecho se relaciona con la ecuación (4.2.26), pues  $l_\infty$  se mantiene arbitrario. Por otro lado, se observa que para valores arbitrarios de  $l_\infty$  y  $\mu_1$ , con  $l_{\text{ef}}^{-2}$  la función asintóticamente es  $\bar{h}(r) = r^2/l_{\text{ef}}^2$ . De esta manera cuando  $r \rightarrow \infty$ , entonces  $\bar{h}(r) \rightarrow 1$ . El estado fundamental de (4.2.8) es representado cuando  $f_2 = 1/2$ .

## 4.2. TAUB-NUT-ADS Y TAUB-BOLT-ADS

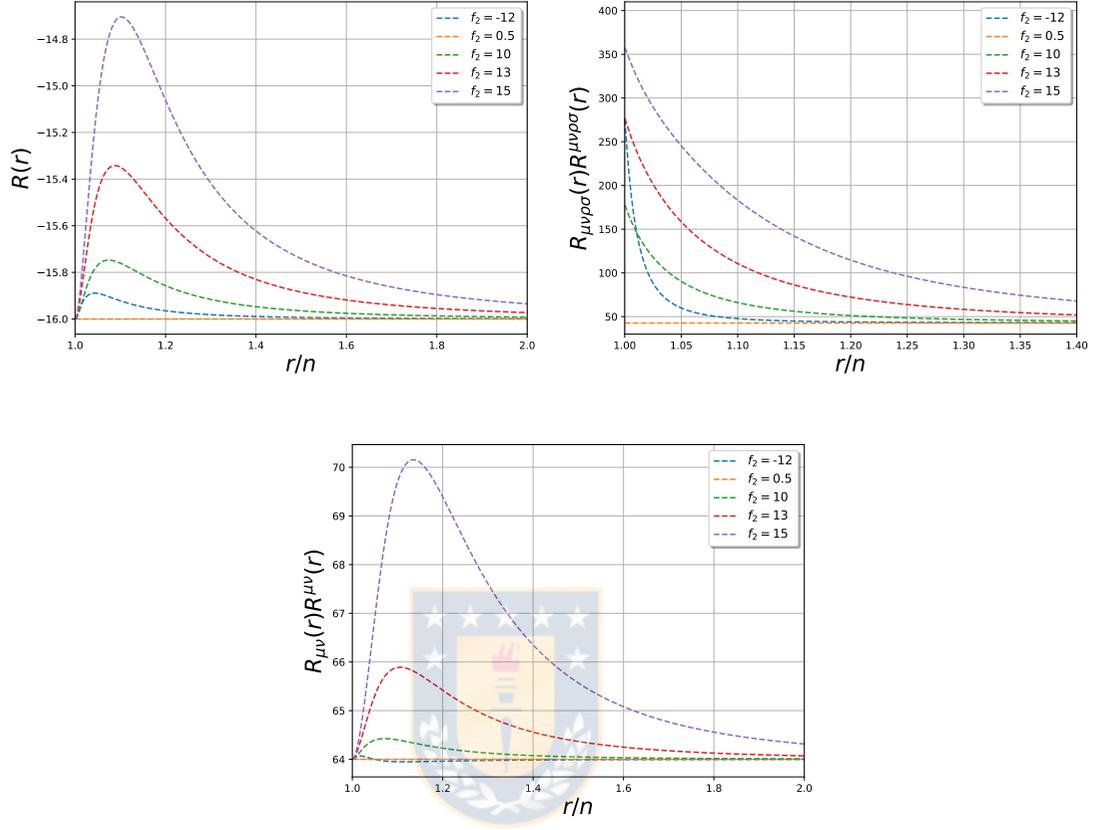


Figura 4.2.2: Invariantes de curvatura de Taub-NUT para diferentes valores de  $f_2$ , donde los parámetros usados corresponden a  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Lambda = -10$ , y  $n = 1$ . Notar que cuando  $f_2 = 1/2$  tenemos el estado fundamental, en donde todos los invariantes de curvaturas son constantes.

Podemos estudiar el comportamiento del campo escalar al resolver numéricamente (4.2.6). El resultado es representado en la siguiente figura

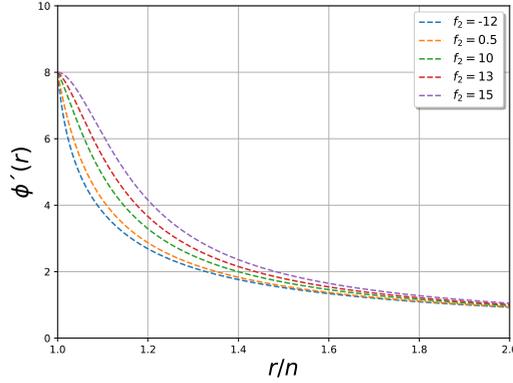


Figura 4.2.3: Solución numérica de  $\phi'(r)$  sujeta a la variación de  $f(r)$  graficada anteriormente. Notar que cuando  $r \rightarrow \infty$ , el tensor energía-momento del campo escalar gravita como una constante cosmologica efectiva, dado que el sistema se aproxima asintóticamente al espacio AdS Euclídeo localmente en (4.2.8)

Por otro lado, en el caso Bolt, está la ventaja de presentar un horizonte  $r = r_b$ . De esta forma podemos hacer una expansión serie en torno a  $r_b$ , con  $r_b > n$ , obteniendo

$$f(r) = \bar{f}_1 [(r - r_b) + \bar{f}_2 (r - r_b)^2 + \bar{f}_3 (r - r_b)^3 + \bar{f}_4 (r - r_b)^4 + \dots]. \quad (4.2.22)$$

Con respecto al periodo del tiempo Euclídeo, este se relaciona directamente con el parámetro libre  $\bar{f}_1$ , lo que es consecuencia de la ausencia de singularidades cónicas expresadas en términos de las condiciones de regularidad. Así, utilizando la función métrica (4.2.5),  $f_1$  se escribe como,

$$\bar{f}_1 = \frac{16\pi^2\beta r_b}{\beta_\tau^2 [\alpha (r_b^2 - n^2) + \beta]}. \quad (4.2.23)$$

La inobservabilidad de la cuerda de Misner impone que para Taub-Bolt  $\beta_\tau = 8\pi n$ , por lo cual se establece una relación entre  $\bar{f}_1$  con  $r_b$ . Por lo tanto, se deduce que la temperatura de Hawking es  $T = (8\pi n)^{-1}$ . Agregar que para tener una consistencia directa con las pruebas del sistema solar [142] y para evitar inestabilidades [116], los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  deben ser positivos. Esto implica que  $\bar{f}_1 < 0$  para  $r_b > n$ .

Si insertamos la expansión en serie (4.2.23) en (4.2.7) y usando la técnica usada en el caso de NUT, resolvemos para cada orden de  $(r - r_b)$  de tal modo que obtenemos

los coeficientes. Esto nos lleva a que no hay relación entre  $n$  y  $r_b$ , lo cual es contrario a lo que pasa en el caso de Relatividad General y teorías de curvatura a mayor orden [51–55]. Además, se desprende que cada coeficiente  $\bar{f}_i$  con  $i \geq 2$  se obtiene de forma recursiva en términos de  $\bar{f}_1$ . Así el término  $\bar{f}_2$

$$\begin{aligned} \bar{f}_2 = & \frac{1}{2r_b (r_b^2 - n^2) [(r_b^2 - n^2) \alpha + \beta] [(r_b^2 - n^2) (\Lambda\beta - \alpha) - 2\beta]} \left[ \alpha^2 n^2 (r_b^2 - n^2)^2 \right. \\ & + \alpha\beta (r_b^2 - n^2) [n^4 \Lambda + 6r_b^2 + (3 - \Lambda r_b^2 - 3r_b \bar{f}_1) n^2] \\ & \left. + \beta^2 [(r_b \bar{f}_1 + 1) \Lambda n^4 - (\Lambda r_b^3 \bar{f}_1 + 3\Lambda r_b^2 + 2r_b \bar{f}_1 - 2) n^2 + 2r_b^4 \Lambda + 4r_b^2] \right]. \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

Notar que este término está meramente determinado por el horizonte  $r_b$  y de los parámetros de la teoría a través de  $\bar{f}_1$ . Ahora, procedemos a dar las siguientes condiciones iniciales

$$f(r = r_b) = 0 \quad \text{y} \quad f'(r = r_b) = \bar{f}_1, \quad (4.2.25)$$

para resolver numéricamente (4.2.7) para diferentes valores de  $\bar{f}_1$ . La representación numérica de las funciones métricas y los invariantes de curvatura para distintos valores de  $\bar{f}_1$  son graficados en las figuras 4.2.4 y 4.2.5, respectivamente.

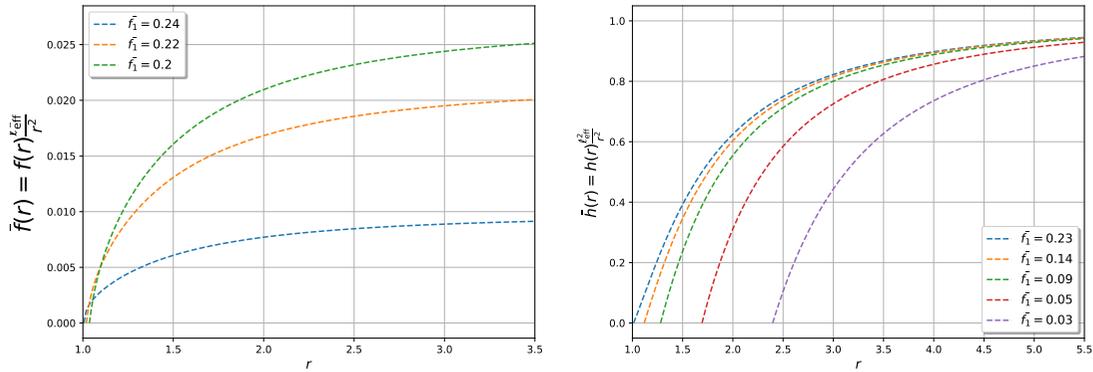


Figura 4.2.4: Solución numérica de (4.2.7), con los siguientes parámetros:  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Lambda = -10$ ,  $n = 1$ , por lo cual  $0 < \bar{f}_1 < 1/4$ . Las condiciones iniciales para el sistema son presentadas en (4.2.25). Se define  $\bar{f}(r) := f(r)l_{\text{ef}}^2/r^2$  y  $\bar{h}(r) = h(r)l_{\text{ef}}^2$ . Como consecuencia de que  $r_b > n$ , el límite superior es trasladado a  $r_b \rightarrow n$ . Por otro lado, el límite inferior se traslada de  $r_b \rightarrow \infty$ . Notar que los puntos iniciales de la gráfica para  $\bar{h}(r)$  difieren, lo que está relacionado al hecho de que cuando  $\bar{f}_1 \rightarrow 0$  y  $r > r_b$ , implica que  $r_b \rightarrow \infty$



## 4.2. TAUB-NUT-ADS Y TAUB-BOLT-ADS

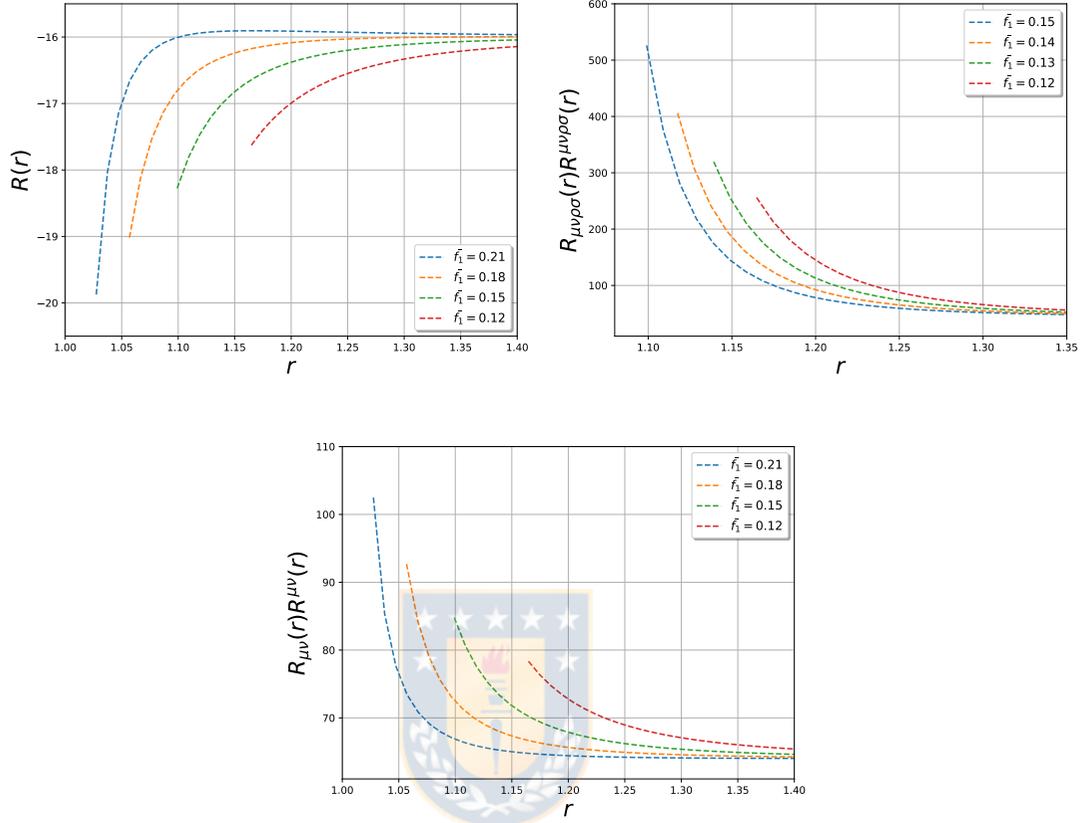


Figura 4.2.5: Invariantes de curvatura de Taub-NUT para diferentes valores de  $\bar{f}_1$ , donde los parámetros usados corresponden a  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Lambda = -10$ , y  $n = 1$ . Como se argumentó en la figura (4.2.4), los puntos de partida difieren pues cuando  $\bar{f}_1 \rightarrow 0$  y  $r > r_b$ , entonces  $r_b \rightarrow \infty$ . Es importante hacer hincapié en el comportamiento asintótico local AdS de la solución.

A modo de estudiar el campo escalar para el caso Taub-Bolt y tener nociones acerca del comportamiento de este, representamos la derivada del campo escalar en la siguiente figura,

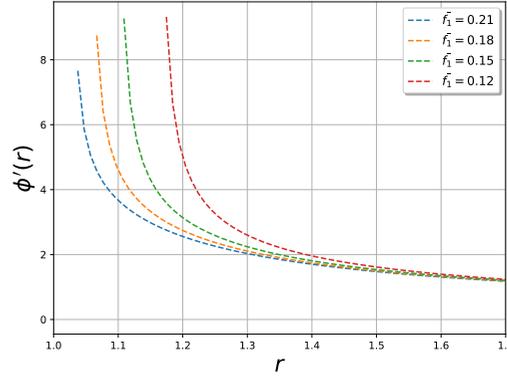


Figura 4.2.6: Solución numérica de  $\phi'(r)$  para el caso bolt. Remarcar el hecho de que el tensor de energía-momento del campo escalar tiene un comportamiento análogo a una constante cosmológica efectiva en el infinito. Esto es porque el sistema se aproxima asintóticamente al espacio Euclídeo local en la ecuación (4.2.8). Nuevamente la diferencia en los puntos de partida se debe al hecho de que el radio de Taub-Bolt es  $r_b \rightarrow \infty$  cuando  $\bar{f}_1 \rightarrow \infty$  y  $r > r_b$ .

Al conocer el comportamiento de la función  $f(r)$ , podemos calcular la masa de la solución. Consideremos la siguiente expansión en serie para cuando  $r \rightarrow \infty$

$$f(r) = \frac{r^2}{\ell_\infty^2} + \mu_\infty - \frac{\mu_1}{r} + \frac{\mu_2}{r^2} + \frac{\mu_3}{r^3} + \dots \quad (4.2.26)$$

Si reemplazamos (4.2.26) en (4.2.5), encontramos que la función  $h(r)$ , a  $r$  grande, es  $h(r) = r^2/\ell_{\text{ef}}^2$ . Notar que esta expresión es independiente del valor de  $\ell_\infty^2$ . No está demás decir que  $h(r)$ , para coeficientes arbitrarios, va asintóticamente a la curvatura de Riemann (4.2.9). Se concluye que la solución con radio  $\ell_{\text{ef}}^{-2} = \alpha/3\beta$  es asintóticamente localmente AdS, lo que generaliza los agujeros negros [108] al introducir la carga de NUT.

El siguiente paso consiste en determinar los coeficientes de la expansión (4.2.26). Usando un método similar a lo usado con (4.2.18); procedemos a introducir (4.2.26) en (4.2.7). Si resolvemos para cada orden con  $r$  grande, se encuentra que  $\ell_\infty$  y  $\mu_1$

son parámetros arbitrarios. Luego, se logra identificar que

$$\mu_\infty = -\frac{1}{\alpha \ell_\infty^2 (\Lambda\beta - \alpha)} \left[ 9\alpha\beta + 3\Lambda\beta^2 + \alpha n^2 (\Lambda\beta - \alpha) - \frac{12\beta n^2 (\Lambda\beta + 3\alpha)}{\ell_\infty^2} \right], \quad (4.2.27)$$

$$\mu_2 = -\frac{3\beta^2}{[\alpha \ell_\infty (\Lambda\beta - \alpha)]^2} \left[ (\Lambda\beta + \alpha)^2 - \frac{n^2 (11\Lambda^2\beta^2 + 46\Lambda\alpha\beta + 59\alpha^2)}{\ell_\infty^2} + \frac{4n^4 (7\Lambda^2\beta^2 + 38\Lambda\alpha\beta + 55\alpha^2)}{\ell_\infty^4} \right], \quad (4.2.28)$$

$$\mu_3 = -\frac{\mu_1 n^2}{2} \left[ 1 - \frac{3\beta (\Lambda\beta + 3\alpha)}{\alpha \ell_\infty^2 (\Lambda\beta - \alpha)} \right]. \quad (4.2.29)$$

Es plausible ver que los coeficientes quedan determinados por los parámetros libres. Además, se observa que  $\Lambda\beta - \alpha \neq 0$ . Sin embargo, si consideramos  $\Lambda\beta - \alpha = 0$ , el sistema se degenera como es mostrado en la referencia [110]. Añadir que la presencia de la carga de NUT permite evitar que los parámetros libres se anulen a partir de la redefinición del tiempo Euclídeo en (3.3.66). Pero, la compatibilidad del campo escalar con simetría asintótica AdS impone una relación adicional, lo cual fue reportado en [143, 144]. Además, se conjetura que puede que haya una relación similar que surge de imponer condiciones de frontera para el campo escalar que sea compatible con las simetrías asintóticas para el ansatz (3.3.66), dado al hecho de que Taub-NUT/Bolt-AdS determina su propio comportamiento asintótico.

### Formalismo de Balasubramanian-Kraus

El método de Balasubramanian-Kraus surge en respuesta al formalismo realizado por Brown-York [145]. A modo de contextualización, en una teoría generalmente covariante, no es natural asignar una densidad de energía-momentum local para el campo gravitacional. A modo de ejemplo, si proponemos expresiones que dependen únicamente de la métrica y de sus primeras derivadas, estas se anularán en algún punto dado en coordenadas localmente planas. Esto puede ser evitado si se considera un tensor de estrés cuasilocal, el cual se define localmente en la frontera de una región de un espaciotiempo. Por lo tanto, se considera la acción gravitacional

pensada como un funcional de la métrica del borde  $h_{\mu\nu}$ . Este tensor fue definido por Brown y York, que corresponde a

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S_{\text{grav}}}{\delta h_{\mu\nu}}. \quad (4.2.30)$$

Si bien esta expresión diverge en la frontera cuando consideramos el límite a infinito, es posible añadir términos de borde a la acción sin que provoque algún problema a las ecuaciones de movimiento del interior de la región estudiada. Brown y York propusieron que para obtener un tensor de estrés finito, se puede realizar una sustracción. Esto es una consecuencia de embeber una frontera con la métrica intrínseca  $h_{\mu\nu}$  de algún espaciotiempo. Pero nuevamente surge un nuevo inconveniente: no es posible realizar el embebimiento. Esto quiere decir que el método propuesto por Brown y York no está del todo bien definido.

A consecuencia de la correspondencia AdS/CFT [69–71], Balasubramanian-Krauss proponen un nuevo método para definir el tensor de estrés para espacios asintóticamente AdS locales. Este método corresponde en renormalizar el tensor de estrés de la gravedad añadiendo una serie finita de invariantes de curvatura pertenecientes al borde de la acción. Los términos asociados a la serie se fijan al pedir que el tensor sea finito. Esto permite reproducir de manera correcta las masas y momentum angular de un amplio espectro de espaciotiempos asintóticamente AdS.

Esta poderosa herramienta es empleada para calcular la masa en nuestro trabajo. La renormalización del tensor de estrés de la gravedad de Horndeski en la frontera para agujeros negros planares asintóticamente AdS acoplados a campos escalares que poseen dependencia radial, fue estudiado en [122]. Para nuestra solución, la variedad de base corresponde a una topología esférica y por lo tanto el tensor de estrés normalizado en la frontera es

$$T^{\mu\nu} = 2 \left( \kappa + \frac{\beta}{4} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi \right) (K h^{\mu\nu} - K^{\mu\nu}) - 2\zeta_2 \left( \mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{R} \right) + \zeta_1 h^{\mu\nu}, \quad (4.2.31)$$

donde los valores de  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  corresponden a los valores obtenidos al utilizar el método de Emparan-Johnson-Myers, y  $\phi = \phi(r)$ . Esto es de gran utilidad a nivel de

calcular, pues la relación entre los métodos nos permiten utilizar los parámetros encontrados a partir del procedimiento de los contratérminos. La ecuación (4.2.14) es equivalente a la parte eléctrica del tensor de Weyl para el caso de gravedad pura en espacios asintóticamente AdS [146, 147]. La curvatura extrínseca es expresada a partir de la ecuación de Gauss-Codazzi, que fue discutida en 3.2.1. De modo meramente pedagógico, la ecuación corresponde a

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - 2n^\lambda \mathcal{R}_{\lambda(\mu} n_{\nu)} + \mathcal{R}_{\lambda\rho} n^\lambda n^\rho n_\mu n_\nu \quad (4.2.32)$$

$$- \mathcal{R}_{\lambda\mu\rho\nu} n^\lambda n^\rho - K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda + K K_{\mu\nu}, \quad (4.2.33)$$

donde  $u^\mu$  se define el vector normal unitario generado por el flujo del tiempo Euclídeo en  $\partial\mathcal{V}$ . Por lo tanto, el procedimiento para calcular la masa es integrar  $T_{\mu\nu} u^\mu \xi^\nu$  sobre la frontera de codimension 2 en el infinito,  $\Sigma$ , donde  $\xi^\mu$  es el vector de Killing de la simetría del tiempo Euclídeo. Entonces, la expresión es dada por

$$M = - \int_{\Sigma} d^{2x} \sqrt{\sigma} T_{\mu\nu} u^\mu \xi^\nu = - \frac{\mu_1 \ell_\infty (\Lambda\beta - \alpha)}{4G\sqrt{3\alpha\beta}}, \quad (4.2.34)$$

donde  $\sigma$  es el determinante de la métrica inducida sobre  $\Sigma$ . Esta corresponde a la masa de la solución numérica de Taub-NUT.

A modo de analizar la expresión obtenida, es posible notar que la masa de la solución se anula cuando  $\alpha = \Lambda\beta$  [110]. Además, la positividad de  $M$  cuando  $\mu_1 \ell_\infty > 0$ , en conjunto a la ausencia de fantasmas  $\alpha > 0$ , nos garantiza que los campos escalares en región AdS asintótica sean reales con  $\Lambda < 0$ , descrita en la (4.2.8). Añadir que a pesar de que la expansión en serie para Taub-NUT/Bolt sean diferentes en los centros correspondiente, estos tienen el mismo comportamiento asintótico cuando  $r \rightarrow \infty$ . Por otro lado, la temperatura de Hawking es  $T = (8\pi n)^{-1}$  a consecuencia de la no observabilidad de las cuerdas de Misner. Es de absoluta relevancia observar que no hay relación entre el radio de bolt y la carga de NUT, al contrario de lo que pasa en Relatividad General y para teorías de orden más alto en la curvatura. Esto es producto de que para campos escalares no triviales, las funciones métricas son distintas. Esto nos permite concluir que estamos en presencia de un pelo escalar.

La masa se relaciona con los coeficientes  $f_2$  y  $\bar{f}_1$  haciendo un ajuste de las solu-

ciones numéricas con los polinomios adecuados para leer fácilmente los coeficientes al hacer la expansión asintótica. En el caso de Bolt, se encuentra que la masa  $M$  satisface una relación cuadrática en función del radio del horizonte  $r_b$ . Al contrario del caso de NUT, encontramos que hay un cierto rango para  $\bar{f}_2$  en donde  $M < 0$ . El rango para el cual la masa es positiva es dado por  $0,5 < f_2 \lesssim 4,2$ . Esto se representa en la figura 4.2.1.

### 4.2.3. Branas Taub-NUT/Bolt y Solitones con Campos Axiónicos en Altas Dimensiones

En esta sección estudiaremos  $p$ -branas en más dimensiones y solitones con carga de NUT con campos axiónicos en la teoría de Horndeski. Los campos axiónicos son principalmente caracterizados por la dependencia no trivial de las coordenadas del espacio de fondo en el cual una cuerda puede ser embebida, y en trabajos recientes se ha mostrado la posibilidad de que pueden evitar la inestabilidad de Gregory-Laflamme a nivel lineal [148], sin que afecte el tamaño del agujero negro de Schwarzschild AdS localizado en la brana. Los axiones son capaces de soportar la existencia de cuerdas negras homogéneas en la teoría de Gauss-Bonnet [149] y se ha mostrado que poseen un acoplamiento cinético particular para que estas soluciones existan.

Pretendemos extender estas soluciones para la teoría de Horndeski, incluyendo la carga de NUT. Entonces, para construir branas analíticas Taub-NUT/Bolt-AdS con dimensión  $D = 4 + p$ , se considera la acción (4.1.2) no acoplada minimalmente a  $p$ -campos escalares  $\psi_i$  con  $i = 1, \dots, p$ , cuyo espacio objetivo es  $\mathbb{R}^p$ , la cual es dada por

$$\tilde{I}_H [g_{\mu\nu}, \psi_i] = \int_{\mathcal{V}} d^{4+p}x \sqrt{-g} \left[ \kappa(R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} (\alpha g^{\mu\nu} - \beta G^{\mu\nu}) \delta_{ij} \nabla_\mu \psi^i \nabla_\nu \psi^j \right], \quad (4.2.35)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker  $p$ -dimensional. Al variar la acción obtenemos

ecuaciones de movimiento,

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{2\kappa} \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{\beta}{2\kappa} \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(2)} = 0, \quad (4.2.36a)$$

$$\mathcal{E}_i \equiv \nabla_\mu \mathcal{J}_i^\mu = 0. \quad (4.2.36b)$$

Notar que estas ecuaciones tienen un parecido a (4.1.6), (4.1.7), sin embargo hay que distinguir que (4.2.36) presentan campos escalares adicionales. Se definen  $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(1)}$ ,  $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(2)}$  y  $\mathcal{J}_i^\mu$  como

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(1)} = \delta_{ij} \left( \nabla_\mu \psi^i \nabla_\nu \psi^j - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \psi^i \nabla^\lambda \psi^j \right), \quad (4.2.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu\nu}^{(2)} = \delta_{ij} \left( \frac{1}{2} \nabla_\mu \psi^i \nabla_\nu \psi^j R - 2 \nabla_\lambda \psi^i \nabla_{(\mu} \psi^j R^{\lambda}_{\nu)} - \nabla^\lambda \psi^i \nabla^\rho \psi^j R_{\mu\lambda\nu\rho} \right. \\ \left. - (\nabla_\mu \nabla_\lambda \psi^i) (\nabla_\nu \nabla^\lambda \psi^j) + (\nabla_\mu \nabla_\nu \psi^i) \square \psi^j + \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \nabla_\lambda \psi^i \nabla^\lambda \psi^j \right. \\ \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [(\square \psi^i) (\square \psi^j) - (\nabla_\lambda \nabla_\rho \psi^i) (\nabla^\lambda \nabla^\rho \psi^j) - 2 \nabla^\lambda \psi^i \nabla^\rho \psi^j R_{\lambda\rho}] \right), \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

$$\mathcal{J}_i^\mu = (\alpha g^{\mu\nu} - \beta G^{\mu\nu}) \nabla_\nu \psi_i. \quad (4.2.39)$$

A modo de solucionar estas ecuaciones de campo, consideramos el producto entre la métrica (3.3.66) y  $\mathbb{R}^p$ . En coordenadas locales, se expresa de la siguiente manera

$$ds^2 = f(r) (d\tau + 2n\mathcal{A}_{(k)})^2 + \frac{dr^2}{h(r)} + (r^2 - n^2) d\Sigma_{(k)}^2 + \delta_{ij} dz^i dz^j, \quad (4.2.40)$$

donde el potencial de Kähler, el cual ya ha sido definido en (3.3.67), se identifica por  $\mathcal{A}_{(k)}$ . Si bien la métrica es homogénea a lo largo de las coordenadas  $z^i$  no impone simetría traslacional en los campos escalares en  $\mathbb{R}^p$ . Ahora, para resolver la ecuación de Klein-Gordon (4.2.36a) consideramos la siguiente relación,

$$\psi^i = \lambda z^i, \quad (4.2.41)$$

donde  $\lambda$  es denominada la carga axiónica. Notar que (4.2.41) corresponden a campos escalares con dependencia lineal en las coordenadas de la brana. Añadir que, a partir

de la simetría de desplazamiento en el espacio de los campos escalares, el tensor energía momentum de (4.2.41) tiene las mismas isometrías que (4.2.40), a pesar de la dependencia lineal de los campos escalares en las coordenadas locales de  $\mathbb{R}^p$ . La métrica propuesta nos permite descomponer las ecuaciones de campo de la siguiente manera

$$\mathcal{E}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \left[1 - \frac{p\beta\lambda^2}{4\kappa}\right] G_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \left[\Lambda + \frac{p\alpha\lambda^2}{4\kappa}\right] g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0, \quad (4.2.42)$$

$$\mathcal{E}_{ij} = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{(p-2)\beta\lambda^2}{4\kappa}\right] \delta_{ij} R + \left[\Lambda + \frac{(p-2)\alpha\lambda^2}{4\kappa}\right] \delta_{ij} = 0, \quad (4.2.43)$$

donde hemos denominado las componentes transversas con los índices griego con barra y las componentes de la sección de la brana con índices latinos. A partir de la traza de ambas ecuaciones, i.e.  $g^{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$  y  $\mathcal{E}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$ , se obtiene

$$R = \frac{4[4\Lambda\kappa + p\alpha\lambda^2]}{4\kappa - p\beta\lambda^2}, \quad (4.2.44a)$$

$$R = \frac{2[4\Lambda\kappa + (p-2)\alpha\lambda^2]}{4\kappa - (p-2)\beta\lambda^2}. \quad (4.2.44b)$$

Estas dos ecuaciones nos permiten obtener las condiciones de compatibilidad, lo cual da a lugar una ecuación cuártica para la carga axiónica

$$\lambda_{\pm}^2 = \frac{2\kappa}{\alpha\beta p(p-2)} \left[ \alpha(p+2) - \Lambda\beta(p-4) \right] \quad (4.2.45)$$

$$\pm \sqrt{\beta^2(p-4)^2\Lambda^2 + 2\alpha\beta\Lambda(p^2 - 2p + 8) + \alpha^2(p+2)^2}. \quad (4.2.46)$$

Se observa que esta relación de compatibilidad es para  $p \neq 2$ .

Al tener campos escalares reales, estos imponen condiciones sobre los parámetros de la teoría resultando que  $\lambda_{\pm}^2 > 0$ . Además, hay que considerar que para la compatibilidad tenga raíces reales, la raíz cuadrada debe ser cero o positiva. Cuando es positiva, las condiciones implican que  $\alpha > 0, \Lambda < 0$ , los rangos para  $\lambda_{\pm}$  están resumidos en la tabla 4.1 para diferentes valores de  $p$ .

$0 < p < 2$	$\beta > 0$	$\lambda_-^2 > 0$	-
$2 < p < 4$	$0 < \beta < \rho_-$	$\lambda_-^2 > 0$	$\lambda_+^2 > 0$
$p = 4$	$0 < \beta < -\frac{9\alpha}{8\Lambda}$	$\lambda_-^2 > 0$	$\lambda_+^2 > 0$
$p > 4$	$0 < \beta < \rho_- \cup \beta > \rho_+$	$\lambda_-^2 > 0$	$\lambda_+^2 > 0$

Cuadro 4.1: Condiciones de los parámetros de la teoría de Horndeski para la existencia de las  $p$ - branas Taub-NUT/Bolt-AdS en diferentes dimensiones. Notar que para el primer caso, solo es permitido cuando  $\lambda_-^2 > 0$ . La definición de  $\rho_{\pm}$  es dada en la ecuación (4.2.47)

Hemos definido que para  $p \neq 4$ ,  $\rho_{\pm}$  es dada por

$$-\frac{\Lambda\rho_{\pm}}{\alpha} = \frac{(p^2 - 2p + 8) \pm \sqrt{32(p-2)p}}{(p-4)^2}. \quad (4.2.47)$$

Si consideramos  $4\kappa - p\beta\lambda_{\pm}^2 \neq 0$ , las componentes transversas de las ecuaciones de campo corresponden a

$$\mathcal{E}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = G_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \Lambda_{\text{eff}} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0. \quad (4.2.48)$$

Notamos un gran parecido con las ecuaciones de Einstein-AdS. Aquí se presenta con una constante cosmológica efectiva y una constante gravitacional efectiva, que corresponde a una consecuencia del acople no minimal de los campos escalares del tensor de Einstein la teoría de Horndeski. Estas relaciones efectivas son dadas por

$$\Lambda_{\text{eff}} = \frac{4\kappa\Lambda + p\alpha\lambda_{\pm}^2}{4\kappa_{\text{eff}}} \quad \text{y} \quad \kappa_{\text{eff}} = \kappa - \frac{p\beta\lambda_{\pm}^2}{4}, \quad (4.2.49)$$

respectivamente. Al resolver la ecuación (4.2.48), se obtienen las siguientes funciones métricas

$$f(r) = h(r) = k \left( \frac{r^2 + n^2}{r^2 - n^2} \right) - \frac{2MG_{\text{eff}}r}{r^2 - n^2} - \frac{\Lambda_{\text{eff}}}{3} \frac{(r^4 - 6n^2r^2 - 3n^4)}{r^2 - n^2}, \quad (4.2.50)$$

donde  $M$  es una constante de integración y  $G_{\text{ef}}$  se infiere de (4.2.49), resultando ser

$$G_{\text{eff}} = \frac{G}{1 - 4\pi Gp\beta\lambda_{\pm}^2}. \quad (4.2.51)$$

Analicemos algunas consecuencias de las relaciones obtenidas. La constante  $M$  se fija de acuerdo a (3.3.70) o (3.3.71), para los nuts y bolts, respectivamente, reemplazando  $(G, \Lambda) \rightarrow (G_{\text{ef}}, \Lambda_{\text{ef}})$ . Esto se produce a partir de las condiciones de regularidad (3.3.68) sobre las hipersuperficies a  $z^i$  constante. Además, el periodo del tiempo Euclídeo se fija como  $\beta_\tau = 8\pi n$  cuando  $k = 1$ , a consecuencia de la no observabilidad de la cuerda de Misner en la sección transversa. Lo anterior impone una relación entre el radio del horizonte de Killing y la carga de NUT representado en (3.3.73), con una constante cosmológica efectiva soportada por los campos escalares como en (4.2.49).

Como hicimos en anteriores secciones, estudiaremos las propiedades termodinámicas del sistema. Para esto, vamos a considerar la simetría esférica de la sección transversa, es decir, cuando  $k = 1$ . Se observa que el tensor energía-momentum, generado por los campos escalares lineales, se comporta como una constante cosmológica, lo cual produce un espacio localmente  $AdS_4 \times \mathbb{R}^p$  asintóticamente Euclídeo. Aplicando el método de los contratérminos a modo de regularizar la acción Euclídea, los parámetros de los invariantes de curvatura asociados a las funciones métricas (4.2.50) son

$$\zeta_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{\Lambda_{\text{eff}}}{3}} \left( 8\kappa + p\beta\lambda_\pm^2 \right), \quad (4.2.52)$$

$$\zeta_2 = -\frac{1}{8} \sqrt{-\frac{3}{\Lambda_{\text{eff}}}} \left( 8\kappa - p\beta\lambda_\pm^2 \right). \quad (4.2.53)$$

Sin embargo, no se quiere dar a entender que los contratérminos dependen de las constantes de integración de la solución, sino que debemos tener en cuenta que  $\lambda_\pm^2$  se fija on-shell en términos de los parámetros de la teoría y a través de (4.2.45). Por lo tanto, la acción Euclídea renormalizada para Taub-NUT/Bolt -AdS  $p$ -brana con perfil axiónico en la teoría de Horndeski es

$$I_{\text{ren}} = \frac{8\pi\beta_\tau\kappa_{\text{eff}}V}{3} \left( 3MG_{\text{eff}} - 3n^2r_b\Lambda_{\text{eff}} + r_b^3\Lambda_{\text{eff}} \right), \quad (4.2.54)$$

donde  $V$  es el volumen de  $\mathbb{R}^p$ . Usando (4.2.15), se obtiene la energía libre, masa, entropía y calor específico para bolt,

$$\mathcal{F}_{\text{bolt}} = \frac{4\pi\kappa_{\text{eff}}V}{r_b} \left[ r_b^2 + n^2 + \frac{\Lambda_{\text{eff}}}{3} (r_b^4 + 3n^4) \right], \quad (4.2.55)$$

$$\mathcal{M}_{\text{bolt}} = \frac{8\pi\kappa_{\text{eff}}V}{r_b} \left[ (r_b^2 + n^2) (1 + n^2\Lambda_{\text{eff}}) - \frac{\Lambda_{\text{eff}}r_b^2}{3} (r_b^2 - 3n^2) \right], \quad (4.2.56)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{bolt}} = \frac{32\pi^2 n\kappa_{\text{eff}}V}{r_b^2 (1 + 4nr_b\Lambda_{\text{eff}})} & \left[ r_b (r_b^2 + n^2) + \Lambda_{\text{eff}} (r_b^5 + 12r_b^2n^3 + 3r_bn^4 - 4n^5) \right. \\ & \left. + 4\Lambda_{\text{eff}}^2 n^3 (r_b^4 + 4r_b^2n^2 - n^4) \right], \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\text{bolt}} = -\frac{64\pi^2 n\kappa_{\text{eff}}V}{r_b^3 (1 + 4nr_b\Lambda_{\text{eff}})^3} & \left[ r_b^2 (r_b^2 + n^2) + 2r_b\Lambda_{\text{eff}} (r_b^5 + r_b^4n + 16r_b^2n^3 + 3r_bn^4 - 5n^5) \right. \\ & + 2n\Lambda_{\text{eff}}^2 (r_b + n) (3r_b^6 - 3r_b^5n + 12r_b^4n^2 + 68r_b^3n^3 - 23r_b^2n^4 - 17r_bn^5 + 8n^6) \\ & + 16n^4\Lambda_{\text{eff}}^3 (5r_b^6 + 18r_b^5n + 27r_b^4n^2 - 16r_b^3n^3 - 9r_b^2n^4 + 6r_bn^5 + n^6) \\ & \left. + 32r_bn^5\Lambda_{\text{eff}}^4 (3r_b^6 + 21r_b^4n^2 - 11r_b^2n^4 + 3n^6) \right], \end{aligned} \quad (4.2.58)$$

respectivamente. Por otro lado, para el caso de NUT, las propiedades termodinámicas se consiguen haciendo que  $r_b \rightarrow n$  en las expresiones anteriores, obteniendo

$$\mathcal{F}_{\text{nut}} = 8\pi n\kappa_{\text{eff}}V \left( 1 + \frac{2n^2\Lambda_{\text{eff}}}{3} \right), \quad (4.2.59)$$

$$\mathcal{M}_{\text{nut}} = 16\pi n\kappa_{\text{eff}}V \left( 1 + \frac{4}{3}\Lambda_{\text{eff}}n^2 \right), \quad (4.2.60)$$

$$\mathcal{S}_{\text{nut}} = 64\pi^2 n^2 \kappa_{\text{eff}}V (1 + 2n^2\Lambda_{\text{eff}}), \quad (4.2.61)$$

$$\mathcal{C}_{\text{nut}} = -128\pi^2 n^2 \kappa_{\text{eff}}V (1 + 4n^2\Lambda_{\text{eff}}). \quad (4.2.62)$$

Tanto para el caso de NUT y Bolt, se evidencia la contribución cuerda de Misner. Por otro lado, se puede verificar que la densidad de masa reproduce perfectamente los resultados de (3.3.70) y (3.3.71), para nuts y bolts, respectivamente, al hacer  $(G, \Lambda) \rightarrow (G_{\text{ef}}, \Lambda_{\text{ef}})$ . Añadir que las expresiones obtenidas anteriormente cumplen satisfactoriamente con la primera ley de la termodinámica

$$d\mathcal{M} = Td\mathcal{S}. \quad (4.2.63)$$

Se observa que la carga axiónica no juega un rol en esta expresión, pues su valor se fija on-shell en términos de los parámetros de la teoría. Luego, para tener una masa, entropía y calor específico positivas, la carga de NUT debe cumplir la siguiente desigualdad

$$\sqrt{-\frac{1}{4\Lambda_{\text{eff}}}} < n < \sqrt{-\frac{1}{2\Lambda_{\text{eff}}}}. \quad (4.2.64)$$

Por otro lado, notamos que si sobre la métrica (4.2.40) aplicamos una rotación de Wick  $z \rightarrow -it$ , se puede obtener un solitón para  $p = 1$ .

$$ds^2 = -dt^2 + f(r) (d\chi + 2n\mathcal{A}_{(k)})^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + (r^2 - n^2)d\Sigma_{(k)}^2, \quad (4.2.65)$$

en donde la función métrica es dada por (4.2.50), la cual está dotada de un campo escalar dependiente del tiempo  $\psi = -\lambda_{\pm}it$ . Si pedimos que sea real, entonces se cumple  $\lambda_{\pm}^2 < 0$ . Aunque esto pueda parecer un problema, sin embargo, encontramos una región en donde esta condición se satisface sin inconvenientes para  $\alpha, \beta > 0$ ; estas regiones son dadas por  $\lambda_-^2 < 0$  con  $\Lambda < 0$  y  $\lambda_+^2 < 0$  con  $\Lambda \in \mathbb{R}$ . Para calcular la masa del solitón debemos considerar que no hay un horizonte asociado al vector de Killing temporal  $\xi = \partial/\partial t$ . En el caso de la entropía del solitón, esta se anula debido a que se manifiesta desde obstrucciones hasta la foliación del espaciotiempo con hipersuperficies a tiempo constante por la presencia de puntos fijos. En consecuencia la masa se obtiene vía la multiplicación de la acción Euclídea on-shell con el inverso del periodo del tiempo Euclídeo, como secuela de la relación de Gibbs-Duhem  $S = \beta_{\tau}M - I_{\text{reg}}$  [150, 151]. Finalmente, para  $k = 1$  las masas para el solitón, en el caso de los nuts y bolts, son dadas por

$$\mathcal{M}_{\text{nut}} = 64\pi^2 n^2 \kappa_{\text{eff}} \left( 1 + \frac{2}{3}n^2 \Lambda_{\text{eff}} \right), \quad (4.2.66)$$

$$\mathcal{M}_{\text{bolt}} = \frac{32\pi^2 n \kappa_{\text{eff}}}{r_b} \left[ r_b^2 + n^2 + n^4 \Lambda_{\text{eff}} + \frac{1}{3}r_b^3 \Lambda_{\text{eff}} \right], \quad (4.2.67)$$

respectivamente.

Hemos notado que no hay una analogía con Relatividad General en 5-dimensiones con constante cosmológica [152, 153], debido a que la compatibilidad de las ecuaciones

de movimiento implican que la constante cosmológica se anule (4.2.44). Esto nos indica que la presencia de los campos escalares son capaces de dar un sustento para que exista. Por otro lado, la solución en dimensión impar, se puede interpretar como el producto directo entre  $\mathbb{R}$  y el fibrado  $U(1)$  sobre una variedad de Kähler dos-dimensional, a nivel local. Además, la configuración no se puede obtener de una mera continuación analítica de lo presentado en [154], pues no hay un factor deformado en el espacio producto, por lo cual representa una nueva solución regular que se sostiene por escalares de Horndeski. Otro aspecto a considerar es el hecho que cuando  $\Lambda_{\text{ef}} < 0$  y  $n > \sqrt{-3/(2\Lambda_{\text{ef}})}$  la masa, para el caso NUT, es negativa por lo que la solución tiene menor energía que el caso  $AdS_4 \times \mathbb{R}$  Euclídeo. Un ejemplo a este resultado se encuentra en [153].



# Capítulo 5

## Conclusiones

No cabe duda que la similitud entre la solución Taub-NUT/Bolt-AdS y los instantones de Yang-Mills es evidente. Tales, representan configuraciones Euclídeas estacionarias regulares cuyo vacío se caracteriza por sectores homotópicamente inequivalentes. En particular, el caso de Taub-NUT, el tensor de Weyl es globalmente autodual. Además, esta solución tiene curvatura AdS para espacios tipo Einstein. Las propiedades de éste espaciotiempo, han sido estudiadas con profundidad, encontrando importantes aplicaciones para la física teórica y para la geometría diferencial.

En este trabajo se mostró la existencia de la solución en un sector particular de la teoría de Horndeski; esta representa la teoría tensor-escalar más general con ecuaciones de segundo orden. Se comenzó por resolver analíticamente el modo cero del escalar de Horndeski, utilizando como métrica de fondo a Taub-NUT/Bolt. Se mostró que para los puntos fijos la densidad de energía se anula en el límite del campo de prueba, sin embargo la norma del campo escalar diverge. Para entregar una solución a este problema, tomamos en cuenta la backreaction e impusimos condiciones de regularidad. Esto trae como consecuencia la anulación de corriente conservada de la componente radial, y se establece una relación entre las funciones métricas al evitar el teorema de no pelo [141]. Esto implica que el sistema se reduce a la ecuación maestra para la función métrica  $f(r)$  representada por (4.2.7), la cual es resuelta para los nuts y bolts.

Se encontró un espacio localmente AdS Euclídeo con un campo escalar no trivial, en dónde calculamos el tensor energía-momentum, encontrando que este gravita

---

como una constante cosmológica. Con respecto a las propiedades termodinámicas, estudiamos la acción Euclídea regularizada, vía de la introducción de contratérminos [86] on-shell encontrando que la masa es igual a cero y la entropía del sistema es constante. Notamos que el estado fundamental no puede ser obtenido continuamente de AdS global, pues se presenta una configuración no trivial sin una backreaction a la geometría que se caracteriza por campos escalares no minimalmente acoplados<sup>9</sup>. Luego, se procede a resolver el sistema numéricamente, de la cual fue posible obtener soluciones localmente asintóticamente AdS con carga de NUT. A partir de una expansión en serie cerca de los puntos fijos, encontramos las condiciones de donde las soluciones numéricas se desvían de AdS local con un campo escalar auto gravitante. Por otro lado, la masa se obtuvo integrando el tensor energía momentum de la frontera renormalizado sobre la frontera en infinito. Es decir, del campo escalar y la positividad de la masa imponen que  $\alpha/\Lambda + \beta < 0$  y  $\Lambda < 0$ . Notar que las soluciones encontradas poseen más parámetros libres que Relatividad General, por lo cual se infiere la presencia de un pelo escalar.

En el cuadro de dimensiones más altas, obtuvimos una solución p-brana descrita por el espacio producto entre la variedad de Kähler fibrada de Hopf y  $\mathbb{R}^p$ , la cual se sostiene por p-escalares de Horndeski de perfiles axiónicos. Analizando las propiedades termodinámicas, se confirma que la primera ley se satisface y surgen restricciones a la carga de NUT, provenientes de la positividad de la masa, entropía y calor específico.

Agregar que existe una región en particular en que el parámetro de espacio es capaz de admitir una solución solitónica a partir de la continuación analítica de la coordenada que atraviesa la 1-brana. Esta configuración regular en todas partes tiene entropía cero, una masa no trivial y su fibración  $U(1)$  sobre la variedad de Kähler, pertenece a la sección transversal.

---

<sup>9</sup>Esto en la literatura se le conoce con el nombre de *the stealth scalar field*.

# Referencias

- [1] R. Rajaraman, *An introduction to solitons and instantons in quantum field theory*. North Holland, Amsterdam, 1 1982.
- [2] M. A. Shifman, ed., *Instantons in gauge theories*. World Scientific, Singapore, 1994.
- [3] R. Jackiw and C. Rebbi, “Vacuum Periodicity in a Yang-Mills Quantum Theory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 37, pp. 172–175, 1976.
- [4] C. G. Callan, Jr., R. F. Dashen, and D. J. Gross, “The Structure of the Gauge Theory Vacuum,” *Phys. Lett.*, vol. 63B, pp. 334–340, 1976.
- [5] G. 't Hooft, “Symmetry Breaking Through Bell-Jackiw Anomalies,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 37, pp. 8–11, 1976.
- [6] G. 't Hooft, “Computation of the Quantum Effects Due to a Four-Dimensional Pseudoparticle,” *Phys. Rev.*, vol. D14, pp. 3432–3450, 1976.
- [7] G. Esposito, A. Yu. Kamenshchik, and G. Pollifrone, “Euclidean quantum gravity on manifolds with boundary,” *Fundam. Theor. Phys.*, vol. 85, pp. 1–319, 1997.
- [8] A. H. Taub, “Empty space-times admitting a three parameter group of motions,” *Annals Math.*, vol. 53, pp. 472–490, 1951.
- [9] E. Newman, L. Tamubrino, and T. Unti, “Empty space generalization of the Schwarzschild metric,” *J. Math. Phys.*, vol. 4, p. 915, 1963.

- 
- [10] C. Chakraborty and S. Bhattacharyya, “Does the gravitomagnetic monopole exist? A clue from a black hole x-ray binary,” *Phys. Rev.*, vol. D98, no. 4, p. 043021, 2018.
- [11] C. Chakraborty and S. Bhattacharyya, “Circular orbits in Kerr-Taub-NUT spacetime and their implications for accreting black holes and naked singularities,” *JCAP*, vol. 1905, no. 05, p. 034, 2019.
- [12] T. Eguchi, P. B. Gilkey, and A. J. Hanson, “Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry,” *Phys. Rept.*, vol. 66, p. 213, 1980.
- [13] L. Alvarez-Gaume and E. Witten, “Gravitational Anomalies,” *Nucl. Phys.*, vol. B234, p. 269, 1984.
- [14] L. Alvarez-Gaume and P. H. Ginsparg, “The Structure of Gauge and Gravitational Anomalies,” *Annals Phys.*, vol. 161, p. 423, 1985.
- [15] E. Ayon-Beato, F. Canfora, and J. Zanelli, “Analytic self-gravitating skyrmions, cosmological bounces and ads wormholes,” *Phys.Lett.B*, vol. 752, pp. 201–205, 2016.
- [16] A. Anabalón and J. Oliva, “Four-dimensional Traversable Wormholes and Bouncing Cosmologies in Vacuum,” *JHEP*, vol. 04, p. 106, 2019.
- [17] A. Anabalón, S. F. Bramberger, and J.-L. Lehners, “Kerr-NUT-de Sitter as an Inhomogeneous Non-Singular Bouncing Cosmology,” *JHEP*, vol. 09, p. 096, 2019.
- [18] J. Miller, M. Kruskal, and B. B. Godfrey, “Taub-NUT (Newman, Unti, Tamburino) Metric and Incompatible Extensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 4, pp. 2945–2948, 1971.
- [19] G. Clément, D. Gal’tsov, and M. Guenouche, “Rehabilitating space-times with NUTs,” *Phys. Lett. B*, vol. 750, pp. 591–594, 2015.
- [20] G. Clément, D. Gal’tsov, and M. Guenouche, “NUT wormholes,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, no. 2, p. 024048, 2016.

- [21] R. A. Hennigar, D. Kubizňák, and R. B. Mann, “Thermodynamics of Lorentzian Taub-NUT spacetimes,” *Phys. Rev.*, vol. D100, no. 6, p. 064055, 2019.
- [22] C. V. Johnson, “The Extended Thermodynamic Phase Structure of Taub-NUT and Taub-Bolt,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 31, p. 225005, 2014.
- [23] C. V. Johnson, “Thermodynamic Volumes for AdS-Taub-NUT and AdS-Taub-Bolt,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 31, no. 23, p. 235003, 2014.
- [24] R. d. Sorkin, “Kaluza-Klein Monopole,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 51, pp. 87–90, 1983.
- [25] F. A. Bais and P. Batenburg, “A New Class of Higher Dimensional Kaluza-Klein Monopole and Instanton Solutions,” *Nucl. Phys.*, vol. B253, pp. 162–172, 1985.
- [26] A. Linshaw and V. Mathai, “T-duality of singular spacetime compactifications in an H-flux,” *J. Geom. Phys.*, vol. 129, pp. 269–278, 2018.
- [27] S. S. Hashemi and N. Riazi, “Boosted Kaluza-Klein magnetic monopole,” *Annals Phys.*, vol. 393, pp. 206–214, 2018.
- [28] S. Sedigheh Hashemi and N. Riazi, “Boosted cylindrical magnetized Kaluza-Klein wormhole,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 50, no. 2, p. 19, 2018.
- [29] Y. Li, “A new complete calabi–yau metric on  $S^3$ ,” *Inventiones mathematicae*, vol. 217, p. 1, Jan 2019.
- [30] D. N. Page, “Taub - Nut Instanton With an Horizon,” *Phys. Lett.*, vol. 78B, pp. 249–251, 1978.
- [31] R. B. Mann and C. Stelea, “On the thermodynamics of NUT charged spaces,” *Phys. Rev. D*, vol. 72, p. 084032, 2005.
- [32] C. V. Johnson, “Taub-Bolt heat engines,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 35, no. 4, p. 045001, 2018.
- [33] A. B. Bordo, F. Gray, and D. Kubizňák, “Thermodynamics and Phase Transitions of NUTty Dyons,” *JHEP*, vol. 07, p. 119, 2019.

- 
- [34] R. Durka, “The first law of black hole thermodynamics for Taub–NUT spacetime.” arXiv:1908.04238.
- [35] S.-Q. Wu and D. Wu, “Thermodynamical hairs of the four-dimensional Taub-Newman-Unti-Tamburino spacetimes,” *Phys. Rev. D*, vol. 100, no. 10, p. 101501, 2019.
- [36] S. Hawking, C. Hunter, and D. N. Page, “Nut charge, anti-de Sitter space and entropy,” *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 044033, 1999.
- [37] R. B. Mann, “Misner string entropy,” *Phys. Rev. D*, vol. 60, p. 104047, 1999.
- [38] D. Astefanesei, R. B. Mann, and E. Radu, “Breakdown of the entropy/area relationship for NUT-charged spacetimes,” *Phys. Lett. B*, vol. 620, pp. 1–8, 2005.
- [39] D. Flores-Alfonso and H. Quevedo, “Topological Quantum Numbers of Dyonic Fields over Taub-Bolt,” *J. Geom. Symmetry Phys.*, vol. 44, pp. 39–54, 2017.
- [40] M. F. A. R. Sakti, A. Suroso, and F. P. Zen, “Kerr/CFT Correspondence on Kerr-Newman-NUT-Quintessence Black Hole,” *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 134, no. 11, p. 580, 2019.
- [41] M. F. A. R. Sakti, A. M. Ghezelbash, A. Suroso, and F. P. Zen, “Deformed conformal symmetry of Kerr-Newman-NUT-AdS black holes,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 51, no. 11, p. 151, 2019.
- [42] M. F. A. R. Sakti, A. Suroso, and F. P. Zen, “Kerr-Newman-NUT-Kiselev black holes in Rastall theory of gravity and Kerr/CFT Correspondence,” *Annals Phys.*, vol. 413, p. 168062, 2020.
- [43] M. Sakti, A. Ghezelbash, A. Suroso, and F. Zen, “Hidden conformal symmetry for Kerr-Newman-NUT-AdS black holes,” *Nucl. Phys. B*, vol. 953, p. 114970, 2020.
- [44] R. G. Leigh, A. C. Petkou, and P. M. Petropoulos, “Holographic Three-Dimensional Fluids with Nontrivial Vorticity,” *Phys. Rev.*, vol. D85, p. 086010, 2012.

- [45] M. M. Caldarelli, R. G. Leigh, A. C. Petkou, P. M. Petropoulos, V. Pozzoli, and K. Siampos, “Vorticity in holographic fluids,” *PoS*, vol. CORFU2011, p. 076, 2011.
- [46] R. G. Leigh, A. C. Petkou, and P. M. Petropoulos, “Holographic Fluids with Vorticity and Analogue Gravity,” *JHEP*, vol. 11, p. 121, 2012.
- [47] A. Mukhopadhyay, A. C. Petkou, P. M. Petropoulos, V. Pozzoli, and K. Siampos, “Holographic perfect fluidity, Cotton energy-momentum duality and transport properties,” *JHEP*, vol. 04, p. 136, 2014.
- [48] C. V. Johnson and R. C. Myers, “Taub-NUT dyons in heterotic string theory,” *Phys. Rev.*, vol. D50, pp. 6512–6518, 1994.
- [49] C. V. Johnson and R. C. Myers, “Stringy twists of the Taub - NUT metric,” in *7th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity (MG 7)*, pp. 940–942, 7 1994.
- [50] C. P. Burgess, R. C. Myers, and F. Quevedo, “On spherically symmetric string solutions in four-dimensions,” *Nucl. Phys.*, vol. B442, pp. 75–96, 1995.
- [51] M. H. Dehghani and R. B. Mann, “NUT-charged black holes in Gauss-Bonnet gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D72, p. 124006, 2005.
- [52] M. H. Dehghani and S. H. Hendi, “Taub-NUT/bolt black holes in Gauss-Bonnet-Maxwell gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D73, p. 084021, 2006.
- [53] S. H. Hendi and M. H. Dehghani, “Taub-NUT Black Holes in Third order Lovelock Gravity,” *Phys. Lett.*, vol. B666, pp. 116–120, 2008.
- [54] C. Corral, D. Flores-Alfonso, and H. Quevedo, “Charged Taub-NUT solution in Lovelock gravity with generalized Wheeler polynomials,” *Phys. Rev.*, vol. D100, no. 6, p. 064051, 2019.
- [55] P. Bueno, P. A. Cano, R. A. Hennigar, and R. B. Mann, “NUTs and bolts beyond Lovelock,” *JHEP*, vol. 10, p. 095, 2018.

- 
- [56] Y. Bardoux, M. M. Caldarelli, and C. Charmousis, “Integrability in conformally coupled gravity: Taub-NUT spacetimes and rotating black holes,” *JHEP*, vol. 05, p. 039, 2014.
- [57] Y. Brihaye and E. Radu, “Remarks on the Taub-NUT solution in Chern-Simons modified gravity,” *Phys. Lett.*, vol. B764, pp. 300–305, 2017.
- [58] J. D. Mccrea, “A NUTLIKE SOLUTION OF THE QUADRATIC POINCARÉ GAUGE FIELD EQUATIONS,” *Phys. Lett.*, vol. A100, pp. 397–399, 1984.
- [59] P. Bakler and F. W. Hehl, “A CHARGED TAUB - NUT METRIC WITH TORSION: A NEW AXIALLY SYMMETRIC SOLUTION OF THE POINCARÉ GAUGE FIELD THEORY,” *Phys. Lett.*, vol. A100, pp. 392–396, 1984.
- [60] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2007.
- [61] R. Gambini and J. Pullin, *A first course in loop quantum gravity*. Oxford University Press, UK, 2011.
- [62] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, “Nonperturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics,” *Phys. Rept.*, vol. 363, pp. 223–386, 2002.
- [63] R. Loll, “Quantum Gravity from Causal Dynamical Triangulations: A Review,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 37, no. 1, p. 013002, 2020.
- [64] P. Svrcek and E. Witten, “Axions In String Theory,” *JHEP*, vol. 06, p. 051, 2006.
- [65] J. H. Schwarz, “String Theory and M-Theory,” in *100 Years of Subatomic Physics* (E. M. Henley and S. D. Ellis, eds.), pp. 519–550, Cambridge University Press, 2013.
- [66] B. Zwiebach, “Curvature Squared Terms and String Theories,” *Phys. Lett.*, vol. 156B, pp. 315–317, 1985.

- [67] C. Charmousis, “From Lovelock to Horndeski’s Generalized Scalar Tensor Theory,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 892, pp. 25–56, 2015.
- [68] O. Castillo-Felisola, C. Corral, S. del Pino, and F. Ramírez, “Kaluza-Klein cosmology from five-dimensional Lovelock-Cartan theory,” *Phys. Rev.*, vol. D94, no. 12, p. 124020, 2016.
- [69] J. Maldacena, “The large- $n$  limit of superconformal field theories and supergravity,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 38, pp. 1113–1133, Apr 1999.
- [70] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from noncritical string theory,” *Phys. Lett.*, vol. B428, pp. 105–114, 1998.
- [71] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.*, vol. 2, pp. 253–291, 1998.
- [72] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, and G. T. Horowitz, “Holographic Superconductors,” *JHEP*, vol. 12, p. 015, 2008.
- [73] G. T. Horowitz, “Introduction to Holographic Superconductors,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 828, pp. 313–347, 2011.
- [74] G. T. Horowitz and M. M. Roberts, “Holographic Superconductors with Various Condensates,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 126008, 2008.
- [75] A. Vega, I. Schmidt, T. Branz, T. Gutsche, and V. E. Lyubovitskij, “Meson wave function from holographic models,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 055014, 2009.
- [76] T. Branz, T. Gutsche, V. E. Lyubovitskij, I. Schmidt, and A. Vega, “Light and heavy mesons in a soft-wall holographic approach,” *Phys. Rev. D*, vol. 82, p. 074022, 2010.
- [77] T. Gutsche, V. E. Lyubovitskij, I. Schmidt, and A. Vega, “Dilaton in a soft-wall holographic approach to mesons and baryons,” *Phys. Rev. D*, vol. 85, p. 076003, 2012.

- 
- [78] E. Arratia, C. Corral, J. Figueroa, and L. Sanhueza, “Hairy taub-nut/bolt-ads solutions in horndeski theory,” *Physical Review D*, vol. 103, Mar 2021.
- [79] T. T. Wu and C. N. Yang, “Dirac monopole without strings: Monopole harmonics,” *Nuclear Physics B*, vol. 107, no. 3, pp. 365–380, 1976.
- [80] D. P. A. Maurice, “Quantised singularities in the electromagnetic field,” *Proc. R. Soc. Lond*, vol. 133, p. 821, 1931.
- [81] C. Corral, “Lectures on Magnetic Monopole.” 2021.
- [82] A. Belavin, A. M. Polyakov, A. Schwartz, and Y. Tyupkin, “Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations,” *Phys. Lett. B*, vol. 59, pp. 85–87, 1975.
- [83] R. M. Wald, *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984.
- [84] J. York, James W., “Role of conformal three geometry in the dynamics of gravitation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 28, pp. 1082–1085, 1972.
- [85] G. Gibbons and S. Hawking, “Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 15, pp. 2752–2756, 1977.
- [86] R. Emparan, C. V. Johnson, and R. C. Myers, “Surface terms as counterterms in the AdS / CFT correspondence,” *Phys. Rev. D*, vol. 60, p. 104001, 1999.
- [87] D. Lynden-Bell and M. Nouri-Zonoz, “Classical monopoles: Newton, NUT space, gravimagnetic lensing and atomic spectra,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 70, pp. 427–446, 1998.
- [88] J. Bičák, “Selected solutions of Einstein’s field equations: Their role in general relativity and astrophysics,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 540, pp. 1–126, 2000.
- [89] R. Araneda, R. Aros, O. Miskovic, and R. Olea, “Magnetic Mass in 4D AdS Gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 8, p. 084022, 2016.
- [90] D. Flores-Alfonso and H. Quevedo, “Topological Characterization of Higher Dimensional Charged Taub-NUT Instantons,” *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, vol. 16, p. 1950154, 2019.

- [91] M. Demianski and E. T. Newman, “Combined kerr-nut solution of the einstein field equations.,” *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. Phys.*, 14: 653-7(1966)., vol. 8, 1 1966.
- [92] C. W. Misner, “The Flatter regions of Newman, Unti and Tamburino’s generalized Schwarzschild space,” *J. Math. Phys.*, vol. 4, pp. 924–938, 1963.
- [93] C. Hurst, “Charge quantization and nonintegrable lie algebras,” *Annals of Physics*, vol. 50, no. 1, pp. 51–75, 1968.
- [94] D. N. Page and C. N. Pope, “INHOMOGENEOUS EINSTEIN METRICS ON COMPLEX LINE BUNDLES,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 4, pp. 213–225, 1987.
- [95] V. Balasubramanian and P. Kraus, “A Stress tensor for Anti-de Sitter gravity,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 208, pp. 413–428, 1999.
- [96] L. Ciambelli, C. Corral, J. Figueroa, G. Giribet, and R. Olea, “Topological terms and the misner string entropy,” *Physical Review D*, vol. 103, Jan 2021.
- [97] C. Lanczos, “A Remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions,” *Annals Math.*, vol. 39, pp. 842–850, 1938.
- [98] D. Lovelock, “The Einstein tensor and its generalizations,” *J. Math. Phys.*, vol. 12, pp. 498–501, 1971.
- [99] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, “Modified gravity and cosmology,” *Physics Reports*, vol. 513, p. 1–189, Mar 2012.
- [100] E. Berti, E. Barausse, V. Cardoso, L. Gualtieri, P. Pani, U. Sperhake, L. C. Stein, N. Wex, K. Yagi, T. Baker, and et al., “Testing general relativity with present and future astrophysical observations,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 32, p. 243001, Dec 2015.
- [101] A. Joyce, L. Lombriser, and F. Schmidt, “Dark energy versus modified gravity,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, vol. 66, p. 95–122, Oct 2016.
- [102] T. M. Nieuwenhuizen, “How zwicky already ruled out modified gravity theories without dark matter,” *Fortschritte der Physik*, vol. 65, p. 1600050, Apr 2017.

- 
- [103] L. Lombriser and N. A. Lima, “Challenges to self-acceleration in modified gravity from gravitational waves and large-scale structure,” *Physics Letters B*, vol. 765, p. 382–385, Feb 2017.
- [104] R. J. Adler, B. Casey, and O. C. Jacob, “Vacuum catastrophe: An elementary exposition of the cosmological constant problem,” *American Journal of Physics*, vol. 63, no. 7, pp. 620–626, 1995.
- [105] G. W. Horndeski, “Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space,” *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 10, pp. 363–384, 1974.
- [106] M. Rinaldi, “Black holes with non-minimal derivative coupling,” *Phys. Rev.*, vol. D86, p. 084048, 2012.
- [107] E. Babichev and C. Charmousis, “Dressing a black hole with a time-dependent Galileon,” *JHEP*, vol. 08, p. 106, 2014.
- [108] A. Anabalón, A. Cisterna, and J. Oliva, “Asymptotically locally AdS and flat black holes in Horndeski theory,” *Phys. Rev.*, vol. D89, p. 084050, 2014.
- [109] A. Cisterna and C. Erices, “Asymptotically locally AdS and flat black holes in the presence of an electric field in the Horndeski scenario,” *Phys. Rev.*, vol. D89, p. 084038, 2014.
- [110] M. Bravo-Gaete and M. Hassaine, “Thermodynamics of a BTZ black hole solution with an Horndeski source,” *Phys. Rev.*, vol. D90, no. 2, p. 024008, 2014.
- [111] Y. Brihaye, A. Cisterna, and C. Erices, “Boson stars in biscalar extensions of Horndeski gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, no. 12, p. 124057, 2016.
- [112] A. Cisterna, T. Delsate, and M. Rinaldi, “Neutron stars in general second order scalar-tensor theory: The case of nonminimal derivative coupling,” *Phys. Rev.*, vol. D92, no. 4, p. 044050, 2015.
- [113] A. Cisterna, T. Delsate, L. Ducobu, and M. Rinaldi, “Slowly rotating neutron stars in the nonminimal derivative coupling sector of Horndeski gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, no. 8, p. 084046, 2016.

- [114] M. Bravo-Gaete and M. Hassaine, “Lifshitz black holes with a time-dependent scalar field in a Horndeski theory,” *Phys. Rev.*, vol. D89, p. 104028, 2014.
- [115] E. Caceres, R. Mohan, and P. H. Nguyen, “On holographic entanglement entropy of Horndeski black holes,” *JHEP*, vol. 10, p. 145, 2017.
- [116] W.-J. Jiang, H.-S. Liu, H. Lu, and C. Pope, “DC Conductivities with Momentum Dissipation in Horndeski Theories,” *JHEP*, vol. 07, p. 084, 2017.
- [117] G. Filios, P. A. González, X.-M. Kuang, E. Papantonopoulos, and Y. Vásquez, “Spontaneous Momentum Dissipation and Coexistence of Phases in Holographic Horndeski Theory,” *Phys. Rev.*, vol. D99, no. 4, p. 046017, 2019.
- [118] A. Cisterna, M. Hassaine, J. Oliva, and M. Rinaldi, “Axionic black branes in the k-essence sector of the Horndeski model,” *Phys. Rev. D*, vol. 96, no. 12, p. 124033, 2017.
- [119] A. Cisterna, C. Erices, X.-M. Kuang, and M. Rinaldi, “Axionic black branes with conformal coupling,” *Phys. Rev. D*, vol. 97, no. 12, p. 124052, 2018.
- [120] A. Cisterna, L. Guajardo, and M. Hassaine, “Axionic charged black branes with arbitrary scalar nonminimal coupling,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 79, no. 5, p. 418, 2019.
- [121] A. Cisterna, S.-Q. Hu, and X.-M. Kuang, “Joule-Thomson expansion in AdS black holes with momentum relaxation,” *Phys. Lett. B*, vol. 797, p. 134883, 2019.
- [122] H.-S. Liu, H. Lu, and C. Pope, “Holographic Heat Current as Noether Current,” *JHEP*, vol. 09, p. 146, 2017.
- [123] Y.-Z. Li, H. Lu, and H.-Y. Zhang, “Scale Invariance vs. Conformal Invariance: Holographic Two-Point Functions in Horndeski Gravity,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 79, no. 7, p. 592, 2019.
- [124] S.-Q. Hu and X.-M. Kuang, “Holographic heat engine in Horndeski model with the  $k$ -essence sector,” *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, vol. 62, no. 6, p. 60411, 2019.

- 
- [125] X.-H. Feng and H.-S. Liu, “Holographic Complexity Growth Rate in Horndeski Theory,” *Eur. Phys. J.*, vol. C79, no. 1, p. 40, 2019.
- [126] X.-J. Wang, H.-S. Liu, and W.-J. Li, “AC charge transport in holographic Horndeski gravity,” *Eur. Phys. J.*, vol. C79, no. 11, p. 932, 2019.
- [127] X.-H. Feng, H.-S. Liu, H. Lü, and C. Pope, “Thermodynamics of Charged Black Holes in Einstein-Horndeski-Maxwell Theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, no. 4, p. 044030, 2016.
- [128] X.-H. Feng, H.-S. Liu, H. Lü, and C. Pope, “Black Hole Entropy and Viscosity Bound in Horndeski Gravity,” *JHEP*, vol. 11, p. 176, 2015.
- [129] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, “Modified Gravity and Cosmology,” *Phys. Rept.*, vol. 513, pp. 1–189, 2012.
- [130] D. Bettoni, J. M. Ezquiaga, K. Hinterbichler, and M. Zumalacárregui, “Speed of Gravitational Waves and the Fate of Scalar-Tensor Gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D95, no. 8, p. 084029, 2017.
- [131] J. M. Ezquiaga and M. Zumalacárregui, “Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, no. 25, p. 251304, 2017.
- [132] J. M. Ezquiaga and M. Zumalacárregui, “Dark Energy in light of Multi-Messenger Gravitational-Wave astronomy,” *Front. Astron. Space Sci.*, vol. 5, p. 44, 2018.
- [133] T. Baker, E. Bellini, P. G. Ferreira, M. Lagos, J. Noller, and I. Sawicki, “Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, no. 25, p. 251301, 2017.
- [134] J. Sakstein and B. Jain, “Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, no. 25, p. 251303, 2017.
- [135] L. Heisenberg and S. Tsujikawa, “Dark energy survivals in massive gravity after GW170817: SO(3) invariant,” *JCAP*, vol. 1801, no. 01, p. 044, 2018.

- [136] C. D. Kreisch and E. Komatsu, “Cosmological Constraints on Horndeski Gravity in Light of GW170817,” *JCAP*, vol. 1812, no. 12, p. 030, 2018.
- [137] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Cosmological Bound from the Neutron Star Merger GW170817 in scalar-tensor and  $F(R)$  gravity theories,” *Phys. Lett.*, vol. B779, pp. 425–429, 2018.
- [138] M. Ostrogradsky, “Mem. Ac. St. Petersburg,” *VI 4 385*, 1850.
- [139] R. P. Woodard, “Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability,” *Scholarpedia*, vol. 10, no. 8, p. 32243, 2015.
- [140] C. Charmousis and D. Iosifidis, “Self tuning scalar tensor black holes,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 600, p. 012003, 2015.
- [141] L. Hui and A. Nicolis, “No-Hair Theorem for the Galileon,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, p. 241104, 2013.
- [142] P. González, M. Olivares, E. Papantonopoulos, and Y. Vásquez, “Constraints on Scalar-Tensor Theory of Gravity by Solar System Tests,” *The European Physics Journal C*, 2020.
- [143] T. Hertog and K. Maeda, “Black holes with scalar hair and asymptotics in  $d=8$  supergravity,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2004, p. 051–051, Jul 2004.
- [144] M. Henneaux, C. Martínez, R. Troncoso, and J. Zanelli, “Asymptotic behavior and hamiltonian analysis of anti-de sitter gravity coupled to scalar fields,” *Annals of Physics*, vol. 322, p. 824–848, Apr 2007.
- [145] J. D. Brown and J. W. York, “Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action,” *Physical Review D*, vol. 47, p. 1407–1419, Feb 1993.
- [146] A. Ashtekar and S. Das, “Asymptotically Anti-de Sitter space-times: Conserved quantities,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 17, pp. L17–L30, 2000.

- 
- [147] O. Miskovic and R. Olea, “Topological regularization and self-duality in four-dimensional anti-de Sitter gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D79, p. 124020, 2009.
- [148] R. Gregory and R. Laflamme, “Black strings and p-branes are unstable,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 2837–2840, 1993.
- [149] A. Cisterna, S. Fuenzalida, M. Lagos, and J. Oliva, “Homogeneous black strings in Einstein–Gauss–Bonnet with Horndeski hair and beyond,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 78, no. 11, p. 982, 2018.
- [150] A. Ghezelbash and R. B. Mann, “Action, mass and entropy of Schwarzschild-de Sitter black holes and the de Sitter / CFT correspondence,” *JHEP*, vol. 01, p. 005, 2002.
- [151] R. Clarkson, A. Ghezelbash, and R. B. Mann, “Mass, action and entropy of Taub-Bolt-dS space-times,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 061301, 2003.
- [152] R. Clarkson and R. B. Mann, “Eguchi-Hanson solitons in odd dimensions,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 23, pp. 1507–1524, 2006.
- [153] R. Clarkson and R. B. Mann, “Soliton solutions to the Einstein equations in five dimensions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 051104, 2006.
- [154] R. B. Mann and C. Stelea, “Nuttier (A)dS black holes in higher dimensions,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 21, pp. 2937–2962, 2004.