



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

MEJORA DEL CONTROL CUÁNTICO CON OPTIMIZACIÓN COMPLEJA

Por: Bárbara Candia González

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al grado académico de Magíster en
Ciencias con Mención en Física

Diciembre 2021
Concepción, Chile

Profesor Guía: Aldo Delgado



© 2021, Bárbara Candia González

Ninguna parte de esta tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio o procedimiento, sin permiso por escrito del autor.

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer en primer lugar a mi profesor guía, Dr. Aldo Delgado, por el constante apoyo en cada parte del camino, por darme la libertad de desarrollar mi investigación y por siempre dar una palabra de animo cuando se necesitaba. Además al grupo de estudiantes de MIRO, en especial a Luciano Pereira, por todo el tiempo dedicado, por los consejos y por la inspiración diaria a querer mejorar.

También quiero agradecer a mi familia, en especial a mi madre por siempre confiar en mi y permitirme iniciar esta loca aventura de estudiar física, sin tu apoyo y tu amor nada de esto seria posible.

A mis amigos, por acompañarme en estos años y por siempre tener una palabra de aliento cuando lo necesitaba. En especial a Jorge Gidi, por todas esas horas de trabajo donde sin duda aprendí no solo de física y computación, si no que también de la increíble persona que eres.

Finalmente quiero dedicarle este trabajo a mi tío Hector Mansilla, por todo el amor que me entregaste, por ser siempre el mejor ejemplo a seguir, no solo como científico si no que también como persona y por demostrarme con el ejemplo lo complicada pero maravillosa que es la vida científica.

RESUMEN

En esta tesis presentamos un estudio sobre el control cuántico "*in situ*", utilizando el método GRAPE, para el problema de generar estados y compuertas cuánticas mediante distintos algoritmos de optimización compleja.

Primero se desarrolló el problema del control cuántico de compuertas de uno y dos qubit gracias a los algoritmos de primer orden SPSA y CSPSA y los de segundo orden 2SPSA y 2CSPSA. Los resultados obtenidos muestran que los algoritmos complejos (CSPSA y 2CSPSA) poseen un mejor rendimiento que los algoritmos reales, siendo 2CSPSA el que mejor se comporta para estos problemas, obteniendo valores de infidelidad de aproximadamente 10^{-6} y 10^{-5} , respectivamente. Extendiendo el estudio, se muestran los resultados obtenidos para el mismo problema pero ahora considerando un sistema abierto en presencia de ruido, nuevamente los resultados muestran que el algoritmo complejo CSPSA obtiene los mejores resultados de infidelidad con valores 10^{-4} .

La segunda parte del estudio se extiende a los estados cuánticos, se desarrolla el problema del control cuántico para estados de uno y dos qubit, al igual que para el problema anterior se utilizaron los algoritmos de primer orden CSPSA y SPSA y de segundo orden 2SPSA y 2CSPSA. Los resultados obtenidos muestra que los algoritmos complejos (CSPSA y 2CSPSA) poseen un mejor rendimiento que los algoritmos reales, siendo CSPSA el que mejor resultados obtiene para este problema, obteniendo valores de infidelidad aproximados de 10^{-6} y 10^{-4} , respectivamente.

ABSTRACT

In this work we present a study on quantum control "in situ", using the GRAPE method, for the problem of generating states and quantum gates by different complex optimization algorithms.

First, the problem of quantum control of one- and two-qubit gates was developed using the first-order SPSA and CSPSA algorithms and the second-order 2SPSA and 2CSPSA algorithms. The results obtained show that the complex algorithms (CSPSA and 2CSPSA) have better performance than the real algorithms, with 2CSPSA being the best performing for these problems, obtaining infidelity values of approximately 10^{-6} and 10^{-5} , respectively. Extending the study, the results obtained for the same problem but now considering an open system in the presence of noise are shown, again the results show that the complex CSPSA algorithm obtains the best infidelity results with 10^{-4} values.

The second part of the study is extended to quantum states, the quantum control problem is developed for one and two qubit states, as for the previous problem the first order algorithms CSPSA and SPSA and the second order algorithms 2SPSA and 2CSPSA were used. The results obtained show that the complex algorithms (CSPSA and 2CSPSA) have a better performance than the real algorithms, being CSPSA the one that obtains better results for this problem, obtaining approximate infidelity values of 10^{-6} and 10^{-4} , respectively.

Índice general

AGRADECIMIENTOS	I
Resumen	II
Abstract	III
1. Introducción	1
2. Marco Teórico	3
2.1. Fundamentos matemáticos	3
2.1.1. Álgebra lineal	3
2.1.2. Operadores	5
2.1.3. Notación matemática en Mecánica cuántica	5
2.1.3.1. Funciones con operadores	8
2.1.3.2. Tipos de operadores	8
2.2. Nociones de Mecánica Cuántica	10
2.2.1. Estados cuánticos	10
2.2.1.1. Tipos de estados	10
2.2.2. Postulados de la Mecánica Cuántica	12
2.2.3. Matriz densidad	14
2.3. Teoría de la Información Cuántica	17
2.3.1. Fidelidad	17
2.3.2. Compuertas cuánticas	18
2.3.2.1. Compuertas de 1-qubit	18
2.3.2.2. Compuertas de 2-qubit	19
2.4. Hamiltoniano	22
2.4.1. Aproximación de onda rotante	23
3. Metodología	25
3.1. Sistemas cuánticos	25
3.1.1. Evolución de un sistema cuántico cerrado	25
3.1.2. Evolución de un sistema abierto	28
3.1.3. Ecuación cuántica maestra	29

3.1.3.1.	Dinámica cuántica de los semigrupos	30
3.1.3.2.	Ecuación cuántica de Markov	31
3.1.4.	Decoherencia y desfase	32
3.1.4.1.	Decoherencia en computación cuántica	33
3.2.	Control cuántico	35
3.2.1.	Modelos de control cuántico	38
3.2.1.1.	Modelo bi-lineal	38
3.2.2.	Métodos de control cuántico	39
3.2.2.1.	Método GRAPE	40
3.3.	Algoritmos de optimización estocásticos	42
3.3.1.	SPSA (Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation)	43
3.3.1.1.	2SPSA (2 order Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation)	44
3.3.2.	CSPSA (Complex Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation)	46
3.3.2.1.	2CSPSA (2 order Complex Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation)	47
3.3.3.	Conceptos estadísticos	48
4.	Análisis y discusión	50
4.1.	Control cuántico de compuertas	50
4.1.1.	Control cuántico para compuertas de un qubit	50
4.1.2.	Control cuántico para compuertas de dos qubit	55
4.2.	Control cuántico para estados	60
4.2.1.	Control cuántico para un sistema de 1-qubit	60
4.2.2.	Control cuántico para un sistema de 2-qubit	62
5.	Conclusión	64
	Referencias	66

Índice de tablas

3.3.1. Ganancias usuales para el algoritmo SPSA	44
---	----



Índice de figuras

4.1.1.Resultados del problema de control cuántico para una compuerta aleatoria de 1-qubit, utilizando los métodos SPSA y CSPSA de primer y segundo orden.	52
4.1.2.Resultados del problema de control cuántico para una compuerta aleatoria de 1-qubit para un sistema abierto en presencia de dos fuentes de ruido, utilizando los métodos SPSA y CSPSA de primer y segundo orden.	55
4.1.3.Resultados del problema de control cuántico para una compuerta 2-qubit, en particular la compuerta CNOT, utilizando los métodos SPSA y CSPSA de primer y segundo orden.	57
4.1.4.Resultados del problema de control cuántico para una compuerta de 2-qubit, en particular la compuerta CNOT, para un sistema abierto en presencia de dos fuentes de ruido, utilizando los métodos SPSA y CSPSA de primer y segundo orden.	59
4.2.1.Resultados del problema de control cuántico para un sistema de 1-qubit, en particular el estado basal, utilizando los métodos SPSA y CSPSA de primer y segundo orden.	61
4.2.2.Resultados del problema de control cuántico para un sistema de 2-qubit, en particular un estado de Bell, utilizando los métodos SPSA y CSPSA de primer y segundo orden.	63

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años el desarrollo de las tecnologías cuánticas representan un área de estudio en constante aumento, gracias al desarrollo de técnicas de control la computación cuántica ha desarrollado un nivel impensado a principios de siglo. Sin embargo existen restricciones que impiden aplicar algunos algoritmos cuánticos debido a que requieren de operaciones cuánticas perfectas, un ejemplo de estos problemas es la fidelidad de las compuertas cuánticas, lo que restringe los protocolos de corrección de errores y por lo tanto limita el tipo de aplicaciones que se pueden realizar en un procesador cuántico.

La teoría de control cuántico es un área de investigación que pretende subsanar este problema, permitiendo desarrollar métodos en los cuales se manipule activamente la evolución de los sistemas. La ventaja potencial que ofrece el procesamiento de la información cuántica ha dado al control cuántico una relevancia no menor en la discusión del desarrollo de las tecnologías, tareas como la capacidad de emplear sistemas cuánticos para almacenar, manipular y recuperar información requiere un grado de control sin precedentes y motiva aún más el desarrollo de esquemas de control específicamente adaptados al entorno cuántico.

Desde las primeras investigaciones en este campo [1], [2], [3], los métodos de control cuántico han adquirido un papel estable en una serie de entornos

experimentales, entre los que se destacan, *Reacciones moleculares dirigidas por láser*, gracias a las técnicas teóricas de control óptimo. El diseño de campos láser capaces de inducir reacciones moleculares seleccionadas [4], [5], [6] como el *Diseño de la secuencia de pulsos en la Resonancia Magnética Nuclear (RMN)*, en la espectroscopia de RMN, el sistema (conjunto de espines atómicos o nucleares) es típicamente conducido por medio de secuencias de fuertes pulsos electromagnéticos.

En particular, para procesar la información en un dispositivo cuántico se requiere la creación de puertas lógicas cuánticas con alta fidelidad, utilizando el método de control cuántico in situ [7] y aprovechando los recientes avances en la estimación de la fidelidad [8], [9], [10], como poder estimar la fidelidad de alguna compuerta objetivo de forma eficiente a partir del experimento. Se diseña un algoritmo de control cuántico con optimización compleja que, en principio, puede encontrar de forma eficiente y robusta la secuencia de control óptima.

En conclusión, las diferentes formas de control cuántico se encuentran presentes en muchos de los experimentos realizados en el área de la computación cuántica, logrando obtener prometedores resultados e incentivando al continuo estudio y mejoramiento de este.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo se presentarán los conceptos fundamentales de la teoría de probabilidad, álgebra lineal y fundamentos matemáticos sobre los que está construida la Mecánica Cuántica.

2.1. Fundamentos matemáticos

En esta sección se desarrollará una breve descripción de conceptos y propiedades matemáticas básicas que se utilizarán en esta tesis.

2.1.1. Álgebra lineal

Para poder definir un espacio de Hilbert es necesario conocer primero las definiciones de un espacio vectorial y su producto interno asociado

Definición 1. Un *espacio vectorial* sobre un cuerpo Ω es una terna $(V, +, \cdot)$ formada por un conjunto no vacío V y aplicaciones

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V, \\ \cdot : \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Llamadas respectivamente *suma* (operación interna) y *producto por un*

escalar (operación externa).

Definición 2. A los elementos $\{|x\rangle, |y\rangle, \dots\}$ de V se les llama *vectores* mientras que al conjunto $\{a, b, \dots\} \subset \Omega$ se les llama *escalares*. Si $\Omega = \mathbb{R}$, V es un *espacio vectorial real*, mientras que si $\Omega = \mathbb{C}$, se habla de un *espacio vectorial complejo*.

Definición 3.: El *producto escalar*, producto punto o producto interior corresponde a una aplicación lineal, tal que

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : V \times V &\longrightarrow \Omega \\ |x\rangle, |y\rangle &\longmapsto \alpha = (|x\rangle, |y\rangle). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Llamaremos espacio con producto escalar al par $(V, (\cdot, \cdot))$ lo cual nos permitirá describir propiedades de carácter geométrico como ángulos y proyecciones.

Definición 4. En $(V, (\cdot, \cdot))$ se define una norma,

$$\| |x\rangle \| = \sqrt{(|x\rangle, |x\rangle)}, \tag{2.1.3}$$

la cual permite mostrar la noción de longitud en los *espacios vectoriales* y cada *producto interno* induce una norma sobre el espacio vectorial en el que esta definido.

Definición 5. Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial infinitamente grande con producto escalar $(V, (\cdot, \cdot))$ completo en la norma inducida.

Las componentes de los “vectores” ahora pueden ser números imaginarios o números complejos sin estar limitados a ser números reales, redefiniendo a la vez el concepto del producto interno de dos vectores para que dicho producto pudiese seguir siendo un número real con significado físico.

Definición 6. Dado dos espacios vectoriales V y W , se define el espacio vectorial *producto tensorial* $U = V \otimes W$ como el conjunto formado por los pares $|u\rangle = |v\rangle \otimes |w\rangle$, donde $|v\rangle \in V$ y $|w\rangle \in W$. El producto tensorial es

lineal en cada argumento, es decir

$$\begin{aligned} |v\rangle \otimes (a_1 |w_1\rangle + a_2 |w_2\rangle) &= a_1 |v\rangle \otimes |w_1\rangle + a_2 |v\rangle \otimes |w_2\rangle \\ (a_1 |v_1\rangle + a_2 |v_2\rangle) \otimes |w\rangle &= a_1 |v_1\rangle \otimes |w\rangle + a_2 |v_2\rangle \otimes |w\rangle. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Definición 7. Dado un espacio de Hilbert \mathbf{H} y su dual H^* , a cada $|w\rangle \in \mathbf{H}$ le corresponde su adjunto $(|w\rangle)^\dagger \equiv \langle w|$. Denominaremos *aplicación adjunta* a la siguiente correspondencia entre elementos de \mathbf{H} y su dual H^*

$$\begin{aligned} \dagger : H &\longrightarrow H^* \\ |x\rangle &\longmapsto |x\rangle^\dagger = \langle x|. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

2.1.2. Operadores

Recordemos que un vector cambia cuando se produce un cambio en su módulo, dirección o en ambos y el elemento que produce estos cambios se llama operador, el cual es representado gracias a una matriz de índices $i \times j$, donde i representa el número de filas y j el número de columnas.

2.1.3. Notación matemática en Mecánica cuántica

Los vectores y operadores que actúan sobre este espacio son descritos gracias a la *notación de Dirac*, la cual describe cada uno de los elementos que se trabajan en Mecánica Cuántica

- **ket:** Representa los vectores del espacio de Hilbert gracias a una matriz de $n \times 1$ componentes

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}. \quad (2.1.6)$$

- **bra:** Representa a los vectores del espacio dual asociado al espacio de

Hilbert mediante una matriz de $1 \times n$ componentes

$$\langle \psi | = \left(\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \cdots \quad \psi_n^* \right), \quad (2.1.7)$$

por lo tanto el producto punto se representa como

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \left(\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \cdots \quad \psi_n^* \right) \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}. \\ &= \sum_{i=1}^n \psi_i \psi_i^* \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Si consideramos un operador A_{ij} , podemos definir las siguientes aplicaciones

- **Operador traspuesto:** Es la aplicación de intercambiar filas por columnas

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.1.9)$$

Una matriz es *simétrica* si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, por otro lado, es *antisimétrica* si $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$

- **Operador conjugado:** Es la aplicación de conjugar cada elemento de la matriz

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & \cdots & A_{1n}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* & \cdots & A_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}^* & A_{n2}^* & \cdots & A_{nn}^* \end{pmatrix}. \quad (2.1.10)$$

Si todos los elementos de \mathbf{A} son reales, entonces $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, por el contrario si los elementos de \mathbf{A} son complejos entonces, $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$.

- **Operador adjunto:** Se refiere a la aplicación de trasponer y conjugar

una matriz al mismo tiempo

$$\mathbf{A}^\dagger = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \cdots & A_{n1}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* & \cdots & A_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}^* & A_{n2}^* & \cdots & A_{nn}^* \end{pmatrix}. \quad (2.1.11)$$

Si consideramos la *Definición 7*. y su aplicación (2.1.5), obtenemos

- Un ket se convierte en un bra

$$|\psi\rangle^\dagger = \langle\psi|. \quad (2.1.12)$$

- Un bra se convierte en un ket



$$\langle\psi|^\dagger = |\psi\rangle. \quad (2.1.13)$$

- Un escalar se convierte en su complejo conjugado

$$\lambda^\dagger = \lambda^*. \quad (2.1.14)$$

- **Operador hermítico:** A es un operador hermítico si se cumple

$$A^\dagger = A. \quad (2.1.15)$$

- **Operador unitario:** Si A es un operador invertible, un operador unitario satisface la ecuación

$$A^\dagger = A^{-1} \quad (2.1.16)$$

$$\implies A^\dagger A = AA^\dagger = I, \quad (2.1.17)$$

donde I representa la matriz identidad del espacio vectorial.

2.1.3.1. Funciones con operadores

- Conmutador: Se define el conmutador de dos operadores A y B como

$$[A, B] = AB - BA. \quad (2.1.18)$$

- Traza: la traza de una matriz A de tamaño $n \times n$, se define como la suma de los elementos de la diagonal principal de A , es decir,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}, \quad (2.1.19)$$

donde A_{ii} representa el elemento que está en la i -ésima fila y en la i -ésima columna de la matriz A . Para el caso de las matrices cuadradas, la traza es la suma de sus valores propios.



2.1.3.2. Tipos de operadores

- Operadores de Pauli

Las matrices de Pauli son tres, al igual que la dimensión del álgebra del Lie del grupo $SU(2)$. En su representación lineal más común tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

- Operadores σ_+ y σ_-

Una definición útil, derivada de los operadores de Pauli, es el de las

matrices σ_+ y σ_- las que se definen como

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.21)$$

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.22)$$

lo cual nos permite encontrar una nueva forma de escribir las matrices de Pauli

$$\begin{aligned} \sigma_+ + \sigma_- &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_x \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

$$\begin{aligned} i(\sigma_- - \sigma_+) &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_y \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_+ \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_z. \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

- Súper-operador de Liouville: Se define como el conmutador entre el hamiltoniano y el operador densidad de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = -i[H(t), \rho]. \quad (2.1.26)$$

2.2. Nociones de Mecánica Cuántica

2.2.1. Estados cuánticos

Según el formalismo de la mecánica cuántica, todo sistema está representado en un espacio de Hilbert H , donde el estado $|\psi\rangle \in H$ es el que contiene toda la información accesible acerca del sistema.

Si bien la representación en términos de vectores de estado es apropiada en muchos casos, no es la más general. Con el estado es posible construir el operador densidad,

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|. \quad (2.2.1)$$

En el caso discreto se puede pensar al operador densidad como una matriz, cuyos elementos evolucionan en el tiempo gracias a

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{K1} & \cdots & \rho_{KK} \end{pmatrix}, \quad (2.2.2)$$

donde si consideramos un estado de dos dimensiones correspondería a una matriz de cuatro elementos por lo que los grados de libertad de la matriz densidad son mucho mayores.

2.2.1.1. Tipos de estados

- Estados puros: Un estado puro es un estado que admite la representación

$$|\psi\rangle = \sum_k \alpha_k |\alpha_k\rangle, \quad (2.2.3)$$

donde α_k y $|\alpha_k\rangle$ representan los autovalores y auto-vectores, respectivamente, de algún observable A . Si bien en este caso $|\psi\rangle$ representa una superposición de estados y por lo tanto no hay certeza a la hora de predecir el resultado de una medición, este representa un

estado puro porque siempre existe un observable B tal que $|\psi\rangle$ sea uno de sus auto-estados. En términos del operador de estado, tenemos que ρ es una matriz con todos sus autovalores iguales a 0 excepto uno, que es igual a 1, por ejemplo para el caso 2×2

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.4)$$

El número uno en la diagonal significa que existe un observable tal que si realizamos una medición entonces hay certeza acerca del resultado del experimento. Por ejemplo, si el sistema tiene el operador densidad ρ entonces su estado $|\psi\rangle$ que lo compone es auto-estado de algún observable A . Entonces al medir A obtendremos como resultado $|\psi\rangle$ con probabilidad 1. A este tipo de estados se los llama estado puros porque siempre existe una base en la que el estado no es una superposición.

- Estados mixtos: Si el estado no es puro, resulta imposible representarlo en términos de estados y sólo puede usarse el operador densidad. En este caso no hay certeza en la predicción del resultado de ninguna medición que pueda hacerse sobre el sistema, y al estado se le llama mixto. Si se diagonaliza un estado mixto, se encuentra que todos sus autovalores son menores que 1, por ejemplo, retomando el caso 2×2

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.5)$$

La diferencia entre este operador densidad y el de la ecuación (2.2.4) es que en este caso no hay ningún 1 en la diagonal, por lo tanto no existe ningún observable tal que si realizamos una medición habrá certeza acerca del resultado del experimento. En otras palabras no se puede representar como un estado.

- Estados diagonales y no-diagonales: Dado un estado puro como el de la expresión (2.2.4), los elementos de la diagonal representan las probabilidades $\rho_{kk}(t) = |\alpha_k|^2$ de obtener el resultado α_k . Por otra parte los elementos fuera de la diagonal representan los términos de

interferencia que no tienen análogo clásico y constituyen una de las características peculiares de la mecánica cuántica. Puesto que los elementos no diagonales son la manifestación de la parte cuántica, un primer paso hacia la obtención de un límite clásico es la búsqueda de estados donde esta característica no se manifieste, es decir, estados donde estos elementos sean nulos. Los estados donde se cumple esta condición son llamados los estados diagonales.

El operador densidad es un operador hermítico y, por lo tanto, siempre existe una base en la que es diagonal, en efecto, el operador densidad se puede representar en distintas bases lo que da lugar a matrices distintas. A su vez, matemáticamente puede definirse una base particular que cambia instante a instante, en la cual la parte no-diagonal del operador de estado es siempre cero. Así, cuando se buscan los candidatos a estados clásicos, no se deben buscar simplemente estados diagonales, sino estados diagonales en una representación particular.

2.2.2. Postulados de la Mecánica Cuántica

A continuación hacemos una breve descripción de la Mecánica Cuántica la cual está gobernada por 4 postulados

- **Espacio de estados:** El primer postulado nos indica como describir al espacio matemático y las propiedades cuánticas de un sistema cuántico:

Postulado 1: Cada grado de libertad de un sistema físico tiene asociado un espacio vectorial complejo con producto interno, este espacio vectorial es llamado espacio de estados o espacio de Hilbert. Cuando el grado de libertad está aislado, su estado en un instante t es completamente descrito por un vector estado $|\psi(t)\rangle$ el cual es un vector unitario en el espacio estado del sistema.

- **Evolución:** El segundo postulado describe cómo evoluciona un sistema cuántico cerrado, es decir, que no interactúa con otros.

Postulado 2: Un sistema cerrado evoluciona bajo la descripción de una transformación unitaria. Así, el estado $|\psi_1\rangle$ de un sistema a un tiempo t_i se relaciona con el estado $|\psi_2\rangle$ del sistema en un tiempo t_f a través de un operador unitario U (donde $UU^\dagger = I$), que es función de los tiempos t_i y t_f . De este modo, la relación entre $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ está dada por

$$|\psi_2\rangle = U(t_i, t_f) |\psi_1\rangle. \quad (2.2.6)$$

Este postulado requiere que $|\psi\rangle$ obedezca una ecuación diferencial de la forma

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (2.2.7)$$

la cual es la ecuación de Schrödinger, donde H es el hamiltoniano del sistema.

- **Medición cuántica:** Desde el punto de vista experimental siempre existe una interacción con el medio, por lo tanto el sistema no siempre está sujeto a una evolución unitaria. De este modo, podemos obtener información de este sistema en forma de mediciones cuánticas

Postulado 3: Las mediciones cuánticas son descritas por una colección de operadores de medición $\{M_m\}$, los cuales actúan en el espacio de Hilbert del sistema que es medido. El índice m hace referencia al número de resultados que podrían ocurrir en un experimento. Si el estado del sistema cuántico en el instante previo a la medición es $|\psi\rangle$, entonces la probabilidad de obtener el resultado m está dada por

$$p_m = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle, \quad (2.2.8)$$

y el estado inmediatamente después de la medición toma la forma

$$|\psi_{pm}\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}, \quad (2.2.9)$$

el cual es un resultado completamente distinto al resultado clásico, ya

que al medir podemos cambiar completamente el estado del sistema.

Además, los operadores de medición cumplen la condición de completitud

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I, \quad (2.2.10)$$

donde podemos concluir que la suma de las probabilidades tiene que ser uno.

- **Sistemas compuestos:** Representan a los sistemas que están formados por más de una partícula, es decir, dos o más subsistemas.

Postulado 4: El espacio estado de un sistema físico compuesto es el producto tensorial del espacio de estados de cada uno de los subsistemas. Si esos subsistemas están numerados desde el 1 hasta el índice m , el espacio estado compuesto está dado por $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$. Si el subsistema i es preparado en el estado $|\psi\rangle_i$, el estado total del sistema tendría la forma

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\psi\rangle_m. \quad (2.2.11)$$

2.2.3. Matriz densidad

Hasta el momento estudiamos los conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica a través del formalismo de vectores estado, pero es posible utilizar una formulación alternativa de los postulados fundamentales en función de operadores densidad. Este formalismo nos entrega una forma conveniente de describir sistemas cuánticos cuyo estado no es completamente conocido.

Dado un sistema cuántico, que se puede encontrar en uno de los siguientes estados $|\psi\rangle_i$ etiquetados con el índice i , donde cada uno tiene una probabilidad p_i , llamamos matriz densidad u operador densidad a

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.2.12)$$

A partir de esta definición podemos reescribir los postulados en esta representación de matriz densidad de la siguiente forma

- *Postulado 1*: Si un sistema físico es descrito por un operador densidad ρ y este sistema se encuentra en el estado ρ_k con probabilidad p_k , entonces

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k. \quad (2.2.13)$$

- *Postulado 2*: El estado ρ del sistema a tiempo t_i se relaciona a un estado ρ_0 de un sistema a un tiempo t_f por una transformación unitaria $U(t_i, t_f)$ de la forma

$$\begin{aligned} \rho(t_f) &= \sum_k p_k U(t_i, t_f) |\psi_k(t_i)\rangle \langle \psi_k(t_i)| U^\dagger(t_i, t_f) \\ &= U(t_i, t_f) \rho(t_i) U^\dagger(t_i, t_f), \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

- *Postulado 3*: Si medimos el conjunto $\{M_m\}$ de operadores de medición sobre el conjunto $\{p_i, |\psi_i(t)\rangle\}$, llamado ensamble, la probabilidad de obtener el resultado m es

$$\begin{aligned} p(m) &= \sum_i p(m|i) p_i \\ &= \sum_i p_i \langle \psi_i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle \\ &= \sum_i p_i \text{tr}(M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i|) \\ &= \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho), \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

y el estado tras la medición es

$$\rho_m = \frac{M_m^\dagger \rho M_m}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (2.2.16)$$

- *Postulado 4*: Si el sistema i -ésimo está preparado en el estado ρ_i ,

entonces el estado total del sistema está dado por

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_l. \quad (2.2.17)$$

Matemáticamente, las matrices densidades están caracterizadas por el siguiente teorema:

Teorema 1: Un operador ρ es una matriz densidad asociada a algún conjunto $\{p_k, |\psi_k\rangle\}$, si y solo si satisface las condiciones:

1. ρ tiene traza igual a uno, $\text{tr}(\rho)=1$.
2. ρ es un operador definido semipositivo.



2.3. Teoría de la Información Cuántica

2.3.1. Fidelidad

La fidelidad es una herramienta de la teoría de probabilidad, que busca la comparación entre distribuciones de probabilidad. Por ejemplo, dadas dos distribuciones p_x y q_x sobre un conjunto con índice x , la fidelidad entre p y q se define como

$$F(p, q) \equiv \sum_x \sqrt{p_x q_x}. \quad (2.3.1)$$

En el caso cuántico, la fidelidad nace de la necesidad de cuantificar la cercanía entre dos estados o en nuestro caso la necesidad de medir la cercanía entre dos compuertas cuánticas. La fidelidad entre las compuertas U_c (compuerta obtenida experimentalmente) y U_t (compuerta que se quiere obtener o compuerta *target*) está dado por

$$F(U_c, U_t) = \frac{1}{d^2} |\text{tr}(U_t U_c)|^2,$$

donde d es la dimensión del sistema y cumple con las siguientes propiedades

- Se encuentra acotada entre

$$0 \leq F(U_c, U_t) \leq 1. \quad (2.3.2)$$

- Si $U_c = U_t$ obtenemos

$$F(U_c, U_t) = 1. \quad (2.3.3)$$

- Es simétrica

$$F(U_c, U_t) = F(U_t, U_c). \quad (2.3.4)$$

gracias a la definición de la fidelidad (2.3.1), podemos definir la infidelidad

como

$$\tilde{F}(U_c, U_t) = 1 - F(U_c, U_t) \quad (2.3.5)$$

2.3.2. Compuertas cuánticas

Un computador cuántico se compone por las contrapartes cuánticas de un computador clásico, circuitos cuánticos y compuertas cuánticas, las que transportan y manipulan la información cuántica. En esta sección nos centraremos en definir las compuertas cuánticas más utilizadas y más importantes para nuestro estudio.

2.3.2.1. Compuertas de 1-qubit

Las compuertas de un qubit puede definirse como aquel operador unitario que actúa sobre el espacio de un qubit. Estos operadores pueden ser representados en el espacio de Hilbert bidimensional como matrices unitarias de 2×2 . Las diferentes compuerta cuánticas transforma un estado cuántico en otro estado cuántico de la siguiente manera

- Compuerta \mathbb{X} : El análogo cuántico de la compuerta clásica NOT, esta dada por un proceso cuántico que lleve el estado $|0\rangle$ al estado $|1\rangle$, y viceversa. Podemos representar a la compuerta NOT en forma matricial de la forma del operador de Pauli σ_x

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.6)$$

y su acción sobre los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ es

$$\begin{aligned} \sigma_x |0\rangle &= |1\rangle \\ \sigma_x |1\rangle &= |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

- Compuerta \mathbb{Y} : Esta compuerta intercambia las amplitudes de normalización y agrega una fase a estas. Podemos representar esta

compuerta en forma matricial de la forma del operador de Pauli σ_y

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.8)$$

y su acción sobre los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ es

$$\begin{aligned} \sigma_y |0\rangle &= i |1\rangle \\ \sigma_y |1\rangle &= -i |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

- Compuerta \mathbb{Z} : Esta compuerta deja al estado $|0\rangle$ tal cual e invierte el signo del estado $|1\rangle$. Podemos representar esta compuerta en forma matricial de la forma del operador de Pauli σ_z

$$\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.3.10)$$

y su acción sobre los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ es

$$\begin{aligned} \sigma_z |0\rangle &= |0\rangle \\ \sigma_z |1\rangle &= -|1\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

2.3.2.2. Compuertas de 2-qubit

En general podemos definir una compuerta de dos qubit de manera similar a como definimos a la compuerta de un qubit. Es un operador unitario pero actúa sobre los estados de los dos qubits, los cuales están representados en el espacio de Hilbert de 4×4 . Las compuertas de dos qubits se describen mediante el operador de evolución temporal. Sin embargo, estas se describen mediante hamiltonianos que necesariamente presentan un acoplamiento entre ambos sistemas

$$H(t) = H_1^{qubit} + H_2^{qubit} + H_{acoplamiento}, \quad (2.3.12)$$

el cual pertenece al espacio de Hilbert de $H = H_1 \otimes H_2$ y los estados del sistema se expresan como $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. En particular los estados de la base computacional se describen

$$\begin{aligned} |00\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle \\ |01\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle \\ |10\rangle &= |1\rangle \otimes |0\rangle \\ |11\rangle &= |1\rangle \otimes |1\rangle. \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

- Compuerta C-NOT: La compuerta NOT controlada actúa utilizando a uno de los qubits como control y el otro como el objetivo del cambio. En términos de ecuaciones el efecto sobre elementos de la base computacional son

$$\begin{aligned} U_{CNOT} |00\rangle &= |00\rangle \\ U_{CNOT} |01\rangle &= |01\rangle \\ U_{CNOT} |10\rangle &= |11\rangle \\ U_{CNOT} |11\rangle &= |10\rangle. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

y la matriz que la describe es

$$U_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3.15}$$

donde es fácil verificar que la primera fila de U_{CNOT} describe la transformación del estado $|00\rangle$, la segunda fila transforma el estado $|01\rangle$ y así sucesivamente.

Por lo tanto, si el qubit de control es $|0\rangle$ el qubit controlado no sufre cambio, sin embargo si el qubit de control es $|1\rangle$ entonces el qubit controlado es negado.

Es importante mencionar que el conjunto formado por la compuerta C-NOT más las compuertas de 1-qubit presentadas anteriormente

representan un conjunto universal y por lo tanto cualquier compuerta lógica de n -qubits puede ser realizada por este conjunto universal.



2.4. Hamiltoniano

El hamiltoniano es un operador que representa la suma de las energías cinéticas de todas las partículas del sistemas más la energía potencial de las partículas asociadas al sistema. El hamiltoniano toma diferentes formas y se puede simplificar en algunos casos teniendo en cuenta las características concretas del sistema bajo análisis, como una o varias partículas en el sistema, interacción entre partículas, etc.

En nuestro caso de estudio es conveniente mostrar el caso particular del problema de un campo electromagnético libre en una cavidad perfecta

$$E = i \sum_k \epsilon_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \left(a_k e^{ikr} - a_k^\dagger e^{-ikr} \right), \quad (2.4.1)$$

donde V corresponde al volumen de la cavidad, a_k y a_k^\dagger son los operadores de destrucción y creación de fotones con vector de onda k y polarización ϵ_k . El hamiltoniano libre del campo tiene la forma

$$H_f = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (2.4.2)$$

Si consideramos un conjunto de átomos de dos niveles con el nivel de energía superior $|1\rangle$ y el nivel energético inferior $|0\rangle$, el hamiltoniano libre tiene la forma

$$H_a = \frac{\hbar\omega_a}{2} \sum_i \sigma_{zi}, \quad (2.4.3)$$

donde $\sigma_{zi} = |1_i\rangle \langle 1_i| - |0_i\rangle \langle 0_i|$ y $\hbar\omega_a$ es la energía de separación de ambos niveles. El hamiltoniano de interacción entre la cavidad y el átomo, aplicando la aproximación dipolar tiene la forma

$$H_{fa} = \sum_j \left(g_k S_+ a_k + g_k^* S_- a_k^\dagger - g_k S_+ a_k^\dagger - g_k^* S_- a_k \right), \quad (2.4.4)$$

donde $S_\pm = \sum_j \sigma_{\pm j}$. Supongamos que sólo un modo de frecuencia de la cavidad es importante, por lo que el hamiltoniano total es de la forma

$H = H_f + H_a + H_{fa}$, es decir

$$H = \hbar\omega_a S_z + \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right) + g(S_+ a + S_- a^\dagger - S_+ a^\dagger - S_- a), \quad (2.4.5)$$

este hamiltoniano se obtiene gracias al modelo de Jaynes – Cummings y para encontrar una solución analítica a la ecuación de Schrödinger gracias a este modelo es necesario realizar alguna aproximación.

2.4.1. Aproximación de onda rotante

Debido a que existe el problema de encontrar soluciones a la ecuación de Schrödinger, se vuelve necesario estudiar métodos que nos permitan encontrar soluciones analíticas aproximadas de esta. La aproximación de onda rotante, RWA por sus siglas en inglés, nos permite desestimar términos debido a que tienden a cero. En específico si consideramos la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \quad (2.4.6)$$

podemos obtener

$$\begin{aligned} 2 \cos(\theta) &= e^{i\theta} + e^{-i\theta} \\ &= e^{i\theta} (1 + e^{-2i\theta}) \approx e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Debido a que $e^{-i\theta}$ se aleja de $e^{i\theta}$ el doble de rápido, entonces podemos despreciarlo. En general, términos que oscilan rápidamente pueden ser despreciados debido a que

$$\int e^{\pm in\theta} d\theta = \frac{e^{\pm in\theta}}{\pm in} \approx 0, \quad (2.4.8)$$

cuando n es grande.

El hamiltoniano presentado en (2.4.5) necesita de una aproximación adicional para obtener una solución analítica. Esta transformación es aplicada sobre

el estado y es generada gracias al operador σ_z de la forma

$$|\psi(t)\rangle_R = e^{iw_f\sigma_z t/2} |\psi(t)\rangle, \quad (2.4.9)$$

lo cual produce una transformación a la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_R = -\frac{w_f\sigma_z}{2} |\psi\rangle_R + e^{iw_f\sigma_z t/2} H e^{-iw_f\sigma_z t/2} |\psi\rangle_R \equiv H_R |\psi\rangle_R. \quad (2.4.10)$$

Usando la propiedad

$$e^{i\sigma_z\tau/2} \sigma_{\pm} e^{-i\sigma_z\tau/2} = \sigma_{\pm} e^{\pm i\tau}, \quad (2.4.11)$$

el hamiltoniano (2.4.5) toma la forma

$$H_R = \frac{\Delta}{2} \sigma_z + g\sigma_+ + g^*\sigma_- + g^*\sigma_+ e^{i2w_f t} + g\sigma_- e^{-i2w_f t}, \quad (2.4.12)$$

donde el parámetro Δ es llamado “*detuning*”. Si consideramos (2.4.8), es decir aplicamos aproximación de onda rotante y despreciamos los términos que oscilan rápidamente, obtenemos que $e^{\pm i2w_f t} \approx 0$, por lo que el hamiltoniano del sistema luego de la aproximación es de la forma

$$H_R^{RWA} = \frac{\Delta}{2} \sigma_z + g\sigma_+ + g^*\sigma_-, \quad (2.4.13)$$

donde Δ corresponde al parámetro de “*detuning*”. Los términos de este hamiltoniano de interacción tienen la siguiente interpretación

- $g\sigma_+$: Un fotón es absorbido y el átomo es excitado.
- $g^*\sigma_-$: Emisión de un fotón y destrucción de excitación en el átomo.

Estos dos procesos conservan la energía y para una una constante de acoplamiento muy débil varían lentamente en el tiempo.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Sistemas cuánticos

Para poder iniciar el análisis de los sistemas cuánticos abiertos es necesario recordar los conceptos de los sistemas cuánticos cerrados, probablemente la evolución temporal de los sistemas físicos es el factor principal para entender su naturaleza y propiedades. En los sistemas clásicos, la evolución temporal suele formularse en términos de ecuaciones diferenciales como por ejemplo, las ecuaciones de Euler-Lagrange, ecuaciones de Hamilton, ecuación de Liouville, etc. Todos los ejemplos anteriores se diferencian entre si ya que presentan características muy diferentes según el sistema físico que quieran describir.

3.1.1. Evolución de un sistema cuántico cerrado

Desde los inicios de la teoría cuántica, los físicos han intentado a menudo trasladar los métodos que eran útiles en el caso clásico al cuántico, así fue que Erwin Schrödinger obtuvo la primera ecuación de evolución cuántica en 1926. Esta ecuación, llamada desde entonces ecuación de Schrödinger, describe el comportamiento de un sistema cuántico aislado o cerrado, es

decir, un sistema que no intercambia información (energía y/o materia) con otro sistema.

Si nuestro sistema aislado se encuentra en algún estado puro $|\Psi(t)\rangle \in H$ en el momento t , la ecuación de Schrödinger es

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \frac{-i}{\hbar} H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (3.1.1)$$

donde $H(t)$ es el hamiltoniano del sistema. En resumen, la ecuación de Schrödinger es para la mecánica cuántica tan fundamental como las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo o las leyes de Newton para la mecánica clásica. Una propiedad importante de la ecuación de Schrödinger es que no modifica la norma de los estados, debido a que el hamiltoniano es auto-adjunto ($H(t) = H^\dagger(t)$), por lo tanto al ser una ecuación lineal su solución esta dada en términos de una evolución unitaria $U(t, r)$, tal que

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad (3.1.2)$$

donde el operador evolución cumple con la condición

$$U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = U(t, t_0)U^\dagger(t, t_0) = \mathbf{1} \Rightarrow U^{-1} = U^\dagger, \quad (3.1.3)$$

entonces, si reemplazamos (3.1.2) en (3.1.1) obtenemos

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0). \quad (3.1.4)$$

Por supuesto, la forma específica del operador de evolución depende de las propiedades del propio hamiltoniano.

- En el caso más simple en el que el hamiltoniano es independiente del tiempo, la solución formal de la ecuación de Schrödinger se obtiene directamente como

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)}. \quad (3.1.5)$$

- Cuando el hamiltoniano depende del tiempo podemos escribir la

evolución como

$$U(t, t_0) = e^{-i \int_{t_0}^t H(s) ds}. \quad (3.1.6)$$

donde el término de la exponencial es obtenido gracias a la expansión en serie de Dyson.

Para un sistema de *estados mixtos*, la estadística asociada puede ser representada por el operador ρ . Podemos derivar una ecuación del movimiento de la matriz densidad gracias a

$$\rho(t_0) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} |\psi_{\alpha}(t_0)\rangle \langle \psi_{\alpha}(t_0)|, \quad (3.1.7)$$

entonces, para cualquier tiempo t , (3.1.7) toma la forma

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_{\alpha} w_{\alpha} U(t, t_0) \\ &= \sum_{\alpha} w_{\alpha} U(t, t_0) |\psi_{\alpha}(t_0)\rangle \langle \psi_{\alpha}(t_0)| U^{\dagger}(t, t_0). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Usando nuevamente (3.1.7), obtenemos

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^{\dagger}(t, t_0), \quad (3.1.9)$$

derivando obtenemos la ecuación de movimiento para la matriz densidad

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[H(t), \rho(t)], \quad (3.1.10)$$

llamada **ecuación de Liouville - von Neumann** donde es conveniente definir el operador de Liouville $\mathcal{L}(t)$ como

$$\mathcal{L} = -i[H(t), \rho]. \quad (3.1.11)$$

Finalmente la ecuación (3.1.10) toma la forma

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \mathcal{L}(t) \rho(t), \quad (3.1.12)$$

- Para un hamiltoniano independiente del tiempo, el operador \mathcal{L} es

también independiente del tiempo, por lo que la solución a la ecuación (3.1.12) es análoga a (3.1.5)

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}(t-t_0)}\rho(t_0). \quad (3.1.13)$$

- Para un hamiltoniano dependiente del tiempo, el operador $\mathcal{L}(t)$ es también dependiente, por lo que la solución a la ecuación (3.1.12) es análoga a (3.1.6)

$$\rho(t) = e^{\int_{t_0}^t ds \mathcal{L}(s)}\rho(t_0). \quad (3.1.14)$$

3.1.2. Evolución de un sistema abierto

En términos generales, un sistema abierto es un sistema cuántico A que está acoplado a otro sistema cuántico B llamado entorno. Por lo tanto, representa un sistema total combinado $A + B$, que en la mayoría de los casos se supone cerrado. Sin embargo, el estado del subsistema A cambiará como consecuencia de su dinámica interna y de la interacción con el entorno. La interacción da lugar a ciertas correlaciones entre el sistema y el entorno, de modo que los cambios de estado resultantes de A no pueden, en general, representarse en términos de dinámica unitaria y hamiltoniana. La dinámica del subsistema A inducida por la evolución hamiltoniana del sistema total se suele denominar dinámica reducida del sistema y a A se le llama también sistema reducido. La motivación para el estudio de los sistemas abiertos es que en muchas situaciones físicamente importantes un modelo matemático completo de la dinámica del sistema combinado es demasiado complicado.

El espacio total de Hilbert se descompone en dos partes, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, donde $\mathcal{H}_{A,B}$ corresponden a sistemas cuánticos distintos. El hamiltoniano total del sistema tiene la forma

$$H(t) = H_A \otimes \mathcal{I}_B + \mathcal{I}_A \otimes H_B + \hat{H}_I(t), \quad (3.1.15)$$

donde H_A es el hamiltoniano del sistema abierto A , H_B es el hamiltoniano

libre del entorno B y \hat{H}_I es el hamiltoniano que describe la interacción entre el sistema y el ambiente. La pregunta a responder es entonces, ¿qué propiedades tiene la evolución temporal para el sistema reducido? En primer lugar, hay que establecer la relación entre la densidad total $\rho \in \mathcal{H}$ y la matriz densidad de cada subsistema. Recordando que la traza de A , está dada por la traza parcial sobre el otro subsistema B

$$\rho_A = \sum_l \langle \psi_l^B | \rho | \psi_l^B \rangle = Tr_B(\rho). \quad (3.1.16)$$

Una propiedad importante de la operación de traza parcial, es que aunque $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ sea puro, ρ_A puede ser mixto, lo cual ocurre si $|\psi\rangle$ presenta entrelazamiento. Dada la matriz de densidad total $\rho(t_0)$, tomando la traza parcial en (3.1.9), el estado de A en el momento t , $\rho_A(t)$, viene dado por

$$\rho_A(t) = Tr_B(U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)), \quad (3.1.17)$$

donde $U(t, t_0)$ es el operador evolución total del sistema, esto se cumple siempre y cuando $U(t, t_0) = U_A(t, t_0) \otimes U_B(t, t_0)$ y nos dice que ambos subsistemas cuánticos A y B están intercambiando información entre sí (interactuando). De forma análoga, la ecuación de movimiento para la matriz densidad reducida se obtiene tomando la traza parcial sobre el entorno en ambos lados de la ecuación de Liouville-von Neumann para el sistema total

$$\frac{d}{dt}\rho_A(t) = -itr_B[H(t), \rho(t)]. \quad (3.1.18)$$

3.1.3. Ecuación cuántica maestra

La propiedad más importante de un proceso de Markov clásico y homogéneo es la propiedad del semigrupo, que implica un generador independiente del tiempo. La extensión de esta propiedad a la mecánica cuántica conduce a los conceptos de un semigrupo dinámico cuántico y un proceso de Markov cuántico.

Antes de estudiar bajo qué condiciones puede un sistema cuántico abierto ser descrito por una evolución markoviana y encontrar su ecuación cuántica maestra, revisaremos los aspectos más importantes de los semigrupos.

3.1.3.1. Dinámica cuántica de los semigrupos

En general, la dinámica del sistema reducido definido por las ecuaciones exactas (3.1.17) y (3.1.18) será bastante complicada, sin embargo, podemos formular la dinámica del sistema reducido en términos de un semigrupo dinámico cuántico.

Semigrupo dinámico: Supongamos que somos capaces de preparar en el momento $t = 0$ el estado del sistema total $A + B$ como un estado producto no correlacionado $\rho(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_B$, donde $\rho_A(0)$ es el estado inicial del sistema reducido A y ρ_B representa algún estado del entorno. La transformación que describe el cambio del sistema reducido desde el tiempo inicial $t = 0$ hasta algún tiempo $t > 0$ puede entonces escribirse de la forma

$$\begin{aligned} \rho_A(0) \rightarrow \rho_A(t) &= V(t)\rho_A(0) \\ &= \text{tr}_B\{U(t, 0)[\rho_A(0) \otimes \rho_B]U^\dagger(t, 0)\}, \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

donde $V(t)$ define un mapeo desde el espacio $\mathcal{A}(\mathcal{H}_A)$ de las matrices de densidad del sistema reducido sobre sí mismo,

$$V(t) : \mathcal{A}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{H}_A), \quad (3.1.20)$$

este mapeo describe el cambio del estado del sistema abierto a lo largo del tiempo t .

Hemos introducido anteriormente un mapa dinámico $V(t)$ para un tiempo fijo $t > 0$. Si ahora permitimos que t varíe, obtenemos un conjunto $\{V(t)|t > 0\}$ de mapas dinámicos donde $V(0)$ es el mapeo de la identidad. Dicho conjunto describe toda la evolución temporal del sistema abierto, que, en general,

podría ser muy complicada.

3.1.3.2. Ecuación cuántica de Markov

Dado un semi-grupo dinámico cuántico, existe bajo ciertas condiciones matemáticas, un mapa lineal \mathcal{L} generador del semi-grupo que nos permite representarlo en forma exponencial

$$V(t) = e^{\mathcal{L}t}. \quad (3.1.21)$$

Esta representación produce inmediatamente una ecuación diferencial de primer orden para la matriz densidad reducida del sistema abierto ρ_A

$$\frac{d}{dt}\rho_A(t) = \mathcal{L}\rho_A(t), \quad (3.1.22)$$

que se denomina **ecuación maestra cuántica de Markov**.

El generador \mathcal{L} del semi-grupo representa un super-operator y puede considerarse como una generalización del super-operator de Liouville (3.1.11) que ha sido introducido en el “Capítulo 2” y que está dado por el conmutador con algún hamiltoniano. Pero este operador \mathcal{L} posee una forma general para cualquier semi-grupo cuántico dinámico, que tiene la forma

$$\mathcal{L}\rho_A = -i[H, \rho_A] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_k \left(A_k \rho_A A_k^\dagger - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho_A - \frac{1}{2} \rho_A A_k^\dagger A_k \right), \quad (3.1.23)$$

donde el primer término del generador representa la parte unitaria de la dinámica generada por el hamiltoniano H , los operadores A_k se denominan operadores de Lindblad (se forman gracias combinaciones lineales de operadores ortogonales en el espacio de Liouville) y la correspondiente matriz densidad (3.1.17).

- *Teorema de Lindblad: Una ecuación diferencial es una ecuación maestra*

markoviana si y sólo si puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{dt}\rho_A = -i[H, \rho_A] + \sum_k \gamma_k \left(A_k \rho_A A_k^\dagger - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho_A - \frac{1}{2} \rho_A A_k^\dagger A_k \right) \quad (3.1.24)$$

donde $H(t)$ y $V_k(t)$ son operadores dependientes del tiempo, con $H(t)$ auto-adjunto, y $\gamma_k(t) \geq 0$ para todo k en el tiempo t .

Es conveniente definir el término de disipación de la ecuación maestra como

$$\mathcal{D}(\rho_A) \equiv \sum_k \gamma_k \left(A_k \rho_A A_k^\dagger - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho_A - \frac{1}{2} \rho_A A_k^\dagger A_k \right) \quad (3.1.25)$$

este término es fundamental para poder describir la dinámica de los sistemas cuánticos abiertos ya que introduce ruido y permite una aproximación más real del sistema, finalmente reescribimos la ecuación y obtenemos la forma más general de la ecuación cuántica maestra de Markov (3.1.24) como

$$\frac{d}{dt}\rho_A = -i[H, \rho_A] + \mathcal{D}(\rho_A(t)). \quad (3.1.26)$$

Analogamente al caso revisado en la sección de sistemas abiertos, la evolución para este sistema se calcula utilizando el método de vectorización, obteniendo

$$|\rho(t)\rangle\rangle = e^{\mathcal{L}} |\rho_0\rangle\rangle \quad (3.1.27)$$

3.1.4. Decoherencia y desfase

Los experimentos realizados en el área de la computación cuántica nunca pueden controlar con perfecta precisión todas las condiciones de su montaje. Es por esto que si consideramos las variables externas que afectan al sistema es necesario trabajar con estados mixtos, conjuntos de estados puros creados con esas condiciones aleatorias o fluctuantes. Este promedio provoca la decoherencia, la destrucción progresiva de las superposiciones cuánticas y los estados entrelazados. El estudio de la decoherencia se basa en el estudio de la evolución del estado reducido del sistema (3.1.17), representado por una matriz escrita en la base privilegiada. Ya sea calculando explícitamente

la matriz reducida o analizando caso por caso la ecuación maestra es posible determinar si, bajo ciertas condiciones, el operador de estado reducido se convierte en diagonal o no. En muchos modelos de sistemas físicos, donde la cantidad de grados de libertad del ambiente es enorme, se demuestra que

$$\rho_A(0) \rightarrow \rho_A^D(t). \quad (3.1.28)$$

Es decir, luego de un tiempo de decoherencia t_D la matriz reducida del sistema evolucionó a una matriz diagonal, generando un proceso de decoherencia inducido por la gran cantidad de grados de libertad del ambiente. El continuo “monitoreo” que ejerce el ambiente sobre el sistema produce una “degradación” de los estados cuánticos en estados “diagonales”.

3.1.4.1. Decoherencia en computación cuántica

Durante los últimos años, el estudio de la decoherencia cuántica se ha tornado particularmente importante debido que es un proceso que impediría el funcionamiento de las computadoras cuánticas. Esto se debe a que la decoherencia elimina algunas correlaciones cuánticas que son la esencia de los procesos de interés en este tipo de computación. Por decirlo de un modo sencillo, la decoherencia convertiría las computadoras cuánticas en clásicas y, por lo tanto, cualquier intento por construirlas debe incluir una “protección contra decoherencia”.

El tipo más sencillo de decoherencia es el “dephasing”, un cambio aleatorio de la fase relativa entre los estados propios de nuestro sistema. Se origina a partir de una fluctuación de las eigen-energías de nuestro sistema: los valores de estas eigen-energías adquieren fluctuaciones aleatorias que típicamente son modeladas como ruido blanco. Una fuente común de desfase son las líneas de control utilizadas para estabilizar y medir qubits y cavidades. Estos controles pueden transportar fluctuaciones electromagnéticas que desplazan aleatoriamente las energías de los estados de los qubits superconductores.

Cuando un estado cuántico sufre de desfase, debe describirse como una matriz de densidad, descrito en la sección 3.1.3 donde el operador de Liouville modela los procesos de decoherencia.



3.2. Control cuántico

La teoría de control cuántico es un área de investigación en rápida evolución, desde sus inicios en los años 80', logrando grandes avances en el estudio de los fenómenos cuánticos como su implementación en la investigación en física y química cuántica. Uno de los principales objetivos de la teoría de control cuántico es establecer una base teórica firme y desarrollar una serie de métodos sistemáticos para la manipulación y el control de los sistemas cuánticos. Este objetivo no es trivial, ya que los sistemas cuánticos tienen muchas características únicas, por ejemplo entrelazamiento y coherencia, que no se dan en los sistemas clásicos, además de que su dinámica debe ser descrita por la teoría cuántica.

La teoría de control cuántico ha alcanzado ya importantes éxitos en la química física [11], [12], la física atómica y molecular [13] y la óptica cuántica [14], también ha contribuido a la comprensión de los aspectos fundamentales de la mecánica cuántica [15]. En los últimos años, el desarrollo de los principios generales de la teoría de control cuántico se ha reconocido como un requisito esencial para la aplicación de las tecnologías cuánticas.

La controlabilidad de los sistemas cuánticos es un concepto fundamental, debido a que nos entrega información sobre si podemos conducir un sistema cuántico a un estado o compuerta deseado. Este problema tiene importancia práctica, ya que está estrechamente relacionado con la universalidad de los sistemas cuánticos, y por lo tanto con la universalidad de la computación cuántica. Diferentes nociones de controlabilidad se han desarrollado en estos 40 años, como la controlabilidad de estado puro, la controlabilidad de compuertas, la controlabilidad completa, la controlabilidad de estado propio y muchos otros. Un enfoque común de la investigación se centra en sistemas cuánticos de dimensión finita, los criterios de controlabilidad pueden expresarse en términos de la estructura y el rango de los elementos del sistema cuántico, lo cual permite un tratamiento matemático sencillo del problema. Además si se considera el caso de un sistema cuántico cerrado, como la mayoría de los estudios actuales, se pueden aplicar directamente los

métodos de la teoría de control clásica.

Sin embargo, los criterios de controlabilidad para problemas más interesantes, como lo sería el estudio de un sistema de gran dimensión o considerando un sistema cuántico abierto, pueden resultar difíciles desde el punto de vista computacional por lo que poseer un algoritmo de optimización adecuado se vuelve fundamental para el desarrollo de estas nuevas investigaciones. A grandes rasgos, el paradigma actual del control cuántico se desarrolla en cuatro pasos [16]:

- **Modelación:** El primer paso para desarrollar cualquier problema de control cuántico es crear un modelo físico de la dinámica que experimenta el sistema. Sin embargo, como el sistema real posee muchas variables a considerar, es necesario crear un modelo aproximado, es por eso que podemos asumir que nuestro modelo nunca será precisamente correcto, lo cual afectará la precisión del control ya que se verá limitada por la precisión del modelo.
- **Estimación:** Una vez obtenido nuestro modelo, será necesario encontrar sus parámetros. Para esto se crearon diferentes técnicas, como la tomografía de procesos completos o el aprendizaje hamiltoniano utilizando recursos cuánticos. El problema se encuentra en que la estimación de los parámetros físicos tiene una precisión limitada debido a errores estadísticos y técnicos, es por esto que se eligen algoritmos de control que son “robusto” a estas imperfecciones. Sin embargo, tampoco es la solución al problema, ya que una estrategia de control que sea robusta para una serie de parámetros suele ser más difícil de encontrar, y no será estrictamente óptima para los parámetros “verdaderos”.
- **Optimización:** Una vez obtenidos los parámetros es necesario encontrar el set que mejor resuelva el problema, esto se suele hacer mediante algún algoritmo de optimización iterativo realizado en un computador clásico. Para cada conjunto de controles candidatos, se requiere una simulación clásica. Por lo tanto, es ineficiente en general resolver un problema de optimización de este tipo.

- Implementación y verificación: La tarea final es implementar esos controles en un experimento y verificar que se produjo la puerta o estado previsto. Generalmente, no es frecuente que los controles óptimos alcancen en la realidad el mismo valor de la función objetivo que en la simulación.

Todos los pasos anteriores describen la implementación de un tipo de control cuántico llamado “control cuántico ex-situ”, donde en los métodos más avanzados calculan la solución de la ecuación de Schrödinger en algoritmos iterativos de escalada de gradiente para llegar a un pulso de control que tenga una alta fidelidad a alguna evolución objetivo con respecto a algún modelo físico. Pero este método, al considerar los pasos descritos anteriormente, debe sobrellevar varios problemas en cada paso del proceso, lo cual motivó la creación de un nuevo método de control cuántico llamado “control cuántico in-situ” [7].

El método de control in-situ propone que sería conveniente que el dispositivo cuántico se guiara a sí mismo hasta un estado o compuerta deseado, es decir que podemos replantear el paradigma antiguo del control ex-situ a esta nueva idea

- Modelación: Se propone utilizar el propio sistema como modelo, por lo que el “modelo” utilizado para diseñar los controles sería perfecto ya que es una réplica exacta de la física del problema. Por lo tanto, no hay limitaciones debidas a errores de modelado para este tipo de control.
- Estimación: Como no es necesario un modelo, la tarea de estimar los parámetros no es necesaria y los problemas derivados de este paso son inexistentes.
- Optimización: Dado que el propio sistema se utiliza para la simulación, aquí es donde el control in-situ aporta una ventaja técnica, debido a que este método no realiza un número ineficiente de experimentos en cada paso del protocolo de optimización.

- Implementación y verificación: Una vez que se ha encontrado el control óptimo, se finaliza el problema. Es decir, el último experimento realizado en nuestro algoritmo de optimización iterativo es el buscado y verifica su propio rendimiento

El control del tipo in-situ puede dividirse en dos categorías:

- Los que utilizan una copia fresca del sistema con cada medición: fue pionero en el contexto de la transferencia de estados mediante algoritmos genéticos.
- Los que utilizan una sola copia en un escenario de medición continua

El problema de control consiste, a grandes rasgos, en identificar un conjunto apropiado de parámetros, de manera que la evolución del sistema nos acerque lo más posible a la compuerta lógica deseada. Esto se logra eligiendo una función de costo, en nuestro caso la fidelidad, que se maximiza con técnicas de optimización estándar, acercando la compuerta lógica deseada a la compuerta lógica objetivo.



3.2.1. Modelos de control cuántico

En el estudio realizado se utilizaron dos modelos de control cuántico, el primero fue el “modelo bilineal” el que nos ayudo a desarrollar el control cuántico para un sistema cerrado en ausencia de ruido. Y el segundo modelo, que se definió gracias a la ecuación cuántica de Markov y nos permitió realizar el estudio sobre sistemas abiertos en presencia de ruido.

3.2.1.1. Modelo bi-lineal

La evolución de un sistema cuántico cerrado puede describirse mediante la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_0 |\psi(t)\rangle \quad (3.2.1)$$

donde H_0 representa el hamiltoniano del sistema. En la mayoría de los casos el control del sistema puede realizarse mediante un conjunto de funciones de control, $u_k(t) \in \mathbb{R}$, las que están acopladas al sistema gracias al hamiltoniano de control

$$H_c(t) = \sum_{k=1}^N u_k(t) H_k \quad (3.2.2)$$

el cual determina la evolución controlada del sistema. Por lo que la ecuación (3.2.1) toma la forma

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \left(H_0 + \sum_{k=1}^N u_k(t) H_k \right) |\psi(t)\rangle \quad (3.2.3)$$

donde la evolución del sistema esta dado por una serie de Dayson para el caso de hamiltonianos dependientes del tiempo y para hamiltonianos independientes del tiempo por la expresión



$$U = e^{-iH(t)} \quad (3.2.4)$$

El objetivo en un problema típico de control cuántico definido sobre el sistema (3.2.3) es encontrar un conjunto de controles admisibles que lleven al sistema, mediante el manejo de su evolución (3.2.4) desde un estado inicial a un estado objetivo predefinido. Para nuestro caso de estudio, debemos identificar un conjunto apropiado de $u_k(t)$, de tal manera que la evolución resultante del sistema se acerque lo más posible a la puerta lógica particular deseada.

Los modelos bi-lineales se utilizan ampliamente para describir sistemas cerrados de control cuántico como los sistemas moleculares en la química-física y los sistemas de spin.

3.2.2. Métodos de control cuántico

Dentro del proceso del control cuántico, independiente que modelo se utilice, existirán pasos que pueden ser resueltos de manera más eficiente gracias a diferentes métodos. Utilizar diferentes métodos para resolver los

problemas nos ayudó a incorporar nuevas variables al estudio y profundizar la complejidad del problema.

3.2.2.1. Método GRAPE

El método GRAPE [17] (GRadient Ascent Pulse Engineering) es un algoritmo de optimización basado en el gradiente, propuesto inicialmente para el control óptimo de sistemas basados en RMN.

Las soluciones a la ecuación de Schrödinger para un hamiltoniano dependiente del tiempo no son generalmente posibles de obtener analíticamente, por lo tanto, este método propone aproximar un pulso mediante una aproximación constante de las amplitudes.

GRAPE en los modelos bi-lineales: Si consideramos el modelo bi-lineal, el primer paso para implementar GRAPE sería discretizar los campos de control $u_k(t)$ en vectores de control u_{kj} , donde k es un índice de distancia temporal y j es el índice de control. Por lo tanto, tk es el tiempo de evolución al comienzo del intervalo de tiempo y jk es la amplitud del control j a lo largo del tiempo k . Además, requerimos que dentro de un paso de tiempo j , las intensidades de campo se mantengan todas constantes. Es importante mencionar que restringirnos a una forma tan discreta para los parámetros u_k no es un problema grave, ya que cualquier función de campo de control continuo siempre puede ser caracterizada por una aproximación discreta si se utilizan suficientes pasos de tiempo. También se da el caso de que la mayoría de las implementaciones experimentales de una puerta requerirán vectores de control discretizados, en lugar de las funciones de control más generales descritas inicialmente, por lo que este enfoque tiene la ventaja añadida de que se facilita la implementación.

Esta discretización hace que la ecuación de Schrödinger (3.2.3) se pueda resolver gracias a su evolución (3.2.4) discretizada en el tiempo

$$\tilde{U}_k = e^{-iH(t_k)\Delta t_k} \quad (3.2.5)$$

Es evidente entonces que podemos simplemente conectar estas matrices individuales para identificar un propagador final U_f de la siguiente forma,

$$U_f = U_n U_{n-1} \cdots U_2 U_1 \quad (3.2.6)$$

donde U_1, U_2, \dots, U_k representan los operadores de evolución para cada intervalo de tiempo discretizado, con $U_0 = I_{d^2}$.

Una vez que se ha calculado un propagador para un conjunto de vectores de control, todo lo que resta por elegir es una función para compararla con la puerta objetivo U_t .

Implementando la fidelidad: La función de coste elegida es la infidelidad (2.3.5), donde si aplicamos (3.2.6), podemos reescribirla para cada iteración con GRAPE como

$$I(U_c, U_t) = 1 - \frac{1}{d^2} |\text{tr}(U_t^{\dagger(n)} U_c^{(n)})|^2 \quad (3.2.7)$$

donde “ n ” corresponde al número de iteraciones.

Evaluar la fidelidad de una secuencia de pulsos en presencia de un error sistemático conocido es fácil, ya que sólo hay que modificar el hamiltoniano de la forma adecuada. Sin embargo lo que nos gustaría hacer es desarrollar una secuencia para la que los efectos introducidos por el error sistemático se anulen en gran medida, produciendo esencialmente la misma evolución que un sistema sin errores. Y lo que es más importante, necesitamos que esto sea así para toda una gama de valores de error sistemático al mismo tiempo.

Por lo tanto, en lugar de evaluar la fidelidad una vez, la evaluamos varias veces, cada una de ellas con una intensidad de error y las sumamos para obtener una fidelidad media. El requisito de evaluar la fidelidad varias veces significa que el tiempo de cálculo crece linealmente con el número de valores de error que se consideren. Por lo que se debe encontrar un equilibrio entre el tiempo de cálculo, los errores a considerar y el resultado a obtener.

3.3. Algoritmos de optimización estocásticos

Los algoritmos utilizados en este trabajo son de la familia de los algoritmos de optimización basados en el gradiente descendente, los cuales son métodos iterativos que permite hallar un punto $\hat{\mathbf{x}}$ de \mathcal{D} para el cual la función $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza un mínimo, es decir, f debe cumplir la condición

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad (3.3.1)$$

La idea viene de la aproximación a primer orden de $f(x)$ en serie de Taylor alrededor de un punto \mathbf{x}_0

$$f(x) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)(x - \mathbf{x}_0) + \mathcal{O}(2) \quad (3.3.2)$$

Ahora, si consideramos un movimiento desde \mathbf{x}_0 una cantidad infinitesimal h en una dirección unitaria \mathbf{u} , como queremos encontrar el \mathbf{u} que minimice la función $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$ obtenemos gracias a la serie de Taylor al rededor de \mathbf{x}_0 la relación

$$f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) = h\nabla f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} + \mathcal{O}(2) \quad (3.3.3)$$

donde si queremos que el termino de la izquierda de la ecuación (3.3.3) decrezca más rápido debemos minimizar el término $h\nabla f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$, lo cual se logra gracias al vector unitario

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} \quad (3.3.4)$$

el cual se utiliza en el algoritmo para converger de forma iterativa, ya que si en la iteración n estamos en un punto cualquiera \mathbf{x}_n , el que es parte de una sucesión de puntos $\{\mathbf{x}_n\}$ tal que \mathbf{x}_n converge a $\hat{\mathbf{x}}$. Por lo tanto, para encontrar el punto \mathbf{x}_{n+1} es necesario desplazarse una cantidad $-h_n\nabla f(\mathbf{x}_n)$ gracias a la regla iterativa

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - h_n\nabla f(\mathbf{x}_n) \quad (3.3.5)$$

donde el parámetro $h_n \in \mathbb{R}$ representa el tamaño del paso y se utiliza para controlar la convergencia del algoritmo y debe cumplir que $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$, es decir, debe ser decreciente. El algoritmo debe detenerse cuando $\nabla f(\mathbf{x}_n)$ sea muy cercano a cero.

3.3.1. SPSA (Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation)

Este algoritmo presentado por Spall [18] corresponde a un algoritmo iterativo de gradiente descendente, si consideramos una función $G(\theta) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se debe encontrar un estimado de $\theta \in \mathbb{R}^n$ que minimice el valor de G , es decir

$$g(\theta) = \frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 \quad (3.3.6)$$

Supongamos que podemos tener una medición G^* de la función $G(\theta)$, de tal modo que el valor de θ que minimice G esté dado por

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha_k g_k(\theta_k) \quad (3.3.7)$$

donde $g_k(\theta_k)$ es un estimado del gradiente $g(\theta)$, donde su k -ésima componente se obtiene como

$$g_k(\theta_k) = \frac{G^*(\theta_k + \beta_k \Delta_k) - G^*(\theta_k - \beta_k \Delta_k)}{2\beta_k \Delta_k} \quad (3.3.8)$$

$\Delta_k \in \mathbb{R}^n$ es un vector aleatorio de la misma dimensión que el espacio, puede tomar valores de $\{\pm 1\}$ con igual probabilidad y genera una dirección aleatoria de búsqueda para el algoritmo.

Las funciones α_k que representa el tamaño del paso y β_k a un número positivo y decreciente a medida que k aumenta, pueden ser calculadas mediante las expresiones

$$\alpha_k = \frac{a}{(k+1+A)^s} \quad (3.3.9)$$

$$\beta_k = \frac{b}{(k+1)^t}$$

donde el conjunto de parámetros a, A, b, s y t son llamadas **ganancias** y permiten manipular la convergencia del algoritmo. Existen dos conjuntos de ganancias recomendadas [19], [20]

	a	A	b	s	t
Estándar	3,0	0	0,1	0,602	0,101
Asintótico	3,0	0	0,1	1	1/6

Tabla 3.3.1: Ganancias usuales para el algoritmo SPSA

La búsqueda de un conjunto de ganancias adecuado y que logre la máxima tasa de convergencia del algoritmo es otro problema de optimización aún más grande y complicado de resolver.

El algoritmo SPSA trabaja del siguiente modo:

1. Generamos al azar un valor de θ y asignamos los valores a las ganancias, elegimos entre el conjunto de ganancias estandar o asintoticos, lo cual dependera del problema a resolver.
2. Generamos el vector Δ_k .
3. Evaluar G^* para ambas perturbaciones, $G^*(\theta_k + c_k \Delta_k)$ y $G^*(\theta_k - c_k \Delta_k)$.
4. Calcular la aproximación del gradiente, $g(\theta_k)$.
5. Actualizamos el estimado de θ .
6. Volvemos a retomar desde el paso 2. o finalizamos el proceso del algoritmo en el caso de haber alcanzado el número de iteraciones.

Una de las principales ventajas de SPSA es que solo necesita dos evaluaciones de la función G^* por iteración para poder estimar el gradiente.

3.3.1.1. 2SPSA (2 order Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation)

De SPSA podemos observar que la regla iterativa 3.3.7 sigue una aproximación de descenso de gradiente de primer orden para avanzar hacia el valor óptimo, se podría acelerar la tasa de convergencia del método utilizando

una regla iterativa de segundo orden procedente del algoritmo de Newton-Raphson y que gracias a una aproximación estocástica propuesta por Spall [21] se deriva en un método adaptativo o de segundo orden (2SPSA), el cual tiene una nueva regla iterativa de la siguiente forma

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \boldsymbol{\theta}^k - \bar{a}^k \overline{\mathcal{H}^k}^{-1} \mathbf{g}^k(\boldsymbol{\theta}^k), \quad (3.3.10)$$

donde $\bar{a}^k = 1/(k + A)^s$ y el estimador de gradiente \mathbf{g}^k se define mediante la Ec. (3.3.12). Además, $\overline{\mathcal{H}^k}$ es una versión modificada de la aproximación estocástica de la matriz hessiana, el cual tiene la forma

$$\overline{\mathcal{H}}_k = \frac{k}{k+1} \overline{\mathcal{H}}_{k-1} + \frac{1}{k+1} \mathcal{H}_k'' \quad (3.3.11a)$$

$$\mathcal{H}_k'' = \sqrt{\mathcal{H}_k'^2 + \varepsilon I} \quad (3.3.11b)$$

$$\mathcal{H}_k' = \frac{\mathcal{H}_k + [\mathcal{H}_k]^T}{2}, \quad (3.3.11c)$$

donde Eq. (3.3.11c) asegura que la matriz sea simétrica, lo cual es importante en problemas de optimización, Eq. (3.3.11b) asegura que sea invertible y Eq. (3.3.11a) acumula información entre iteraciones.

Finalmente \mathcal{H} es el hessiano de f y esta dada por

$$\mathcal{H}_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{g}_k(\boldsymbol{\theta} + \tilde{b}_k \tilde{\Delta}_k) - \mathbf{g}_k(\boldsymbol{\theta})}{\tilde{b}_k} \begin{pmatrix} 1/\tilde{\Delta}_{k,1} \\ \vdots \\ 1/\tilde{\Delta}_{k,p} \end{pmatrix}^T,$$

la que puede ser reescrita por componentes como

$$[\mathcal{H}_k]_{ij} = \frac{\delta^2 f_k(\boldsymbol{\theta})}{2b_k \tilde{b}_k \Delta_{k,i} \tilde{\Delta}_{k,j}}, \quad (3.3.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta^2 f_k(\boldsymbol{\theta}) &= f(\boldsymbol{\theta} + b_k \Delta_k + \tilde{b}_k \tilde{\Delta}_k) - f(\boldsymbol{\theta} + b_k \Delta_k) \\ &\quad - f(\boldsymbol{\theta} - b_k \Delta_k + \tilde{b}_k \tilde{\Delta}_k) + f(\boldsymbol{\theta} - b_k \Delta_k), \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

$\tilde{b}^k = \tilde{b}/k^t$ es una serie de ganancia de naturaleza similar a b^k , y $\tilde{\Delta}^k$ es un vector formado por p componentes aleatorios del conjunto $\{\pm 1\}$, al igual que Δ^k .

3.3.2. CSPA (Complex Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation)

Extensión del algoritmo SPSA a variable compleja, desarrollado por A. Utreras [22]. Este método conserva la forma de SPSA pero extendido al espacio complejo \mathbb{C} .

Consideremos una función real de variable compleja $f(z, z^*) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, donde se busca una secuencia de estimadores \hat{z}_k del vector \bar{z} que minimiza $f(z, z^*)$, es decir

$$\frac{\partial f(\bar{z}, \bar{z}^*)}{\partial z^*} = 0 \quad (3.3.14)$$

la secuencia iterativa para encontrar el estimado \hat{z}_k del vector \bar{z} en la k -ésima iteración es análoga a la ecuación (3.3.7), es decir

$$\hat{z}_{k+1} = \hat{z}_k - \alpha_k \hat{g}_k(\hat{z}_k, \hat{z}_k^*) \quad (3.3.15)$$

donde nuevamente α_k corresponde a una constante positiva y $\hat{g}_k(\hat{z}_k, \hat{z}_k^*)$ es un estimado del gradiente g de f . La estimación de la j -ésima componente del estimado del gradiente se obtiene de manera análoga a la ecuación (3.3.8) y esta dada por

$$\hat{g}_{k,i} = \frac{f(\hat{z}_{k+}, \hat{z}_{k+}^*) + \epsilon_{k,+} - f(\hat{z}_{k-}, \hat{z}_{k-}^*) + \epsilon_{k,-}}{2\beta_k \Delta_{k,i}^*} \quad (3.3.16)$$

con

$$\hat{z}_{k\pm} = \hat{z}_k \pm_k \Delta_k \quad (3.3.17)$$

donde $\Delta_k \in \mathbb{C}^n$ es un vector generado aleatoriamente y sus componentes deben ser generadas de manera independiente al seleccionar, con igual probabilidad, valores en el conjunto $\{exp(2im)\}$ con $m = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots\}$.

Los términos α_k y k , al igual que para SPSA, representan el tamaño del paso y

la perturbación en la función respectivamente y se calculan utilizando (3.3.9). Los parámetros a, A, b, s y t también son llamados ganancias pero al ser CSPSA un algoritmo relativamente nuevo, aún no existe un estudio detallado de una set de parámetros de ganancia particulares de este algoritmo, es por eso que se utilizan los mismos conjuntos que para SPSA descritos en (3.3.1.)

3.3.2.1. 2CSPSA (2 order Complex Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation)

Propuesto por J.Gidi [23], este método propone un desarrollo análogo a lo realizado para el algoritmo 2SPSA, definiendo el algoritmo 2CSPSA mediante la regla iterativa

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - \bar{a}_k [\bar{\mathcal{H}}_k(\mathbf{z}_k)]^{-1} \mathbf{g}_k(\mathbf{z}_k), \quad (3.3.18)$$

donde $\bar{a}_k = 1/(k + A)^s$, $\mathbf{g}_k(\mathbf{z})$ viene dado por la Ec. (3.3.16) y $\bar{\mathcal{H}}_k$ es una versión modificada de la aproximación estocástica para el hessiano, que análogo para el caso real se descompone como

$$\bar{\mathcal{H}}_k = \frac{k}{k+1} \bar{\mathcal{H}}_{k-1} + \frac{1}{k+1} \mathcal{H}_k'' \quad (3.3.19a)$$

$$\mathcal{H}_k'' = \sqrt{\mathcal{H}_k'^2 + \varepsilon I} \quad (3.3.19b)$$

$$\mathcal{H}_k' = \frac{\mathcal{H}_k + [\mathcal{H}_k]^\dagger}{2}, \quad (3.3.19c)$$

donde Eq. (3.3.19c) garantiza que el hessiano sea hermitico, Eq. (3.3.19b) garantiza que sea positivo y Eq. (3.3.19a) estabiliza el estimador introduciendo la inercia de las iteraciones anteriores.

El hessiano es analogo a (??) y se descompone por componentes como

$$[\mathcal{H}_k(\mathbf{z})]_{ij} = \frac{\delta^2 f_k(\mathbf{z})}{2b_k \tilde{b}_k \Delta_{k,i} \tilde{\Delta}_{k,j}^*}, \quad (3.3.20)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta^2 f_k(\mathbf{z}) = & f(\mathbf{z} + b_k \Delta_k + \tilde{b}_k \tilde{\Delta}_k) - f(\mathbf{z} + b_k \Delta_k) \\ & - f(\mathbf{z} - b_k \Delta_k + \tilde{b}_k \tilde{\Delta}_k) + f(\mathbf{z} - b_k \Delta_k), \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Δ y $\tilde{\Delta}$ son dos vectores aleatorios, cada uno compuesto por p elementos generados uniformemente del conjunto $\{\pm 1, \pm i\}$.

3.3.3. Conceptos estadísticos

Para poder presentar los resultados obtenidos gracias a los algoritmos antes mencionados, es necesario conocer y utilizar algunos conceptos básicos sobre estadística, tales como media, mediana, varianza y rango intercuartil.

- Media: La media, también conocida como promedio, es el valor que se obtiene al dividir la suma de un conjunto de datos entre la cantidad de ellos.
- Mediana: La mediana de un conjunto de datos corresponde al valor que separa el 50 % inferior del 50 % superior de los datos al ordenarlos de menor a mayor.

Por esta razón, cuando la distribución difiere de una distribución normal, una medida de punto medio más robusta es la mediana, la cual no se ve afectada por valores escapados al contrario de la media.

- Varianza: Se utiliza cuando se considera la media como medida de posición central, la varianza mide la distancia existente entre los valores del conjunto de datos y la media. Se calcula como la sumatoria de las diferencias al cuadrado entre cada valor y la media, multiplicadas por el número de veces que se ha repetido cada valor y luego se divide por la cantidad de datos del conjunto. La varianza siempre será positiva y mientras más se aproxima a cero, más concentrados están los valores de la serie alrededor de la media. Por el contrario, mientras mayor sea la varianza, más dispersos están.

- Rango intercuartil: Se utiliza cuando se considera a la mediana como medida de posición central. El rango intercuartil es una estimación estadística de la dispersión de una distribución de datos y consiste en la diferencia entre el tercer y el primer cuartil.

Los cuartiles dividen un set de datos en 4 grupos, donde cada uno contiene el 25 % de los datos de la muestra. El rango intercuartil corresponde a la unión de los cuartiles que comprenden los datos desde el 25 % inferior hasta el 75 % superior, y se considera como una medida de dispersión alrededor de la mediana (la cual corresponde al percentil 50).



Capítulo 4

Análisis y discusión

4.1. Control cuántico de compuertas

4.1.1. Control cuántico para compuertas de un qubit

Para este primer resultado se eligió comenzar con el análisis del control cuántico para una compuerta de un qubit aleatoria, donde el sistema de estudio era un sistema cuántico cerrado 3.1.1.

El hamiltoniano elegido para este sistema es (2.4.13)

$$H = u_0\sigma_z + u_c(t)\sigma_x, \quad (4.1.1)$$

donde si utilizamos la “aproximación de onda rotante” 2.4.1 podemos descomponerlo como

$$H = u_0Z + u_c(t)\sigma_+ + u_c(t)^*\sigma_-, \quad (4.1.2)$$

con u_c^* es el conjugado de u_c . Por lo tanto, su evolución estará dada por

$$U = e^{-i(u_0Z + u_c\sigma_+ + u_c^*\sigma_-)}. \quad (4.1.3)$$

Si aplicamos el método GRAPE para calcular la evolución de este sistema,

obtenemos que

$$\begin{aligned} U_{GRAPE} &= e^{-i \sum_{i=1}^{m-1} (H(t_{i+1}) - H(t_i))} \\ &= \prod_{i=1}^{m-1} e^{-i(H(t_{i+1}) - H(t_i))}, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

donde si reemplazamos el valor del hamiltoniano

$$H(t_{i+1}) - H(t_i) = (u(t_{i+1}) - u(t_i))\sigma_x, \quad (4.1.5)$$

así la variable que debemos optimizar estará dada por $u_i = u(t_{i+1}) - u(t_i)$, por lo que la compuerta objetivo se obtendrá calculando

$$U_t = \prod_{i=1}^{m-1} e^{-i(u_i\sigma_+ + u_i^*\sigma_-)} U_0. \quad (4.1.6)$$

El resultado de implementar GRAPE con los 4 algoritmos de optimización presentados anteriormente, para el problema de una compuerta de 1-qubit, se muestran en los gráfico Fig. 4.1.1 y Fig. 4.1.2. En cada uno de ellos se obtienen los valores de media (línea superior) y mediana (línea inferior) para la infidelidad en función del número de mediciones (evaluaciones de la función objetivo). Respecto a la estadística utilizada, la mediana se presenta junto a la varianza y la mediana con los rangos intercuantiles. La primera columna nos muestra los resultados obtenidos por los algoritmos de primer orden, SPSA en azul y CSPSA con rojo. La segunda columna nos muestra los resultados obtenidos por los algoritmos de segundo orden, 2SPSA en azul y 2CSPSA en rojo. Los algoritmos de primer orden utilizan el set de ganancias asintóticas mientras que los de segundo orden las ganancias estándar, ya que representan el conjunto de ganancias que logra el mejor desempeño de cada algoritmo. La media, mediana, varianza y rango intercuartil son calculados considerando una muestra de 10^4 estimaciones. Los valores de la infidelidad se obtienen simulando un proceso de medición con un tamaño de muestra de 2^{13} y con 25 pasos de GRAPE.

De los resultados mostrados en Fig. 4.1.1 podemos observar que tanto para

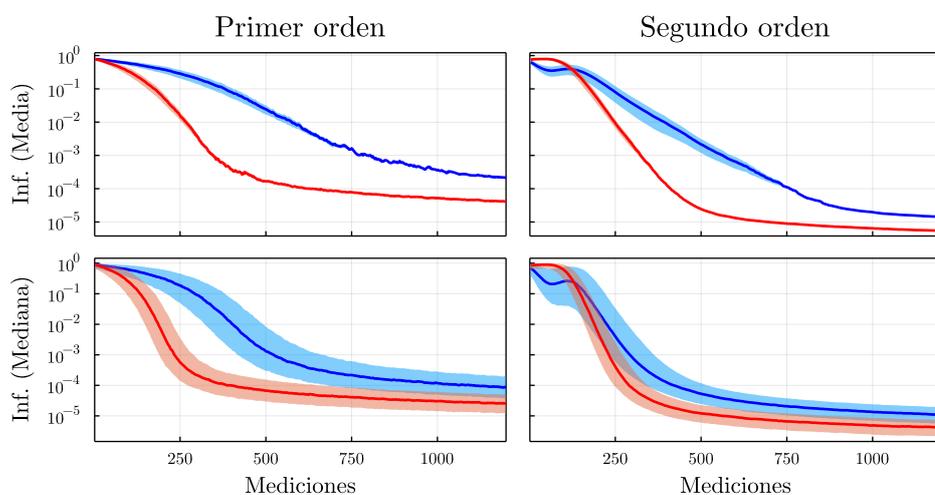


Figura 4.1.1: Resultados del problema de control cuántico para una compuerta aleatoria de 1-qubit, utilizando los métodos SPSA y CSPSA de primer y segundo orden.

media como mediana, los 4 algoritmos utilizados convergen hacia un valor de infidelidad. Además todos alcanzan un régimen asintótico, la mediana tanto para los algoritmos de primer y segundo orden alcanzan el régimen asintótico antes de las 500 iteraciones. Por otro lado, para la media, ambos set de algoritmos alcanzan el régimen asintótico luego de las 750 mediciones. Tanto para media como mediana, los algoritmos de segundo orden obtienen los valores mas bajos de infidelidad al menor número de iteraciones. Además, el descenso de los algoritmos de segundo orden es mucho mas rápido que los de primer orden, llegando al menor valor de infidelidad un poco antes de las 500 mediciones. Respecto a la estadística utilizada, la varianza para el algoritmo SPSA de primer y segundo orden disminuye a medida que aumenta el numero de mediciones, mientras que para los algoritmos complejos es casi imperceptible. Los rangos intercuartiles de los cuatros algoritmos se comportan de manera similar. En general, se puede observar que los algoritmos complejos, tanto de primer y segundo orden en media y mediana, son los que obtienen un mejor desempeño. En particular, los métodos de segundo orden complejos son los que obtienen el menor valor de infidelidad al menor número de iteraciones.

Una vez obtenido el gráfico de este sistema, se decidió extender el estudio

para un sistema que considerara más variables que se aproximarán a las condiciones de un laboratorio, es por esto que ahora se trabajará con la dinámica de un sistema cuántico abierto 3.1.2, el cual será afectado por distintos tipos de ruido, como el error de decoherencia y un error de desfase.

Al agregar ruido al problema, sabemos que la evolución estará regida por la ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i[H, \rho] + D[c]\rho, \quad (4.1.7)$$

donde

$$D[c]\rho = c\rho c^\dagger - \frac{1}{2}(c^\dagger c\rho + \rho c^\dagger c), \quad (4.1.8)$$

es el término de ruido y c representa los valores individuales de cada una de las fuentes de ruido, en particular se consideraron los siguientes valores

- $c_0 = 0,01\sigma_z$
- $c_1 = 0,01\sigma_-$



Utilizando el operador de Liouville

$$\mathcal{L} = -i(H \otimes I - I \otimes H^T) + c \otimes c^* - \frac{1}{2}(c^\dagger c \otimes I + I \otimes c^T c^*), \quad (4.1.9)$$

en particular, si consideramos dos tipos de errores, el operador de Liouville toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{c_i=0}^1 \left[-i(H \otimes I - I \otimes H^T) + c_i \otimes c_i^* - \frac{1}{2}(c_i^\dagger c_i \otimes I + I \otimes c_i^T c_i^*) \right] \\ &= -i(H \otimes I - I \otimes H^T) + (c_0 \otimes c_0^* + c_1 \otimes c_1^*) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[(c_0^\dagger c_0 \otimes I + c_1^\dagger c_1 \otimes I) + (I \otimes c_0^T c_0^* + I \otimes c_1^T c_1^*) \right] \\ &= -i(H \otimes I - I \otimes H^T) + \left[c_0 \otimes c_0^* - \frac{1}{2}(c_0^\dagger c_0 \otimes I + I \otimes c_0^T c_0^*) \right] \\ &\quad + \left[c_1 \otimes c_1^* - \frac{1}{2}(c_1^\dagger c_1 \otimes I + I \otimes c_1^T c_1^*) \right], \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

donde al reemplazar el valor del hamiltoniano y ambos errores obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -i [(u_i \sigma_+ + u_i^* \sigma_-) \otimes I - I \otimes (u_i \sigma_+ + u_i^* \sigma_-)^T] \\
&+ \left[\sigma_z \otimes \sigma_z^* - \frac{1}{2} (\sigma_z^\dagger \sigma_z \otimes I + I \otimes \sigma_z^T \sigma_z^*) \right] \\
&+ \left[\sigma_- \otimes \sigma_-^* - \frac{1}{2} (\sigma_-^\dagger \sigma_- \otimes I + I \otimes \sigma_-^T \sigma_-^*) \right] \\
&= -i [u_i (\sigma_+ \otimes I - I \otimes \sigma_-) - u_i^* (\sigma_- \otimes I - I \otimes \sigma_+)] \\
&+ \left[\sigma_z \otimes \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_z \sigma_z \otimes I + I \otimes \sigma_z \sigma_z) \right] \\
&+ \left[\sigma_- \otimes \sigma_- - \frac{1}{2} (\sigma_+ \sigma_- \otimes I + I \otimes \sigma_+ \sigma_-) \right].
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Finalmente, la ecuación (4.1.7) toma la forma

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \mathcal{L} \rho(t), \tag{4.1.12}$$

y su evolución está dada por

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}(t-t_0)} \rho(t_0). \tag{4.1.13}$$

El gráfico obtenido para la extensión del problema de control cuántico de una compuerta de 1-qubit, considerando un sistema abierto en presencia de dos fuentes de ruido se presentan en la figura 4.1.2.

todos los algoritmos utilizados convergen hacia un valor de infidelidad

De los resultados mostrados en Fig. 4.1.2 podemos observar que tanto para media como mediana, los 4 algoritmos utilizados convergen hacia un valor de infidelidad. Además todos alcanzan un régimen asintótico, excepto por SPSA de primer orden en media donde no se aprecia ese comportamiento. La mediana tanto para los algoritmos de primer y segundo orden alcanzan el régimen asintótico antes de las 400 iteraciones. Por otro lado, para la media, ambos set de algoritmos alcanzan el régimen asintótico luego de las 550 mediciones. Tanto para media como mediana, los algoritmos de segundo orden obtienen los valores mas bajos de infidelidad al menor número

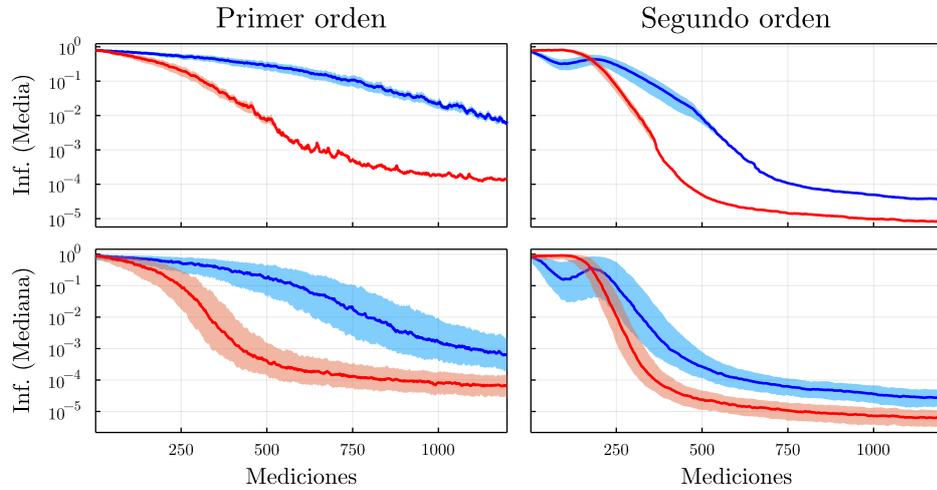


Figura 4.1.2: Resultados del problema de control cuántico para una compuerta aleatoria de 1-qubit para un sistema abierto en presencia de dos fuentes de ruido, utilizando los métodos SPSA y CSPSA de primer y segundo orden.

de iteraciones. Además, el descenso de los algoritmos de segundo orden es mucho más rápido que los de primer orden, llegando al menor valor de infidelidad un poco después de las 200 mediciones. Respecto a la estadística utilizada, la varianza para los algoritmos de segundo orden disminuye a medida que aumenta el número de mediciones. Los rangos intercuartiles de los cuatro algoritmos se comportan de manera similar. En general, se puede observar que los algoritmos complejos, tanto de primer y segundo orden en media y mediana, son los que obtienen un mejor desempeño. En particular, los métodos de segundo orden complejos son los que obtienen el menor valor de infidelidad al menor número de iteraciones.

4.1.2. Control cuántico para compuertas de dos qubit

Con el resultado obtenido para las compuertas de un qubit pudimos comprobar el rendimiento de los algoritmos para sistemas de 1-qubit, los cuales son sistemas de dimensión 2. Para comprobar la escalabilidad del algoritmo se decidió continuar con una compuerta de 2-qubit, donde el sistema ahora es representado por matrices de 4×4 y para el cálculo del

error escala a matrices de 16×16 .

Para este sistema se consideró la generalización del hamiltoniano de Heissenberg para un sistema de 2-quits, que en su forma resumida y considerando las constantes de acople como uno, tiene la forma

$$H = u_c \sigma_{+1} \sigma_{-2} + u_c^* \sigma_{-1} \sigma_{+2}, \quad (4.1.14)$$

donde u_c^* es el conjugado de u_c . Por lo tanto, su evolución estará dada por

$$U = e^{-i(u_c \sigma_+ \otimes \sigma_- + u_c^* \sigma_- \otimes \sigma_+)}. \quad (4.1.15)$$

Si aplicamos el método GRAPE para calcular la evolución de este sistema, obtenemos que

$$\begin{aligned} U_{GRAPE} &= e^{-i \sum_{i=1}^{m-1} (H(t_{i+1}) - H(t_i))} \\ &= \prod_{i=1}^{m-1} e^{-i(H(t_{i+1}) - H(t_i))}, \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

donde si reemplazamos el valor del hamiltoniano

$$H(t_{i+1}) - H(t_i) = (u(t_{i+1}) - u(t_i)) \sigma_+ \otimes \sigma_- + (u^*(t_{i+1}) - u^*(t_i)) \sigma_- \otimes \sigma_+, \quad (4.1.17)$$

así la variable que debemos optimizar estará dada por $u_i = u(t_{i+1}) - u(t_i)$ y $u_i^* = u^*(t_{i+1}) - u^*(t_i)$, por lo que la compuerta objetivo se obtendrá calculando

$$U_t = \prod_{i=1}^{m-1} e^{(u_i(\sigma_+ \otimes \sigma_-) + u_i^*(\sigma_- \otimes \sigma_+))} U_0. \quad (4.1.18)$$

El resultado de implementar GRAPE con los 4 algoritmos de optimización presentados anteriormente, para el problema de una compuerta de 2-qubit, se muestran en los gráfico Fig. 4.1.3 y Fig. 4.1.4. En cada uno de ellos se obtienen los valores de media (linea superior) y mediana (linea inferior) para la infidelidad en función del numero de mediciones (evaluaciones de la función objetivo). Respecto a la estadística utilizada, la mediana se presenta

junto a la varianza y la mediana con los rangos intercuartiles. La primera columna nos muestra los resultados obtenidos por los algoritmos de primer orden, SPSA en azul y CSPSA con rojo. La segunda columna nos muestra los resultados obtenidos por los algoritmos de segundo orden, 2SPSA en azul y 2CSPSA en rojo. Los algoritmos de primer orden utilizan el set de ganancias asintóticas mientras que los de segundo orden las ganancias estándar, ya que representan el conjunto de ganancias que logra el mejor desempeño de cada algoritmo. La media, mediana, varianza y rango intercuartil son calculados considerando una muestra de 10^4 estimaciones. Los valores de la infidelidad se obtienen simulando un proceso de medición con un tamaño de muestra de 2^{13} y con 15 pasos de GRAPE.

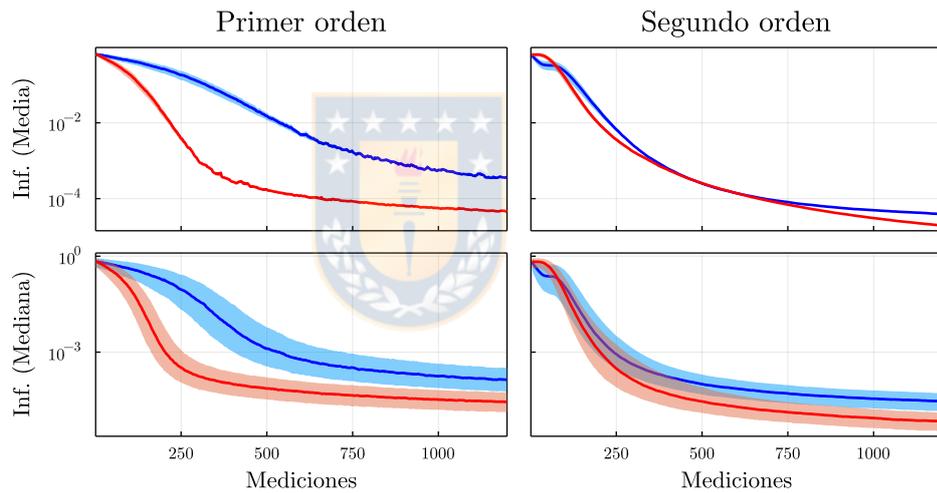


Figura 4.1.3: Resultados del problema de control cuántico para una compuerta 2-qubit, en particular la compuerta CNOT, utilizando los métodos SPSA y CSPSA de primer y segundo orden.

De los resultados mostrados en Fig. 4.1.3 podemos observar que tanto para media como mediana, los 4 algoritmos utilizados convergen hacia un valor de infidelidad. Además todos alcanzan un régimen asintótico, la mediana tanto para los algoritmos de primer y segundo orden alcanzan el régimen asintótico antes de las 500 iteraciones, lo cual no ocurre para la media. Tanto para media como mediana, los algoritmos de segundo orden obtienen los valores más bajos de infidelidad, pero en media su convergencia es más lenta en relación a los algoritmos de primer orden. Respecto a la estadística

utilizada, la varianza para los cuatro algoritmos es casi imperceptible y los rangos intercuartiles de los cuatros algoritmos se comportan de manera similar. En general, los algoritmos complejos, de primer y segundo orden, tanto en media como en mediana, son los que obtienen el mejor desempeño. En particular, los métodos de segundo orden complejos son los que obtienen el menor valor de infidelidad al menor número de iteraciones.

Nuevamente se extendió el estudio para un sistema cuántico abierto, el cual será afectado por distintos tipos de ruido, como el error de decaimiento y un error de desfase.

Al agregar ruido al problema, sabemos que la evolución estará regida por la ecuación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i[H, \rho] + D[c]\rho, \quad (4.1.19)$$

donde

$$D[c]\rho = c\rho c^\dagger - \frac{1}{2}(c^\dagger c\rho + \rho c^\dagger c), \quad (4.1.20)$$

es el término de ruido y c representa los valores individuales de cada una de las fuentes de ruido, en particular se consideraron los siguientes valores

- $c_0 = 0,01(\sigma_z \otimes \sigma_z)$
- $c_1 = 0,01(\sigma_+ \otimes \sigma_+)$

Utilizando el operador de Liouville

$$\mathcal{L} = -i(H \otimes I - I \otimes H^T) + c \otimes c^* - \frac{1}{2}(c^\dagger c \otimes I + I \otimes c^T c^*), \quad (4.1.21)$$

en particular, si consideramos dos tipos de errores, el operador de Liouville toma la forma (4.1.11).

Los resultados obtenidos para el problema de control cuántico de una compuerta de 2-qubits, considerando un sistema abierto en presencia de dos fuentes de ruido, optimizando con los algoritmos SPSA y CSPSA, se presenta en la figura 4.1.4

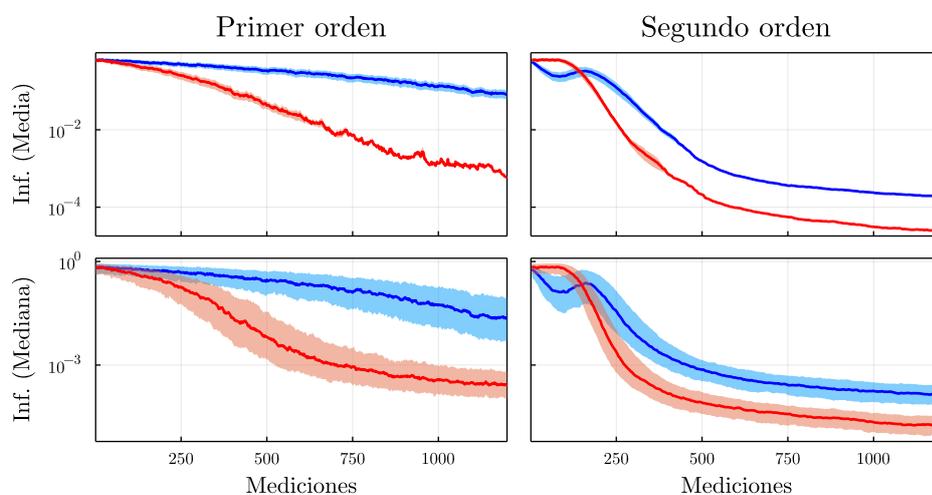


Figura 4.1.4: Resultados del problema de control cuántico para una compuerta de 2-qubit, en particular la compuerta CNOT, para un sistema abierto en presencia de dos fuentes de ruido, utilizando los métodos SPSA y CSPSA de primer y segundo orden.

De los resultados mostrados en Fig. 4.1.4 podemos observar que tanto para mediana, los 4 algoritmos utilizados convergen hacia un valor de infidelidad, en el caso de la media el algoritmo SPSA de primer orden no muestra un comportamiento de descender a excepción de los otros 3 métodos que logran converger a algún valor de infidelidad. Los métodos de segundo orden alcanzan todos un régimen asintótico un poco antes de las 500 mediciones, mientras que los de primer orden solo se aprecia en CSPSA, el cual alcanza un régimen asintótico pasado las 750 mediciones. Tanto para media como mediana, los algoritmos de segundo orden obtienen los valores mas bajos de infidelidad. Respecto a la estadística utilizada, la varianza para los cuatro algoritmos es casi imperceptible y los rangos intercuartiles de los cuatros algoritmos se comportan de manera similar. En general, los algoritmos complejos, de primer y segundo orden, tanto en media como en mediana, son los que obtienen el mejor desempeño. En particular, los métodos de segundo orden complejos son los que obtienen el menor valor de infidelidad al menor número de iteraciones.

4.2. Control cuántico para estados

4.2.1. Control cuántico para un sistema de 1-qubit

En el caso de control cuántico para estados de un qubit, elegimos el estado basal $|\psi_f\rangle = |0\rangle$ como estado objetivo y el hamiltoniano del sistema como

$$H(t) = \frac{1}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}(u(t)\sigma_+ + u^*(t)\sigma_-), \quad (4.2.1)$$

el que depende solo de un parámetro de control complejo $u(t)$. Este escenario describe, por ejemplo, la evolución de una partícula de 1/2-espín que interactúa con un campo electromagnético clásico.

Después de aplicar el método GRAPE para la evolución del sistema, el estado final es

$$|\tilde{\psi}_f\rangle = \prod_{i=1}^{M-1} e^{-\frac{i}{2}\theta_i\sigma_x} |\psi_0\rangle, \quad (4.2.2)$$

donde $|\psi_0\rangle$ es un estado inicial de un qubit y $\theta_i = u(t_{i+1}) - u(t_i)$ es el parámetro de control.

Los resultados de la implementación de GRAPE con los cuatro algoritmos de optimización para el problema de control cuántico de 1-qubit se muestra en la Fig. 4.2.1, donde se muestra el valor de la media (fila superior) y la mediana (fila inferior) de la infidelidad en función del número de medidas (evaluaciones de la función objetivo). Las figuras también muestran la varianza y el rango intercuartil como áreas sombreadas. La primera columna contiene los resultados obtenidos por SPSA (línea sólida azul) y CSPSA (línea sólida roja). La segunda columna contiene los resultados obtenidos por 2SPSA (línea sólida azul) y 2CSPSA (línea sólida roja). La media, la mediana, la varianza y el rango intercuartil se estiman considerando una muestra de 10^4 estimaciones, que se generan considerando estados iniciales uniformemente distribuidos

La figura 4.2.1 muestra que los algoritmos convergen, alcanzando el régimen

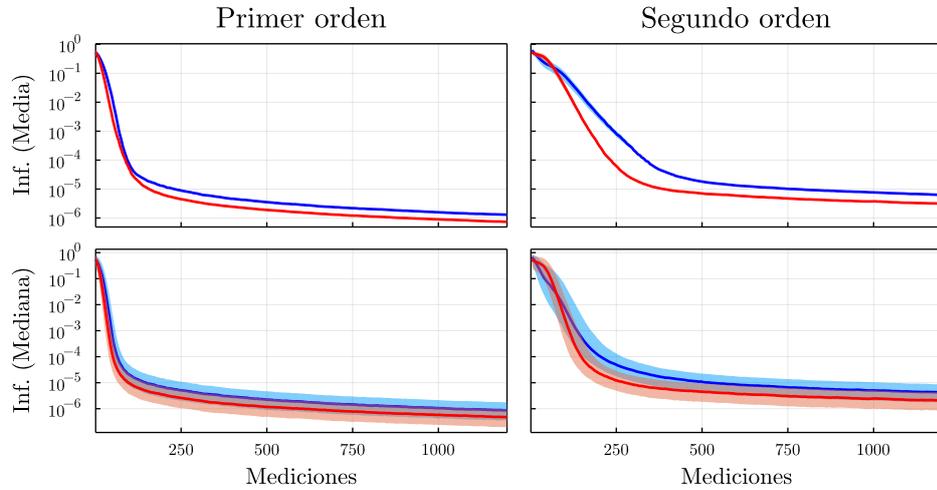


Figura 4.2.1: Resultados del problema de control cuántico para un sistema de 1-qubit, en particular el estado basal, utilizando los métodos SPSA y CSPSA de primer y segundo orden.

asintótico antes de las 500 mediciones. Tanto para la media como para la mediana, los algoritmos de primer orden alcanzan los valores más bajos de infidelidad. Los algoritmos de primer orden presentan un decaimiento mucho más pronunciado que los demás, entrando en régimen asintótico en un pequeño número de mediciones. La varianza no es apreciable en ninguno de los algoritmos, mientras que los rangos intercuartiles son más ajustados para los métodos de primer orden. Así, el algoritmo con mejor rendimiento es el CSPSA de primer orden, observando que 50 % de las mejores realizaciones del CSPSA son mejores que 75 % de las peores realizaciones de todos los demás métodos. En particular, el 75 % de las mejores realizaciones de CSPSA de primer orden son mejores que el 75 % de las peores realizaciones del gradiente natural complejo. Por último, mencionamos que, dentro de cada tipo de método, son los algoritmos complejos los que obtienen mejores resultados.

4.2.2. Control cuántico para un sistema de 2-qubit

En el caso de 2-qubits, el estado de Bell $|\psi_f\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ fue elegido como estado objetivo y el hamiltoniano elegido fue

$$H(t) = \sigma_x^{(1)} + u\sigma_+^{(1)}\sigma_-^{(2)} + u^*\sigma_-^{(1)}\sigma_+^{(2)}, \quad (4.2.3)$$

el cual puede ser realizado físicamente [24]. Luego de aplicar el método GRAPE para la evolución del sistema el estado final es representado por

$$|\tilde{\psi}_f\rangle = \prod_{i=1}^{M-1} e^{-i(\theta_i\sigma_+^{(1)}\sigma_-^{(2)} + \theta_i^*\sigma_-^{(1)}\sigma_+^{(2)})} |\psi_0\rangle, \quad (4.2.4)$$

donde $|\psi_0\rangle$ es un estado inicial de 2-qubit y $\theta_i = u(t_{i+1}) - u(t_i)$ es el parámetro de control.

Los resultados de la implementación de GRAPE con los cuatro algoritmos de optimización para el problema de control cuántico de 2-qubit se muestra en la Fig. 4.2.2, donde se muestra el valor de la media (fila superior) y la mediana (fila inferior) de la infidelidad en función del número de medidas (evaluaciones de la función objetivo). Las figuras también muestran la varianza y el rango intercuartil como áreas sombreadas. La primera columna contiene los resultados obtenidos por SPSA (línea sólida azul) y CSPSA (línea sólida roja). La segunda columna contiene los resultados obtenidos por 2SPSA (línea sólida azul) y 2CSPSA (línea sólida roja). La media, la mediana, la varianza y el rango intercuartil se estiman considerando una muestra de 10^4 estimaciones, que se generan considerando estados iniciales uniformemente distribuidos

La figura 4.2.2 muestra que los métodos convergen y sólo los algoritmos de primer orden inician un régimen asintótico. Observando la media, notamos que los algoritmos de segundo orden obtienen valores de infidelidad menores a los obtenidos mediante los métodos de primer orden. Si consideramos la mediana, los algoritmos de primer orden obtienen valores de infidelidad más bajos, adelantándose un orden a sus competidores. La varianza de los métodos de segundo orden disminuye a medida que aumenta el número de

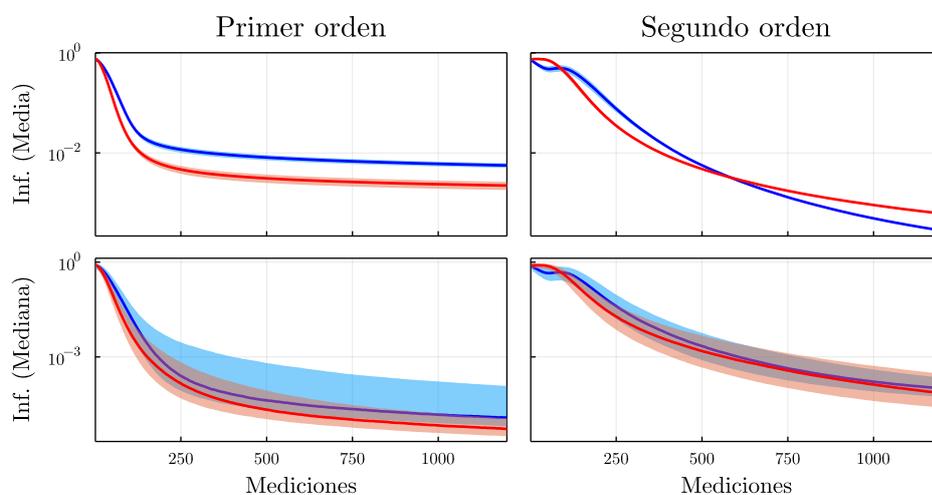


Figura 4.2.2: Resultados del problema de control cuántico para un sistema de 2-qubit, en particular un estado de Bell, utilizando los métodos SPSA y CSPSA de primer y segundo orden.

mediciones, lo que no ocurre con los métodos de primer orden. Los rangos intercuartil son similares para todos los métodos, excepto para el SPSA de primer orden, que tiene el doble de anchura del rango intercuartil de los demás algoritmos. En el caso de los algoritmos de primer orden, la diferencia entre la media y la mediana de la convergencia indica la presencia de realizaciones que convergen a un ritmo menor. Así, el mejor método para este problema sería el CSPSA de primer orden, observando que el 75 % de las mejores realizaciones del CSPSA son mejores que el 75 % de las peores realizaciones de todos los demás métodos.

Capítulo 5

Conclusión

Desarrollar técnicas de control cuántico se vuelve una necesidad al momento de desarrollar las tecnologías cuánticas, es por esto que el estudio de algoritmos de optimización resistentes al ruido se vuelve algo tan importante. Para mostrar que los algoritmos complejos de optimización CSPSA y 2CSPSA obtienen un mejor desempeño que los algoritmos reales SPSA y 2SPSA se decidió estudiar el control cuántico de diferentes sistemas. Pudiendo apreciar la importancia que significa la elección correcta del hamiltoniano, el método de control cuántico mas útil para el planteamiento de los diferentes problemas y la optimización de los diferentes algoritmos utilizados. Todo esto se resume en la elección de estudiar el control cuántico tanto de compuertas, de uno- y dos-qubits, como de estados de uno- y dos-qubits. Además de elegir el método GRAPE para el calculo de la evolución de los distintos sistemas. Este método no solo disminuye , y hace posible, el calculo de una solución analítica de la ecuación de Schrödinger, si no que además es compatible con otros métodos de control cuántico propuestos. Los diferentes métodos que existen permiten extender el estudio realizado para agregar al problema variables que es necesario considerar para que el sistema se aproxime a la realidad de los experimentos.

Los resultados obtenidos muestran que los métodos formulados en lenguaje complejo poseen un mejor rendimiento, para todos los problemas propuestos,

en comparación a los métodos reales. En especial en los problemas donde se agrega ruido al sistema, los algoritmos de segundo orden aportan una ventaja importante por sobre los demás métodos y aun cuando el sistema escala en su dimensión. Los problemas de compuerta y estados de 1-qubit son resueltos en dimensión 2, mientras que los de compuerta y estados de 2-qubit en dimensión 4. Al agregar el error estos sistemas escalan a dimensión 4 para los de 1-qubit y a dimensión 16 para el sistema de 2-qubit, para ambos problemas los algoritmos complejos logran converger a un bajo número de mediciones y los tiempos de cálculo escalan linealmente con respecto a la dimensión. Finalmente estos algoritmos dan la ventaja de poseer un lenguaje que facilita la programación de los problemas cuánticos, al estar escritos en base a los números complejos al igual que cada uno de los sistemas estudiados.



Bibliografía

- [1] C. Altafini y F. Ticozzi. “Modeling and Control of Quantum Systems: An Introduction”. En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 57.8 (ago. de 2012), págs. 1898-1917. DOI: [10.1109/tac.2012.2195830](https://doi.org/10.1109/tac.2012.2195830). URL: <https://doi.org/10.1109/tac.2012.2195830>.
- [2] Daoyi Dong, Chunlin Chen, Tzyh-Jong Tarn, A. Pechen y H. Rabitz. “Incoherent Control of Quantum Systems With Wavefunction-Controllable Subspaces via Quantum Reinforcement Learning”. En: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)* 38.4 (ago. de 2008), págs. 957-962. DOI: [10.1109/tsmcb.2008.926603](https://doi.org/10.1109/tsmcb.2008.926603). URL: <https://doi.org/10.1109/tsmcb.2008.926603>.
- [3] V. P. Belavkin. “Theory of the control of observable quantum systems”. En: *Autom. Remote Control* (1983), págs. 178-188.
- [4] David J. Tannor y Stuart A. Rice. “Control of selectivity of chemical reaction via control of wave packet evolution”. En: *The Journal of Chemical Physics* 83.10 (nov. de 1985), págs. 5013-5018. DOI: [10.1063/1.449767](https://doi.org/10.1063/1.449767). URL: <https://doi.org/10.1063/1.449767>.
- [5] Anthony P. Peirce, Mohammed A. Dahleh y Herschel Rabitz. “Optimal control of quantum-mechanical systems: Existence, numerical approximation, and applications”. En: *Physical Review A* 37.12 (jun. de 1988), págs. 4950-4964. DOI: [10.1103/physreva.37.4950](https://doi.org/10.1103/physreva.37.4950). URL: <https://doi.org/10.1103/physreva.37.4950>.
- [6] Paul Brumer y Moshe Shapiro. “Laser Control of Molecular Processes”. En: *Annual Review of Physical Chemistry* 43.1 (oct. de 1992), págs. 257-282. DOI: [10.1146/annurev.pc.43.100192.001353](https://doi.org/10.1146/annurev.pc.43.100192.001353). URL: <https://doi.org/10.1146/annurev.pc.43.100192.001353>.
- [7] Richard S. Judson y Herschel Rabitz. “Teaching lasers to control molecules”. En: *Physical Review Letters* 68.10 (mar. de 1992), págs. 1500-1503. DOI: [10.1103/physrevlett.68.1500](https://doi.org/10.1103/physrevlett.68.1500). URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.68.1500>.
- [8] Steven T. Flammia y Yi-Kai Liu. “Direct Fidelity Estimation from Few Pauli Measurements”. En: *Physical Review Letters* 106.23 (jun. de 2011). DOI: [10.1103/physrevlett.106.230501](https://doi.org/10.1103/physrevlett.106.230501). URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.106.230501>.

- [9] Osama Moussa, Marcus P. da Silva, Colm A. Ryan y Raymond Laflamme. “Practical Experimental Certification of Computational Quantum Gates Using a Twirling Procedure”. En: *Physical Review Letters* 109.7 (ago. de 2012). DOI: [10.1103/physrevlett.109.070504](https://doi.org/10.1103/physrevlett.109.070504). URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.109.070504>.
- [10] Easwar Magesan, Jay M. Gambetta, B. R. Johnson, Colm A. Ryan, Jerry M. Chow, Seth T. Merkel, Marcus P. da Silva, George A. Keefe, Mary B. Rothwell, Thomas A. Ohki, Mark B. Ketchen y M. Steffen. “Efficient Measurement of Quantum Gate Error by Interleaved Randomized Benchmarking”. En: *Physical Review Letters* 109.8 (ago. de 2012). DOI: [10.1103/physrevlett.109.080505](https://doi.org/10.1103/physrevlett.109.080505). URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.109.080505>.
- [11] Cornelius Hempel, Christine Maier, Jonathan Romero, Jarrod McClean, Thomas Monz, Heng Shen, Petar Jurcevic, Ben P. Lanyon, Peter Love, Ryan Babbush, Alán Aspuru-Guzik, Rainer Blatt y Christian F. Roos. “Quantum Chemistry Calculations on a Trapped-Ion Quantum Simulator”. En: *Phys. Rev. X* 8 (3 2018), pág. 031022. DOI: [10.1103/PhysRevX.8.031022](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.8.031022). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.8.031022>.
- [12] Moshe Shapiro y Paul Brumer. *Quantum Control of Molecular Processes*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, dic. de 2011. DOI: [10.1002/9783527639700](https://doi.org/10.1002/9783527639700). URL: <https://doi.org/10.1002/9783527639700>.
- [13] Steven Chu. “Cold atoms and quantum control”. En: *Nature* 416.6877 (mar. de 2002), págs. 206-210. DOI: [10.1038/416206a](https://doi.org/10.1038/416206a). URL: <https://doi.org/10.1038/416206a>.
- [14] Ramon van Handel, John K Stockton e Hideo Mabuchi. “Modelling and feedback control design for quantum state preparation”. En: *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 7.10 (sep. de 2005), S179-S197. DOI: [10.1088/1464-4266/7/10/001](https://doi.org/10.1088/1464-4266/7/10/001). URL: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/7/10/001>.
- [15] Seth Lloyd. “Coherent quantum feedback”. En: *Physical Review A* 62.2 (jul. de 2000). DOI: [10.1103/physreva.62.022108](https://doi.org/10.1103/physreva.62.022108). URL: <https://doi.org/10.1103/physreva.62.022108>.
- [16] Markus Rambach, Mahdi Qaryan, Michael Kewming, Christopher Ferrie, Andrew G. White y Jacqueline Romero. “Robust and Efficient High-Dimensional Quantum State Tomography”. En: *Physical Review Letters* 126.10 (2021). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.126.100402](https://doi.org/10.1103/physrevlett.126.100402). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.100402>.
- [17] Navin Khaneja, Timo Reiss, Cindie Kehlet, Thomas Schulte-Herbrüggen y Steffen J. Glaser. “Optimal control of coupled spin dynamics: design of NMR pulse sequences by gradient ascent algorithms”. En: *Journal of Magnetic Resonance* 172.2 (feb. de 2005),

- págs. 296-305. DOI: [10.1016/j.jmr.2004.11.004](https://doi.org/10.1016/j.jmr.2004.11.004). URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmr.2004.11.004>.
- [18] James C. Spall. “A Stochastic Approximation Technique for Generating Maximum Likelihood Parameter Estimates”. En: *1987 American Control Conference*. 1987, págs. 1161-1167. DOI: [10.23919/ACC.1987.4789489](https://doi.org/10.23919/ACC.1987.4789489).
- [19] P. Sadegh y J.C. Spall. “Optimal random perturbations for stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation”. En: 43.10 (1998), págs. 1480-1484. DOI: [10.1109/9.720513](https://doi.org/10.1109/9.720513). URL: <https://doi.org/10.1109/9.720513>.
- [20] J.C. Spall. “Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation”. En: 37.3 (mar. de 1992), págs. 332-341. DOI: [10.1109/9.119632](https://doi.org/10.1109/9.119632). URL: <https://doi.org/10.1109/9.119632>.
- [21] J.C. Spall. “Spall, J.C.: Adaptive stochastic approximation by the simultaneous perturbation method. *IEEE Trans. Autom. Contr.* 45, 1839-1853”. En: *Automatic Control, IEEE Transactions on* 45 (nov. de 2000), págs. 1839 -1853. DOI: [10.1109/TAC.2000.880982](https://doi.org/10.1109/TAC.2000.880982).
- [22] A. Utreras-Alarcón, M. Rivera-Tapia, S. Niklitschek y A. Delgado. “Stochastic optimization on complex variables and pure-state quantum tomography”. En: *Scientific Reports* 9.1 (nov. de 2019). DOI: [10.1038/s41598-019-52289-0](https://doi.org/10.1038/s41598-019-52289-0). URL: <https://doi.org/10.1038/s41598-019-52289-0>.
- [23] J. A. Gidi. *Complex Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation*. 2021. URL: <https://github.com/jgidi/ComplexSPSA.jl> (visitado 08-03-2022).
- [24] Alexandre Blais, Ren-Shou Huang, Andreas Wallraff, S. M. Girvin y R. J. Schoelkopf. “Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation”. En: *Phys. Rev. A* 69 (6 2004), pág. 062320. DOI: [10.1103/PhysRevA.69.062320](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.062320). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.062320>.
- [25] J Werschnik y E K U Gross. “Quantum optimal control theory”. En: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 40.18 (sep. de 2007), R175-R211. DOI: [10.1088/0953-4075/40/18/r01](https://doi.org/10.1088/0953-4075/40/18/r01). URL: <https://doi.org/10.1088/0953-4075/40/18/r01>.
- [26] Z. Hradil. “Quantum-state estimation”. En: *Physical Review A* 55.3 (mar. de 1997), R1561-R1564. DOI: [10.1103/physreva.55.r1561](https://doi.org/10.1103/physreva.55.r1561). URL: <https://doi.org/10.1103/physreva.55.r1561>.
- [27] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2011. ISBN: 9781107002173. URL: <https://www.amazon.com/Quantum-Computation-Information-10th-Anniversary/dp/1107002176?SubscriptionId=AKIAIOBINVZYXZQZ2U3A&tag=>

[chimbori05 - 20 & linkCode = xm2 & camp = 2025 & creative = 165953 & creativeASIN=1107002176.](#)

