

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física



3-brana en Gravedad Einstein-Chern-Simons

Tesis para optar al grado académico
de Magíster en Ciencias
con mención en Física

por

Roberto Ignacio Salgado Riquelme

Director de Tesis: Dr.Fernando Izaurieta

Comisión: Dr.Ricardo Caroca

Dr.Diego Molina

Concepción, Chile

Julio 2021

Índice

Resumen	i
1 Introducción	1
2 Preliminares	6
2.1 Embebimiento	6
2.2 Pullback y Pushforward	8
2.3 Métrica Inducida	8
2.4 Derivada covariante inducida	10
2.5 Curvatura Extrínseca	11
2.6 Ecuaciones de Gauss-Codazzi	12
3 Gravitación	16
3.1 Teoría de la Relatividad General de Einstein	16
3.1.1 Acción para la Relatividad General	17
3.1.2 Formalismo de Cartan	19
3.1.3 Invariancia bajo el grupo de Poincaré de la R.G.	23
3.2 Generalización para la Relatividad General	27
3.2.1 Teorema de Lovelock.	27
3.2.2 Acción Chern-Simons	29
3.2.3 Acción Born-Infeld.	32
3.2.4 Compactificación de Kaluza-Klein	34

3.2.5	Modelo de Randall-Sundrum	36
3.3	Teoría Chern-Simons	37
3.3.1	Teoría de Yang-Mills	37
3.3.2	Formas y gravedad Chern-Simons.	38
3.4	Gravedad Einstein-Chern-Simons.	41
3.4.1	Álgebras \mathfrak{B}_m	41
3.4.2	Lagrangiano EChS en cinco dimensiones.	42
3.4.3	Ecuaciones de movimiento en gravedad EChS	43
3.5	Mundo Brana	45
3.5.1	Formalismo de Israel.	45
3.5.2	Ecuaciones de Einstein en 3-Brana.	48
3.5.3	Condiciones de Juntura: Gravedad de Lovelock	51
4	3-Brana en gravedad Einstein-Chern-Simons.	54
4.1	Condiciones de Juntura	55
4.1.1	Juntura Einstein-Chern-Simons	56
4.2	Ecuaciones de Movimiento en la brana.	58
5	Conclusiones	67
	Appendices	70
	Apéndice A Expansión en Semigrupos	71
A.1	Semigrupo	71
A.2	Álgebras de Lie	72
A.3	Álgebras de Lie Reducidas	74
A.4	S-expansión	75
A.5	Álgebra 0_S -reducida	76
A.6	Subálgebra Resonante	77
A.7	Reducción Resonante	78

A.8 Tensores invariantes en S-expansión	78
Apéndice B S-expansión dual: Juntura EChS	82
Apéndice C Condición de Juntura: forma explicita de la Curvatura Extrínseca	86
Apéndice D Cascarón delgado método de distribuciones	88
Apéndice E Teorema de Chern-Weil y formas de Transgresión	93



Agradecimientos

Primero Agradecer a mi familia, en especial a mis padres, María Teresa y Roberto, por su incondicional apoyo, preocupación y amor, pues sin ello es probable que me hubiera rendido antes de llegar a este punto del camino. A mis hermanos, Daniel y Gonzalo, no solo por la compañía en estos años de universidad, también por compartir el intereses por la ciencia. A mis abuelas, María Teresa y Ana, por su preocupación. A mis tios y tias por su preocupación, especialmente a Patricio no solo como familiar, también como profesor y como amigo cada vez que necesité una palabra de apoyo.

Agradecer a mis compañeros de generación tanto en lo académico como en lo fuera de ello. A los profesores de la facultad que de una forma u otra han sido parte de mi formación académica. En especial a mi profesor guía Fernando Izaurieta, primero por aceptar ser tutor mi tutor de tesis y por su ayuda a lo largo de este magíster. A los profesores Ricardo Caroca y Diego Molina por aceptar ser parte de la comisión examinadora. Agradecer a las secretarias de la facultad, particularmente a Soledad Daroch por su buena disposición.

Por ultimo, a mis amigos por los momentos que compartimos, por el animo y apoyo que me brindaron que hicieron del camino mas llevadero.

Resumen

La tesis aquí presentada busca estudiar la teoría Einstein-Chern-Simons en el contexto del mundo-brana. La acción de esta teoría es obtenida, en cinco dimensiones, a partir de una simetría de gauge que involucra el álgebra de Lie \mathfrak{B} , conocida también como álgebra de Maxwell y utilizando formas Chern-Simons de la cual es posible recuperar la relatividad general de Einstein, esto a diferencia de la teoría Chern-Simons AdS. El álgebra mencionada anteriormente es obtenida por medio del procedimiento de S -expansión usando como base el semigrupo $S_E^{(5)}$ y el álgebra AdS_5 .

Se revisan temas como la relatividad general Einstein y su generalización natural a dimensión arbitraria conocida como acción de Lanczos-Lovelock. Se presenta también una acción Chern-Simons como caso particular de la acción de Lanczos-Lovelock y su relación con las teorías de gauge. Se muestran otras teorías de dimensión mayor a cuatro como la teoría de Kaluza-Klein y los modelos de Randall-Sundrum con el propósito de introducir el estudio al mundo-brana y se revisa la obtención de las ecuaciones para una brana en relatividad general.

Como resultado se presenta el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento de una brana en la teoría Einstein-Chern-Simons, obtenidas de forma similar al caso de la teoría de Einstein, lo que condujo a la publicación en la revista. Además se discute el caso de la brana en relatividad general como límite de baja energía de la brana Einstein-Chern-Simons.

Capítulo 1

Introducción

En 1916 [1], Einstein publica la Teoría General de la Relatividad [R.G.] , generalizando su Teoría de la Relatividad Especial, planteada en 1905 [2]. En esta última, el espacio plano es reemplazado por uno curvo, donde el tensor métrico corresponde a la representación matemática del campo gravitacional. Esta teoría es considerada exitosa debido al gran espectro de fenómenos que es capaz de explicar. Unos de los primeros grandes logros de esta teoría fue predecir correctamente el avance del perihelio de mercurio, corrigiendo así la predicción de la teoría de Newton, cuya diferencia era exactamente la mitad del valor real [3]. Así, también la teoría de Einstein predice, sin la adición de la constante cosmológica, que el universo está en expansión, lo cual fue probado empíricamente en 1929 por Edwin Hubble [4]. Otras predicciones son las ondas gravitacionales, las cuales no fueron observadas hasta el 2015 [5]; los lentes gravitacionales y agujeros negros [3]. A pesar del éxito de la R.G. esta se resiste a la cuantización, debido a lo cual no es posible generar una teoría unificada para las cuatro fuerzas fundamentales, lo que motiva a buscar extensiones a la teoría de Einstein.

En la década de 1950, Chen Yang y Robert Mills desarrollaron la teoría de campo conocida como la Teoría de Yang-Mills [YM], que corresponde a una teoría de gauge que describe los campos físicos, utilizando álgebras de Lie no conmutativas. Dicho

tipo de teorías logra cuantizar la fuerza electromagnética, así como también explicar las Fuerzas Nucleares Fuerte y Débil, siendo además la base para construir la teoría unificada para las tres fuerzas nombradas. La diferencia principal entre la R.G. y las teorías de gauge corresponde al espacio sobre el cual son construidas. En una teoría de gauge la geometría del espacio no está determinada dinámicamente, como es el caso de la Relatividad Especial. Por su parte, la R.G. tiene una estructura métrica dinámica, por lo que una teoría de gauge para la gravedad debe ser creada de tal forma que el espacio no sea fijo. Una acción para una teoría de gauge para la gravedad fue propuesta por Chamseddine [6], conocida como acción “Chern-Simons”, construida a partir de una conexión de gauge independiente de la métrica y que además corresponde a un caso particular de la acción de Lanczos-Lovelock [LL] [7, 8, 9].

La acción de Lovelock fue propuesta en 1971 y corresponde a la generalización de la teoría de Einstein a dimensión arbitraria, la cual generaliza el tensor de Einstein, mediante el cumplimiento del el Principio de Covarianza General, y las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de dichas acciones tienen derivadas de segundo orden. En dimensión impar es posible escoger una particular forma de los coeficientes de la acción LL, tal que, la acción corresponda a una forma Chern-Simons invariante bajo simetría AdS [10]. El problema con esta teoría de gauge para la gravedad, es que no se recupera, en algún límite, la R.G. de Einstein. Con el fin de asegurar el cumplimiento del Principio de Correspondencia, esta acción para la gravedad es construida a partir de una simetría con álgebra distinta. En la presente tesis, se utilizará la acción de “Einstein-Chern-Simons” [11, 12], invariante bajo la simetría de gauge del álgebra de Lie \mathfrak{B} obtenida a través del proceso de “S-expansión” [13] del álgebra de Lie $so(4, 2)$. Para mayor profundidad se surge revisar [14, 15, 16, 17].

En el contexto de las teorías unificadas, entre los primeros intentos por generar teorías de este tipo se encuentra a Kaluza en 1919, así como Klein [18, 19] en 1926, quienes consiguieron construir una Teoría pentadimensional, la cual logra unificar la

fuerza electromagnética y la gravedad, las dos fuerzas fundamentales conocidas hasta ese punto de la historia. Dicho modelo fue posteriormente descartado, al contrastarse con evidencia empírica. Sin embargo, la noción de considerar un número mayor de dimensiones, con el propósito de lograr generar una teoría unificada, se mantuvo en investigaciones posteriores.

Por otra parte, en la teoría de cuerdas [20] surge un objeto denominado brana, que corresponde a una generalización de una partícula puntual, a una hiper-superficie, guardando similitud con como se generaliza una partícula puntual a un objeto unidimensional en la teoría de Cuerdas. En un espacio pueden existir una o más branas, las cuales tienen un número de dimensiones menor que el espacio completo o bulk. De ello, que sea útil servirse de las branas para tratar con modelos de dimensionalidad mayor. Dos de los modelos de brana más conocidos, fueron planteados por Lisa Randall y Raman Sundrum en 1999 [21]. Ambos modelos se plantean sobre un espacio de 5 dimensiones. Si bien el primer modelo resuelve el problema de las jerarquías¹[3, 20], el modelo resulta inestable. De ello que se planteara el segundo modelo utilizando solo una brana, el cual sí resulta estable, pero sin llegar a solucionar el problema. A pesar de lo anterior, las branas resultan útiles para tratar con teorías de dimensión cinco o mayor, considerando que somos capaces de detectar las cuatro usuales.

Inspirados en las ideas de Randall-Sundrum; T.Shiromizu, K.Maeda y M.Sasaki [22] idearon un mecanismo para obtener las ecuaciones efectivas de la gravedad para una hiper-superficie cuatridimensional, en un espacio de cinco dimensiones, utilizando para ello las condiciones suficientes y necesarias para asegurar la existencia de una hiper-superficie, conocidas como las ecuaciones de Gauss-Codazzi. El propósito de la presente investigación corresponde a demostrar la posibilidad, medi-

¹El problema de las jerarquías consiste en la gran diferencia que existe entre los valores de dos escalas de energía, específicamente, ¿Por qué la fuerza nuclear débil es 10^{24} mas grande que la gravitacional?.

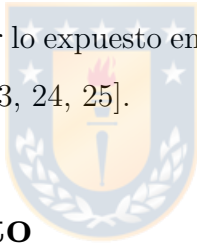
ante el mecanismo expuesto en el párrafo anterior, de obtener las ecuaciones efectivas de movimiento para una brana cuadridimensional, en un bulk de cinco dimensiones, en el contexto de la gravedad Einstein-Chern-Simons, recuperando las ecuaciones de Einstein usuales en el límite de baja energía.



Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se introducirán conceptos matemáticos acerca de geometría diferencial necesarios para entender lo expuesto en los capítulos posteriores. Este capítulo se basa en las referencias [3, 23, 24, 25].



2.1 Embebimiento

En el contexto de las teorías n -dimensionales, dos preguntas adquieren relevancia de ser planteadas; ¿Cómo definimos la métrica inducida, q_{ab} , sobre una hipersuperficie en un espacio de métrica $g_{\mu\nu}$? ¿cómo definir un campo vectorial de manera que sea integrable en la hipersuperficie?.

Para responder estas interrogantes definimos un embebimiento como un mapeo entre dos variedades de diferente dimensión, es decir:

$$X : M^{(N)} \rightarrow m^{(n)}, \quad (2.1)$$

con $N > n$ y donde X cumple con:

- Es un mapeo inyectivo.
- Su derivada es un mapeo inyectivo

Este mapeo puede ser descrito de forma paramétrica, para ello definimos el sistema coordinado x^μ en $M^{(N)}$ y ζ^a en $m^{(n)}$. Luego, el embebimiento queda descrito por

$$x^\mu = X^\mu(\zeta^a), \quad (2.2)$$

donde $\mu = N, N-1, N-2, \dots, 0$ y $a = n, n-1, n-2, \dots, 0$.

El embebimiento toma un punto p en $M^{(N)}$ el cual es mapeado a uno $P = X(p)$ en $m^{(n)}$.

Una hiper-superficie queda descrita por las restricciones impuestas sobre las coordenadas, es decir:

$$\Phi(x^\alpha) = 0. \quad (2.3)$$

De forma equivalente en forma paramétrica:

$$x^\alpha = X^\alpha(\xi^a), \quad (2.4)$$

donde los índices latinos corren solo sobre las coordenadas intrínsecas a la hiper-superficie.

Definimos un vector $\Phi_{/\alpha} = \partial_\alpha \Phi = \nabla \Phi$, el cual es normal a la hiper-superficie, ya que Φ cambia su valor sólo en la dirección ortogonal a m . Un vector unitario normal n_α puede ser introducido si la hiper-superficie es no nula, de la siguiente manera:

$$n^\alpha n_\alpha = \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es tipo espacio} \\ -1 & \text{si } m \text{ es tipo tiempo} \end{cases}, \quad (2.5)$$

además, exigimos que n^α apunte en la dirección de incremento de Φ , ya que:

$$n_\alpha = \tau \Phi_{/\alpha},$$

Donde:

$$\tau = \frac{\pm |\varepsilon|}{|g^{\mu\nu} \Phi_{/\mu} \Phi_{/\nu}|^{1/2}} = \frac{\pm 1}{|g^{\mu\nu} \Phi_{/\mu} \Phi_{/\nu}|^{1/2}} = \frac{\varepsilon}{|g^{\mu\nu} \Phi_{/\mu} \Phi_{/\nu}|^{1/2}}$$

2.2 Pullback y Pushforward

Sea $T_p M^N$ el espacio tangente de M en el punto p y sea \vec{A} un vector en este espacio. Definimos el “Push-Forward” de \vec{A} como:

$$X_* \vec{A} = A^i \frac{\partial X^\mu}{\partial \zeta^i} \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.6)$$

donde $X_* \vec{A} \in T_p m^n$.

Sea $T_p^* m^n$ el espacio cotangente de m en p y sea α una 1-forma en él. Definimos el “Pull-back” de α como:

$$X^* \alpha = \alpha_\mu \frac{\partial X^\mu}{\partial \zeta^i} d\zeta^i, \quad (2.7)$$

donde $X^* \alpha \in T_p^* M^N$

Es importante notar que estos mapeos no son invertibles.

2.3 Métrica Inducida

Consideremos el espacio-tiempo dado por una variedad m -dimensional M dotado de una métrica $g_{\mu\nu}$ y de un sistema coordenado x^λ donde $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$; de manera que un elemento de línea es dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu. \quad (2.8)$$

Los puntos de M cuyas coordenadas x^λ son expresables como función de n variables independientes ζ^a , con $n < m$, constituyen un subespacio V embebido en M . Dicho subespacio puede ser representado paramétricamente por (2.2).

La métrica intrínseca, q_{ab} , a es obtenida restringiendo el elemento de línea a desplazamientos confinados al subespacio. De las ecuaciones paramétricas podemos ver que los vectores

$$X_a^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \zeta^a} \quad (2.9)$$

son vectores tangentes a las curvas contenidas en V . Definimos $m - n$ campos vectoriales normales, n^μ , al subespacio, tal que:

$$X_a^\mu n_\mu = 0, \quad (2.10)$$

$$g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = \varepsilon, \quad (2.11)$$

por lo que el conjunto (X_a^μ, n^ν) forma una base para M .

Puesto que la longitud de arco, ds , que conectan dos puntos es el misma tanto en V como en M , luego:

$$q_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \zeta^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \zeta^b}, \quad (2.12)$$

Debido a lo anterior se establece una relación entre las componentes de un vector A^a entre ambos sistemas coordenados:

$$A^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \zeta^a} A^a. \quad (2.13)$$

En el caso especial donde $n = m - 1$, el subespacio V es llamado hiper-superficie y se define solo un campo vectorial normal, denotado por n^μ . En este caso se puede mostrar que

$$q_{ab} = g_{ab} - \varepsilon n_a n_b, \quad (2.14)$$

con

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{si la hipersuperficie es tipo tiempo} \\ -1, & \text{si la hipersuperficie es tipo espacio} \end{cases}, \quad (2.15)$$

o también

$$q_a^\mu = \delta_a^\mu - \varepsilon n^\mu n_a. \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) actúa como operador de proyección, al aplicarlo sobre un vector se obtendrán las componentes en la base de la hiper-superficie.

2.4 Derivada covariante inducida

La derivada covariante de un vector sobre V , en la dirección de otro vector también en V , no será en general un vector tangente a la hiper-superficie. La forma natural de definir una derivada covariante en V debería ser basada en la exigencia que dicha derivada sea también un vector en el espacio tangente, $T_P V$. Considerando la base $e_a = \frac{\partial}{\partial \zeta^a}$ (coordenadas adaptadas).

$${}^k \nabla_{e_a} \vec{A} = e_b \frac{\partial A^b}{\partial X^a} + ({}^k \Gamma_{ba}^c e_c + {}^k \Gamma_{ba}^4 e_4) A^b, \quad (2.17)$$

donde el super-índice k indica que el tensor o derivada esta siendo considerado en un espacio de dimensión k .

El ultimo termino del segundo miembro de (2.17) en general no es nulo. Podemos eliminar este término proyectando el vector sobre la hiper-superficie, de manera de tener un vector en $T_P V$, es decir, obtenemos una derivada covariante intrínseca a la hiper-superficie. En adelante, denotaremos al operador derivada covariante asociado a la hiper-superficie como $D = {}^{k-1} \nabla$, derivadas parcial como $/$, covariante parcial como $;$ y covariante total como $//$.

Considerando lo anterior es posible mostrar que la derivada covariante inducida sobre la hiper-superficie viene dada por:

$$D_c A^b = A^c /_a + {}^{k-1} \Gamma^c_{ba} A^b. \quad (2.18)$$

Notemos que la forma que toman las expresiones de la derivada tanto en sus componentes covariantes como contravariantes es la misma que las derivadas en el espacio-tiempo. Este hecho se debe a que la derivada covariante en la hiper-superficie está dada por la conexión afín en la variedad V , definida a partir de la métrica en la forma usual:

$${}^{k-1} \Gamma_{abc} \equiv \frac{1}{2} (\gamma_{ab/c} + \gamma_{ac/b} - \gamma_{bc/a}). \quad (2.19)$$

Con el objeto de facilitar los cálculos, notemos que la derivada covariante puede expresarse en términos de componentes de la siguiente manera:

$$A^b_{//c} = X^b_\mu X^\nu_c A^\mu_{//\nu}. \quad (2.20)$$

En el caso de que el sistema coordenado no sea adaptado la derivada covariante inducida se expresa como:

$$A^b_{//c} = q^b_\mu q^\nu_c A^\mu_{//\nu}. \quad (2.21)$$

2.5 Curvatura Extrínseca

Se define el tensor curvatura extrínseca a la hiper-superficie como:

$$K_{ab} = q^\mu_a q^\nu_b \nabla_\nu n_\mu, \quad (2.22)$$

es decir, la curvatura extrínseca es la proyección sobre la hiper-superficie de la derivada covariante del vector normal en una dirección tangente a la hiper-superficie.

También es útil notar que en un sistema coordenado:

$$K_{ab} = n_l \Gamma^l_{ab}, \quad (2.23)$$

donde Γ_{ab} son los símbolos de Christoffel.

Para que K_{ab} este bien definida el vector normal a la hipersuperficie debe cumplir con:

$$\nabla_\nu \vec{n} \cdot \vec{n} = 0. \quad (2.24)$$

Debido a esto, la noción de curvatura extrínseca no tiene sentido para una variedad, solo lo tiene cuando la variedad esta embebida en una de mayor dimensión.

Una posible interpretación geométrica de la curvatura extrínseca es que ella nos da una medida de qué tanto se curva la hiper-superficie respecto del espacio envolvente, es decir, nos dice cuanto se alejan de ser paralelos los vectores normales de dos puntos cercanos en el espacio completo.

La curvatura extrínseca corresponde a la generalización, a dimensión arbitraria, de los coeficientes de la segunda forma fundamental [26].

2.6 Ecuaciones de Gauss-Codazzi

Consideremos un espacio euclídeo 3-dimensional y una superficie bidimensional, V , cuya métrica y coeficientes de la segunda forma fundamental son q_{ab} y b_{ij} , respectivamente. Se asegura la existencia de esta superficie, si y solo si, se cumplen las siguientes condiciones:

$$R^l_{ijk} = \partial_j \Gamma^l_{ik} - \partial_k \Gamma^l_{ij} + \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{mj} - \Gamma^m_{ij} \Gamma^l_{mk}, \quad (2.25)$$

$$\partial_j b_{ik} - \partial_k b_{ij} = \Gamma^l_{ij} b_{lk} - \Gamma^l_{ik} b_{lj}, \quad (2.26)$$

conocidas como las ecuaciones de Gauss-Codazzi en un espacio plano tridimensional.

Una consecuencia importante de estas condiciones es el Teorema Egregium de Gauss [26, 27].

Estas ecuaciones pueden ser generalizadas a una hiper-superficie en un espacio de dimensión arbitraria. Consideremos un espacio de Riemann n -dimensional y sean:

$$y^{\mu}_{//i//j} = K_{ij} n^{\mu}, \quad (2.27)$$

$$n^{\mu}_{//i} = -K^j_i y^{\mu}_{/j}.$$

las ecuaciones de Gauss-Weingarten en dimensión n .

De forma similar al caso tridimensional podemos hacernos la siguiente pregunta ¿Existe una superficie tal que su métrica y su curvatura extrínseca sean g_{ij} y K_{ij} ? o en otras palabras ¿Tienen solución las ecuaciones de Gauss-Weingarten generalizadas?. La respuesta es positiva si se cumplen las ecuaciones de Gauss-Codazzi Generalizadas que obtendremos a continuación.

Consideremos las ecuaciones (2.27) diferenciales de segundo orden. Sea y^{μ} las

coordenadas de una hiper-superficie, de al menos clase C^3 , es decir, sus derivadas conmutan:

$$y_{i;j;k}^\mu - y_{i;k;j}^\mu, \quad (2.28)$$

y sean V_i las componentes de un vector covariante en el espacio envolvente, con coordenadas x^k

$$V_{i;j} = V_{i/j} - \Gamma_{ij}^l V_l. \quad (2.29)$$

La derivada covariante de $V_{i;j}$ con respecto de x^k es

$$\begin{aligned} V_{i;j;k} &= V_{i/j/k} - \Gamma_{ij/k}^l V_l - \Gamma_{ij}^l V_{l/k} - \Gamma_{ik}^m V_{m/j} + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l V_l - \Gamma_{jk}^m V_{i/m} + \\ &\quad + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l V_l, \end{aligned} \quad (2.30)$$

intercambiando los índices obtenemos $V_{i;k;j}$:

$$\begin{aligned} V_{i;k;j} &= V_{i/k/j} - \Gamma_{ik/j}^l V_l - \Gamma_{ik}^l V_{l/j} - \Gamma_{ij}^m V_{m/k} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l V_l - \Gamma_{kj}^m V_{i/m} + \\ &\quad + \Gamma_{kj}^m \Gamma_{im}^l V_l, \end{aligned} \quad (2.31)$$

restando (2.30) y (2.31) se encuentra:

$$\begin{aligned} V_{i;j;k} - V_{i;k;j} &= \left(\Gamma_{ik/j}^l - \Gamma_{ij/k}^l + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l \right) V_l. \\ V_{i;j;k} - V_{i;k;j} &= R_{ij;k}^l V_l. \end{aligned} \quad (2.32)$$

La derivada covariante total del vector tangente a la hipersuperficie, $y_{/i}^\mu$, dada por

$$y_{/i;j}^\mu = K_{ij} n^\mu - \bar{\Gamma}_{lm}^\mu y_{/i}^l y_{/j}^m, \quad (2.33)$$

donde las cantidades con una barra sobre ellas indican que están evaluadas en el espacio completo mientras las cantidades sin ella solo se refieren a la hiper-superficie.

Tomando la derivada covariante respecto de x^k

$$y_{;i;j;k}^\mu = K_{ij;k} n^\mu + K_{ij} n_{;k}^\mu - \bar{\Gamma}_{lm;k}^\mu y_{/i}^l y_{/j}^m - \bar{\Gamma}_{lm}^\mu y_{/i;k}^l y_{/j}^m - \bar{\Gamma}_{lm}^\mu y_{/i}^l y_{/j;k}^m, \quad (2.34)$$

intercambiando j y k , y tomando la diferencia, obtenemos:

$$\begin{aligned} y_{;i;j;k}^{\mu} - y_{;i;k;j}^{\mu} &= (K_{ij;k} - K_{ik;j})n^{\mu} - (K_{ij}K_{kl} - K_{ik}K_{jl})g^{lm}y_{;m}^{\mu} - \bar{\Gamma}_{lm;k}^{\mu}y_i^l y_{;j}^m + \\ &+ \bar{\Gamma}_{lm;j}^{\mu}y_i^l y_{;k}^m + \bar{\Gamma}_{lm}^{\mu}\bar{\Gamma}_{st}^l y_i^s y_{;k;j}^t y_{;j}^m - \bar{\Gamma}_{lm}^{\mu}\bar{\Gamma}_{st}^l y_i^s y_{;j}^t y_{;k}^m. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Además, notemos que:

$$(\quad)_{;k} = y_{;k}^l (\quad)_{;l}. \quad (2.36)$$

Luego :

$$y_{;m}^{\mu}g^{ml} [R_{lij k} - (K_{ik}K_{jl} - K_{ij}K_{kl})] - n^{\mu} (K_{ij;k} - K_{ik;j}) - \bar{R}_{lms}^{\mu}y_i^l y_{;j}^m y_{;k}^s = 0. \quad (2.37)$$

Proyectando sobre $g_{\mu\beta}y_{;n}^{\beta}$:

$$R_{nij k} - (K_{ik}K_{jn} - K_{ij}K_{kn}) - \bar{R}_{\beta lms}y_{;n}^{\beta}y_i^l y_{;j}^m y_{;k}^s = 0, \quad (2.38)$$

tambien sobre la dirección normal, n_{μ} :

$$K_{ij;k} - K_{ik;j} + \bar{R}_{\beta lms}n^{\beta}y_i^l y_{;j}^m y_{;k}^s = 0, \quad (2.39)$$

pero, $y_{;i}^l = q_i^l$. Entonces:

$$R_{ijkl} = \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}q^{\alpha}{}_i q^{\beta}{}_j q^{\mu}{}_k q^{\nu}{}_l + K_{ik}K_{jl} - K_{il}K_{jk}, \quad (2.40)$$

$$\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}n^{\alpha}q^{\beta}{}_i q^{\mu}{}_j q^{\nu}{}_k = K_{ik;j} - K_{ij;k}, \quad (2.41)$$

conocidas como las ecuaciones de Gauss-Codazzi generalizadas.

Notemos que las ecuaciones generalizadas muestran una relación entre la geometría intrínseca a la hiper-superficie y el espacio envolvente a través de la geometría extrínseca de la primera. Ambas ecuaciones nos permiten una forma de estudiar el universo en el contexto del mundo brana, lo que se explicará en capítulos posteriores.

Capítulo 3

Gravitación

3.1 Teoría de la Relatividad General de Einstein

La teoría general de la relatividad [R.G] de Einstein es la generalización de la Teoría Especial de la Relatividad. Para el desarrollo de esta, Einstein se basó en una idea conocida como “principio de equivalencia” que puede ser resumida de la siguiente manera: “Es imposible distinguir el campo gravitacional de un sistema de referencia no inercial”.

Debido a esta teoría fue posible estudiar el universo considerando más dimensiones, en este punto de la historia se propone un origen del universo, conocido como la teoría del big bang. Debemos recalcar que no fue sino hasta 1920 cuando los astrofísicos descubrieron que nuestra galaxia no era la única en el universo.

Uno de los primeros grandes logros de la R.G fue la predicción exacta de la precesión de mercurio, pues con la teoría de Newton, que involucra incluso la interacción gravitacional con el resto de los planetas, solo se obtiene la mitad del valor observado. Algunos creían que esta diferencia era ocasionada por un planeta cercano a mercurio (vulcano) el cual fue probada su inexistencia. La Teoría de Einstein predice también la existencia de objetos y fenómenos astronómicos como los agujeros negros, lentes gravitacionales, entre otros (Ver Ref.[3]).

En la Relatividad General [1, 3, 23, 28] a diferencia de la Relatividad Especial, el espacio no es plano, en general, y el tensor métrico de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, es reemplazado por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Este último es la representación matemática del campo gravitacional en un espacio-tiempo de 4 dimensiones, curvo y con un sistema coordenado x^μ .

Para obtener las ecuaciones de movimientos utilizamos un principio de acción como se explica a continuación.

3.1.1 Acción para la Relatividad General

Consideramos un lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M$, donde \mathcal{L}_G corresponde a la parte puramente geométrica (gravitacional) y \mathcal{L}_M corresponde a la materia.

Las ecuaciones de movimiento de esta teoría, conocidas como ecuaciones de Einstein, deben ser ecuaciones de campo de segundo orden, lo cual implica que el lagrangiano \mathcal{L}_G solo puede ser construido a partir del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y sus primeras derivadas, lo cual no es posible. Sin embargo, David Hilbert solucionó este problema al proponer que este lagrangiano sea construido también con las segundas derivadas del tensor métrico siempre que \mathcal{L}_G sea lineal en ellas. Debido a que el único invariante de curvatura que cumple con estos requerimientos en un espacio de cuatro dimensiones es el escalar de Ricci, R , \mathcal{L}_G toma la forma .

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}R, \quad (3.1)$$

se agrega $\sqrt{-g}$ en el lagrangiano para asegurar que las ecuaciones de campo sean covariantes.

A partir de lo anterior se encuentra la acción para la R.G.

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \sqrt{-g} (R + \mathcal{L}_M), \quad (3.2)$$

donde 2κ es una constante que permite comodidad en los cálculos posteriores.

Variando la acción y considerando el principio de mínima de acción, obtenemos las ecuaciones de Einstein.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

donde $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}$ es el tensor energía-momentum.

El miembro izquierdo de las ecuaciones (3.3) pueden ser reescritas como $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, donde $G_{\mu\nu}$ es conocido como tensor de Einstein. Cabe recalcar que tanto $G_{\mu\nu}$ como $T_{\mu\nu}$ son simétricos.

Tomando la divergencia de las ecuaciones de Einstein y considerando la identidad de Bianchi, obtenemos:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (3.4)$$

La primera solución exacta encontrada para el conjunto de ecuaciones (3.3) fue dada por Karl Schwarzschild en 1916, conocida como la solución de Schwarzschild que entre otras cosas describe un tipo de agujero negro [29].

En 1917 Einstein descubrió que las ecuaciones (3.3) predecían un universo en expansión, idea que no era aceptada por el propio Einstein, ni por la comunidad científica, pues hasta ese punto de la historia se creía que el universo era estático. Debido a esto Einstein agregó el término $\mathcal{L}_\Lambda = -2\sqrt{-g}\Lambda$ a la acción modificando las ecuaciones de movimiento de la forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

Λ es llamada constante cosmológica. Esta constante modifica el universo que predice la teoría a uno estático (sin expansión). Esta idea fue desechada en 1930, por Edwin Hubble, pues las observaciones astronómicas mostraban un universo en expansión. Einstein catalogó la adición de la constante cosmológica como el peor error de su carrera, sin embargo, la constante cosmológica fue retomada después al estudiar la teoría inflacionaria y en el contexto de la Teoría cuántica de Campos.

Es importante mencionar que la teoría debe cumplir con el principio de correspondencia, es decir, que en algún límite se debe recuperar la teoría de Newton.

Debido a esto es posible establecer la relación entre la constante κ y la constante de gravitación universal, G :

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (3.6)$$

donde c corresponde a la velocidad de la luz.

Por ultimo, notar que si no existen fuerzas externas actuando sobre un objeto ($L_M = 0$) el cuerpo se moverá describiendo una geodésica,¹ dada por:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (3.7)$$

donde τ es el tiempo propio² y $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ son conexiones, que bajo las condiciones de esta teoría, torsión nula y compatibilidad métrica³, son conocidos como símbolos de Christoffel de segunda especie, descritos por:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}). \quad (3.8)$$

3.1.2 Formalismo de Cartan

Para estudiar teorías de gravedad de dimensiones mayores o iguales a cuatro optaremos por el lenguaje de formas diferenciales. Particularmente un sistema coordenado ortonormal, conocido como vielbein [3, 24].

Sea M una variedad diferenciable y en cada punto P se define un espacio tangente $T_P(M)$ compuesto por todos los vectores tangentes a la variedad en P . Dado un sistema coordenado x^μ sobre M es posible definir una base coordenada para $T_P(M)$:

$$\partial_\mu = \partial_\mu(P), \quad (3.9)$$

¹Una geodésica es la trayectoria que describe un cuerpo en caída libre y generaliza la noción de línea recta en un espacio curvo.

²Tiempo medido por el cuerpo que describe la trayectoria.

³ $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$.

esta base coordenada no es ortonormal en general, pues:

$$\partial_\mu \cdot \partial_\nu = g_{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

Para obtener la base ortonormal es necesario aplicar un cambio de base:

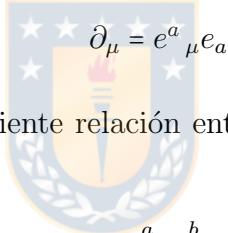
$$e_a = e^\mu{}_a \partial_\mu. \quad (3.11)$$

En este sistema ortonormal la métrica del espacio, en cada punto es:

$$e_a \cdot e_b = \eta_{ab}, \quad (3.12)$$

donde η_{ab} es la métrica de Minkowski.

Este cambio de base también posee inversa:



$$\partial_\mu = e^a{}_\mu e_a$$

Luego, se establece la siguiente relación entre la métrica en ambos sistemas coordenados:

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}, \quad (3.13)$$

Las componentes $e^a{}_b$ no son únicas pues existe una matriz $\Lambda^i{}_j$ talque

$$e^a{}_b = \Lambda^a{}_j e^j{}_b, \quad (3.14)$$

así también la métrica de Minkowski tampoco es única, pues:

$$\eta_{cd} = \Lambda^i{}_c \Lambda^j{}_d \eta_{ij}, \quad (3.15)$$

donde las matrices $e^a{}_\mu$ son conocidas como vielbein⁴ y contienen toda la información métrica del espacio cuando tratamos la teoría en un sistema coordenado ortonormal.

Notamos que la métrica es invariante bajo las rotaciones dadas por las matrices $\Lambda^i{}_c$ las cuales conforman el grupo de Lorentz. Por otra parte, la derivada exterior

⁴Del alemán ‘viel’ significa ‘mucho’ y ‘bein’ significa ‘piernas’. Para un número específico de dimensiones se reemplaza ‘viel’ por el número de dimensiones, por ejemplo, en cuatro dimensiones es ‘vierbein’ lo que quiere decir ‘tétrada’ en español.

de^a no se comporta como un tensor bajo el grupo de Lorentz por lo que es necesario redefinir la derivada exterior con el propósito que sea covariante. Definimos la derivada covariante exterior.

$$\mathcal{D}e^a = \Lambda^a{}_i \mathcal{D}e^i, \quad (3.16)$$

$$\mathcal{D}e^a = de^a + \omega^a{}_b e^b, \quad (3.17)$$

donde $\omega^a{}_b = \omega^a{}_{lb} e^l$ es la 1-forma conexión de spin que bajo la acción del grupo de Lorentz transforma como:

$$\omega^a{}_b = \Lambda^a{}_i \Lambda^j{}_b \omega^i{}_j - \Lambda^i{}_b d\Lambda^a{}_i. \quad (3.18)$$

El lema de Poincaré establece:

$$dde^a = 0, \quad (3.19)$$

sin embargo esto no es así para la derivada exterior covariante por lo que es posible definir la derivada exterior covariante más de una vez sobre una forma diferencial, por lo que es posible definir las siguientes cantidades:

$$\mathbf{T}^a = \mathcal{D}e^a, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{R}^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \omega^c{}_b, \quad (3.21)$$

conocidas como la primera y segunda ecuación de estructura de Cartan. \mathbf{T}^a es la 2-forma torsión y $\mathbf{R}^a{}_b$ es la 2-forma curvatura. Ambas se relacionan al tensor torsión y al tensor curvatura de Riemann a través de

$$\mathbf{T}^a = \frac{1}{2} T^a{}_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{R}^a{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} dx^c dx^d, \quad (3.23)$$

donde:

$$T^a{}_{bc} = \partial_i e^a{}_c - \partial_c e^a{}_i + \omega^a{}_{lb} e^l{}_c - \omega^a{}_{lc} e^l{}_b, \quad (3.24)$$

$$R^a{}_{bcd} = \partial_c \omega^a{}_{bd} - \partial_d \omega^a{}_{bc} + \omega^a{}_{lc} \omega^l{}_{bd} - \omega^a{}_{ld} \omega^l{}_{bc}, \quad (3.25)$$

en un lenguaje no ortonormal ambos tensores están dados por:

$$T^a{}_{bc} = \Gamma^a{}_{bc} - \Gamma^a{}_{cb} + C^a{}_{bc}, \quad (3.26)$$

$$R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma^a{}_{db} - \partial_d \Gamma^a{}_{cb} + \Gamma^a{}_{cl} \Gamma^l{}_{db} - \Gamma^a{}_{dl} \Gamma^l{}_{cb} - C^s{}_{cd} \Gamma^a{}_{bs}, \quad (3.27)$$

donde $\Gamma^i{}_{jk}$ son conexiones, $C^a{}_{bc} e_a = [e_b, e_c]$ y e_a corresponde a un elemento de una base. Donde se pueden obtener los primeros utilizando:

$$\Gamma^i{}_{jk} = e^i{}_{\ l} (\partial_j e^l{}_{\ k} + \omega^i{}_{\ lj} e^l{}_{\ k}), \quad (3.28)$$

cantidades que también cumplen la primera y segunda identidad de Bianchi.

$$\mathcal{D}T^a = \mathbf{R}^a{}_{\ b} e^b, \quad (3.29)$$

$$\mathcal{D}\mathbf{R}^a{}_{\ b} = 0. \quad (3.30)$$

La torsión y curvatura expuestas aquí no están sujetas a alguna condición particular de la geometría del espacio, por lo que las conexiones $\Gamma^i{}_{jk}$ no corresponden a los símbolos de Christoffel, en general. En el caso de que utilicemos una base coordenada, es decir, $C^a{}_{ab} = 0$ e impongamos la condición de compatibilidad métrica la ecuación (3.26) será nula y la ecuación (3.27) será el usual tensor de Riemann sin torsión que aparece en la Teoría de Einstein.

En este lenguaje y en el caso con torsión nula, la primera ecuación de estructura se puede separar de la siguiente forma

$$de^a + \omega^a{}_{\ b} e^b = 0, \quad (3.31)$$

$$\omega^4{}_{\ b} e^b = 0, \quad (3.32)$$

ecuaciones que corresponden a las ecuaciones de Gauss-Weingarten en formas diferenciales. Es posible mostrar que:

$$\omega^4{}_{\ b} = -K_{bl} e^l. \quad (3.33)$$

Así podemos reescribir las ecuaciones de Gauss-Codazzi:

$$\mathbf{R}^{xy} = \bar{\mathbf{R}}^{xy} + K^x{}_l K^y{}_m e^l e^m, \quad (3.34)$$

$$\bar{\mathbf{R}}^{4x} = -\mathcal{D}K^x{}_l e^l, \quad (3.35)$$

las cuales corresponden a las ecuaciones (2.40) y (2.41), respectivamente. Los índices x, y, l, m están restringidos a las direcciones de la hiper-superficie y el índice '4' corresponde a la dirección normal a ella.

3.1.3 Invariancia bajo el grupo de Poincaré de la R.G.

Estudiar la invariancia de la Relatividad General es más sencillo usando formas diferenciales. En el formalismo de Cartan la acción de Einstein-Hilbert toma la forma:

$$S_G = \int \varepsilon_{abcd} \mathbf{R}^{ab} e^c e^d. \quad (3.36)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen al variar la acción respecto del vielbein y de la conexión de spin:

$$\varepsilon_{abcd} \mathbf{R}^{ab} e^c = 0, \quad (3.37)$$

$$\varepsilon_{abcd} \mathbf{T}^c e^d = 0, \quad (3.38)$$

la primera de estas ecuaciones corresponde a las ecuaciones de Einstein y la segunda a la condición de torsión nula.

El grupo de Poincaré tiene por generadores a

$$T_A = (P_a, J_{ab}),$$

donde P_a corresponde a los generadores de traslaciones y J_{ab} a los generadores de rotaciones de Lorentz. Estos generadores cumplen con las siguientes relaciones de

conmutación:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{db}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb}, \quad (3.39)$$

$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_c - \eta_{ac}P_b, \quad (3.40)$$

$$[P_a, P_b] = 0. \quad (3.41)$$

La teoría tiene dos campos de gauge, e^a y ω^{ab} de forma que podemos escribir la 1-forma conexión de la siguiente manera:

$$A = \frac{1}{l}e^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{ab} J_{ab}, \quad (3.42)$$

se ha introducido el parámetro l , que tiene dimensiones de longitud, con el propósito que la 1-forma conexión sea adimensional. Para la 2-forma curvatura asociada a A :

$$F = \frac{1}{l}T^a + \frac{1}{2}R^{ab} J_{ab}. \quad (3.43)$$

Para encontrar como transforma la conexión bajo la acción de este grupo establecemos que el grupo sea exponentiado de la forma:

$$U = e^{-\lambda^A T_A}. \quad (3.44)$$

Definimos la derivada covariante asociada a la 1-forma conexión:

$$D = d + [A, \cdot]. \quad (3.45)$$

Considerando que A transforma como $A' = UAU^{-1} + UdU^{-1}$ y la forma en que el grupo fue exponentiado, encontramos:

$$A' = A + d\lambda + [A, \lambda], \quad (3.46)$$

donde vemos que A transforma como:

$$\delta A = D\lambda, \quad (3.47)$$

por otro lado, el parámetro de transformación λ puede ser escrito como:

$$\lambda = \frac{1}{l}\rho^a P_a + \frac{1}{2}\kappa^{ab} J_{ab}, \quad (3.48)$$

introduciendo en (3.47):

$$\delta A = \frac{1}{l} (\mathcal{D}\rho^a + e_c \kappa^{ca}) + \frac{1}{2} \mathcal{D}\kappa^{ab} J_{ab}, \quad (3.49)$$

es decir:

$$\delta e^a = \mathcal{D}\rho^a + e_c \kappa^{ca}, \quad (3.50)$$

$$\delta \omega^{ab} = \mathcal{D}\kappa^{ab}, \quad (3.51)$$

donde podemos distinguir dos tipos de transformaciones. Las transformaciones locales de Lorentz:

$$\delta e^a = e_c \kappa^{ca}, \quad (3.52)$$

$$\delta \omega^{ab} = \mathcal{D}\kappa^{ab}, \quad (3.53)$$

y las traslaciones locales de Poincaré:

$$\delta e^a = \mathcal{D}\rho^a, \quad (3.54)$$

$$\delta \omega^a{}_b = 0. \quad (3.55)$$

Al variar la acción para la relatividad general:

$$\delta S_G = \int d(\varepsilon_{abcd} \delta \omega^{ab} e^c e^d) + \varepsilon_{abcd} (2\delta \omega^{ab} \mathbf{T}^c e^d + 2\mathbf{R}^{ab} e^c \delta e^c), \quad (3.56)$$

utilizando (3.54) y (3.55):

$$\delta S_G = 2 \int \varepsilon_{abcd} \mathbf{R}^{ab} e^c \mathcal{D}\rho^d \quad (3.57)$$

$$= -2 \int d(\varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c \rho^d) + 2 \int \varepsilon_{abcd} \mathbf{R}^{ab} \mathbf{T}^c \rho^d, \quad (3.58)$$

la variación debe ser nula, lo cual ocurre cuando la torsión es nula, pero:

$$\begin{aligned} \delta T^a &= \mathcal{D}\delta e^a \\ &= \mathcal{D}\mathcal{D}\rho^a \\ &= \mathbf{R}^a{}_b \rho^b, \end{aligned} \quad (3.59)$$

es en general no nulo, luego la torsión no es un invariante de Poincaré y por lo tanto la acción de la relatividad general no es invariante bajo este grupo. Esta es una de las razones del porque en años posteriores a la publicación de la teoría de Einstein se ha intentado generalizar esta de diversas maneras, como las que se mencionarán en los siguientes capítulos.

Un caso totalmente distinto ocurre en $2+1$ dimensiones. Consideramos la acción de Einstein-Hilbert 3-dimensional

$$S_{EH} = \int \varepsilon_{abc} R^{ab} e^c, \quad (3.60)$$

variando la acción

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \int \varepsilon_{abc} \mathbf{R}^{ab} \mathcal{D} \rho^c \\ &= \int \varepsilon_{abc} (d(\mathbf{R}^{ab} \rho^c) + \mathcal{D} \mathbf{R}^{ab} \rho^c), \end{aligned} \quad (3.61)$$

el primer término es de borde, por lo que podemos anularlo, ya que no aporta a la dinámica, el segundo termino es nulo debido a la identidad de Bianchi. Finalmente

$$\delta S_{EH} = 0 \quad (3.62)$$

Por lo que esta acción es invariante bajo traslaciones de Poincaré y además, por construcción, es invariante bajo rotaciones de Lorentz. Esta invariancia bajo el grupo de Poincaré en dimensión 3 se reproduce en dimensión impar arbitraria, lo que es importante en el contexto de la gravedad Chern-Simons.

3.2 Generalización para la Relatividad General

A través de los años han nacido variadas teorías que generalizan la teoría de la Relatividad General de Einstein a un número de dimensiones mayor a cuatro con el fin de acercarse a un marco teórico que permita cuantizar y/o unificar la gravedad con el resto de las fuerzas fundamentales. Entre ellas están los mecanismos de Kaluza-Klein y Randall-Sundrum; y el teorema de Lovelock [7, 8, 9, 18, 19, 21, 23].

Tanto la compactificación Kaluza-Klein como el modelo Randall-Sundrum intentan responder ¿Por qué existe una diferencia tan grande entre las dos escalas fundamentales de energía? (electrodébil y la de Planck), conocido como el “problema de las jerarquías” [3, 20], o entre otras cosas relacionadas el porqué la gravedad es tan débil respecto de las otras fuerzas fundamentales en nuestro universo. Revisaremos brevemente los temas nombrados anteriormente.

3.2.1 Teorema de Lovelock.

El lagrangeano de Lovelock [7, 8, 9] corresponde a la generalización natural de la Relatividad General de Einstein para un espacio de dimensión arbitraria, D . Dado que la teoría es una generalización de la R.G., esta cumple con el principio de covarianza general y las ecuaciones de campo son de orden 2 en la métrica. El lagrangiano de esta teoría es de grado $\left[\frac{D}{2}\right]$ y corresponde a:

$$L = \sum_{p=0}^{\left[\frac{D}{2}\right]} \alpha_p L^{(p)},$$

con:

$$L^{(p)} = \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} \mathbf{R}^{a_1 a_2} \dots \mathbf{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_D},$$

donde $\mathbf{R}^{ab} = \omega^{ab} + \omega^a{}_c \omega^{cb}$ es la 2-forma curvatura, e^a es la 1-forma vielbein, ω^{ab} es la 1-forma conexión de espín y los coeficientes α_p son arbitrarios. Por construcción, este lagrangiano es invariante bajo rotaciones de Lorentz. La libertad de elección de los coeficientes α_p nos permite obtener distintos lagrangeanos, es decir, infinitas

descripciones para la gravedad. Se mostrara a continuación el mecanismo mediante el cual se obtienen las constantes α_i [10].

Para establecer los valores de α_p calculamos las ecuaciones del movimiento. Variando la acción respecto del vielbein:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \delta_{e^a} L, \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor} \varepsilon_{aa_1 \dots a_{D-1}} (D-2p) \alpha_p \mathbf{R}^{a_1 a_2} \dots \mathbf{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_{D-1}},\end{aligned}\quad (3.63)$$

también, respecto de la conexión de espín:

$$\varepsilon_{ab} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor} \varepsilon_{aba_1 \dots a_{D-2}} p (D-2p) \mathbf{R}^{a_1 a_2} \dots \mathbf{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} \mathbf{T}^{a_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \dots e^{a_{D-2}},\quad (3.64)$$

podemos reescribir las ecuaciones de movimiento de la siguiente forma:

$$\varepsilon_a = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor} \alpha_p (D-2p) \varepsilon_a^{(p)} = 0,\quad (3.65)$$

$$\varepsilon_{ab} = \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor} \alpha_p p (D-2p) \varepsilon_{ab}^{(p)} = 0,\quad (3.66)$$

donde:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a^{(p)} &= \varepsilon_{aa_1 \dots a_{D-1}} \mathbf{R}^{a_1 a_2} \dots \mathbf{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_{D-1}}, \\ \varepsilon_{ab}^{(p)} &= \varepsilon_{aba_1 \dots a_{D-2}} \mathbf{R}^{a_1 a_2} \dots \mathbf{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} \mathbf{T}^{a_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \dots e^{a_{D-2}},\end{aligned}$$

si ε_a y ε_{ab} estuvieran relacionadas de forma aritmética, significaría que las ecuaciones no serian independientes, es decir, el vielbein y la conexión de espín estarían relacionados, lo cual ocurre si algunas componentes de la torsión son nulas, lo que disminuye los grados de libertad disponibles.

Considerando las identidades de Bianchi y aplicando la derivada covariante exterior de (3.65):

$$\mathcal{D}\varepsilon_a^{(p)} = \varepsilon_{aa_1\dots a_{D-1}} (D-1-2p) \mathbf{R}^{a_1 a_2} \dots \mathbf{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} \mathbf{T}^{a_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \dots e^{a_{D-1}},$$

por otro lado, contraemos (3.66) con e^b

$$\begin{aligned} e^b \varepsilon_{ab}^{(p)} &= e^b \varepsilon_{aba_1\dots a_{D-2}} \mathbf{R}^{a_1 a_2} \dots \mathbf{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} \mathbf{T}^{a_{2p+1}} e^{a_{2p+2}} \dots e^{a_{D-2}}, \\ e^b \varepsilon_{ab}^{(p+1)} &= \varepsilon_{aa_1\dots a_{D-1}} \mathbf{R}^{a_1 a_2} \dots \mathbf{R}^{a_{2p} a_{2p+1}} \mathbf{T}^{a_{2p+2}} e^{a_{2p+2}} \dots e^{a_{D-1}}. \end{aligned}$$

Comparando con (3.67)

$$\mathcal{D}\varepsilon_a^{(p)} = (D-1-2p) e^b \varepsilon_{ab}^{(p+1)}. \quad (3.67)$$

Notemos que en dimensión impar tenemos que $\left[\frac{d}{2}\right] = \left[\frac{d-1}{2}\right]$, mientras en dimensión par el último término de cada suma se anula.

Reemplazando en (3.65) y (3.66) con $p \rightarrow p+1$:

$$\mathcal{D}\varepsilon_a = \sum_{p=1}^{\left[\frac{D+1}{2}\right]} \alpha_{p-1} (D-2p+2) (D-2p+1) e^b \varepsilon_{ab}^{(p)}, \quad (3.68)$$

$$e^b \varepsilon_{ab} = \sum_{p=1}^{\left[\frac{D-1}{2}\right]} \alpha_p p (D-2p) e^b \varepsilon_{ab}^{(p)}, \quad (3.69)$$

ambas ecuaciones deben ser nulas, por consistencia con las ecuaciones de movimiento.

A partir de estas ecuaciones es posible encontrar los valores de los α_p . Es posible escoger α_p de tal manera que las ecuaciones de movimientos sean independientes o al menos que tengan la mayor cantidad posible de términos independientes.

Dos casos particulares son las teorías Chern-Simons (dimensión impar) y teorías Born-Infeld (dimensión par).

3.2.2 Acción Chern-Simons

La acción Chern-Simons[6, 10, 30] corresponde al caso dimensión impar para la acción de Lovelock.

En dimensión impar, $D = 2n - 1$, el último término de $\mathcal{D}\varepsilon_a$ es nulo. Debido a esto, ambas ecuaciones tienen el mismo número de términos. Luego:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\varepsilon_a &= \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \alpha_{p-1} (D - 2p + 2) (D - 2p + 1) e^b \varepsilon_{ab}^{(p)}, \\ e^b \varepsilon_{ab} &= \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \alpha_p p (D - 2p) e^b \varepsilon_{ab}^{(p)},\end{aligned}$$

como ambas tienen el mismo número de términos, no se imponen más condiciones sobre la 2-forma curvatura \mathbf{R}^{ab} y la 2-forma torsión \mathbf{T}^a . Entonces las ecuaciones son proporcionales término a término, es decir:

$$\gamma \alpha_{p-1} (D - 2p + 2) (D - 2p + 1) = \alpha_p p (D - 2p). \quad (3.70)$$

Reemplazando $D = 2n - 1$

$$\alpha_p = 2 \frac{\gamma \alpha_{p-1} (2n - 2p + 1) (n - p)}{p (2n - 2p - 1)}, \quad (3.71)$$

para $p = 1$:

$$\alpha_1 = 2 \frac{\gamma \alpha_0 (2n - 1) (n - 1)}{(2n - 3)},$$

Para $p = 2$:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= 2 \frac{\gamma \alpha_1 (2n - 3) (n - 2)}{2 (2n - 5)}, \\ &= \gamma^2 \frac{2^2 (2n - 3) (2n - 1) (n - 2) (n - 1)}{2 (2n - 5) (2n - 3)} \alpha_0,\end{aligned}$$

para $p = 3$:

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 2 \frac{\gamma \alpha_2 (2n - 5) (n - 3)}{3 (2n - 7)}, \\ &= \gamma^3 \frac{2^3 (2n - 5) (2n - 3) (2n - 1) (n - 3) (n - 2) (n - 1)}{3! (2n - 7) (2n - 5) (2n - 3)} \alpha_0,\end{aligned}$$

repetiendo el proceso hasta el término p

$$\begin{aligned}
\alpha_p &= (2\gamma)^p \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots(2n-2p+1)(n-1)\dots(n-p)}{p!(2n-3)(2n-5)\dots(2n-2p+1)(2n-2p-1)} \alpha_0, \\
&= (2\gamma)^p \frac{(2n-1)}{(2n-2p-1)} \binom{n-1}{p} \alpha_0,
\end{aligned}$$

notamos que ahora los parámetros α_p solo dependen de dos constantes, γ y α_0 , Ambas se relacionan con las constantes fundamentales mediante las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{\kappa}{l^{D-1}D}, \\
\gamma &= -\text{sgn}(\Lambda) \frac{l^2}{2},
\end{aligned}$$

con:

$$\Lambda = \pm \frac{(D-2)(D-1)}{2l^2}, \quad (3.72)$$

$$\kappa = \frac{1}{2(D-2)!G\Omega_{D-2}}, \quad (3.73)$$

donde G es la constante de gravitación universal⁵.

Como consecuencia el lagrangeano toma la forma:

$$L = \kappa \sum_{p=1}^{n-1} c_p \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} \mathbf{R}^{a_1 a_2} \dots \mathbf{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_D}, \quad (3.74)$$

con

$$c_p = \frac{l^{2p-2n+2}}{(2n-2p-1)} \binom{n-1}{p}, \quad (3.75)$$

estos coeficientes aseguran que el lagrangeano obtenido es invariante bajo Boost-AdS

$$\begin{aligned}
\delta e^a &= \mathcal{D}\rho^a, \\
\delta \omega^{ab} &= \frac{1}{l^2} (e^a \rho^b - e^b \rho^a).
\end{aligned}$$

En la sección 3.3 se profundizara en este tipo de acciones estableciendo su relación con las de Yang-Mills como una posible descripción para la gravedad.

⁵También conocida como la constante de Newton. Su valor en el sistema internacional de unidades es $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg}$

3.2.3 Acción Born-Infeld.

Esta teoría corresponde a dimensiones pares.

En este caso ε_{ab} tiene un termino mas que ε_a por lo que debemos proceder de una forma diferente. La ecuación (3.64) puede ser reescrita como:

$$\varepsilon_{ab} = \mathcal{D}\tau_{ab}, \quad (3.76)$$

donde:

$$\tau_{ab} = \frac{\delta L}{\delta \mathbf{R}^{ab}} = \sum_{p=1}^{\frac{D}{2}} \alpha_p p \tau_{ab}^p, \quad (3.77)$$

con $\tau_{ab}^p = \varepsilon_{aba_3 \dots a_D} \mathbf{R}^{a_3 a_4} \dots \mathbf{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{2p+1} \dots e^{a_D}$.

Tomando una derivada covariante exterior de τ_{ab}^p y utilizando las identidades de Bianchi:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\tau_{ab}^p &= \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_D} \mathbf{R}^{a_3 a_4} \dots \mathbf{R}^{a_{2p-1} a_{2p}} \mathcal{D}(e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_D}) \\ &= (D - 2p) \varepsilon_{ab}^{(p)}, \end{aligned}$$

reemplazando en (3.77):

$$\mathcal{D}\tau_{ab} = \sum_{p=1}^{\left[\frac{D}{2}\right]} p \alpha_p (D - 2p) \varepsilon_{ab}^{(p)}. \quad (3.78)$$

Por otro lado, contraemos τ_{ab} con e^b :

$$\begin{aligned} e^b \tau_{ab} &= \sum_{p=1}^{\left[\frac{D}{2}\right]} p \alpha_p \varepsilon_{aa_1 \dots a_{D-1}} \mathbf{R}^{a_1 a_2} \dots \mathbf{R}^{a_{2p-3} a_{2p-2}} e^{a_{2p-1}} \dots e^{a_{D-2}} \\ &= \sum_{p=1}^{\left[\frac{D}{2}\right]} p \alpha_p \varepsilon_a^{(p-1)}. \end{aligned}$$

Aplicando la derivada exterior sobre $\varepsilon_a^{(p-1)} = e^b \tau_{ab}^{(p)}$

$$\mathcal{D}\varepsilon_a^{(p-1)} = \mathbf{T}^b \tau_{ab}^{(p)} - (D - 2p) e^b \varepsilon_{ab}^{(p)}.$$

Luego, para dimensión $D = 2n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\varepsilon_a &= \sum_{p=2}^{\left[\frac{D+1}{2}\right]} \left[(2n - 2p + 2) \alpha_{p-1} \mathbf{T}^b \tau_{ab}^{(p)} - (2n - 2p + 2) \alpha_{p-1} (2n - 2p) e^b \varepsilon_{ab}^{(p)} \right] \\ &= \mathbf{T}^b \sum_{p=1}^{n-1} 2(n - p + 1) \alpha_{p-1} \tau_{ab}^{(p)} - \sum_{p=1}^{n-1} 4(n - p + 1)(n - p) \alpha_{p-1} e^b \varepsilon_{ab}^{(p)}. \end{aligned}$$

Dado que $\varepsilon_{ab} = \mathcal{D}\tau_{ab}$, tenemos que es nula solo si $\tau_{ab} = 0$ o $\mathbf{T}^a = 0$. Esta última condición destruye la invariancia respecto de los boost *AdS*. Sin embargo, bastará con imponer la condición $\mathbf{T}^a \tau_{ab} = 0$. Entonces:

$$\mathcal{D}\varepsilon_a = - \sum_{p=1}^{n-1} 4(n-p+1)(n-p)\alpha_{p-1}e^b\varepsilon_{ab}^{(p)}, \quad (3.79)$$

ecuación que puede ser comparada con $e^b\varepsilon_{ab}$ y dado que queremos el número máximo de grados de libertad disponibles ambas series deben ser proporcionales, es decir:

$$\begin{aligned} \alpha_p p(n-p) &= 2\gamma(n-p+1)(n-p)\alpha_{p-1} \\ \alpha_p &= 2\gamma \frac{(n-p+1)\alpha_{p-1}}{p}, \end{aligned}$$

para $p = 1$:

$$\alpha_1 = 2\gamma n \alpha_0,$$

para $p = 2$:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 2\gamma \frac{(n-1)\alpha_1}{2} \\ &= (2\gamma)^2 \frac{n(n-1)}{2} \alpha_0, \end{aligned}$$

para $p = 3$:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 2\gamma \frac{(n-2)\alpha_2}{3} \\ &= (2\gamma)^3 \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \alpha_0, \end{aligned}$$

repetiendo este procedimiento encontramos:

$$\begin{aligned} \alpha_p &= (2\gamma)^p \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!} \alpha_0 \\ &= (2\gamma)^p \binom{n}{p} \alpha_0, \end{aligned} \quad (3.80)$$

donde los valores de α_0 y γ vienen dado por (3.72) y (3.73) con $D = 2n$.

El lagrangeano toma la forma:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{p=0}^n (2\gamma)^p \binom{n}{p} \alpha_0 L^{(p)} \\ &= \sum_{p=0}^n \text{sgn}(\Lambda)^p \frac{\kappa}{2n} l^{2p-2n+1} \binom{n}{p} L^{(p)}. \end{aligned}$$

El lagrangiano se puede reescribir como el Pfaffiano de la 2-forma $\bar{\mathbf{R}}^{ab} = \mathbf{R}^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b$. En efecto:

$$L = \frac{\kappa}{2n} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_{2n}} \left(\mathbf{R}^{a_1 a_2} + \frac{1}{l^2} e^{a_1} e^{a_2} \right) \dots \dots \dots \left(\mathbf{R}^{a_{2n-1} a_{2n}} + \frac{1}{l^2} e^{a_{2n-1}} e^{a_{2n}} \right), \quad (3.81)$$

que tambien puede ser escrito como una forma Born-Infeld [10]. En este caso el lagrangeano no es invariante bajo el grupo AdS completo, solo bajo transformaciones de Lorentz.

3.2.4 Compactificación de Kaluza-Klein

También conocida como compactificación de Kaluza-Klein [3, 18, 19]. En 1919 Theodor Kaluza intentó unificar la gravedad y el electromagnetismo proponiendo que nuestro universo es 5-dimensional [18], lo cual corresponde a las dimensiones usuales más una dimensión extra. El tensor métrico de esta teoría es descrito por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \phi^2 dy^2 + 2\phi^2 A_\mu dy dx^\mu + \phi^2 A_\mu A_\nu dx^\mu dx^\nu. \quad (3.82)$$

Se puede probar que, al reemplazar la métrica en las ecuaciones de Einstein, $g_{\mu\nu}$ corresponde a la métrica del subespacio cuadridimensional usual, ‘ y ’ a la coordenada en la dirección de la dimensión extra, el campo escalar ϕ esta relacionado a el tamaño de la dimensión extra ; y A_μ corresponde al potencial electromagnético.

La teoría hasta ahora presentaba dos problemas:

- Se elimina la dependencia de la coordenada extra de $g_{\mu\nu}$.

- La dimensión extra no ha sido detectada.

Fue en 1926 que Oscar Klein propuso una solución al suponer que la dimensión extra es circular y de periodo 2π [19], lo que gráficamente puede ser visto como una circunferencia en cada punto de el subespacio 4-dimensional.

Como consecuencia de la periodicidad de la dimensión extra, la métrica de Kaluza-Klein, $\tilde{g}_{MN}(x, \theta)$, puede ser descompuesta de la forma:

$$\tilde{g}_{MN}(x, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}_{MN}(x) \exp(in\theta), \quad (3.83)$$

para el modo $n = 0$ los campos corresponden al gravitón⁶, $g_{\mu\nu}$; fotón, A_μ , y el dilatón ϕ . Mientras, para los modos $n \neq 0$ cada uno tiene una carga eléctrica asociada, múltiplo de una carga eléctrica elemental que podemos identificar con el electrón lo que a su vez implica que el radio de la dimensión extra es muy pequeña, de orden 10^{-35} metros, lo cual explica porque aún no ha podido ser detectada.

Por ultimo, a partir de la métrica es posible construir el lagrangiano para esta teoría:

$$S_{KK} = \int \phi \sqrt{-g} \left(R - \frac{\phi^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{2}{\phi} \square \phi \right) d^4x dy, \quad (3.84)$$

donde $\square = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$.

En este caso la fuerza electromagnética es una consecuencia de la curvatura del espacio. Si la teoría de Newton es correcta, al aplicar el límite de baja energía a la teoría de Kaluza-Klein la fuerza electromagnética desaparece desde el punto de vista 5-dimensional.

Esta teoría si bien esta elegantemente descrita y es matemáticamente correcta, los fenómenos predichos por ella no están acorde con lo observado⁷. Debido a esto la teoría fue desechada, sin embargo, el mecanismo descrito en ella se sigue usando para tratar con teorías que contienen dimensiones extras.

⁶Partícula hipotética que media la interacción gravitacional.

⁷El campo escalar ϕ no ha sido detectado.

3.2.5 Modelo de Randall-Sundrum

Este modelo esta en el contexto del mundo-brana. En este caso la hiper-superficie se generaliza a dimensión arbitraria y se pasa a llamar “brana”, mientras que el espacio envolvente se le llama ‘Bulk’. En un bulk pueden existir una o más branas. En 1999 Lisa Randall y Raman Sundrum [3, 21] propusieron dos modelos de un universo tipo brana para intentar dar una explicación al problema de las jerarquías y responder el porqué la gravedad es tan débil en comparación con el resto de las fuerzas fundamentales.

La métrica del bulk, para branas se puede escribir como:

$$ds^2 = e^{2f(y)} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 dy^2, \quad (3.85)$$

esta ecuación corresponde a una métrica general para branas donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica de la brana, y corresponde a la coordenada en la dimensión extra, la cual es compacta y periódica, r_c es el radio de compactificación de dicha dimensión extra y $f(y)$ es llamado factor warp el cual en el caso Randall-Sundrum es $f(y) = -\frac{|y|}{2l}$.

Una brana se localiza donde y es constante, lo cual define la métrica inducida por el bulk sobre la brana. Al obtener las ecuaciones de movimiento el tensor de energía-momentum se puede descomponer de la forma

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^B + T_{\mu\nu}^b \delta(y - c), \quad (3.86)$$

donde $T_{\mu\nu}^B$ y $T_{\mu\nu}^b$ corresponden al tensor energía-momentum para la materia que existe exclusivamente en el bulk y en la brana, respectivamente; y $\delta(y - c)$ es una delta de Dirac evaluada en la localización de la brana.

Para finalizar con esta sección como ya mencionamos Randall y Sundrum propusieron dos modelos, el primero de ellos responde el problema de las jerarquías pero el universo de la teoría es inestable, mientras que en el segundo modelo el universo es estable, pero no se da solución al problema de la jerarquías, solo lo modifica cambiando las escalas de energía fundamental que se comparan.

3.3 Teoría Chern-Simons

La acción de Chern-Simons [6, 10, 30], como hemos visto, corresponde a un caso particular de la acción de Lovelock [7, 8, 9]. Este tipo de acción ha sido objeto de estudio debido a que puede ser un candidato para una teoría cuántica de la gravedad ya que tiene similitudes estructurales con las teorías de Yang-Mills, sin embargo, a partir de la formulación de Lovelock esto no queda del todo claro. Abordaremos estos temas a continuación.

3.3.1 Teoría de Yang-Mills

La teoría de Yang-Mills [31] es un formalismo invariante de gauge que describe las interacciones fuerte, débil y la electrodinámica. Estas teorías son construidas considerando un espacio-tiempo no dinámico, lo que contrasta con la formulación de la R.G..

Para crear un lagrangeano necesitamos redefinir algunas cantidades, debido a que se debe asegurar la invariancia bajo el grupo sobre el cual fue construida la teoría. En el caso de la derivada, $\partial_\mu \psi$, esta no es covariante y es necesario definir una nueva derivada. Definimos la derivada covariante:

$$\mathcal{D}_\mu \psi = (\partial_\mu + A_\mu) \psi, \quad (3.87)$$

donde ψ es un campo escalar y A_μ corresponde al campo de Gauge. Para incluir este campo en la acción que describe la teoría construimos el tensor $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (3.88)$$

Bajo una transformación de gauge A_μ y $F_{\mu\nu}$ transforman como:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = g A_\mu g^{-1} + g \partial_\mu g^{-1}, \quad (3.89)$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = g F_{\mu\nu} g^{-1}, \quad (3.90)$$

donde $g = g(x)$ corresponde a un elemento del grupo de gauge sobre el cual fue es construida la teoría.

Considerando que la métrica sobre la cual se definen los campos de gauge es fija y corresponde a la métrica de Minkowski es posible definir la acción que contiene dinámica de A_μ como:

$$S = -\frac{1}{2g^2} \int dx^4 \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}). \quad (3.91)$$

También se puede escribir la teoría con formas diferenciales en donde la acción se reescribe como:

$$S = -\frac{1}{2g^2} \int \text{Tr} (F^* F), \quad (3.92)$$

donde $*F$ es el dual de Hodge de F , $F = dA + AA$ corresponde a la 2-forma curvatura, A es una 1-forma que corresponde a la conexión de gauge que se relaciona al campo de gauge:

$$A = T_a A^a = T_a A_\mu^a dx^\mu, \quad (3.93)$$

donde T_a son los generadores del álgebra de Lie.

3.3.2 Formas y gravedad Chern-Simons.

Basado en la teoría de Yang-Mills es posible construir una teoría para la gravedad que sea invariante de gauge, pero esto es posible solo cuando la variedad sobre la cual se define la teoría es de dimensión impar.

Se define una $2k - 1$ -forma Chern-Simons, Q_{2k-1} , tal que:

$$dQ_{2k-1} = P^{(2k)}, \quad (3.94)$$

donde $P^{(2k)}$ es una $2k$ -forma.

La forma Chern-Simons cambia por una derivada total al aplicar una transformación de gauge, es decir:

$$\delta Q^{(2k-1)} = d(J^{(2k-2)}),$$

donde la $(2k-2)$ -forma es arbitraria. Esto nos es útil debido a que estos términos no aportan a la dinámica y nos permiten construir un lagrangiano cuasi-invariante de gauge.

En términos de una 1-forma conexión A y la 2-forma curvatura F las formas Chern-Simons satisfacen:

$$Q^{(2k-1)} = (k-1) \int dt \left\langle A (tdA + t^2 A^2)^k \right\rangle, \quad (3.95)$$

$$dQ^{(2k-1)} = Tr(F^k) = \langle F^k \rangle. \quad (3.96)$$

Para construir una teoría con formas Chern-Simons consideraremos al álgebra AdS , con base $\{P_a, J_{ab}\}$ cuyas relaciones de conmutación son:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{ca} J_{bd} + \eta_{db} J_{ca} - \eta_{da} J_{cb}, \quad (3.97)$$

$$[J_{ab}, P_c] = \eta_{cb} P_a - \eta_{ca} P_b, \quad (3.98)$$

$$[P_a, P_b] = J_{ab}. \quad (3.99)$$

Definimos la 1-forma conexión de gauge A y la 2-forma curvatura F asociada a A :

$$A = e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab}, \quad (3.100)$$

$$F = \frac{1}{2} \left(\mathbf{R}^{ab} - \frac{1}{l^2} e^a e^b \right) J_{ab} + \mathbf{T}^a P_a, \quad (3.101)$$

donde \mathbf{R}^{ab} y \mathbf{T}^a son la 2-forma curvatura de Lorentz y la 2-forma torsión, respectivamente. Por otro lado, necesitamos definir el tensor invariante para el álgebra AdS para la construcción del lagrangiano C-S. Las componentes no nulas de este tensor son dadas por:

$$\langle J_{a_1 a_2} \dots J_{a_{2n-1}, a_{2n}} P_{a_{2n+1}} \rangle = \frac{2^n}{n+1} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_{2n+1}}. \quad (3.102)$$

Así, es posible definir el lagrangeano:

$$L^{(2n+1)} = \kappa \varepsilon_{a_1 \dots a_{2n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{l^{2(n-k)+1} (2(n-k)+1)} \binom{n}{k} \mathbf{R}^{a_1 a_2} \dots \mathbf{R}^{a_{2k-1} a_{2k}} e^{a_{2k+1}} \dots e^{a_{2n+1}}, \quad (3.103)$$

que coincide con el obtenido en la ecuación (3.74) a partir de la acción de Lovelock.

Desde este punto de vista queda más claro el porque esta acción es utilizada para investigar una posible teoría cuántica para la gravedad. A diferencia de las teorías de Yang-Mills, en el caso de la gravedad Chern-Simons, la métrica del espacio-tiempo es dinámica, solo es posible escribir esta acción en dimensiones impares y además el lagrangeano se escribe como una función de la conexión de gauge y sus derivadas exteriores y no solo con la 2-forma curvatura.



3.4 Gravedad Einstein-Chern-Simons.

Si bien la teoría Chern-Simons esta bien definida matemáticamente surgen problemas importantes en ella pues esta definida en dimensión impar y la presencia del parámetro “ l ” hace imposible recuperar , en algún límite, la R.G. a partir de ella. Debido a ello es necesario reformular la teoría para que cumpla con el principio de correspondencia para lo que consideraremos un álgebra distinta conocida como \mathfrak{B}_5 .

3.4.1 Álgebras \mathfrak{B}_m .

Las álgebras \mathfrak{B}_m también conocidas como álgebras de Maxwell generalizadas[32, 33, 34] corresponden a una deformación⁸ de las álgebras de Maxwell⁹. Estas álgebras se obtienen a través del proceso de S-expansión [13, 14, 15, 16, 17], en el cual se utiliza un semigrupo $S_E^{(2n-1)} = \{\lambda_{2n}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ definido por el producto:

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta}, & \text{si } \alpha + \beta < 2n \\ \lambda_{2n}, & \text{si } \alpha + \beta \geq 2n \end{cases} . \quad (3.104)$$

Luego se obtiene una subálgebra resonante, al escoger una partición particular del semigrupo, y posteriormente se realiza una λ_{2n} -reducción¹⁰ para obtener los generadores de la nueva álgebra:

$$J_{ab,2k} = \lambda_{2k} \otimes \tilde{J}_{ab}, \quad (3.105)$$

$$P_{a,2k+1} = \lambda_{2k+1} \otimes \tilde{P}_a, \quad (3.106)$$

con $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ y donde $\tilde{J}_{ab}, \tilde{P}_a$ son los generadores del álgebra original $\mathfrak{so}(2n, 2)$.

⁸La deformación es el proceso mediante el cual se construye un álgebra de mayor número de generadores a partir de otra. El proceso opuesto es la contracción.

⁹Las cuales corresponden a una deformación de las álgebras de Poincaré

¹⁰También llamada 0_S -reducción

En este caso nos enfocaremos en el caso \mathfrak{B}_5 ($n = 2$) cuyos generadores son:

$$J_{ab} = J_{ab,0}, \quad (3.107)$$

$$P_a = P_{a,1}, \quad (3.108)$$

$$Z_{ab} = J_{ab,2}, \quad (3.109)$$

$$Z_a = P_{a,3}, \quad (3.110)$$

los cuales satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb}J_{ad} - \eta_{ca}J_{bd} + \eta_{db}J_{ca} - \eta_{da}J_{cb}, \\ [J_{ab}, P_c] &= \eta_{cb}P_a - \eta_{ca}P_b, \\ [P_a, P_b] &= Z_{ab}, \\ [J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{cb}Z_{ad} - \eta_{ca}Z_{bd} + \eta_{db}Z_{ca} - \eta_{da}Z_{cb}, \\ [J_{ab}, Z_c] &= \eta_{cb}Z_a - \eta_{ca}Z_b, \\ [Z_{ab}, P_c] &= \eta_{cb}Z_a - \eta_{ca}Z_b, \\ [P_a, Z_b] &= 0, \\ [Z_{ab}, P_c] &= 0, \\ [Z_{ab}, Z_{cd}] &= 0, \\ [Z_a, Z_b] &= 0. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Dejamos el procedimiento de S-expansión en el apéndice A.

3.4.2 Lagrangeano EChS en cinco dimensiones.

Con los generadores presentados en la subsección anterior se construye la 1-forma conexión, A , y a partir de ella calculamos la 2-forma curvatura, F :

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}e^a P_a + \frac{1}{2}\mathfrak{K}^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}h^a Z_a, \quad (3.112)$$

$$F = \frac{1}{2}\mathbf{R}^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}\mathbf{T}^a P_a + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}\mathfrak{K}^{ab} + \frac{1}{l^2}e^a e^b\right)Z_{ab} + \frac{1}{l}\left(\mathcal{D}h^a + \mathfrak{K}^a{}_b e^b\right)Z_a. \quad (3.113)$$

Las componentes de la identidad de Jacobi son:

$$\mathcal{D}\mathbf{R}^{ab} = ,0 \quad (3.114)$$

$$\mathcal{D}\mathbf{T}^a - \mathbf{R}^a{}_l e^l = 0, \quad (3.115)$$

$$\mathcal{D}\mathcal{D}h^a - \mathbf{R}^a{}_l h^l = 0, \quad (3.116)$$

$$\mathcal{D}\mathcal{D}\mathfrak{K}^{ab} + \mathfrak{K}^a{}_c \mathbf{R}^{cb} + \mathfrak{K}^b{}_c \mathbf{R}^{ac} = 0. \quad (3.117)$$

Además las componentes no nulas del tensor invariante son:

$$\langle J_{ab} J_{cd} P_e \rangle = \frac{4}{3} l^3 \alpha_1 \varepsilon_{abcde}, \quad (3.118)$$

$$\langle J_{ab} J_{cd} Z_e \rangle = \frac{4}{3} l^3 \alpha_3 \varepsilon_{abcde}, \quad (3.119)$$

$$\langle J_{ab} Z_{cd} P_e \rangle = \frac{4}{3} l^3 \alpha_3 \varepsilon_{abcde}, \quad (3.120)$$

donde α_i son constantes arbitrarias e independientes¹¹.

Para encontrar el lagrangeano 5-dimensional de la teoría Einstein-Chern-Simons [11, 12, 32, 33, 34, 35] se utiliza la formula de homotopía de Cartan extendida [36]:

$$L_{EChS}^{(5)} = \varepsilon_{abcde} \left[\alpha_1 l^2 \mathbf{R}^{ab} \mathbf{R}^{cd} e^e + \alpha_3 \left(\frac{2}{3} \mathbf{R}^{ab} e^c e^d e^e + 2l^2 k^{ab} \mathbf{R}^{cd} \mathbf{T}^e + l^2 \mathbf{R}^{ab} \mathbf{R}^{cd} h^e \right) \right], \quad (3.121)$$

donde l es un parámetro de longitud, h^a y k^{ab} son dos campos que corresponden a otros tipo de materia. Notemos que en el límite $l \rightarrow 0$ es posible recuperar el lagrangeano de Einstein-Hilbert.

3.4.3 Ecuaciones de movimiento en gravedad EChS

Añadiendo un lagrangeano de materia $L_M^{(5)} = L_M^{(5)}(e^a, \omega^{ab}, h^a, k^{ab})$ a la acción formada por $L_{EChS}^{(5)}$. Agregando un lagrangeano de materia L_M y variando el lagrangeano respecto de los campos e^a , h^a , ω^{ab} y k^{ab} obtienen las ecuaciones de movimiento:

¹¹Las constantes no son, necesariamente, las correspondientes al caso AdS

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\delta L_M}{\delta e^e} &= \varepsilon_{abcde} \left(2\alpha_3 \mathbf{R}^{ab} e^c e^d + \alpha_1 l^2 \mathbf{R}^{ab} \mathbf{R}^{cd} + \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha_3 \mathcal{D}k^{ab} \mathbf{R}^{cd} \right), \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$\kappa \frac{\delta L_M}{\delta h^e} = \alpha_3 l^2 \varepsilon_{abcde} \mathbf{R}^{ab} \mathbf{R}^{cd}, \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\delta L_M}{\delta \omega^{ab}} &= 2l^2 \varepsilon_{abcde} \left(\alpha_1 \mathbf{R}^{cd} \mathbf{T}^e + \alpha_3 \mathcal{D}k^{ab} \mathbf{T}^e + \frac{\alpha_3}{l^2} e^c e^d \mathbf{T}^e + \alpha_3 \mathbf{R}^{cd} \mathcal{D}h^e + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_3 \mathbf{R}^{cd} k^e{}_f e^f \right), \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$\kappa \frac{\delta L_M}{\delta k^{ab}} = 2\alpha_3 l^2 \varepsilon_{abcde} \mathbf{R}^{cd} \mathbf{T}^e, \quad (3.125)$$

donde $\frac{\delta L_M}{\delta e^e}$ esta relacionado al tensor energía-momentum para la materia común, $\frac{\delta L_M}{\delta h^e}$ relacionado al tensor energía-momentum para el campo h^e , $\frac{\delta L_M}{\delta \omega^{ab}}$ relacionado al tensor de espín y $\frac{\delta L_M}{\delta k^{ab}}$ relacionado al tensor de espín del campo k^{ab} .

Tomando el límite $l \rightarrow 0$:

$$2\alpha_3 \varepsilon_{abcde} \mathbf{R}^{ab} e^c e^d = \kappa \frac{\delta L_M}{\delta e^e}, \quad (3.126)$$

$$2\alpha_3 \varepsilon_{abcde} e^c e^d \mathbf{T}^e = \kappa \frac{\delta L_M}{\delta \omega^{ab}} = 0, \quad (3.127)$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta h^e} = \frac{\delta L_M}{\delta k^{ab}} = 0, \quad (3.128)$$

correspondientes a la dinámica de la $R.G.$

Si imponemos las condiciones $\mathbf{T}^a = 0$, $k^{ab} = 0$, $\frac{\delta L_M}{\delta \omega^{ab}} = 0$. Las ecuaciones (3.122) – (3.125) toman la forma:

$$\varepsilon_{abcde} \mathbf{R}^{ab} e^c e^d = 4\kappa_5 \left(\frac{\delta L_M}{\delta e^e} + \alpha \frac{\delta L_M}{\delta h^e} \right), \quad (3.129)$$

$$l^2 \varepsilon_{abcde} \mathbf{R}^{ab} \mathbf{R}^{cd} = 8\kappa_5 \frac{\delta L_M}{\delta h^e}, \quad (3.130)$$

$$\varepsilon_{abcde} \mathbf{R}^{cd} \mathcal{D}h^e = 0, \quad (3.131)$$

donde $\kappa_5 = \frac{\kappa}{8\alpha_3}$ y $\alpha = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}$. En este caso ω^{ab} es dependiente del vielbein.

3.5 Mundo Brana

Como hemos visto, las teorías para la gravedad tienen diferentes números de dimensiones, usualmente mayores a cuatro, como por ejemplo la gravedad Chern-Simons y la Einstein-Chern-Simons. Esto es un problema pues el universo perceptible solo tiene cuatro de ellas, por lo que es necesario tratar con la o las dimensiones extras. Una manera es tratar el universo cuadridimensional como una hiper-superficie (brana) embebida en un espacio de mayor dimensión (bulk), un ejemplo es el mecanismo descrito en [22], el cual se describirá en esta sección. Además es necesario establecer las condiciones de continuidad sobre la geometría del bulk y la brana.

En el contexto del mundo brana se utilizara una barra sobre un objeto matematico para denotar que esta evaluado en el bulk.

3.5.1 Formalismo de Israel.

La presencia de una hiper-superficie, Σ , en un espacio vectorial M divide al espacio en 2 regiones, a la que llamaremos M^+ y M^- , que tienen por borde común a Σ .

Una pregunta natural es ¿Que condiciones debe cumplir el tensor métrico y sus derivadas para que la métrica sea continua sobre la hiper-superficie?. Para contestar esta pregunta Darmois e Israel obtuvieron estas condiciones de juntura, lo que hoy se conoce como formalismo de Israel [3, 37].

Se define el elemento de linea en cada región de M :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{\pm} dx_{\pm}^{\mu} dx_{\pm}^{\nu}. \quad (3.132)$$

El elemento de linea de la hiper-superficie Σ :

$$d\sigma^2 = q_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.133)$$

También definimos un vector normal y unitario a Σ , \vec{n} , que apunta desde M^- a

M^+ tal que:

$$g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = \epsilon = \begin{cases} -1, & \text{si } \Sigma \text{ es tipo espacio,} \\ +1, & \text{si } \Sigma \text{ es tipo tiempo.} \end{cases} \quad (3.134)$$

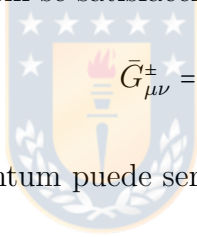
Tanto M^+ y M^- inducen una métrica sobre Σ , que corresponde a la proyección de las métrica $g_{\mu\nu}^\pm$ sobre la superficie:

$$q_{ij}^\pm = g_{ij}^\pm - \epsilon n_i^\pm n_j^\pm, \quad (3.135)$$

pero esta métrica sobre la superficie es única por lo que debe ser posible encontrar una transformación de coordenadas, tal que, $q_{ij}^+ = q_{ij}^-$.

Además se exige que:

- Las ecuaciones de Einstein se satisfacen en ambas partes de M por separado



$$\bar{G}_{\mu\nu}^\pm = k\bar{T}_{\mu\nu}^\pm.$$

- El tensor energía-momentum puede ser discontinuo sobre Σ , pero continuo en cualquier otro lugar.
- Las primeras derivadas pueden ser discontinuas, por lo que las segundas derivadas puede ser deltas de Dirac, $\delta(x) = \theta'(x)$

donde

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (3.136)$$

es la distribución de Heavyside.

Utilizando esta distribución, imponemos una separación para el tensor energía-momentum:

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}\delta(y) + T_{\mu\nu}^+\theta(y) + T_{\mu\nu}^-\theta(-y), \quad (3.137)$$

donde y es la coordenada normal a la brana.

El tensor $S_{\mu\nu}$ corresponde al tensor energía-momentum en Σ y se obtiene a partir de la aproximación cascarón delgado:

$$S_{\mu\nu} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} T_{\mu\nu}(y) dy.$$

Por otra parte, reemplazamos las ecuaciones de Gauss-Codazzi en las ecuaciones de Einstein en cada parte de M y luego proyectamos sobre las distintas direcciones:

$$\bar{E}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu |^\pm = \epsilon R + \frac{1}{2} (K^2 - K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta})^\pm, \quad (3.138)$$

$$\bar{E}_{\mu\nu} q_\alpha^\mu n^\nu |^\pm = -(\bar{\nabla}_\mu K^\mu{}_\alpha - \bar{\nabla} K)^\pm, \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\mu\nu} q_\alpha^\mu q_\beta^\nu |^\pm &= E_{\alpha\beta} + \epsilon n^\mu \bar{\nabla}_\mu (K_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta} K)^\pm - 3\epsilon K_{\alpha\beta} K |^\pm + \\ &+ 2 K^\mu{}_\alpha K_{\mu\beta} |^\pm + \frac{1}{2} \epsilon q_{\alpha\beta} (K^2 + K^{\mu\nu} K_{\mu\nu}) |^\pm. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Tomando la aproximación cascarón delgado de (3.140) obtenemos:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \bar{E}_{ij} dy = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \epsilon n^\mu \bar{\nabla}_\mu (K_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta} K)^\pm dy. \quad (3.141)$$

El resto de los términos de la ec.(3.140), los cuadráticos en la curvatura extrínseca y la curvatura de la brana, son considerados muy pequeños. Así obtenemos la ecuación de Lanczos, que para el caso de una hiper-superficie tipo espacio de 4 dimensiones embebida en un espacio de 5 dimensiones es:

$$K_{\mu\nu}^+ - K_{\mu\nu}^- = -k_5 \left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} S \right),$$

donde k_5 es la constante $5D$ de la ecuación de Einstein.

Esta ultima ecuación muestra la relación entre las dos partes del espacio utilizando ambos embebimientos. Finalmente las dos condiciones son:

$$q_{\mu\nu}^+ - q_{\mu\nu}^- = 0, \quad (3.142)$$

$$K_{\mu\nu}^+ - K_{\mu\nu}^- = -k_5 \left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} S \right), \quad (3.143)$$

condiciones que son validas solo en el contexto de la R.G. Para otras teorías se deben buscar las condiciones de juntura apropiadas como se mostrará en las siguientes secciones.

En Ref. [38, 39] las condiciones de juntura pueden ser estudiadas de forma equivalente desde el punto de vista de las distribuciones.

3.5.2 Ecuaciones de Einstein en 3-Brana.

En [22] se propone un mecanismo para encontrar las ecuaciones efectivas de la gravedad para una brana usando la ecuaciones de Einstein en cinco dimensiones. En primera instancia se obtienen las ecuaciones sin imponer restricciones para el bulk.

Consideremos un espacio-tiempo 5-dimensional con métrica $g_{\mu\nu}$ y una brana 4-dimensional, tipo tiempo, embebida en él con métrica inducida q_{ab} y un vector normal n^μ los cuales se relacionan a través de ecuación (3.135).

Inspirados en el teorema Egregium de Gauss [27] es posible establecer la relación entre la geometría de la brana y el bulk. Contraemos (2.40) con la métrica del bulk para encontrar la relación entre los tensores y escalares de Ricci.

$$R_{\beta\nu} = \bar{R}_{jl}q_\beta^j q_\nu^l - \bar{R}_{jkl}^i q_\beta^j q_\nu^l n^k n_i + K K_{\beta\nu} - K_\nu^\alpha K_{\beta\alpha}, \quad (3.144)$$

$$R = \bar{R} - 2\bar{R}_{jl}n^j n^l + K^2 - K^{jl}K_{jl}. \quad (3.145)$$

Con el propósito de establecer una relación con los campos de materia se consideran también las ecuaciones de Einstein 5-dimensionales:

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\bar{R} = k_5\bar{T}_{\mu\nu}, \quad (3.146)$$

donde $\bar{T}_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momentum en 5 dimensiones y k_5 es una constante.

Reemplazando (3.144) y (3.145) en (3.146) tenemos:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \kappa_5^2 T_{lm}q_\mu^l q_\nu^m + \bar{R}_{lm}n^l n^m g_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K_\nu^\alpha K_{\mu\alpha} + \\ &\quad - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(K^2 - K^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta}) - \bar{R}_{jkl}^i n^k n_i q_\mu^j q_\nu^l. \end{aligned} \quad (3.147)$$

El tensor de Riemann se puede descomponer

$$\bar{R}_{ijkl} = \bar{C}_{ijkl} + \frac{2}{3}(g_{i[k}\bar{R}_{l]j} - g_{j[k}\bar{R}_{l]i}) - \frac{1}{6}\bar{R}g_{k[i}g_{j]l}, \quad (3.148)$$

donde $\bar{C}_{\mu\nu\alpha\beta}$ corresponde a la parte sin traza y es conocido como el tensor de Weyl

A partir de las ecuaciones (3.146), (3.148) se encuentra:

$$G_{\mu\nu} = k_5 \bar{T}_{lm} q_\mu^l q_\nu^m - \frac{1}{3} \left(k_5 \bar{T}_{lm} - \frac{k_5}{6} \bar{T} g_{lm} \right) q_\mu^l q_\nu^m + \frac{2}{3} \left(\bar{T}_{lm} - \frac{1}{3} g_{lm} \bar{T} \right) n^l n^m + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) + K K_{\mu\nu} - K_\nu^\alpha K_{\mu\alpha} - E_{\mu\nu}, \quad (3.149)$$

donde $E_{\mu\nu} = \bar{C}_{jlm}^i n_i n^k q_\nu^j q_\mu^m$ es la parte eléctrica del tensor de Weyl.

Las ecuaciones (3.149) son las ecuaciones efectivas para la gravedad en la brana sin considerar mas restricciones.

Definimos la coordenada χ en la dirección normal a la brana, tal que $d\chi = n_\mu dx^\mu$ donde la brana esta ubicada en $\chi = 0$. También confinamos todos los campos, salvo la gravedad, a la brana por lo que el tensor energía-momentum toma la forma.

$$\bar{T}_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} \delta(\chi), \quad (3.150)$$

con:

$$S_{\mu\nu} = -\lambda q_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}, \quad (3.151)$$

donde Λ es la constante cosmológica en 5 dimensiones, $\tau_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momentum en la brana y λ corresponde a la tensión de esta última. Estas condiciones tienen como consecuencia que la ecuación (2.41) tome la forma $D_\nu \tau_{\mu\alpha} = 0$, en otras palabras, se cumple la conservación del tensor energía-momentum en la brana. Esta ultima propiedad se pierde, en general, si se permite otro tipo de materia que sea capaz de escapar de la brana [40].

Por otra parte, se aplican restricciones a la simetría del espacio. Se aplica la simetría del grupo Z_2 junto a la condiciones de juntura de Israel [37]. Se encuentra que la curvatura extrínseca esta relacionada a los campos confinados de la brana de la siguiente manera:

$$K_{\mu\nu}^+ = -K_{\mu\nu}^- = -\frac{1}{2} k_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} T \right).$$

Finalmente se encuentran las ecuaciones efectivas para la gravedad en la brana con las restricciones impuestas anteriormente:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{k_5}{2}\Lambda_4 g_{\mu\nu} + k_5^2 \pi_{\mu\nu} + 8\pi G_N \tau_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}, \quad (3.152)$$

donde se ha definido:

$$\Lambda_4 = \Lambda + \frac{\lambda^2}{6} k_5, \quad (3.153)$$

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\tau_\mu^\alpha \tau_{\nu\alpha} + \frac{1}{12}\tau\tau_{\mu\nu} + \frac{1}{8}\tau_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} - \frac{1}{24}\tau q_{\mu\nu}, \quad (3.154)$$

$$G_N = \frac{k_5^2 \lambda}{48\pi}, \quad (3.155)$$

donde (3.153) es la constante cosmológica 4-dimensional, (3.154) es cuadrático en la materia de la brana y (3.155) corresponde a la constante de Newton. $E_{\mu\nu}$ corresponde a la parte del campo gravitacional que escapa de la brana. El segundo y cuarto termino de (3.152) son despreciables en comparación al resto en el límite de baja energía ($k_5 \rightarrow 0$ manteniendo G_N finito) así recuperamos la relatividad general. La identidad contraída de Bianchi muestra que la parte eléctrica del tensor de Weyl también esta sujeta a la condición:

$$D^\mu E_{\mu\nu} = \frac{k_5^2}{4} \left[\tau^{\alpha\beta} (D_\nu \tau_{\alpha\beta} - D_\beta \tau_{\nu\alpha}) + \frac{1}{3} (\tau_{\mu\nu} - q_{\mu\nu} \tau) D^\mu \tau \right]. \quad (3.156)$$

El tensor $E_{\mu\nu}$ puede separarse en una parte transversal, $E_{\mu\nu}^{TT}$, y otra longitudinal $E_{\mu\nu}^L$, esta ultima es la que estará sujeta a la condición (3.156), mientras que $E_{\mu\nu}^{TT}$ corresponde a la gravedad que escapa de la brana (ondas gravitacionales en 5 dimensiones) y que además esta afectada por el movimiento de $\tau_{\mu\nu}$.

En un espacio *AdS* el tensor de Weyl es nulo por lo que es posible encontrar una interesante consecuencia de (3.156) para un fluido perfecto. El tensor energía-momentum para un fluido perfecto en la brana es dado por:

$$\tau^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + P h^{\mu\nu}, \quad (3.157)$$

de donde se obtienen las siguientes relaciones:

$$U^\mu D_\mu \rho + (\rho P) D_\mu U^\mu = 0, \quad (3.158)$$

$$(\rho + P) U^\nu D_\nu U^\mu + h^{\mu\nu} D_\nu P = 0. \quad (3.159)$$

Mientras, $\pi_{\mu\nu}$ toma la forma:

$$\pi_{\mu\nu} = \frac{1}{12} [\rho^2 U^\mu U^\nu + \rho(\rho + 2P) h^{\mu\nu}], \quad (3.160)$$

donde U^μ es la cuadrivelocidad. Reemplazando $\tau_{\mu\nu}$ y $\pi_{\mu\nu}$ en (3.156) se encuentra:

$$D_\mu \pi^{\mu\nu} = \frac{1}{6} (\rho + P) h^{\mu\nu} D_\nu \rho = 0, \quad (3.161)$$

es decir, el fluido perfecto no-homogéneo esta prohibido en un espacio AdS.

3.5.3 Condiciones de Juntura: Gravedad de Lovelock

La condición de juntura encontrada por Israel solo es valida para la R.G, por ello es necesario establecer las condiciones de juntura cuando estudiamos mundo-brana en otra teoria, como la de Lovelock.

A partir del principio variacional, para una acción $S = S(g_{ab}, \partial_c g_{ab}, \partial_c \partial_d g_{ab})$, tenemos:

$$\begin{aligned} \delta S = \int \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\delta g^{ab}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_c g^{ab})} + \partial_d \partial_c \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_d \partial_c g^{ab})} \right) \right] \delta g^{ab} + \partial_c \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_c g^{ab})} \delta g^{ab} \right. \right. \\ \left. \left. - \partial_d \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_d \partial_c g^{ab})} \right) \delta g^{ab} + \partial_d \delta g^{ab} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_c \partial_d g^{ab})} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.162)$$

El problema surge debido al termino proporcional a $\partial_d \delta g^{ab}$ en el borde, que no puede ser anulado fijando la métrica inducida en la hipersuperficie. Debido a esto es necesario agregar un termino al lagrangiano que anule la contribución del termino proporcional a $\partial_d \delta g^{ab}$ en el borde. Para el caso R.G. dicho término es de la forma:

$$\int \sqrt{|q|} K d^{d-1} x, \quad (3.163)$$

conocido como término de York o término de Gibbons-Hawking [41].

En gravedad de Lovelock este termino no es suficiente pues aparecen términos de orden 2 y mayor en la curvatura. El equivalente a este termino para la acción de Lovelock fue sugerido por R.C.Myers [42] y generalizadas por Willinson y Gravanis [43, 44]. El termino correspondiente para esta teoria de la gravedad corresponde a una forma de transgresión¹² generalizada a dimensión arbitraria, de la forma :

$$\mathcal{L}_\Sigma = \sum_p p \beta_p \int_0^1 dt \varepsilon_{A_1 \dots A_{2p} A_{2p+1} \dots A_d} \bar{\Theta}^{A_1 A_2} \bar{\mathbf{R}}_{(t)}^{A_3 A_4} \dots \bar{\mathbf{R}}_{(t)}^{A_{2p-1} A_{2p}} \bar{e}^{A_{2p+1}} \dots \bar{e}^{A_d}, \quad (3.164)$$

donde β_n son constantes arbitrarias, $\bar{\mathbf{R}}_{(t)}^{AB} = d\bar{\omega}_{(t)}^{AB} + \bar{\omega}^A_{(t)L} \bar{\omega}_{(t)}^{LB}$ es una 2-forma curvatura, $\bar{\omega}_{(t)}^{AB} = \omega^{AB} + t\bar{\Theta}^{AB}$ es una 1-forma de espín que interpola entre la conexión de espín del bulk y la brana; y $\bar{\Theta}^{AB} = \bar{\omega}^{AB} - \omega^{AB}$.

Para obtener el termino de borde correspondiente AdS-CS, las constantes β_p toman la forma:

$$\beta_p = \frac{(d-2p)p! \left(\frac{d-1}{2} - p\right)!}{l^{2p-d+1} \left(\frac{d-1}{2}\right)!}. \quad (3.165)$$

Como vimos anteriormente la hipersuperficie, Σ , divide al espacio, M , en dos partes, M^+ y M^- . Luego la acción total sera de la forma:

$$S_{total} = \int_{M^+} L_+ + \int_{M^-} L_- + \int_\Sigma (L_{+\Sigma} - L_{-\Sigma}), \quad (3.166)$$

donde L_\pm corresponde al lagrangiano del bulk en cada parte del espacio y $L_{\pm\Sigma}$ es el lagrangiano de borde obtenido dado por (3.164). La Relatividad General es recuperada por S.Mukohyama [45]:

$$S_{total} = \int_{M^+} \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) dx^d + \int_{M^-} \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) dx^d + \int_\Sigma (K_+ - K_-) dx^{d-1}, \quad (3.167)$$

variando la acciones se obtiene obtienen las ecuaciones de Einstein en cada parte del espacio, a partir de los dos primeros términos, y la condición de Juntura de Israel, a partir de del termino de Gibbons-Hawking.

¹²Ver apéndice E

Capítulo 4

3-Brana en gravedad Einstein-Chern-Simons.

Como hemos mencionado antes las teorías Chern-Simons solo existen en dimensiones impares. en el particular caso 5-dimensional y debido a que nuestro universo observable solo tiene cuatro debemos encontrar una forma de lidiar con la dimensión extra. Debido a que las teorías CS y EChS son construidas en espacios de dimensión impar la brana será de dimensión par ,donde las formas Chern-Simons no están bien definidas.

A continuación se obtendrá el lagrangeano y las ecuaciones de movimiento para una brana 4-dimensional con métrica inducida q_{ab} y con un vector normal asociado n^μ , que esta denotada por el índice 4. Además la brana, Σ esta embebida en un bulk, M , de 5-dimensiones con métrica $g_{\mu\nu}$ en el contexto de la gravedad Einstein-Chern-Simons. Para encontrar las ecuaciones de la brana utilizaremos el mecanismo propuesto por Shiromizu, Maeda y Sasaki en Ref.[22], pero en el lenguaje de formas diferenciales.

4.1 Condiciones de Juntura

El lagrangiano del cual se obtienen las condiciones de juntura para el caso de Lovelock 5-dimensional es dado por (3.164):

$$L_\Sigma = \int_\Sigma \int_0^1 dt \varepsilon_{ABCDE} \bar{\Theta}^{AB} \{ \beta_1 \bar{\mathbf{R}}_t^{CD} + 2\beta_2 e^C e^D \} e^E, \quad (4.1)$$

donde $\bar{\mathbf{R}}_{(t)}^{AB} = d\bar{\omega}_{(t)}^{AB} + \bar{\omega}_{(t)}^A{}_{(t)L} \bar{\omega}_{(t)}^{LB}$ es una 2-forma curvatura, $\bar{\omega}_{(t)}^{AB} = \omega^{AB} + t\bar{\Theta}^{AB}$ es una 1-forma de espín que interpola entre la conexión de espín del bulk y la brana; y $\bar{\Theta}^{AB} = \bar{\omega}^{AB} - \omega^{AB}$,

$$L_\Sigma = \int_\Sigma \varepsilon_{ABCDE} \bar{\Theta}^{AB} \left\{ \beta_1 \mathbf{R}^{CD} + \beta_1 D\bar{\Theta}^{CD} + \frac{1}{3} \beta_1 \bar{\Theta}^C{}_L \bar{\Theta}^{LD} + 2\beta_2 e^C e^D \right\} e^E. \quad (4.2)$$

Aplicando el procedimiento de S-expansión dual[14] y 0_s -reducción para el álgebra las transformaciones duales, cuando $k^{AB} = 0$ y $\bar{T}^A = 0$, son

$$\bar{e}_A \rightarrow \lambda_1 \bar{e}_A + \lambda_3 \bar{h}_A, \quad (4.3)$$

$$\bar{\omega}_{ABC} \rightarrow \lambda_0 \bar{\omega}_{ABC}, \quad (4.4)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{ABC} \rightarrow \lambda_0 \bar{\mathbf{R}}_{ABC} + \frac{\lambda_2}{l^2} \varepsilon_{ABCDE} \bar{e}^D \bar{e}^E, \quad (4.5)$$

donde λ_i son constantes arbitrarias obtenidas en el proceso de S-expansión. Consideraremos el campo \bar{h}^A como un campo material, por lo tanto:

$$\bar{h}^4 = 0,$$

$$\bar{h}^a = h^a.$$

Luego, el lagrangiano expandido es de la forma:

$$L_\Sigma = \int_\Sigma \varepsilon_{ABCDE} \bar{\Theta}^{AB} \left\{ \beta_1 \lambda_1 \left(\mathbf{R}^{CD} + D\bar{\Theta}^{CD} + \frac{1}{3} \bar{\Theta}^C{}_L \bar{\Theta}^{LD} \right) \bar{e}^E + \lambda_3 \left(\beta_1 \left(\mathbf{R}^{CD} + D\bar{\Theta}^{CD} + \frac{1}{3} \bar{\Theta}^C{}_L \bar{\Theta}^{LD} \right) \bar{h}^E + \left(\frac{1}{l^2} \beta_1 + 2\beta_2 \right) \bar{e}^C \bar{e}^D \bar{e}^E \right) \right\}, \quad (4.6)$$

el cálculo explícito esta en Apéndice B.

Expresando el lagrangeano solo con con los índices en la brana y considerando que:

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}^{ab} &= 0, \\ \bar{\Theta}^{4a} &= \bar{\omega}^{4a}.\end{aligned}$$

El lagrangiano toma la forma:

$$\begin{aligned}L_{\Sigma} &= 2 \int_{\Sigma} \varepsilon_{abcd} \bar{\omega}^{4a} \left\{ \beta_1 \lambda_1 \left(\mathbf{R}^{bc} + \frac{1}{3} \bar{\omega}^{b4} \bar{\omega}^{4c} \right) \bar{e}^d + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_3 \left(\beta_1 \left(\mathbf{R}^{bc} + \frac{1}{3} \bar{\omega}^{b4} \bar{\omega}^{4c} \right) h^d + \left(\frac{1}{l^2} \beta_1 + 2\beta_2 \right) e^b e^c e^d \right) \right\}.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Para el caso específico AdS-CS, las constantes son:

$$\beta_1 = \frac{3}{2} l^2, \quad (4.8)$$

$$\beta_2 = 1. \quad (4.9)$$

Al tomar el límite $l \rightarrow 0$:

$$\lim_{l \rightarrow 0} L_{\Sigma} = 7\lambda_3 \int_{\Sigma} \varepsilon_{abcd} \bar{\omega}^{4a} e^b e^c e^d. \quad (4.10)$$

En el caso sin torsión $\bar{\omega}^{4a} = -K^a{}_{\iota} e^{\iota}$ por lo que el lagrangiano, en este límite, toma la forma:

$$\lim_{l \rightarrow 0} L_{\Sigma} = -21\lambda_3 \int_{\Sigma} \sqrt{-g} K d^4x, \quad (4.11)$$

término conocido como término de Gibbons-Hawking¹ y al variar este se obtienen las condiciones de juntura de Darmois-Israel.

4.1.1 Juntura Einstein-Chern-Simons

La brana divide el espacio M en dos, M^+ y M^- , cada parte con métrica $g_{\mu\nu}^+$ y $g_{\mu\nu}^-$, respectivamente. Cada parte induce una métrica q_{ab} sobre un lado de la brana.

¹En el contexto hamiltoniano es conocido como termino de York.

La condición de juntura viene dada por la variación de una acción de la forma:

$$S_\Sigma = \int (L_{+\Sigma} - L_{-\Sigma} - \kappa L_{m\Sigma}). \quad (4.12)$$

Las ecuaciones de movimiento para e^a , h^a y ω^{ab} son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \kappa T_d &= 2\varepsilon_{abcd} \left\{ \beta_1 \lambda_1 \left([\bar{\omega}^{4a}] \mathbf{R}^{bc} + \frac{1}{3} [\bar{\omega}^{4a} \bar{\omega}^{b4} \bar{\omega}^{4c}] \right) + \right. \\ &\quad \left. 3\lambda_3 \left(\frac{1}{l^2} \beta_1 + 2\beta_2 \right) [\bar{\omega}^{4a}] e^b e^c \right\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\kappa T_d^{(h)} = 2\lambda_3 \beta_1 \varepsilon_{abcd} \left([\bar{\omega}^{4a}] \mathbf{R}^{bc} + \frac{1}{3} [\bar{\omega}^{4a} \bar{\omega}^b{}_4 \bar{\omega}^{4c}] \right), \quad (4.14)$$

$$0 = \varepsilon_{abcd} \left(\lambda_1 [\bar{\mathbf{R}}^{4a}] e^b + \lambda_3 [\bar{\mathbf{R}}^{4a}] h^b - \lambda_3 [\bar{\omega}^{4a}] Dh^b \right), \quad (4.15)$$

donde $[X] = X^+ - X^-$, $T_d = -\frac{1}{3!} \varepsilon_{abcd} T^s{}_d e^a e^b e^c$ y $T_d^{(h)} = -\frac{1}{3!} \varepsilon_{abcd} T^{(h)s}{}_d e^a e^b e^c$ son los tensores energía momentum asociados a e^a y h^a , respectivamente. Reemplazando (4.14) en (4.13), y los valores de las constantes:

$$\varepsilon_{abcd} [\bar{\omega}^{4a}] e^b e^c = \frac{\kappa}{21\lambda_3} \tilde{T}_d, \quad (4.16)$$

donde $\tilde{T}_d = T_d + \alpha T_d^{(h)}$, con $\alpha = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$.

Es posible resolver (4.16) de forma sencilla en lenguaje tensorial usual, dejamos el cálculo en apéndice C. El salto de la curvatura extrínseca en la brana es:

$$[K^k{}_d] = -\frac{\kappa}{42\lambda_3} \left(\tilde{T}^k{}_d - \frac{1}{3} \tilde{T} \delta^k{}_d \right). \quad (4.17)$$

En el límite $l \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$

$$[K^k{}_d] = -\frac{\kappa}{42\lambda_3} \left(T^k{}_d - \frac{1}{3} T \delta^k{}_d \right), \quad (4.18)$$

lo que corresponde a la condición de juntura de Israel. Comparando con (3.143) se encuentra que $\kappa = 42k_5\lambda_3$. Luego:

$$[K^k{}_d] = -k_5 \left(\tilde{T}^k{}_d - \frac{1}{3} \tilde{T} \delta^k{}_d \right). \quad (4.19)$$

²Es posible mostrar, aplicando el procedimiento de S-expansión dual al lagrangiano AdS-CS en 5 dimensiones, que $\alpha_i = \frac{2}{3}\lambda_i$

4.2 Ecuaciones de Movimiento en la brana.

En el lenguaje de formas diferenciales las ecuaciones de movimiento [E.d.M.] para un espacio de dimensión k son $(k-1)$ -formas. Para solucionar esto nuevamente usaremos el operador derivada interior para eliminar la dirección normal. Las E.d.M. para un espacio-tiempo EChS 5-dimensional [11] son:

$$\varepsilon_{ABCDE}\bar{\mathbf{R}}^{AB}\bar{e}^C\bar{e}^D = 4k_5\left(\bar{T}_E + \alpha\bar{T}_E^{(h)}\right), \quad (4.20)$$

$$\frac{l^2}{8k_5}\varepsilon_{ABCDE}\bar{\mathbf{R}}^{AB}\bar{\mathbf{R}}^{CD} = \bar{T}_E^{(h)}, \quad (4.21)$$

$$\varepsilon_{ABCDE}\bar{\mathbf{R}}^{CD}\bar{\mathcal{D}}\bar{h}^E = 0. \quad (4.22)$$

Restringimos los valores de los índices latinos mayusculos, salvo uno cualquiera, a la brana, es decir, solo pueden tomar los valores $\{0, 1, 2, 3\}$ y luego aplicamos el operador I_4 sobre cada una de las ecuaciones de movimiento:

$$\varepsilon_{a4cde}\left(I_4\bar{\mathbf{R}}^{a4}e^c - \bar{\mathbf{R}}^{ae}I_4e^4\right)e^d = 2k_5I_4\left(T_e + \alpha\bar{T}_e^{(h)}\right), \quad (4.23)$$

$$l^2\varepsilon_{4bcde}\left(-I_4\bar{\mathbf{R}}^{b4}\bar{\mathbf{R}}^{cd} + \bar{\mathbf{R}}^{4b}I_4\bar{\mathbf{R}}^{cd}\right) = 8k_5\alpha I_4\bar{T}_e^{(h)}, \quad (4.24)$$

$$2\varepsilon_{ab4de}l^2\left(I_4\bar{\mathbf{R}}^{4d}\bar{\mathcal{D}}h^e + \bar{\mathbf{R}}^{4d}I_4\bar{\mathcal{D}}h^e\right) = 0, \quad (4.25)$$

pero:

$$I_4\bar{\mathbf{R}}^{a4} = -\tilde{E}^a{}_m e^m,$$

$$I_4\bar{\mathbf{R}}^{ac} = -\tilde{B}^{ac}{}_m e^m,$$

donde $\tilde{B}^{ac}{}_m$ y $\tilde{E}^a{}_m$ son la parte magnetica y electrica del tensor de Riemann, respectivamente. Aplicando las ecuación de Gauss (ec. (3.34)):

$$2k_5I_4\tilde{T}_d = \varepsilon_{abcd}\left(\tilde{E}^a{}_m e^m e^b + \mathbf{R}^{ab} - K^a{}_l K_m^b e^l e^m\right)e^c, \quad (4.26)$$

$$-2k_5I_4T_d^{(h)} = \varepsilon_{abcd}\left\{\tilde{E}^a{}_m e^m\left(\mathbf{R}^{bc} - K^b{}_l K_m^c e^l e^m\right) + \bar{\mathbf{R}}^{4a}\tilde{B}^{bc}{}_m e^m\right\}, \quad (4.27)$$

$$0 = l^2\varepsilon_{abcd}\left\{\tilde{E}^c{}_l e^l \mathcal{D}h^d + \bar{\mathbf{R}}^{4c}\mathcal{D}_4h^d\right\}, \quad (4.28)$$

donde $\tilde{T}_d = T_d + \alpha T_d^{(h)}$ y se relaciona al tensor energía-momentum de la siguiente forma:

$$I_4 \bar{T}_e = -\frac{1}{3!} \varepsilon_{abcm} \bar{T}^m_e e^a e^b e^c.$$

Por otro lado, a partir de la descomposición del tensor de curvatura:

$$\bar{R}^{AB}{}_{CD} = \bar{C}^{AB}{}_{CD} + \frac{2}{3} \left(\delta_{[C}^A \bar{R}^B{}_{D]} - \delta_{[C}^B \bar{R}^A{}_{D]} \right) - \frac{1}{6} \delta_{[C}^A \delta_{D]}^B \bar{R}, \quad (4.29)$$

podemos escribir $\tilde{E}^a{}_m$ y $\tilde{B}^{ab}{}_m$ en función de la parte eléctrica del tensor de Weyl, $E^a{}_m$, y la parte magnética del tensor de Weyl, $B^{ab}{}_m$. Considerando que $\tilde{E}^a{}_m = \bar{R}^{4a}{}_{4m}$, $\tilde{B}^{ab}{}_m = \bar{R}^{ab}{}_{m4}$, $E^a{}_m = \bar{C}^{4a}{}_{4m}$ y $B^{ab}{}_m = \bar{C}^{ab}{}_{m4}$ tenemos:

$$\tilde{E}^a{}_m = E^a{}_m + \frac{1}{3} \left(\bar{R}^a{}_m + \bar{R}^4{}_{4m} \delta_m^a \right) - \frac{1}{12} \bar{R} \delta_m^a, \quad (4.30)$$

$$\tilde{B}^{ab}{}_m = B^{ab}{}_m + \frac{1}{3} \left(\delta_m^a \bar{R}^b{}_{44} + \delta_m^b \bar{R}^a{}_{44} \right), \quad (4.31)$$

pero

$$\begin{aligned} \bar{R} &= -\frac{2}{3} k_5 \left(\bar{T} + \alpha \bar{T}^{(h)} \right), \\ \bar{R}^b{}_d &= k_5 \left(\bar{T}^b{}_d + \alpha \bar{T}^{(h)b}{}_d - \frac{1}{3} \left(\alpha \bar{T}^{(h)} + \bar{T} \right) \delta_d^b \right). \end{aligned}$$

De esta forma, las relaciones entre las partes eléctricas del tensor de Riemann, $\tilde{E}^a{}_l$, y del tensor de Weyl, $E^a{}_l$:

$$\tilde{E}^a{}_l = E^a{}_l + \frac{k_5}{3} \left(\tilde{T}^a{}_l + \delta_l^a \left(\tilde{T}^4{}_{44} - \frac{\tilde{T}}{2} \right) \right), \quad (4.32)$$

además, las relaciones entre las correspondiente partes magnéticas $\tilde{B}^{ab}{}_l$ y $B^{ab}{}_l$ son:

$$\tilde{B}^{ab}{}_l = B^{ab}{}_l + \frac{2}{3} k_5 \delta_l^a \tilde{T}^b{}_{44}. \quad (4.33)$$

Reemplazando (4.32) y (4.33) en las E.d.M.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{abcd}\mathbf{R}^{ab}e^c &= -2k_5I_4\tilde{T}_d - \varepsilon_{abcd}\left\{\left(E^a{}_me^m + \frac{k_5}{3}\left(\tilde{T}^a{}_le^l + \left(\tilde{T}^4{}_4 - \frac{\tilde{T}}{2}\right)e^a\right)\right)e^b\right. \\ &\quad \left.- K^a{}_lK^b{}_me^le^m\right\}e^c, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} 2k_5I_4\bar{T}_d^{(h)} &= -l^2\varepsilon_{abcd}\left(E^a{}_me^m + \frac{k_5}{3}\left(\tilde{T}^a{}_le^l + \left(\tilde{T}^4{}_4 - \frac{\tilde{T}}{2}\right)e^a\right)\right)\mathbf{R}^{bc} + \\ &\quad -l^2\varepsilon_{abcd}\left\{\bar{\mathbf{R}}^{4a}\left(B^{bc}{}_le^l - \frac{2}{3}k_5\tilde{T}^b{}_4e^c\right) - E^a{}_me^mK^b{}_lK^c{}_me^le^m\right. \\ &\quad \left.- \frac{k_5}{3}\left(\tilde{T}^a{}_le^l + \left(\tilde{T}^4{}_4 - \frac{\tilde{T}}{2}\right)e^a\right)K^b{}_lK^c{}_me^le^m\right\}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} 0 &= l^2\varepsilon_{abcd}\left\{\bar{\mathbf{R}}^{4c}\mathcal{D}_4h^d + \left(E^c{}_me^m + \frac{k_5}{3}\left(\tilde{T}^c{}_le^l + \left(\tilde{T}^4{}_4 + \right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left. - \frac{\tilde{T}}{2}\right)e^c\right)\right)\mathcal{D}_\omega h^d\right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Las E.d.M. de la brana están sujetas, además, a condiciones dadas por la componente normal de las ecuaciones de movimiento en el bulk. En las ecuaciones (4.20), (4.21) y (4.22) fijamos uno de los índices sin contraer igual a “4” y luego aplicamos la derivada interior respecto de la normal:

$$\begin{aligned} l^2\varepsilon_{abcd}B^{ab}{}_l\mathbf{R}^{cd}e^l &= 8k_5I_4\bar{T}^{(h)}{}_4 - l^2\varepsilon_{abcd}\left(\frac{2}{3}k_5\tilde{T}^b{}_4e^aK^c{}_sK^d{}_me^se^m + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3}k_5\tilde{T}^b{}_4e^a\mathbf{R}^{cd} - B^{ab}{}_lK^c{}_sK^d{}_me^le^se^m\right), \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} l^2\varepsilon_{abcd}\mathbf{R}^{bc}\bar{D}_4\bar{h}^d &= -l^2\varepsilon_{abcd}\left(K^b{}_lK^c{}_se^le^s\bar{D}_4\bar{h}^d + \right. \\ &\quad \left. + B^{bc}{}_l\bar{D}h^de^l + \frac{2}{3}k_5\tilde{T}^c{}_4e^bDh^d\right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Hasta este punto hemos obtenido las ecuaciones efectivas en la brana y las condiciones dadas por la parte normal de la ecuaciones de movimiento solo utilizando el embebimiento Gaussiano, sin imponer condiciones adicionales.

Siguiendo los pasos de [22] definimos la coordenada χ , tal que la brana se encuentre en $\chi = 0$. De esta forma

$$n_\mu dx^\mu = d\chi$$

por lo que el elemento de línea del Bulk, en un sistema ortonormal, toma la forma:

$$ds^2 = d\chi^2 + \eta_{ab}e^a e^b. \quad (4.39)$$

Haciendo uso de la coordenada normal separamos el tensor energía-momentum de forma similar a lo propuesto en [22].

$$\bar{T}_{AB} = -\Lambda\bar{\eta}_{AB} + T_{AB}\delta(\chi), \quad (4.40)$$

$$T_{ab} = -\lambda\eta_{ab} + \tau_{ab}, \quad (4.41)$$

$$\bar{T}_{AB}^{(h)} = T_{AB}^{(h)}\delta(\chi), \quad (4.42)$$

donde λ es la tensión de la brana, τ_{ab} es el tensor energía momentum de la materia común sobre la brana, $T_{ab}^{(h)}$ es la materia asociada al campo h^a en la brana.

Por último, imponemos la simetría Z_2 por lo que la condición de juntura toma la forma:

$$K^k{}_d = -\frac{k_5}{2} \left(\tilde{T}^k{}_d - \frac{1}{3} \tilde{T} \delta^k{}_d \right). \quad (4.43)$$

Por otra parte de la ecuación de de Codazzi contraída en su forma tensorial y en un sistema coordinado ortonormal:

$$0 = -\frac{k_5}{2} \mathcal{D}_s \tau^s{}_d - \frac{k_5}{2} \alpha \mathcal{D}_s T^{(h)s}{}_d. \quad (4.44)$$

Dado que α_1 y α_3 son independientes:

$$\mathcal{D}_s \tau^s{}_d = 0, \quad (4.45)$$

$$\mathcal{D}_s T^{(h)s}{}_d = 0, \quad (4.46)$$

de forma equivalente en formas diferenciales:

$$D * \mathcal{T}^a = 0, \quad (4.47)$$

$$D * \mathcal{T}^{(h)a} = 0, \quad (4.48)$$

donde:

$$\mathcal{T}^a = \frac{\tau}{6}e^a - \frac{1}{2}\tau^a{}_l e^l, \quad (4.49)$$

$$\mathcal{T}^{a(h)} = \frac{T^{(h)}}{6}e^a - \frac{1}{2}T^{a(h)}{}_l e^l, \quad (4.50)$$

es decir, se cumple la conservación del tensor energía-momentum para ambos tipos de materia en la brana. Esto también implica :

$$\bar{\mathbf{R}}^{4a} = 0. \quad (4.51)$$

Aplicando las condiciones mostradas anteriormente a las ecuaciones de movimiento obtenidas para la branas:

Para (4.34), (4.35) y (4.36), respectivamente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{abcd}\mathbf{R}^{ab}e^c &= \varepsilon_{abcd} \left\{ \frac{\Lambda_4}{3}e^a e^b - \frac{k_5^2}{8}(\Pi^{ab} + \alpha^2\Pi^{ab(h)}) - 16\pi G_N(\mathcal{T}^a + \alpha\mathcal{T}^{a(h)})e^b + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_5^2}{4}\alpha I^{ab} - E^a{}_m e^m e^b \right\} e^c, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} 2k_5 I_4 \bar{T}_d^{(h)} &= -l^2 \varepsilon_{abcd} \left\{ \left(E^a{}_m e^m + \frac{k_5}{6}\Lambda e^a \right) \left(\mathbf{R}^{bc} + \frac{k_5^2}{36}\lambda^2 e^b e^c - \frac{k_5^2}{8}(\Pi^{bc} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha^2\Pi^{bc(h)}) - 16\pi G_N(\mathcal{T}^b + \alpha\mathcal{T}^{b(h)})e^c + \frac{k_5^2}{4}\alpha I^{bc} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$0 = l^2 \varepsilon_{abcd} \left(E^c{}_m e^m + \frac{k_5}{6}\Lambda e^c \right) \left(\mathcal{D}h^d - \frac{k_5}{6}\lambda e^d - k_5 \mathcal{T}^d \right), \quad (4.54)$$

donde

$$I^{ab} = 2T^{a(h)}{}_l \tau^b{}_p e^l e^p - \frac{2}{9}\tau T^{(h)}e^a e^b - \frac{2}{3}\tau^a{}_l T^{(h)}e^l e^b - \frac{2}{3}\tau T^{a(h)}{}_l e^l e^p, \quad (4.55)$$

$$\Pi^{ab} = \frac{1}{3}\tau\tau^a{}_l e^l e^b - \frac{1}{2}\tau^a{}_l \tau^b{}_m e^l e^m - \frac{\tau^2}{18}e^a e^b, \quad (4.56)$$

$$\Pi^{ab(h)} = \frac{1}{3}T^{(h)}T^{a(h)}{}_l e^l e^b - \frac{1}{2}T^{a(h)}{}_l T^{b(h)}{}_m e^l e^m - \frac{(T^{(h)})^2}{18}e^a e^b. \quad (4.57)$$

Por otro lado las ecuaciones en la dirección normal toman la forma:

$$\begin{aligned} l^2 \varepsilon_{abcd} B^{ab}{}_l \mathbf{R}^{cd} e^l &= 8k_5 I_4 \bar{T}_4^{(h)} - l^2 \varepsilon_{abcd} \left(B^{ab}{}_l e^l \left(\frac{k_5^2}{36}\lambda^2 e^c e^d - \frac{k_5^2}{8}(\Pi^{cd} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha^2\Pi^{cd(h)}) - 16\pi G_N(\mathcal{T}^c + \alpha\mathcal{T}^{c(h)})e^d + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k_5^2}{4}\alpha I^{cd} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned}
l^2 \varepsilon_{abcd} \mathbf{R}^{bc} \bar{\mathcal{D}}_4 \bar{h}^d &= -l^2 \varepsilon_{abcd} \left(\left(\frac{k_5^2}{36} \lambda^2 e^b e^c - \frac{k_5^2}{8} (\Pi^{bc} + \alpha^2 \Pi^{bc(h)}) - 16\pi G_N (\mathcal{T}^{b+} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha \mathcal{T}^{b(h)}) e^c + \frac{k_5^2}{4} \alpha I^{bc} \right) \bar{\mathcal{D}}_4 \bar{h}^d + B^{bc} \bar{\mathcal{D}}_4 h^d e^l \right). \quad (4.59)
\end{aligned}$$

Hemos obtenido las ecuaciones (4.52), (4.53) y (4.54) que corresponden a las E.d.M. de la brana bajo un embebimiento Gaussiano y bajo las condiciones de junta (4.43), además estas ecuaciones están sujetas a las condiciones (4.58) y (4.59). La ecuación (4.52) contiene términos de orden uno y cuadráticos en ambos tipos de materia, \mathcal{T}^a , Π^{ab} , $\mathcal{T}^{(h)a}$, y $\Pi^{(h)ab}$, así también un término de interacción entre ambos tipos de materia I^{ab} . Si el término de interacción, los cuadráticos y los términos simples en $T^{(h)ab}$ son del mismo o menor orden de magnitud estos podrán ser despreciados si α es pequeño.

El sistema de ecuaciones dado por (4.52), (4.53) y (4.54) no puede ser resuelto a menos que también consideremos las ecuaciones (4.58) y (4.59) y las ecuaciones que describen ambas partes del tensor Weyl en el bulk dadas en el apéndice de [22], esto debido a la presencia de la parte eléctrica y magnética del tensor de Weyl en las E.d.M. de la brana, tensores que están definidos en cinco dimensiones.

De la ecuación (4.52) notamos que no es posible obtener de forma unívoca E^a_m . Tomando la derivada covariante exterior de esta ecuación y usando la identidad de Bianchi:

$$\varepsilon_{abcd} \mathcal{D} E^a_m e^m e^b e^c = \varepsilon_{abcd} \left\{ -\frac{k_5^2}{8} (\mathcal{D} \Pi^{ab} + \alpha^2 \mathcal{D} \Pi^{ab(h)}) + \frac{k_5^2}{4} \alpha \mathcal{D} I^{ab} \right\} e^c. \quad (4.60)$$

A diferencia del caso [22], la parte eléctrica del tensor de Weyl esta restringida no solo por τ^a_l sino también por la materia $T^{a(h)}_l$ en la brana y la interacción, I^{ab} .

Siguiendo [22], para estudiar el comportamiento y aporte de los nuevos términos a las ecuaciones del movimiento los comparamos con el tensor energía-momentum,

$\tau^a{}_b$. Fijamos las escalas de las constantes:

$$k_5^2 = \frac{1}{M_G^3}, \quad (4.61)$$

$$\lambda = M_\lambda^4, \quad (4.62)$$

$$|\tau_b^a| = M^4, \quad (4.63)$$

$$\left| \tau_b^{a(h)} \right| = M_{(h)}^4, \quad (4.64)$$

donde M_G y M_λ son mucho mas grandes en comparación a la energía característica de los dos tipos de materia M y $M_{(h)}$, siendo la primera del mismo o mayor orden de magnitud que $M_{(h)}$. Luego:

$$k_5^2 \alpha^2 \frac{|\varepsilon_{abcd} \Pi^{ab(h)} e^c|}{G_N |\varepsilon_{lmns} \mathcal{T}^l e^m e^n|} \sim \alpha^2 \frac{M_{(h)}^8}{M_\lambda^4 M^4}, \quad (4.65)$$

$$\alpha \frac{G_N |\varepsilon_{abcd} \mathcal{T}^{a(h)} e^b e^c|}{G_N |\varepsilon_{lmns} \mathcal{T}^l e^m e^n|} \sim \alpha \frac{M_{(h)}^4}{M^4}, \quad (4.66)$$

$$\alpha \frac{k_5^2 |\varepsilon_{abcd} I^{ab} e^c|}{G_N |\varepsilon_{lmns} \mathcal{T}^l e^m e^n|} \sim \alpha \frac{M_{(h)}^4}{M_\lambda^4}, \quad (4.67)$$

notamos de las ecuaciones (4.65)-(4.67), incluso en el caso que $M = M_{(h)}$, que los términos son despreciables, en comparación con el tensor τ^{ab} siempre que α sea pequeño.

Es útil separar el tensor E_{ab} en dos partes ,en su parte transversa(sin traza), $E_{(TT)}$, y la longitudinal, $E_{(L)}$. Solo esta ultima estará determinada por la materia, pues $E_{(TT)}$ corresponde a la parte que interactúa entre la brana y el bulk.

La parte longitudinal de E_{ab} esta limitada, como es posible ver en la ecuación (4.60) tanto por el termino cuadrático en τ_{ab} , la materia $T^{(h)}$. Comparamos E_{ab} con τ_{ab} .

$$\frac{|\varepsilon_{abcd} E_{(L)m}^a e^m e^b e^c|}{G_N |\varepsilon_{lmns} \mathcal{T}^l e^m e^n|} \sim \frac{1}{G_N |\tau_{ab}|} \left| G_N \alpha T_{ab}^{(h)} + k_5^2 (\tau_{al} \tau^l{}_b + \dots) + k_5^2 \alpha^2 (T_{al(h)} T^{l(h)}{}_b + \dots) + k_5^2 \alpha (\tau_{al} T^{l(h)}{}_b + \dots) \right|. \quad (4.68)$$

Comparando termino a termino tenemos:

$$\frac{|\varepsilon_{abcd}E_{(L)m}^a e^m e^b e^c|}{G_N |\varepsilon_{lmns}\mathcal{T}^l e^m e^n|} \sim \alpha \frac{M_{(h)}^4}{M^4} + \frac{M^4}{M_\lambda^4} + \alpha^2 \frac{M_{(h)}^8}{M^4 M_\lambda^4} + \alpha \frac{M_{(h)}^4}{M_\lambda^4}, \quad (4.69)$$

vemos que la parte eléctrica del tensor de Weyl sera despreciable siempre que α , l sean pequeños.

Si \mathbf{R}^{ab} toma valores no muy grandes y tomamos el límite $\alpha \rightarrow 0$, $l \rightarrow 0$ podemos despreciar los términos que comparamos anteriormente de las E.d.M., así como los estudiados en [22]. Luego las E.d.M.. toman la forma:

$$\varepsilon_{abcd}\mathbf{R}^{ab}e^c = \varepsilon_{abcd} \left\{ \frac{\Lambda_4}{3} e^a e^b - \frac{k_5^2}{2} \Pi^{ab} - 16\pi G_N \mathcal{T}^a e^b - E^a_m e^m e^b \right\} e^c, \quad (4.70)$$

$$\varepsilon_{abck} \bar{T}^{(h)k}{}_d e^a e^b e^c = 0, \quad (4.71)$$

la ecuación para ω^{ab} es idénticamente nula en este límite.

La ecuación (4.70) corresponde a la ecuación (3.152) y además en este límite el tensor $\bar{T}^{(h)k}{}_d$ es nulo. De aquí vemos que el caso [22] puede ser considerado como el límite de baja energía.

Por ultimo cabe señalar que la ecuación (4.44), en este limite, implica la conservación de $\tau^a{}_b$ y no hay rastro del tensor $T^{a(h)}{}_l$, como fue visto en [22].

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis hemos mostrado que es posible obtener tanto el lagrangeano como las ecuaciones de movimientos para una 3-brana en gravedad Einstein-Chern-Simons 5-dimensional.

Se ha encontrado el lagrangiano de borde que permite encontrar las condiciones de juntura apropiadas, considerando al campo \bar{h}^A como un campo material, (ver sección 4.1) para el caso EChS siguiendo lo propuesto en [43, 44]. La condición de juntura obtenida para la curvatura extrínseca corresponde a la condición de juntura de Darmois-Israel más una corrección, correspondiente al tipo de materia $T^{(h)}$, que se desvanece en el límite de baja energía.

Utilizando el procedimiento descrito en [22] y a partir de las ecuaciones de movimiento para la gravedad Einstein-Chern-Simons 5-dimensional, con $\bar{T}^a = 0$ y $\bar{k}_{ab} = 0$, encontramos las ecuaciones de movimiento efectivas para una 3-brana embebida en este espacio. Primero solo usando el embebimiento Gaussiano y luego se imponen las condiciones de juntura. Las ecuaciones de la brana muestran nuevos términos correspondientes al nuevo tipo de materia y la interacción entre ella y la materia usual τ^a_b los cuales desaparecen en el límite $l \rightarrow 0$, que corresponde al caso [22].

Cabe recalcar que se podría estudiar este tipo de brana escogiendo al campo

\bar{h}^A como un campo no material, es decir, cuando $\bar{h}^4 \neq 0$. También es interesante buscar soluciones cosmológicas para este tipo de brana así como el estudiar el caso con torsión y/o cuando $\bar{k}_{ab} \neq 0$, sin embargo, para el primer caso sería necesario usar otro método, o extender las ecuaciones de Gauss-Codazzi al caso torsional.



Apéndices



Apéndice A

Expansión en Semigrupos

A.1 Semigrupo

Un semigrupo es un sistema algebraico dotado de una única ley de composición interna. Sea $S = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ un conjunto cualquiera, se dice que S es un semigrupo bajo la operación (\cdot) si cumple con:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in S; \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \in S, \quad (\text{A.1})$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in S; \quad \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \lambda_3) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \lambda_3, \quad (\text{A.2})$$

Propiedades de clausura y asociatividad, respectivamente.

Si $S = \{\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \dots, \lambda_{\alpha_n}\}$ es un conjunto finito y discreto es posible reescribir el producto de sus elementos de la siguiente manera:

$$\lambda_{\alpha_1} \cdot \lambda_{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \lambda_{\alpha_n} = K_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^\rho \lambda_\rho, \quad (\text{A.3})$$

donde $K_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^\rho$ es el n -selector definido como:

$$K_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^\rho = \begin{cases} 1, & \text{si } \rho = \gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ 0, & \text{si } \rho \neq \gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{cases}. \quad (\text{A.4})$$

Dado que el n -selector es construido a partir de un semigrupo:

$$K_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^\rho = K_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}^\sigma K_{\sigma \alpha_n}^\rho, \quad (\text{A.5})$$

es posible reescribir un n -selector en función de 2-selectores. En el particular caso para el producto de 3 elementos:

$$\lambda_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_2} \lambda_{\alpha_3} = \lambda_{\rho(\alpha\beta\gamma)} = K_{\alpha\beta\gamma}{}^\sigma \lambda_\sigma, \quad (\text{A.6})$$

los 3-selectores pueden ser reescritos como:

$$K_{\alpha\beta}{}^\rho K_{\rho\gamma}{}^\sigma = K_{\alpha\rho}{}^\sigma K_{\beta\gamma}{}^\rho = K_{\alpha\beta\gamma}{}^\sigma. \quad (\text{A.7})$$

De lo anterior es posible notar que los 2-selectores proporcionan una representación matricial para el semigrupo de similar forma a como lo hacen las constantes de estructura en un álgebra de Lie son la representación dual del álgebra. Definimos:

$$[\lambda_\alpha]_\beta{}^\gamma = K_{\alpha\beta}{}^\gamma. \quad (\text{A.8})$$

Definición: Sea S un semigrupo abeliano y sea S_p y S_q , no necesariamente semigrupos, dos subconjuntos de S . El producto \times se define como:

$$S_p \times S_q = \{ \lambda_\gamma \text{ tal que } \lambda_\gamma = \lambda_{\alpha_p} \lambda_{\alpha_q}, \text{ con } \lambda_{\alpha_p} \in S_p \ \& \ \lambda_{\alpha_q} \in S_q \} \subset S, \quad (\text{A.9})$$

es decir, el conjunto $S_p \times S_q$ es el conjunto que resulta del producto de cada elemento de S_p con cada elemento de S_q .

Definición: Se define un elemento cero 0_S , en un semigrupo S si:

$$\forall \lambda_\alpha \in S; \quad 0_S \lambda_\alpha = \lambda_\alpha 0_S = 0_S, \quad (\text{A.10})$$

elemento cero, que en el caso de existir, es único. Además, la presencia de este elemento imposibilita al semigrupo de ser un grupo, pues 0_S no es invertible.

A.2 Álgebras de Lie

Definición: Sea G un espacio vectorial finito dimensional sobre un campo K . Si el grupo del espacio vectorial es extendido a un anillo con ley multiplicativa, (\cdot) , entonces el sistema (G, \cdot) corresponde a un álgebra.

Definición: Si el la ley multiplicativa del álgebra es antisimétrica, $[\cdot, \cdot]$, entonces el sistema $g = (G, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie.

Sean M y N dos subconjuntos del álgebra de Lie g . Sea $[M, N]$ al conjunto de la forma $[x, y]$ donde $x \in M$ e $y \in N$. Si M y N son subespacios lineales del álgebra, entonces:

$$\begin{aligned} [M_1 + M_2, N] &\subset [M_1, N] + [M_2, N], \\ [M, N] &= -[N, M], \\ [g, [M, N]] &\subset [M, [N, g]] + [N, [g, M]]. \end{aligned}$$

Es de utilidad definir una subálgebra, un ideal y el centro de un álgebra

- **Subálgebra:** Sea N un subespacio del álgebra g . N es una subálgebra si $[N, N] \subset N$
- **Ideal:** Sea N un subespacio del álgebra g . N es un ideal si $[G, N] \subset N$. Esto significa que un ideal es una subálgebra.
- **Centro de un álgebra:** Sea N un ideal que satisface la condición $[G, N] = 0$, entonces, N es el centro de un álgebra es llamado, el cual por definición es siempre conmutativo.

La existencia de subálgebras o de ideales de un álgebra de Lie g es reflejada en ciertas restricciones sobre las constantes de estructura. Sea $\{e_1, \dots, e_k\}$ una base del espacio vectorial del álgebra G . Si $\{e_1, \dots, e_k\}$ es una base de una sub-álgebra N , entonces las constantes de estructura deben satisfacer las relaciones:

$$C_{ij}^s = 0, \quad i < j \leq k \text{ y } s > k$$

, esto debido a que N es una subálgebra. Entonces:

$$[N_i, N_j] = C_{ij}^k N_k, \tag{A.11}$$

de modo que para $k < s < n$ se tiene C_{ij}^k . Por otro lado, si $\{e_1, \dots, e_k\}$ son una base para un ideal entonces:

$$C_{ij}^k, \quad \text{para } i \leq k, s > k, \text{ y } j \text{ arbitrario}, \quad (\text{A.12})$$

ya que si N es un ideal entonces $[g, N] \subset N$ solo si $C_{ij}^s = 0$ para $k \leq s \leq n$

A.3 Álgebras de Lie Reducidas

Es posible obtener álgebras más pequeñas por medio de un procedimiento de reducción. Estas también son llamadas álgebras de Lie forzadas.

Consideremos un álgebra g como la suma de dos subespacios vectoriales $g = V_0 \oplus V_1$, donde $\{T_{a_0}\}$ son los generadores de V_0 y $\{T_{a_1}\}$ son los generadores de V_1 . Si $[V_0, V_1] \subset V_1$, es decir,

$$[T_{a_0}, T_{b_0}] = C_{a_0 b_0}^{c_0} T_{c_0} + C_{a_0 b_0}^{c_1} T_{c_1}, \quad (\text{A.13})$$

$$[T_{a_0}, T_{b_1}] = C_{a_0 b_1}^{c_1} T_{c_1}, \quad (\text{A.14})$$

$$[T_{a_1}, T_{a_1}] = C_{a_1 b_1}^{c_0} T_{c_0} + C_{a_1 b_1}^{c_1} T_{c_1}. \quad (\text{A.15})$$

De lo anterior que las constante de estructura $C_{a_0 b_0}^{c_0}$ satisfacen la identidad de Jacobi, por lo tanto:

$$[T_{a_0}, T_{b_0}] = C_{a_0 b_0}^{c_0} T_{c_0}, \quad (\text{A.16})$$

es un álgebra de Lie conocida como álgebra reducida de g y es denotada por $|V_0|$.

Considerando la componente válida en V_0 de la identidad de Jacobi:

$$C_{a_0 b_0}^C C_{C d_0}^{e_0} + C_{d_0 a_0}^C C_{C b_0}^{e_0} + C_{b_0 d_0}^C C_{C a_0}^{e_0} = 0, \quad (\text{A.17})$$

donde C toma los valores c_0 y c_1 . Notamos que $C_{a_0 b_0}^{c_0}$ satisface la identidad de Jacobi en dos situaciones:

- Si $C_{a_0 b_0}{}^{c_1} = 0$

$$C_{a_0 b_0}{}^{c_0} C_{c_0 d_0}{}^{e_0} + C_{d_0 a_0}{}^{c_0} C_{c_0 b_0}{}^{e_0} + C_{b_0 d_0}{}^{c_0} C_{c_0 a_0}{}^{e_0} = 0, \quad (\text{A.18})$$

lo que corresponde a cuando V_0 es una subálgebra.

- Si $C_{a_0 b_1}{}^{c_0} = 0$ se cumple (A.18) y corresponde al caso $[V_0, V_1] \subset V_1$, es decir, $|V_0|$ es un subálgebra reducida.

A.4 S-expansión

El método de S-expansión de álgebras de Lie es un procedimiento para obtener nuevas álgebras de Lie a partir de una existente. Este método corresponde a utilizar un semigrupo para expandir un álgebra, dando como resultado un álgebra de mayor dimensión.

Teorema: Sea $S = \{\lambda_\alpha\}$ un semigrupo abeliano, $K_{\alpha\beta}{}^\gamma$ un 2-selector y g un álgebra de Lie de base $\{T_A\}$ y constantes de estructura $C_{AB}{}^C$. Un elemento de la base del espacio producto directo $S \otimes g$ será denotado por $T_{(A,\alpha)} = \lambda_\alpha T_A$. Si se define el producto algebraico en el espacio $S \otimes g$

$$[T_{(A,\alpha)}, T_{(B,\beta)}] = \lambda_\alpha \lambda_\beta [T_A, T_B]. \quad (\text{A.19})$$

Entonces $S \otimes g$ será un álgebra de Lie cuyas constantes de estructura vienen dadas por

$$C_{(A,\alpha)(B,\beta)}{}^{(C,\gamma)} = K_{\alpha\beta}{}^\gamma C_{AB}{}^C. \quad (\text{A.20})$$

Definición Si S es un semigrupo abeliano y si g es un álgebra de Lie, entonces el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = S \otimes g$ es llamada “álgebra S-expandida de g ”.

De la definición anterior notamos que el álgebra \mathfrak{g} es un álgebra obtenida al copiar cada generador del álgebra en cada elemento del semigrupo.

A.5 Álgebra 0_S -reducida

Sea S un semigrupo dotado de un elemento cero 0_S . Renombramos los elementos del semigrupo de la siguiente forma λ_i tal que $i = 0, 1, 2, \dots, N$ y $\lambda_{N+1} = 0_S$. Los 2-selectores cumplen con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} K_{i,N+1}^j &= K_{N+1,i}^j = 0, \\ K_{i,N+1}^{N+1} &= K_{N+1,i}^{N+1} = 1, \\ K_{N+1,N+1}^j &= 0, \\ K_{N+1,N+1}^{N+1} &= 1. \end{aligned}$$

Por lo cual el álgebra \mathfrak{g} puede ser reescrita como:

$$[T_{(A,i)}, T_{(B,j)}] = K_{ij}^k C_{AB}^C T_{(C,k)} + K_{ij}^{N+1} C_{AB}^C T_{(C,N+1)}, \quad (\text{A.21})$$

$$[T_{(A,N+1)}, T_{(B,j)}] = C_{AB}^C T_{(C,N+1)}, \quad (\text{A.22})$$

$$[T_{(A,N+1)}, T_{(B,N+1)}] = C_{AB}^C T_{(C,N+1)}. \quad (\text{A.23})$$

Notemos de (A.23) que los generadores $T_{(A,N+1)}$ forman un subálgebra de \mathfrak{g} . Además, comparando (A.21) – (A.23) con (A.13) – (A.15) notamos que es posible obtener un álgebra reducida de representada por:

$$[T_{(A,i)}, T_{(B,j)}] = K_{ij}^k C_{AB}^C T_{(C,k)}. \quad (\text{A.24})$$

Esta álgebra reducida es equivalente a eliminar los generadores $T_{(A,N+1)}$. Como consecuencia del proceso de reducción una parte del álgebra se vuelve conmutativa. En efecto, si $\lambda_i \lambda_j = 0_S$, entonces:

$$[T_{(A,i)}, T_{(B,j)}] = 0. \quad (\text{A.25})$$

Se puede resumir el procedimiento mediante la siguiente definición:

Definición: Sea S un semigrupo abeliano dotado de un elemento cero 0_S y sea $\mathfrak{g} = S \otimes g$ un álgebra S -expandida. El álgebra obtenida imponiendo la condición $0_S T_A = 0$ sobre \mathfrak{g} (o sobre una subálgebra de ella) es llamada álgebra 0_S -reducida o 0_S -forzada de \mathfrak{g} (o de una subálgebra).

A.6 Subálgebra Resonante

Sea $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in I} V_p$ una descomposición del álgebra en subespacios vectoriales V_p , con I un conjunto de índices que rotulan los subespacios vectoriales V_p de \mathfrak{g} . Debido a que \mathfrak{g} cumple con la propiedad de clausura, se tiene que para todo par de índices $(p, q) \in I$ es posible definir los subconjuntos de índices $i_{(p,q)} \subset I$, del tal forma que:

$$[V_p, V_q] \subset \bigoplus_{r \in i_{p,q}} V_r. \quad (\text{A.26})$$

La colección $\{i_{(p,q)}\}_{p,q \in I}$ contiene la información sobre la estructura de los subespacios V_p . Así como se han descompuesto \mathfrak{g} en una suma de subespacios es posible hacer lo propio con el semigrupo S en subconjuntos $S_p \subset S$ de manera que

$$S = \bigcup_{p \in I} S_p,$$

descomposición que es arbitraria pero para un caso particular que nos es de interés.

Definición: Sea $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in I} V_p$ una descomposición de \mathfrak{g} , con estructura $i_{(p,q)}$. Sea $S = \bigcup_{p \in I} S_p$ una descomposición del semigrupo S abeliano, tal que:

$$S_p \times S_q \subset \bigcap_{r \in i_{p,q}} S_r, \quad (\text{A.27})$$

descomposición que en el caso de existir, se dice que esta en resonancia con la descomposición del \mathfrak{g} en subespacios.

Definiendo los subespacios de \mathfrak{g} :

$$W_p = S_p \otimes V_p, \quad p \in I, \quad (\text{A.28})$$

lo que nos permite definir:

$$\mathfrak{g}_R = \bigoplus_{p \in I} W_p, \quad (\text{A.29})$$

lo que corresponde a una subálgebra S -expandida conocida subálgebra resonante del álgebra \mathfrak{g} . Cabe destacar que el problema de encontrar el álgebra \mathfrak{g}_R se reduce a encontrar una partición resonante del semigrupo S .

A.7 Reducción Resonante

Teorema: Sea \mathfrak{g}_R una subálgebra resonante de \mathfrak{g} . Sea $S_p = \hat{S}_p \cup \check{S}_p$ una partición de los subconjuntos $S_p \subset S$, de forma tal:

$$\hat{S}_p \cap \check{S}_p = \emptyset, \quad (\text{A.30})$$

$$\hat{S}_p \times \check{S}_q \subset \bigcap_{r \in i(p,q)} \hat{S}_r. \quad (\text{A.31})$$

Estas particulares descomposiciones de los subconjuntos de S induce una descomposición en sobre la subálgebra resonante $\mathfrak{g}_R = \check{\mathfrak{g}}_R \oplus \hat{\mathfrak{g}}_R$, tal que:

$$\check{\mathfrak{g}}_R = \bigoplus_{p \in I} \check{S}_p \otimes V_p, \quad (\text{A.32})$$

$$\hat{\mathfrak{g}}_R = \bigoplus_{p \in I} \hat{S}_p \otimes V_p. \quad (\text{A.33})$$

Cuando se cumplen las condiciones (A.30) y (A.31) se cumplen, entonces:

$$[\check{\mathfrak{g}}_R, \hat{\mathfrak{g}}_R] \subset \hat{\mathfrak{g}}_R, \quad (\text{A.34})$$

lo que corresponde a $|\mathfrak{g}_R|$ a un álgebra reducida de \mathfrak{g}_R . Como consecuencia, el procedimiento de reducción puede ser aplicado sobre un subálgebra resonante.

Corolario : Sea S un semigrupo dotado de un elemento 0_S , y sea $\mathfrak{g}_R = \bigoplus_{p \in I} S_p \otimes V_p$ una subálgebra resonante de $\mathfrak{g} = S \otimes g$, tal que para cada subconjunto $S_p, 0_S \in S_p$. Entonces la descomposición $S_p = \hat{S}_p \cup \check{S}_p$ con $\hat{S}_p = \{0_S\}$ y $\check{S}_p = S_p - \{0_S\}$ satisface las condiciones (A.30) y (A.31), $|\mathfrak{g}_R|$ corresponde a un álgebra reducida de \mathfrak{g}_R , la cual será llamada álgebra 0_S -reducida de \mathfrak{g}_R .

A.8 Tensores invariantes en S-expansión

Los tensores invariantes representan uno de los bloques esenciales para la construcción de teorías, debido a que con ellos es posible construir lagrangeanos a partir de un un grupo de simetría. En el contexto del mecanismo de la S -expansión es

posible obtener un tensor invariante para el álgebra S – *expandida* en términos del tensor invariante del álgebra de Lie original [36].

Teorema: Sea S un semigrupo abeliano, sea g un álgebra de lie de base $\{T_A\}$ y sea $\langle T_{A_1} \dots T_{A_n} \rangle$ un tensor invariante para g . Entonces:

$$\langle T_{(A_1, \alpha_1)} \dots T_{(A_n, \alpha_n)} \rangle = \alpha_\gamma K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}{}^\gamma \langle T_{A_1} \dots T_{A_n} \rangle, \quad (\text{A.35})$$

Corresponde a un tensor invariante para el álgebra $\mathfrak{g} = S \otimes g$. Las constantes α_γ son arbitrarias.

Además, es posible extraer un tensor invariante para las subálgebras resonantes \mathfrak{g}_R . Las componentes de un tensor invariante para \mathfrak{g} valuadas sobre una subálgebra son las componentes de un tensor invariante para cada subálgebra. Si elegimos la descomposición resonante $S = \bigcap_{p \in I} S_p$, Sea $\{T_{A_p}\}$ una base para el subespacio V_p , las componentes del tensor invariante para \mathfrak{g}_R son:

$$\langle T_{(A_{p_1}, \alpha_{p_1})} \dots T_{(A_{p_n}, \alpha_{p_n})} \rangle = \alpha_\gamma K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}{}^\gamma \langle T_{A_{p_1}} \dots T_{A_{p_n}} \rangle, \quad (\text{A.36})$$

componentes que forman un tensor invariante para \mathfrak{g}_R . Para el caso de un álgebra 0_S –reducida la cual, en general, no es una subálgebra las componentes de \mathfrak{g} valuadas sobre el álgebra 0_S –reducida no son constituyen un tensor invariante. La solución viene dada por el teorema siguiente:

Teorema: Sea S un semigrupo abeliano con elementos distintos a cero λ_i , $i=0, \dots, N$, y $\lambda_{N+1} = 0_S$. Sea g una álgebra de Lie de base $\{T_A\}$, y $\langle T_{A_{p_1}} \dots T_{A_{p_n}} \rangle$ un tensor invariante para g , entonces:

$$\langle T_{(A_1, i_1)} \dots T_{(A_n, i_n)} \rangle = \alpha_\gamma K_{i_1 i_n}{}^j \langle T_{A_1} \dots T_{A_n} \rangle, \quad (\text{A.37})$$

es un tensor invariante para el álgebra 0_S –reducida de \mathfrak{g} , donde α_j son constantes arbitrarias.

También es posible obtener las componentes para un tensor invariante valuadas sobre una subálgebra resonante 0_S –reducida. Consideramos un semigrupo abeliano

S , con elemento cero 0_S y sea $|\mathfrak{g}_R|$ un álgebra 0_S -reducida de la subálgebra resonante \mathfrak{g}_R . Sea $\{T_{A_p}\}$ un generador del subespacio V_p y sea $\lambda_{i_p} \in \check{S}_p = S_p - \{0_S\}$. El tensor invariante para el álgebra 0_S -reducida de \mathfrak{g}_R es:

$$\langle T_{(A_{p_1}, i_{p_1})} \cdots T_{(A_{p_n}, i_{p_n})} \rangle = \alpha_\gamma K_{i_{p_1} \dots i_{p_n}}^\gamma \langle T_{A_{p_1}} \cdots T_{A_{p_n}} \rangle. \quad (\text{A.38})$$



Apéndice B

S-expansión dual: Juntura EChS

En el caso Chern-Simons, la 1-forma de gauge es de la forma:

$$A = A^A T_A = \frac{1}{l} e^A \tilde{P}_A + \frac{1}{2} \omega^{AB} \tilde{J}_{AB}, \quad (\text{B.1})$$

con la 2-forma curvatura:

$$F = F^A T_A = \frac{1}{l} T^A \tilde{P}_A + \frac{1}{2} \left(\mathbf{R}^{AB} + \frac{1}{l^2} e^A e^B \right) \tilde{J}_{AB}, \quad (\text{B.2})$$

donde e^A es el vierbein, ω^{AB} es la conexión de spin, \mathbf{R}^{AB} es la 2-forma curvatura; y \tilde{P}_A y \tilde{J}_{AB} son los generadores del álgebra.

Definimos los siguientes duales:

$$\omega_{ABC} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ABCDE} \omega^{DE}, \quad (\text{B.3})$$

$$\tilde{J}^{ABC} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ABCDE} \tilde{J}_{DE}, \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{R}_{ABC} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ABCDE} \mathbf{R}^{DE}. \quad (\text{B.5})$$

Siguiendo el procedimiento de S-expansión dual 0_S -resonante. Para esto consideramos el semigrupo $S = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ y lo separamos de la siguiente forma

$$S_1 = \{\lambda_0, \lambda_2\}, \quad (\text{B.6})$$

$$S_2 = \{\lambda_1, \lambda_3\}, \quad (\text{B.7})$$

de tal forma que S_1 actué solo sobre \tilde{P}_A y S_2 solo actué sobre \tilde{J}_{AB} . Expandiendo:

$$e_A \rightarrow \lambda_1 e_A^{(1)} + \lambda_3 e_A^{(3)}, \quad (\text{B.8})$$

$$\omega_{ABC} \rightarrow \lambda_0 \omega_{ABC}^{(0)} + \lambda_2 \omega_{ABC}^{(2)}, \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{R}_{ABC} \rightarrow \lambda_0 \mathbf{R}_{ABC}^{(0)} + \lambda_2 \mathbf{R}_{ABC}^{(2)}. \quad (\text{B.10})$$

Expandimos F por partes

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ABC} + \frac{1}{l^2} \varepsilon_{ABCDE} e^D e^E &\rightarrow d \left(\lambda_0 \omega_{ABC}^{(0)} + \lambda_2 \omega_{ABC}^{(2)} \right) + \frac{\varepsilon^{LESRY}}{12} \left(\eta_{LB} \left(\lambda_0 \omega_{CAE}^{(0)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_2 \omega_{CAE}^{(2)} \right) + \eta_{LC} \left(\lambda_0 \omega_{ABE}^{(0)} + \lambda_2 \omega_{ABE}^{(2)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \eta_{LA} \left(\lambda_0 \omega_{BCE}^{(0)} + \lambda_2 \omega_{BCE}^{(2)} \right) \right) \left(\lambda_0 \omega_{SNY}^{(0)} + \lambda_2 \omega_{SNY}^{(2)} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{l^2} \varepsilon_{ABCDE} \left(\lambda_1 e^{(1)D} + \lambda_3 e^{(3)D} \right) \left(\lambda_1 e^{(1)E} + \lambda_3 e^{(3)E} \right) \\ &= \lambda_0 \left(d \omega_{ABC}^{(0)} + \frac{\varepsilon^{LESRY}}{12} \left(\eta_{LB} \omega_{CAE}^{(0)} + \eta_{LC} \omega_{ABE}^{(0)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \eta_{LA} \omega_{BCE}^{(0)} \right) \omega_{SNY}^{(0)} \right) + \lambda_2 \left(d \omega_{ABC}^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon^{LESRY}}{12} \left(\left(\eta_{LB} \omega_{CAE}^{(2)} + \eta_{LC} \omega_{ABE}^{(2)} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \eta_{LA} \omega_{BCE}^{(2)} \right) \omega_{SNY}^{(0)} + \left(\eta_{LB} \omega_{CAE}^{(0)} + \eta_{LC} \omega_{ABE}^{(0)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \eta_{LA} \omega_{BCE}^{(0)} \right) \omega_{SNY}^{(2)} \right) \right) + \frac{\lambda_2}{l^2} \varepsilon_{ABCDE} e^{(1)D} e^{(1)E}. \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

Para la torsión:

$$\begin{aligned} T_A &\rightarrow d \left(\lambda_1 e_A^{(1)} + \lambda_3 e_A^{(3)} \right) + \frac{1}{6} \eta_{AB} \varepsilon^{BQMSP} \left(\lambda_0 \omega_{ABC}^{(0)} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2 \omega_{ABC}^{(2)} \right) \left(\lambda_1 e_A^{(1)} + \lambda_3 e_A^{(3)} \right) \\ &= \lambda_1 \left(d e_A^{(1)} + \frac{1}{6} \eta_{AB} \varepsilon^{BQSMP} \omega_{SMP}^{(0)} e_Q^{(1)} \right) + \lambda_3 \left(d e_A^{(3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \eta_{AB} \varepsilon^{BQSMP} \left(\omega_{SMP}^{(0)} e_Q^{(3)} + \omega_{SMP}^{(2)} e_Q^{(1)} \right) \right), \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

comparando tenemos:

$$e_A^{(1)} = e_A, \quad (\text{B.13})$$

$$\omega_{ABC}^{(0)} = \omega_{ABC}. \quad (\text{B.14})$$

Ademas, definimos:

$$e_A^{(3)} = h_A, \quad (\text{B.15})$$

$$\omega_{ABC}^{(2)} = \mathfrak{K}_{ABC}. \quad (\text{B.16})$$

Luego, las cantidades expandidas son:

$$e_A \rightarrow \lambda_1 e_A + \lambda_3 h_A, \quad (\text{B.17})$$

$$\omega_{ABC} \rightarrow \lambda_0 \omega_{ABC} + \lambda_2 \mathfrak{K}_{ABC}, \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{R}_{ABC} \rightarrow \lambda_0 \mathbf{R}_{ABC} + \lambda_2 D \mathfrak{K}_{ABC}, \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{1}{l^2} \varepsilon_{ABCDE} e^D e^E \rightarrow \frac{\lambda_2}{l^2} \varepsilon_{ABCDE} e^D e^E, \quad (\text{B.20})$$

$$T_A \rightarrow \lambda_1 \mathbf{T}_A + \lambda_3 (D h_A + \mathfrak{K}_A^Q e_Q). \quad (\text{B.21})$$

El lagrangiano de borde para el caso 5-dimensional CS-AdS, $\mathfrak{K}_{ABC} = 0$ y $\bar{\mathbf{T}}^A = 0$

$$L_\Sigma = \int_\Sigma \varepsilon_{ABCDE} \bar{\Theta}^{AB} \left\{ \beta_1 \mathbf{R}^{CD} + \beta_1 D \bar{\Theta}^{CD} + \frac{1}{3} \beta_1 \bar{\Theta}^C{}_L \bar{\Theta}^{LD} + 2\beta_2 e^C e^D \right\} e^E, \quad (\text{B.22})$$

reemplazando (B.17)-(B.21)

$$\begin{aligned} L_\Sigma &= \frac{1}{2} \int_\Sigma \varepsilon_{ABCDE} \lambda_0 \bar{\Theta}^{AB} \left\{ \beta_1 (\lambda_0 \mathbf{R}^{CD}) \beta_1 \lambda_0 D \bar{\Theta}^{CD} + \frac{\lambda_0}{3} \beta_1 \bar{\Theta}^C{}_L \bar{\Theta}^{LD} + \right. \\ &\quad \left. + 2\beta_2 (\lambda_1 e^C + \lambda_3 h^C) (\lambda_1 e^D + \lambda_3 h^D) (\lambda_1 e^E + \lambda_3 h^E) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_\Sigma \varepsilon_{abcd} \bar{\omega}^{4a} \left\{ \beta_1 \lambda_1 \left(\mathbf{R}^{bc} + \frac{1}{3} \bar{\omega}^{b4} \bar{\omega}^{4c} \right) \bar{e}^d + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_3 \left(\beta_1 \left(\mathbf{R}^{bc} + \frac{1}{3} \bar{\omega}^{b4} \bar{\omega}^{4c} \right) h^d + \left(\frac{1}{l^2} \beta_1 + 2\beta_2 \right) e^b e^c e^d \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Apéndice C

Condición de Juntura: forma explícita de la Curvatura

Extrínseca



A partir de la ecuación (4.16):

$$\varepsilon_{abcd} [\bar{\omega}^{4a}] e^l e^b e^c = \frac{\kappa}{21\lambda_3} \tilde{T}_d. \quad (\text{C.1})$$

Es posible encontrar la forma explícita de la curvatura extrínseca, para ello debemos considerar que $\tilde{T}_d = -\frac{1}{3!} \varepsilon_{abcd} \tilde{T}^s{}_d e^a e^b e^c$ y que en el caso sin torsión tenemos:

$$\bar{\omega}^{4a} = -K^a{}_l e^l, \quad (\text{C.2})$$

aplicando en la ecuación (C.1)

$$-\varepsilon_{abcd} [K^a{}_l] e^l e^b e^c = -\frac{\kappa}{126\lambda_3} \varepsilon_{abcs} \tilde{T}^s{}_d e^a e^b e^c. \quad (\text{C.3})$$

Para reescribir la ecuación (C.3) en la forma tensorial usual usamos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} e^{b_1} e^{b_2} \dots e^{b_n} &= \sqrt{|g|} \delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{b_1 b_2 \dots b_n} dx^n, \\ \delta_{a_1 a_2 \dots a_p a_{p+1} \dots a_n}^{a_1 a_2 \dots a_p b_{p+1} \dots b_n} &= p! \delta_{a_{p+1} \dots a_n}^{b_{p+1} \dots b_n}. \end{aligned}$$

Usando estas expresiones en (C.3) y omitiendo dx^n :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{abcd} [K^a{}_l] e^l e^b e^c &= \frac{\kappa}{126\lambda_3} \varepsilon_{abck} \tilde{T}^k{}_d e^a e^b e^c \\
[K^a{}_l] \delta_{abcd}^{bcldm} &= \frac{\kappa}{126\lambda_3} \tilde{T}^k{}_d \delta_{abck}^{abc m} \\
[K^a{}_l] \delta_{abcd}^{lbcm} &= \frac{\kappa}{126\lambda_3} \tilde{T}^k{}_d \delta_{abck}^{abc m} \\
2 [K^a{}_l] \delta_{ad}^{lm} &= \frac{\kappa}{21\lambda_3} \tilde{T}^k{}_d \delta_k^m \\
[K] \delta_d^m - [K^m{}_d] &= \frac{\kappa}{42\lambda_3} \tilde{T}^m{}_d,
\end{aligned} \tag{C.4}$$

para encontrar el valor de $[K]$ contraemos los índices restantes.

$$\begin{aligned}
4[K] - [K] &= \frac{\kappa}{42\lambda_3} \tilde{T} \\
[K] &= \frac{\kappa}{126\lambda_3} \tilde{T}.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Luego, la curvatura extrínseca toma la forma:

$$\begin{aligned}
[K^m{}_d] &= - \left(\frac{\kappa}{42\lambda_3} \tilde{T}^m{}_d - [K] \delta_d^m \right) \\
&= - \frac{\kappa}{42\lambda_3} \left(\tilde{T}^m{}_d - \frac{1}{3} \tilde{T} \delta_d^m \right)
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Apéndice D

Cascarón delgado método de distribuciones

Consideremos una hiper-superficie Σ embebida en un espacio V con métrica $g_{\mu\nu}$ que lo divide en 2, V^+ con métrica $g_{\mu\nu}^+$ en un sistema coordenado x_+^μ y V^- con métrica $g_{\mu\nu}^-$ en un sistema coordenado x_-^μ . A continuación se encontraran las condiciones que deben cumplir la métrica de V^+ y V^- para que no sea discontinua sobre Σ y para que $g_{\mu\nu}$ sea una solución a las ecuaciones de Einstein [38].

Consideremos una vector normal n^μ que apunta desde V^- a V^+ y un sistema coordenado y^a en ambas regiones de V , además consideremos un sistema coordenado x^μ en la vecindad de Σ , distinto a x_\pm^μ . También consideramos curvas geodésicas que cruzan de forma ortogonal usando su distancia o tiempo propio l , dependiente de de que tipo sean las geodésicas, como parámetro a lo largo ellas, talque cruzan a Σ en $l = 0$ y l es negativo en V^- .

Con las consideraciones anteriores, el vector normal queda definido por:

$$n_\alpha = \varepsilon \partial_\alpha l, \quad (\text{D.1})$$

donde :

$$g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = \epsilon \begin{cases} -1, & \text{si } \Sigma \text{ es tipo espacio} \\ 1, & \text{si } \Sigma \text{ es tipo tiempo} \end{cases}. \quad (\text{D.2})$$

Introducimos la distribución de Heavyside $\Theta(l)$, definida como:

$$\theta(l) = \begin{cases} 1, & \text{si } l > 0 \\ 0, & \text{si } l < 0 \end{cases}, \quad (\text{D.3})$$

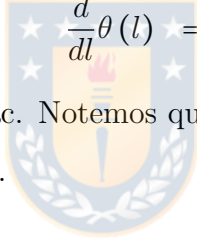
la distribución de Heavyside no esta definida en $l = 0$. Además Θ cumple con las siguientes propiedades

$$\theta^2(l) = \theta(l), \quad (\text{D.4})$$

$$\theta(l)\theta(-l) = 0, \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{d}{dl}\theta(l) = \delta(l), \quad (\text{D.6})$$

donde $\delta(l)$ es la delta de Dirac. Notemos que el producto de dos distribuciones, en general no es una distribución.



D.1 Primera condición de juntura

Utilizando la distribución de Heavyside podemos reescribir la métrica $g_{\mu\nu}$, en el sistema coordenado x^μ , de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu} = \theta(l)g_{\mu\nu}^+ + \theta(-l)g_{\mu\nu}^-. \quad (\text{D.7})$$

Para asegurar que $g_{\mu\nu}$ es una solución valida de las ecuaciones de Einstein debemos asegurar que el tensor de curvatura de Riemann este bien definido. Derivando (D.7):

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\rho} &= \theta(l)g_{\mu\nu,\rho}^+ + \theta(-l)g_{\mu\nu,\rho}^- + \frac{\partial\theta(l)}{\partial x^\rho}(g_{\mu\nu}^+ - g_{\mu\nu}^-) \\ &= \theta(l)g_{\mu\nu,\rho}^+ + \theta(-l)g_{\mu\nu,\rho}^- + \varepsilon\delta(l)[g_{\mu\nu}]n_\rho, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

donde: $[g_{\mu\nu}] = g_{\mu\nu}^+ - g_{\mu\nu}^-$ denota el salto de la métrica a través de Σ . Notemos que (D.8) contiene un termino singular, y debido a que los símbolos de Christoffel se

definen como en la ecuación (3.8), tenemos que ellos tendrán términos proporcionales a $\Theta(l)\delta(l)$ los cuales no están bien definidos, por lo cual imponemos:

$$[g_{\mu\nu}] = 0, \quad (\text{D.9})$$

es decir, exigimos que la métrica sea continua al pasar por la hiper-superficie, sin embargo, esta expresión solo es valida en el sistema coordenado x^μ .

Proyectando (D.9) sobre Σ , tenemos:

$$[q_{\mu\nu}] = 0, \quad (\text{D.10})$$

donde $q_{\mu\nu}$ es la métrica inducida sobre Σ . Esta ultima expresión nos dice que la métrica debe ser igual en ambos lados de Σ . La ecuación (D.10) es la primera condición de juntura.



D.2 Segunda condición de Juntura

Debido a la primera condición de juntura , los símbolos de Christoffel están bien definidos, de la siguiente forma:

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \theta(l)\Gamma^{+\rho}{}_{\mu\nu} + \theta(-l)\Gamma^{-\rho}{}_{\mu\nu}. \quad (\text{D.11})$$

Derivando esta expresión:

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu,\delta} = \theta(l)\Gamma^{+\rho}{}_{\mu\nu,\delta} + \theta(-l)\Gamma^{-\rho}{}_{\mu\nu,\delta} + \varepsilon\delta(l) [\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}] n_\delta, \quad (\text{D.12})$$

vemos que el último termino es singular, aun así el tensor de Riemann no presenta productos de distribuciones. El tensor de Riemann toma la forma:

$$R^\rho{}_{\mu\nu\delta} = \theta(l)R^{+\rho}{}_{\mu\nu\delta} + \theta(-l)R^{-\rho}{}_{\mu\nu\delta} + \delta(l)A^\rho{}_{\mu\nu\delta}, \quad (\text{D.13})$$

donde $A^\rho{}_{\mu\nu\delta} = [\Gamma^\rho{}_{\mu\delta}] n_\nu - [\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}] n_\delta$ El cual esta bien definido, salvo por la singularidad en $l = 0$ a la cual se le puede dar una interpretación física. Debido a que

la métrica es continua a lo largo de la hiper-superficie implica que, si existe, una singularidad esta debe estar dirigida en la dirección normal a Σ , es decir:

$$[g_{\mu\nu,\delta}] = k_{\mu\nu}n_\delta, \quad (\text{D.14})$$

donde $k_{\mu\nu}$ es un tensor de rango 2. Por lo tanto el tensor $A_{\mu\nu\delta}^\rho$ toma la forma:

$$A_{\mu\nu\delta}^\rho = \frac{\varepsilon}{2} (k^\rho{}_\delta n_\mu n_\nu - k^\rho{}_\nu n_\mu n_\delta - k_{\mu\delta} n^\rho n_\delta + k_{\mu\nu} n^\rho n_\delta). \quad (\text{D.15})$$

Reemplazando el tensor de Riemann en las ecuaciones de Einstein, considerando la forma del tensor $A_{\mu\nu\delta}^\rho$, encontramos que el tensor energía-momentum toma la siguiente forma:

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \theta(l)\bar{T}_{\mu\nu}^+ + \theta(-l)\bar{T}_{\mu\nu}^- + \delta(l)T_{\mu\nu}, \quad (\text{D.16})$$

donde $T_{\mu\nu}^\pm$ es el tensor energía-momentum en cada región de V y :

$$T_{\mu\nu} = k_{\alpha\mu}n^\alpha n_\nu + k_{\alpha\nu}n^\alpha n_\mu - kn_\mu n_\nu - \varepsilon k_{\mu\nu} - k_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta g_{\mu\nu} + \varepsilon k g_{\mu\nu}, \quad (\text{D.17})$$

es un tensor que describe una delgada distribución de materia sobre la hipersuperficie, por lo cual es ortogonal a n^μ . Por otro lado:

$$[K_{\mu\nu}] = [n_{\mu;\nu}] = -n_\alpha [\Gamma_{\mu\nu}^\alpha]. \quad (\text{D.18})$$

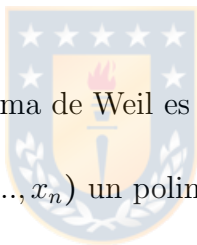
Contrayendo las dos últimas expresiones con $\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}$ y combinándolas obtenemos:

$$T_{ab} = -\frac{\varepsilon}{8\pi} ([K_{ab}] - [K] h_{ab}), \quad (\text{D.19})$$

la cual corresponde a la segunda condición. Estrictamente debemos imponer la condición $[K_{ab}] = 0$ para que se cumpla la juntura, sin embargo, el hecho de que esto no ocurra es debido a la presencia de materia en la hiper-superficie. En la Ref. [39] se muestra que este formalismo es equivalente al formalismo de Darmois-Israel,

Apéndice E

Teorema de Chern-Weil y formas de Transgresión



Antes de enunciar el Teorema de Weil es necesario definir otros conceptos.

- Definición 1 : Sea $f(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio se dice que f es simétrico si

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}), \quad (\text{E.1})$$

donde $\pi(i)$ corresponde a una permutación

- Definición 2: Sea G un grupo y sea \mathcal{G} su álgebra de Lie. Sea A_i una 1-forma valuada en \mathcal{G} . Sea P una función simétrica, esta es llamada invariante en G o G -invariante si $\forall g \in G$ y $\forall A_i \in \mathcal{G}$:

$$P(g^{-1}A_1g, \dots, g^{-1}A_rg) = P(A_1, \dots, A_r). \quad (\text{E.2})$$

Si $A_1 = A_2 = \dots = A_r = A$ entonces $P(A) = P(A, \dots, A)$ es llamada polinomio invariante de grado r .

- Definición 3: Sea H una p -forma, se dice que H es una forma cerrada si $dH = 0$.
- Sea M una p -forma y L una $p-1$ -forma. Se dice que M es exacta si $M = dL$

Teorema de Chern-Weil: Sea P_R un polinomio Invariante de grado r . Sean A y A' dos 1-forma y sea F y F' sus correspondientes 2-forma curvatura. Entonces el polinomio $P = P(F)$ satisface:

- $P(F)$ es una forma cerrada
- La diferencia $P(F') - P(F)$ es una forma exacta, es decir:

$$P(F') - P(F) = d \left\{ r \int_0^1 dt P_r(\Theta, F_t, \dots, F_t) \right\}, \quad (\text{E.3})$$

donde la forma exacta $r \int_0^1 dt P_r(\Theta, F_t, \dots, F_t)$ es llamada forma de transgresión, $\Theta = A - A'$, $F_t = F_t + A_t^2$ es una 2-forma curvatura que corresponde a la 1-forma $A_t = A + t\Theta$ conocida como 1-forma interpolante¹.



¹Para $t = 0$, $A_t = A$, mientras para $t = 1$, $A_t = A'$

Bibliography

- [1] A. Einstein (1915). “*Feldgleichungen der Gravitation*” Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte,(parte 2), 844–847.
- [2] A. Einstein (1905), “*Zur Elektrodynamik bewegter Körper.*” *Annalen der Physik.*(ser. 4), 17, 891–921.
- [3] Øyvind Grøn, Sigbjørn Hervik (2007).“*Einstein’s general theory of relativity.*” Springer .
- [4] E. Hubble. “*A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*”. *Proc. Nat. Acad. Sci*, 15(3), 168–173. (1929).
- [5] Abbott, B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abernathy, M. R. Acernese, F. Ackley, K. Adams, C. Adams, T. Addesso, P. Adhikari, R. X. et al. (2016). “*Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*”. *Phys. Rev. Lett.* 116, 061102.
- [6] A.H. Chamseddine, (1989). “*Topological Gauge Theory of Gravity in five and all odd Dimensions.* ”*Phys.Lett. B* 233 291.
- [7] C, Lanczos, *Ann. Math* 39 (1938) 842.
- [8] D.Lovelock, *J. Math Phys.*12 (1971) 498.
- [9] B-Zumino, *Phys. Rep.* 137 (1986) 109.

- [10] R.Troncoso, J.Zanelli, “*Higher-dimensional Gravity, Propagating Torsion and AdS Gauge Invariance.*” *Class. Quantum Grav.* 17 (2000) 4451.
- [11] F.Izaurieta,P.Minning,A.Perez,E. Rodriguez, P.Salgado. “ *Standard General Relativity from Chern-Simons Gravity.*” *Physics Letters B* 678 (2009) 213-217.
- [12] M.Cataldo, J. Crisostomo, S. del Campo, F. Gomez, C. Quinzacara, P.Salgado, *Eur.Phys.J.C* (2014) 74:3087.
- [13] F.Izaurieta, A.Pérez, E.Rodríguez, P.Salgado, “*Dual Formulation of the Lie Algebra S-expansion Procedure.*” *J. Math. Phys-* 50 (2009) 073511.
- [14] F.Izaurieta, E. Rodriguez, P. Salgado, “*Expanding Lie (Super)Algebras Through Abelian Semigroups*”. *J. Math. Phys.* 47 (2006) 123512.
- [15] F.Izaurieta, “*Expansión en Semigrupos y M-Supergravedad en 11 dimensiones.*” Tesis de Doctorado, Universidad de Concepción (2006).
- [16] E. Rodríguez, “*Formas de Transgresión y Semigrupos Abelianos en Supergravedad.*” Tesis de Doctorado, Universidad de Concepción, Chile (2006).
- [17] A.Pérez, “*Expansión de álgebras y Gravedad Chern-Simons.*” Tesis de Doctorado, Universidad de Concepción,Chile (2006).
- [18] T.Kaluza *Zum Unitätsproblem der Physik.* “Zum Unitätsproblem in der Physik”.*Int. J. Mod. Phys. D* 27, 14: 966–972 (1921).
- [19] O.Klein. “The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law”. *Nature.* 118 (2971): 516, 1926.
- [20] Barton Zwiebach (2009). “*A First Course in String Theory.*” Second Edition. Cambridge University Press.
- [21] Lisa Randall, Raman Sundrum. *Phys. Rev. Lett.*83(17), (1999) pp.3370-3373.

- [22] T. Shiromizu, K. Maeda y M. Sasaki, Phys. Rev. D 62, 024012 (2000).
- [23] Norbert Straumann, “*General relativity and relativistic astrophysics*”. Springer-Verlag (1984).
- [24] F. Izaurieta. “*Apuntes Gravitacion y geometria de Cartan.*”
- [25] D. Lovelock, H. Rund, *Tensors, differential forms and variational principles*. Dover Publications, inc; New York (1989).
- [26] M. Spivak, (1999). “*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol 2*” (3rd ed.). Publish or Perish.
- [27] M. Spivak, (1999). “*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol 3*” (3rd ed.). Publish or Perish.
- [28] Robert M. Wald (1984). “*General relativity.*” The University of Chicago Press.
- [29] K. Schwarzschild, (1916). “*Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie.*” Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) 1916, 189-196
- [30] J. Zanelli (2008). “*Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities*”. Second edition. hep-th/0502193
- [31] Ashok Das. “*Lectures on quantum field theory.*” (2008).
- [32] P.K. Concha, D.M. Peñañiel, E. K. Rodríguez, P. Salgado, “*Chern-Simons and Born-Infeld gravity theories and Maxwell algebras type*” Eur. Phys. J. C 74, (2014) 2741. [arXiv:1402.0023 hep-th].
- [33] P.K. Concha, D.M. Peñañiel, E.K. Rodríguez, P. Salgado (2013). “*Even dimensional General Relativity from Born-Infeld Gravity*”. Phys. Lett. B 725 419-424.

- [34] P.K.Concha, “*Teorías Chern-Simons y Born-Infeld de la Gravedad y Álgebras tipo Maxwell.*”
- [35] F.Gomez (2015). “*Cosmología en la gravedad de Einstein-Chern-Simons.*” Tesis de Doctorado, Universidad de Concepción, Chile.
- [36] F.Izaurieta, E.Rodríguez, P.Salgado, “*The extended cartan homotopy formula and a subspace separation method for Chern-Simons theory.*” Lett.Math.Phys.80 (2007) 127. arXiv: hep-th/0603061.
- [37] W. Israel. “*Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity.*” Il Nuovo Cimento, 44 B:1, 1966.
- [38] Eric Poisson. “*An advanced course in general relativity!*” Department of Physics. Univesity of Ghelph (2002).
- [39] R. Mansouri, M. Khorrami.(1996). “*Equivalence of Darmois-Israel and Distributional-Methods for Thin Shells in General Relativity.*” J.Math.Phys. 37. 5672-5683. arXiv:gr-qc/9608029.
- [40] R. Maartens, K. Koyama. “*Brane-world gravity*” . arXiv:1004.3962v2 [hep-th].
- [41] J. W. York, “*Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation.*”, Phys. Rev. Lett. bf 28, 1082 (1972).
- [42] R. C. Myers, “*Higher derivative gravity, surface terms and string theory.*”, Phys. Rev. D 36, 392 (1987).
- [43] E.Gravanis, S.Willinson.(2007). “*Intersecting hypersurfaces, topological densities and Lovelock gravity.*” J. Geom. Phys 57. arXiv:gr-qc/0401062.
- [44] S.Willinson (2004). *Intersecting hypersurfaces and lovelock gravity.*, PhD. Thesis. arXiv:gr-qc/0502089.

- [45] S. Mukohyama. “*Doubly covariant action principle of singular hypersurfaces in general relativity and scalar tensor theories.*”, Phys. Rev. D 65, 024028 (2002).

