



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Clasificación y formación de múltiples clústeres contra-propagantes en el Modelo Hamiltoniano de Campo Medio atractivo

Por: Danilo Matías Rivera Ibacache

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la
Universidad de Concepción para optar al grado académico de Magíster en
Ciencias con Mención en Física

Julio 2022

Concepción, Chile

Profesor Guía: Dr. Roberto Elías Navarro Maldonado



© 2022, Danilo Rivera Ibacache

Ninguna parte de esta tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio o procedimiento, sin permiso por escrito del autor.

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

AGRADECIMIENTOS

El solo hecho de llegar a la universidad siempre había sido impensado para mi, excepto para mi familia. Ellos siempre han creído en mi y me han dado su apoyo incondicional, si bien, las cosas no han sido sencillas, ellos siempre han estado conmigo apoyándome en mis sueños. Quiero agradecer a mi mamá, una persona increíble e inigualable, todo un ejemplo y motivación para mi; a mi papá por siempre creer en mis sueños y apoyarme en ellos; a Eduardo, alguien que admiro y que considero un ejemplo a seguir. Quiero agradecer a mi hermano Nachito, el cual es mi motivación de continuar mi día tras día, y así poder ser un buen ejemplo para él. También, quiero dar gracias a Nicol, una persona espectacular, que ha sido mi compañera incansable en este años de universidad, sin tu ayuda ni apoyo no imagino haber podido llegar a estas instancias.

Durante estos años de universidad he conocido a personas increíbles, mis amigos, compañeros, colaboradores como Jorge con su gran ayuda en programación, y profesores, entre ellos a mi tutor, el profesor Roberto, quien me ha ayudado durante todo este proceso de formación en ciencias y me ha permitido desenvolverme en el área que más cómodo me siento, dándome su guía y consejos que han sido de gran ayuda.

Por último quiero agradecer el financiamiento de ANID a través de los proyectos FONDECyT No. 11180947, No. 1191351, y PAI No. 79170095.

Resumen

Los sistemas con interacciones de largo alcance –que presentan una energía potencial que decae con la distancia $V \propto r^{-\alpha}$, con $\alpha < d$ y d la dimensión del espacio que contiene al sistema–, pueden presentar diversos tipos de estados cuasi-estacionarios durante su dinámica, cuyas características son dependientes de las condiciones iniciales del sistema. Estos estados se encuentran fuera del equilibrio termodinámico y su tiempo de vida diverge con el número de partículas que componen al sistema. Estos sistemas han sido estudiados mediante el uso de modelos simplificados, como el modelo Hamiltoniano de Campo Medio, el cual preserva algunas características de sistemas más complejos como sistemas gravitacionales o plasmas y, por lo tanto, puede ayudar a estudiar y comprender las propiedades de sistemas fuera del equilibrio termodinámico.

Este tipo de sistemas con interacciones de largo alcance admiten la propagación de ondas de densidades durante su evolución, por lo que en este trabajo, se estudia cómo las condiciones iniciales afectan a las propiedades del estado cuasi-estacionario por medio del reconocimiento del tipo de mecanismos con el cual las ondas afectan a la formación de estructuras en las distribuciones de partícula de cada caso. Este estudio se hace usando simulaciones numéricas de partículas del modelo Hamiltoniano de Campo Medio en una dimensión. Luego, en un diagrama de parámetros característicos de las condiciones iniciales, se clasifica el tipo de estado-cuasiestacionario según el grado de homogeneidad, el tipo de estructuras que aparecen en la función de distribución de partículas en el espacio de fases y el mecanismos físico responsable de su formación.

Keywords –Interacción de largo alcance, estados cuasi-estacionarios, modelo HMF

Abstract

Systems with long-range interactions –those that show a potential energy that decay with distance as $V \propto r^{-\alpha}$, with $\alpha < d$ and d the dimension of the space containing the system– can be found in different quasi-stationary states during their dynamics, which dependent on the initial conditions. Quasi-stationary states are usually states out-of-thermodynamic equilibrium, and their lifetime diverges with the number of particles composing the system. Systems with these characteristics have been studied by using simplified models such as the Hamiltonian mean-field (HMF) model which preserves some characteristics of some complex systems such as gravitational systems and plasmas. Thus, the HMF model can help to study and to understand the properties of systems far from thermodynamic equilibrium.

This kind of system with long-range interactions admits the propagation of density waves during their evolution, so in this work, we study how the initial conditions affect the properties of the quasi-steady state by recognizing the type of mechanisms by which the waves affect the formation of structures in the particle distributions of each case. This study is done using numerical simulations of particles of the mean-field Hamiltonian model in one dimension. Then, in a diagram of characteristic parameters of the initial conditions, the type of quasi-stationary state is classified according to the degree of homogeneity, the type of structures that appear in the particle distribution function in the phase space, and the physical mechanisms responsible for their formation.

Keywords – Long-range interactions, Quasi-stationary states, HMF model

Índice general

AGRADECIMIENTOS	I
Resumen	II
Abstract	III
1. Introducción	1
2. Marco Teórico	4
2.1. Sistemas con interacción de largo alcance	4
2.2. Modelo Hamiltoniano de Campo Medio	8
2.2.1. Estado de equilibrio del modelo HMF	11
2.3. Condiciones iniciales en el modelo HMF	15
2.4. Simulaciones de partículas del modelo HMF	17
2.5. Estados cuasi-estacionarios del modelo HMF	24
2.5.1. Estados cuasi-estacionarios paramagnéticos	27
2.5.2. Estados cuasi-estacionarios ferromagnéticos	31
2.6. Clasificación de los estados cuasi-estacionarios del modelo HMF	34
3. Metodología	37
3.1. Planteamiento del problema	37
3.2. Hipótesis	39
3.3. Objetivos	39
3.3.1. Objetivo General	39
3.3.2. Objetivo específicos	39
3.4. Metodología	40
3.4.1. Metodología 1: Simulaciones numéricas	40
3.4.2. Metodología 2: Condiciones iniciales en el modelo HMF	41
3.4.3. Metodología 3: Clasificación de los distintos estados cuasi-estacionarios	43
4. Resultados	45
4.1. Casos simulados	45
4.2. Clasificación de estados cuasi-estacionarios paramagnéticos	48

4.2.1. Estados cuasi-estacionarios paramagnéticos con dos clústeres contra-propagantes	48
4.2.2. Estados cuasi-estacionarios paramagnéticos con tres clústeres	52
4.2.3. Estados cuasi-estacionarios paramagnéticos con cinco clústeres	55
4.3. Clasificación de estados cuasi-estacionarios ferromagnéticos	58
4.3.1. Estados cuasi-estacionarios ferromagnéticos con una <i>core-halo</i>	58
4.3.2. Estados cuasi-estacionarios ferromagnéticos con una <i>core-</i> <i>halo</i> con estructuras en el <i>halo</i>	62
4.4. Diagrama de clasificación de estados cuasi-estacionarios	65
5. Conclusión	72



Índice de figuras

2.2.1. Magnetización de equilibrio m en función de la densidad de energía u .	14
2.3.1. Distribución de partículas <i>Water-Bag</i> , con $u_0 = 0,55$ y $M_0 = 0,8$.	17
2.4.1. Energía u en el tiempo para una simulación de $N = 2 \times 10^5$ partículas con $M_0 = 0,6$ y $u_0 = 0,7$.	23
2.5.1. Evolución en el tiempo de la magnetización de un sistema de $N = 10^4$ con $M_0 = 0,8$ y $u_0 = 0,69$. La magnetización de equilibrio de este sistema es $m = 0,307$ según las predicciones canónicas vistas en la Sección 2.2.1.	25
2.5.2. Funciones de distribuciones de velocidad para dos QSS diferentes del modelo HMF.	26
2.5.3. Estado cuasi-estacionario paramagnético de un sistema de $N = 10^6$ partículas iniciado con $M_0 = 0,2$ y $u_0 = 1,4$.	28
2.5.4. Estado cuasi-estacionario paramagnético con $M_0 = 0,5$, $u_0 = 0,69$ y $N = 10^6$.	29
2.5.5. Estado cuasi-estacionario ferromagnético compuesto por $N = 10^6$ partículas e iniciado con $M_0 = 0,4$, $u_0 = 0,6$.	32
2.6.1. Diagrama de fase y de clasificación de los QSS del modelo HMF (Bachelard et al., 2008). Espacio de condiciones iniciales del modelo HMF (M_0, U), donde los QSS ferromagnéticos (parte inferior del diagrama) son clasificados como estados poseen una <i>core-halo</i> en su espacio de fase y los QSS paramagnéticos (parte superior del diagrama) son clasificados como estados con dos clústeres contra-propagantes en sus espacios de fase.	36
4.1.1. Espacio de condiciones iniciales del modelo HMF. En la “Zona Prohibida” se encuentran combinaciones de condiciones iniciales (M_0, u_0) que no son permitidas para el modelo HMF, mientras que en la “Zona Permitida” se encuentran las condiciones iniciales que no presentan ningún problema para este tipo de sistema.	47
4.2.1. Evolución temporal de la magnetización M del sistema. Caso con $N = 1 \times 10^6$ partículas.	49
4.2.2. Estado cuasi-estacionario paramagnético. Caso en $t = 127, 36$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,3$ y $u_0 = 1,4$.	49
4.2.3. Estado cuasi-estacionario paramagnético. Caso en $t = 127, 36$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,3$ y $u_0 = 0,7$.	50

4.2.4.Estado cuasi-estacionario paramagnéticos. Caso en $t = 311,4$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,8$ y $u_0 = 1,5$	52
4.2.5.Evolución temporal de la magnetización M del sistema. Caso con $N = 1 \times 10^6$ partículas.	53
4.2.6.Estado cuasi-estacionario paramagnético. Caso en $t = 223,36$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,4$ y $u_0 = 0,8$	53
4.2.7.Estado cuasi-estacionario paramagnético. Caso en $t = 223,36$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,7$ y $u_0 = 0,8$	54
4.2.8.Evolución temporal de la magnetización M del sistema. Caso con $N = 1 \times 10^6$ partículas.	55
4.2.9.Estado cuasi-estacionario paramagnético en diferentes tiempos en $t = 223,36$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,7$ y $u_0 = 1$	56
4.2.10.Estado cuasi-estacionario paramagnético en diferentes tiempos con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,8$ y $u_0 = 1,1$	57
4.3.1.Evolución temporal de la magnetización M del sistema. Caso con $N = 1 \times 10^6$ partículas.	59
4.3.2.Estado cuasi-estacionario ferromagnético. Caso en $t = 250,25$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,7$ y $u_0 = 0,4$	59
4.3.3.Estado cuasi-estacionario ferromagnético. Caso en $t = 250,25$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,8$ y $u_0 = 0,3$	60
4.3.4.Evolución temporal de la magnetización M del sistema. Caso con $N = 1 \times 10^6$ partículas.	63
4.3.5.Estado cuasi-estacionario ferromagnético. Caso en $t = 263,04$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,6$ y $u_0 = 0,6$	63
4.3.6.Estado cuasi-estacionario ferromagnético. Caso en $t = 263,04$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,8$ y $u_0 = 0,4$	64
4.4.1.Espacio de condiciones iniciales. Diagrama de clasificación de los QSS asociados a distintas condiciones iniciales del modelo HMF. Las zonas de esta diagrama corresponde a la clasificación: zonas amarillas P2C con la sub-zona P2C* son los QSS paramagnéticos con dos clústeres contra-propagantes pero en P2C* se presentan pequeños clústeres no recurrentes, zona roja P3C son los QSS paramagnéticos con tres clústeres, zona celeste P5C son los QSS paramagnéticos con cinco clústeres, zona verde FCHE son los QSS ferromagnéticos con una <i>core-halo</i> con estructuras en el <i>halo</i> y la zona gris que contiene a la línea segmentada corresponde a los QSS ferromagnéticos con una <i>core-halo</i> . La línea segmentada corresponde a estados ferromagnéticos donde la magnetización del sistema permanece fija en su valor inicial.	70

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas con interacción de largo alcance –que se caracterizan por tener un potencial de interacción $V \propto r^{-\alpha}$ que decae con la distancia entre las partículas, donde la potencia $\alpha > 0$ es menor que la dimensión del espacio que contiene al sistema–, presentan estados cuasi-estacionarios (QSS, por sus siglas en inglés), que se encuentran fuera del equilibrio y que dependen de las condiciones iniciales del sistema. De esto último, dependiendo de las condiciones iniciales, se obtendrán distintos QSS los cuales se caracterizan por tener distribuciones de partículas no Gaussianas, las cuales no han podido ser explicadas por una teoría fundamental, basada en primeros principios físicos, por lo que resulta crucial tener conocimiento de los distintos tipos de QSS asociados a las diferentes condiciones iniciales del sistemas.

Existe una gran cantidad de estudios, tanto experimentales como teóricos, sobre los sistemas con interacción de largo alcance, los cuales se enfocan en investigar la forma y dinámica de las distintas etapas por la cuales el sistema pasa antes de alcanzar el estado de equilibrio (Dauxois et al., 2002). La mayoría de estos trabajos (Fisher, 1964; Ruelle, 1970) concuerdan con que la imagen clásica de la relajación hacia el equilibrio de estos sistemas, impulsada por colisiones de dos cuerpos, no describe de forma correcta todos los procesos y dinámicas que el sistema presenta. La principal falla es en la caracterización de la etapa del QSS, la cual es alcanzada antes de que el sistema se relaje al equilibrio termodinámico.

Una de las primeras identificaciones del fallo de la imagen clásica en los sistemas con interacción de largo alcance, fue reportada por [Lynden-Bell \(1967\)](#) cuando estudiaba los perfiles lumínicos de galaxias elípticas. En particular, descubrió que estos sistemas se encontraban en un estado aparentemente estacionario el cual era diferente del estado de equilibrio según la teoría de [Chandrasekhar \(1942\)](#), que se basaba en la relajación por medio de colisión de dos cuerpos y predecía tiempos de relajación al estado de equilibrio mayores que la edad del universo. Motivado por esta discordancia entre la observación y teoría, [Lynden-Bell \(1967\)](#) introdujo el concepto de “relajación violenta” en sistemas con interacciones de largo alcance, como las galaxias elípticas, pero en el escenario donde no existen colisiones. [Lynden-Bell \(1967\)](#) abrió un nuevo campo de investigación en física estadística heredado de la astrofísica por medio del uso de modelos simplificados, los cuales al permitir la generalización del estudio de este tipo de sistemas, permitieron la aplicación de los resultados de esta nueva área ya no solo a sistemas astrofísicos, si no a variados tipos de sistemas donde solo se pide que presenten interacciones de largo alcance como la estudiada en estos casos ([De Nigris and Leoncini, 2015](#)). Simulaciones numéricas y observaciones han reportado que este tipo de sistemas compuestos por un gran número de cuerpos, en su etapa inicial de evolución sufren una relajación violenta a un QSS, usualmente lejos del estado de equilibrio termodinámico, el cual tiene un tiempo de vida que diverge con el número de partículas ([Latora et al., 2001](#)). Finalmente, el sistema alcanza el estado de equilibrio termodinámico adiabáticamente desde el QSS ([Pluchino et al., 2007](#)).

Las interacciones de largo alcance las encontramos, en particular, en sistemas gravitacionales ([Dauxois et al., 2002](#); [Padmanabhan, 1990](#)) y en plasmas ([Levin et al., 2008b](#)). En estos sistemas, la dinámica es colectiva, por lo que el tratamiento estadístico es extremadamente complejo de aplicar debido a la indeterminación de la distancia de interacción. De este modo, la comunidad científica vinculada al área de la física estadística comenzó el estudio de la dinámica, las propiedades ergódicas y la estadística en sistemas hamiltonianos de largo alcance mediante el uso de diferentes modelos simplificados. Estos modelos desprecian ciertas características como la masa de los cuerpos y se centran en conservar las propiedades de la fuerza de interacción de largo alcance, lo cual permite una descripción detallada de los comportamientos tanto estadísticos como dinámicos

de estos sistemas, además de mostrar una etapa cuasi-estacionaria durante su evolución. Un ejemplo de estos modelos simplificados, es el modelo Hamiltoniano de Campo Medio unidimensional (HMF, por sus siglas en inglés) (Antoni and Ruffo, 1995), donde el potencial decae como $V \propto r^{-\alpha}$, donde r es la distancia entre dos cuerpos y $0 < \alpha < N$, con N la dimensión espacial que contiene al sistema (Campa et al., 2009; Levin et al., 2014).

De lo antes descrito, no es posible estudiar y caracterizar por completo modelos como el HMF mediante la estadística usual de Boltzmann-Gibbs, en especial los QSS, los cuales son distintos estados que dependen de las condiciones iniciales y además presentan distribuciones de partículas no gaussianas. Es así, que a continuación se presentará una revisión de las principales investigaciones centradas en el estudio de la etapa cuasi-estacionaria (donde se presentan los QSS) de este tipo de sistemas y como estos trabajos, por lo general, solo se limitan al estudio de ciertas condiciones iniciales, con las cuales se alcanzan QSS muy específicos sin poder obtener una conclusión más general que explique y caracterice a estos sistemas. Se hará especialmente énfasis en los mecanismos físicos que puedan estar involucrados en sistemas como el modelo HMF, que influyan en la formación de los distintos QSS alcanzados para las diferentes condiciones iniciales de este tipo de sistema. Todo esto se hace mediante el estudio de una numerosa base de resultados de simulaciones numéricas de partículas del modelo HMF con los cuales se estudia en detalle la evolución de este sistema.

El presente trabajo se organiza como sigue. En el capítulo 2, se presentan los fundamentos básicos del área enfocada al estudio de los sistemas con interacciones de largo alcance; se muestran los alcances y utilidad del modelo HMF; y se hará una revisión de los distintos QSS del modelo HMF y como se caracterizan hasta el momento. En el capítulo 3 se especifican los objetivos de esta investigación y su hipótesis de trabajo, también se repasa la metodología utilizada en este estudio. Es así, que en el capítulo 4, se presentan los resultados de este trabajo, sus alcances y contrastes con investigaciones del área. Finalmente, en el capítulo 5 se tiene un resumen de todo el presente trabajo y se contrasta con la hipótesis planteada en esta investigación.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Sistemas con interacción de largo alcance

Entre los variados sistemas físicos de la naturaleza que existen podemos encontrar aquellos donde sus partículas interactúan por medio de un potencial de largo alcance que posee la forma de $V \propto r^{-\alpha}$, donde α es menor a la dimensión del espacio que contiene al sistema. Como ejemplos de este tipo de sistema tenemos a las galaxias y cúmulos globulares (Padmanabhan, 1990; Levin et al., 2008a; Teles et al., 2010), modelos de átomos fríos (O'Dell et al., 2000), plasmas confinados por un campo magnético externo (Levin et al., 2008b; Kaganovich et al., 2010; Chen and Davidson, 1994), por nombrar algunos. La termodinámica clásica y la mecánica estadística fallan cuando son aplicadas a estos sistemas con interacciones de largo alcance, ya que no logran predecir todas sus etapas de evolución.

En los sistemas con interacción de largo alcance no encontramos extensividad ni aditividad, dos condiciones necesarias para poder aplicar la termodinámica clásica. A diferencia de sistemas extensos, estos sistemas no presentan una energía interna U que escale de forma lineal con el número de partículas N que los componen, si no que lo hace como $U \sim N^2$. Esto es debido a su potencial de interacción de rango infinito, el cual provoca que no sea posible definir una energía interna proporcional a las interacciones entre partículas que se encuentren dentro de un determinado rango de interacción, de modo que se termina teniendo una energía interna no extensiva.

La extensividad es importante dado que nos da un límite termodinámico no trivial y la equivalencia entre los diferentes conjuntos o ensambles estadísticos. Pero al no encontrarse en estos sistemas, es posible tener problemas con la determinación de ciertos parámetros físicos, los cuales se pueden hallar en valores irrealmente altos, cuando estos sistemas se acercan al límite termodinámico $N \rightarrow \infty$. A modo de ejemplo para entender lo anterior consideremos el caso de un sistema con interacciones de corto alcance que es colocado en contacto con un depósito térmico a una temperatura T (ensamble canónico), luego su energía libre de Helmholtz sería dada por

$$F(N, V) = U(N, V) - TS_B(N, V) \quad (2.1.1)$$

dónde $S_B(N, V) = k_B \ln W$ es la entropía de Boltzmann, la cual relaciona la termodinámica con la dinámica asociada a W , que representa el número de microestados disponibles para el sistema por medio de su dinámica. Entonces, para un sistema hamiltoniano confinado que tiene un volumen de espacio de fase proporcional a W y que crece exponencialmente con el número de partículas, es posible notar que $S_B \sim N$, y que S_B es totalmente independiente del rango de interacción. De esta forma tenemos que además de la energía interna, la entropía de un sistema con interacciones de corto alcance escala linealmente con el número de partículas del propio sistema, por lo que se tiene un equilibrio termodinámico no trivial (Levin et al., 2014).

En los sistemas con interacción de largo alcance no encontramos las mismas relaciones vistas anteriormente debido a que su potencial de interacción, de rango infinito, da como resultado una energía interna que no escala linealmente con el número de partículas del sistema, sino que como $U \sim N^2$. A modo de comparación con el caso anterior, si este sistema se pone en contacto con un depósito térmico, la energía libre de Helmholtz para grandes N será dominada por la energía interna. Entonces, cuando se habla de un estado de equilibrio en este caso, se está hablando de un mínimo en la energía interna U . La entropía será completamente irrelevante a menos que la temperatura escale con el número de partículas, $T \sim N$, lo que daría una temperatura irrealmente alta.

Debido a la naturaleza de largo alcance del potencial de interacción de estos sistemas, nos encontramos con una dificultad importante. Su energía de interacción es no extensiva, lo cual puede conducir a fuerzas y velocidades demasiado grandes donde incluso se podría superar la velocidad de la luz. Para evitar este tipo de problemas y así poder definir un límite termodinámico que se encuentre dentro de lo físicamente posible, la constante de acoplamiento que acompaña al potencial de estos sistemas debe poseer un factor $1/N$. Esto es conocido como la prescripción de Kac (Kac, 1959) y la podemos encontrar en sistemas gravitacionales (Padmanabhan, 1990; Levin et al., 2008a; Teles et al., 2010) o plasmas reescalados (Levin et al., 2008b; Kaganovich et al., 2010; Chen and Davidson, 1994), los cuales recobran su extensividad gracias a esta modificación.

Si bien, anteriormente vimos que ciertos sistemas con interacción de largo alcance podían recobrar su extensividad gracias a la prescripción de Kac, estos siguen siendo no aditivos. Lo que sucede es que para estos sistemas no es posible definir una energía interfacial, la cual tiene relación con las partículas cercanas a la interfaz, es decir, en el límite de interacción de la fuerza. A medida que el rango de interacción crece, el concepto de interfaz va perdiendo su sentido de aplicación, de modo que no es posible considerar la energía del conjunto completo de partículas del sistema, energía de masa, como una cantidad que crezca a medida que N lo hace. Todo esto implica que considerar al sistema total como una suma de subsistemas más pequeños, no es aplicable para estos casos, ya que el potencial conduce a una interacción no trivial entre todos los posibles subsistemas. Por otro lado, la falta de aditividad puede conducir a la determinación de calor específico negativo para estos sistemas aislados (Campa et al., 2009; Barré and Yamaguchi, 2009; Lynden-Bell, 1999). Debido a todos estos problemas podemos encontrar que tanto el conjunto microcanónico como el canónico, pueden ser desiguales para sistemas con potenciales de interacción de largo alcance (Latora et al., 2001; Bouchet and Barré, 2005; Chavanis, 2006).

En mecánica estadística, la teoría ergódica se enfocada a entender bajo qué condiciones una densidad de espacio de fase no estacionaria convergerá a una estacionaria (Levin et al., 2014). Pero, la aplicación de esta teoría a los

sistemas con interacción de largo alcance, que presentan una relajación a estados cuasi-estacionarios fuera del equilibrio termodinámico, falla debido a que en estos sistemas no se verifica la existencia de ergodicidad ni de mezcla, las cuales sí se encuentran en sistemas con interacción de rango finito (Tsuchiya et al., 1994; Borgonovi and et al., 2004).

Los sistemas con interacción de largo alcance muestran una muy lenta evolución hacia el estado de equilibrio, ya que a diferencia de los sistemas con interacción de rango finito, en el límite termodinámico, $N \rightarrow \infty$, el sistema se encuentra completamente dominado por el campo medio que es generado de la interacción de largo alcance de todas las partículas del sistema, y las correlaciones (colisiones) son insignificantes, de modo que la ecuación que describe la evolución de la función de distribución de una partícula $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ para estos sistemas, es la ecuación de Boltzmann no colisional,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0, \quad (2.1.2)$$

también es conocida como la ecuación de Vlasov. El término $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ es la fuerza que actúa sobre una partícula de masa m , el símbolo ∇ es el gradiente en el espacio de posiciones y $\nabla_{\mathbf{p}}$ es el gradiente en el espacio de velocidades.

La ecuación de Vlasov tiene un número infinito de soluciones estacionarias, las cuales dependen de la distribución inicial de las partículas. La función de distribución de una partícula evoluciona a escalas de longitud cada vez más pequeñas, de modo que los sistemas con interacción de largo alcance solo alcanzan el QSS a una escala macroscópica.

Sin considerar el límite termodinámico, es decir, un número finito de partículas, la acumulación de correlaciones entre velocidades de las partículas o los efectos de memoria son capaces de conducir al sistema con interacción de largo alcance desde un QSS hacia el equilibrio termodinámico (Campa et al., 2009). Este tiempo de relajación en la práctica es muy lento, debido a que diverge con el número de partículas como N^γ (Barré et al., 2006). El valor del exponente γ depende de cada sistema, pero normalmente es $\gamma > 1$ (Bouchet and Dauxois, 2005). Con respecto

a este tiempo, por último tener presente que su fuerte divergencia impide que la mayoría de sistemas físicamente relevantes, como plasmas y galaxias, alcancen el estado de equilibrio en un tiempo observable (Levin et al., 2014).

Como ya se ha comentado en la presente sección, estudiar los sistemas con interacciones de largo alcance es más complejo de lo que es estudiar sistemas con interacciones de corto alcance. Una característica relevante de estos sistemas es la existencia de QSS en sus etapas de evolución, los cuales para poder estudiarlos se recurre a modelos simplificados que son ampliamente usados gracias a su bajo costo computación y su gran utilidad para estudiar los distintos casos gracias a que conservan en detalle las propiedades de la interacción de largo alcance, es decir la influencia del campo medio sobre las partículas del sistema. Uno de los modelos más usados para estudiar este tipo de sistemas es el modelo Hamiltoniano de Campo Medio o modelo HMF por sus siglas en inglés (Antoni and Ruffo, 1995). A continuación se presentará y formalizará los principales detalles de este modelo y como es usado para estudiar los sistemas con interacción de largo alcance.

2.2. Modelo Hamiltoniano de Campo Medio

El modelo HMF es un modelo simplificado muy utilizado para estudiar sistemas con interacción de largo alcance (Campa et al., 2009; Levin et al., 2014). Este modelo describe un sistema compuesto por N partículas con masa igual a la unidad, que se mueven a lo largo de un círculo de radio unitario. El Hamiltoniano de este sistema es

$$H = K + V = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{\gamma}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)], \quad (2.2.1)$$

donde p_i es el momentum conjugado (velocidad) y θ_i es la posición sobre el círculo ($-\pi < \theta_i \leq \pi$) para la i -partícula. Este modelo trae consigo otra característica, puede ser utilizado para estudiar sistemas en donde la interacción es atractiva ($\gamma > 0$), o repulsiva ($\gamma < 0$) (Antoni and Ruffo, 1995). Este sistema se puede considerar como una simplificación de un sistema gravitacional unidimensional o de Coulomb con condiciones de borde periódicas y un fondo neutralizante (Levin et al., 2014), donde su potencial es escalado por N , todo esto debido a

la prescripción de Kac (Kac, 1959), ya que así se recobrar la extensividad de la energía interna del sistema.

El caso que presenta los QSS que dependen de las condiciones iniciales del sistema, es decir, de la magnetización inicial y la energía total, es el de interacción atractiva (Campa et al., 2009), luego el modelo HMF con interacción atractiva, tomando $\gamma = 1$, es utilizado para describir sistemas con una interacción de largo alcance que presentan un potencial de la forma $V(r) \propto r^{-\alpha}$, donde r es la distancia entre las partículas y $\alpha < d$, siendo d la dimensión del espacio que contiene al sistema.

Este modelo es muy útil para estudiar los sistemas con interacción de largo alcance, ya que permite la definición de cantidades macroscópicas como la “magnetización” que nos ayuda a estudiar la acción del campo medio sobre el sistema. La magnetización para una partícula es dada por $\mathbf{m}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$, y para el sistema completo se define como

$$\mathbf{M} = (M_x, M_y) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \cos(\theta_i), \sum_{i=1}^N \sin(\theta_i) \right) \quad (2.2.2)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i, \quad (2.2.3)$$

la cual representa el grado de homogeneidad de la densidad de partículas en el espacio de posiciones del sistema. La magnetización es una cantidad normalizada en función del número de partículas N que componen al sistema, por lo que $0 < |\mathbf{M}| < 1$, donde $|\mathbf{M}| = 0$ significa que las partículas se encuentran distribuidas de forma homogénea en el espacio de posiciones, mientras que $|\mathbf{M}| = 1$ significa que las partículas se concentran en un punto específico del espacio.

Las ecuaciones de movimiento de este modelo se pueden derivar de forma directa

del Hamiltoniano (2.2.1) y corresponden a

$$\dot{\theta}_i = p_i \quad (2.2.4)$$

$$\dot{p}_i = F_i = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j), \quad (2.2.5)$$

donde F_i es la fuerza sobre la i -partícula. Haciendo uso de la ecuación (2.2.2) y de la identidad trigonométrica, $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$, es posible reescribir la ecuación (2.2.5) como

$$\dot{p}_i = -M_x \sin(\theta_i) + M_y \cos(\theta_i). \quad (2.2.6)$$

Para determinar la energía total de este sistema necesitamos la energía cinética y la energía potencial las que podemos obtener del Hamiltoniano (2.2.1), pero antes notar que podemos reescribir el potencial de la ecuación (2.2.1) haciendo uso de la identidad trigonométrica $\cos(\theta_i - \theta_j) = \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) + \sin(\theta_i) \sin(\theta_j)$, luego

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \left[N - \cos(\theta_i) \sum_{j=1}^N \cos(\theta_j) - \sin(\theta_i) \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j) \right] \\ &= \frac{1}{2N} [N^2 - N^2 M_x^2 - N^2 M_y^2] \\ &= \frac{N}{2} [1 - |\mathbf{M}|^2], \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

así, el potencial es reescrito en función del modulo de la magnetización total del sistema.

Con estas ecuaciones es posible escribir la energía total del sistema (densidad de energía) para este sistema como,

$$u = \frac{H}{N} = \frac{\langle p^2 \rangle}{2} + \frac{1 - M^2}{2} \quad (2.2.8)$$

donde $\langle \rangle$ simboliza el promedio sobre el conjunto y $M = ||\mathbf{M}||$ es el modulo de la magnetización total. Notar que el Hamiltoniano (2.2.1) no depende explícitamente del tiempo de modo que este es un sistema conservativo, por lo que la energía

inicial es igual a la energía total, ya que el sistema conserva esta cantidad en todo momento.

De manera similar, para el caso de la energía para una partícula, esta es dada por

$$u(\theta_i, p_i) = \frac{p_i^2}{2} + 1 - M_x \cos(\theta_i) - M_y \sin(\theta_i). \quad (2.2.9)$$

Las definiciones y ecuaciones aquí presentadas nos ayudan a definir en su totalidad al modelo HMF durante su evolución, pero a modo de completitud, también se presentará en las siguientes secciones como se estudia el modelo HMF en el estado de equilibrio termodinámico.

2.2.1. Estado de equilibrio del modelo HMF

En el estado de equilibrio termodinámico se tiene que tanto el ensamble canónico como el microcanónico son equivalente, por ello a continuación solo presentaremos la solución canónica del modelo HMF con interacción atractiva.

Considerando la función de partición del modelo HMF,

$$Z = \int \prod_{i=1}^N dp_i d\theta_i \exp(-\beta H), \quad (2.2.10)$$

donde la integración se extiende sobre todo el espacio de fase, con β el inverso de la temperatura, a saber $\beta = 1/T$ (se considera $k_B = 1$). Integrando la función de partición (2.2.10) sobre las velocidades se obtiene

$$Z = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{\beta N}{2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^N d\theta_i \exp\left(\frac{\beta}{2N} \sum_{i,j=1}^N \cos(\theta_i - \theta_j)\right) \quad (2.2.11)$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{\beta N}{2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^N d\theta_i \exp\left(\frac{\beta}{2N} \left[\sum_i^N \mathbf{M}_i\right]^2\right), \quad (2.2.12)$$

donde se uso la identidad trigonométrica $\cos(\theta_i - \theta_j) = \cos(\theta_i)\cos(\theta_j) + \sin(\theta_i)\sin(\theta_j)$ y definición de la magnetización del sistema $\mathbf{M}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$. De

la ecuación (2.2.12) es posible obtener la contribución de cinética

$$Z_K = \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{N/2}, \quad (2.2.13)$$

y la potencial

$$Z_V = \exp \left(-\frac{\beta N}{2} \right) J, \quad (2.2.14)$$

donde J corresponde a

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^N d\theta_i \exp \left(\frac{\beta}{2N} \left[\sum_i^N \mathbf{M}_i \right] \right). \quad (2.2.15)$$

Para resolver y evaluar la integral de J , se hará uso de la transformación de Hubbard-Stratonovich (Campa et al., 2009), la cual consiste en

$$\exp \left[\frac{\mu}{2} \mathbf{x}^2 \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{y} \exp[-\mathbf{y}^2 + \sqrt{2\mu} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}], \quad (2.2.16)$$

con $\mu > 0$ y donde \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores bidimensionales. Luego la ecuación (2.2.15) puede ser reescrita

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=1}^N d\theta_i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{y} \exp \left[-\mathbf{y}^2 + \sqrt{2\mu} \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{y} \right], \quad (2.2.17)$$

donde se define $\mu = \beta/N$. Cambiando el orden de la integración en la ecuación (2.2.17) y factorizando la integral sobre las coordenadas de las N partículas. Reescalando la variable $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y} \sqrt{N/(2\beta)}$, se obtiene

$$J = \frac{N}{2\pi\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{y} \exp \left[-N \left(\frac{y^2}{2\beta} - \ln(2\pi I_0(y)) \right) \right], \quad (2.2.18)$$

notar que y es el modulo de \mathbf{y} y I_0 es la función de Bessel modificada de orden 0, la cual se obtiene de la definición de las funciones de Bessel modificadas de orden

n , dadas por

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{z \cos \theta} \cos(n\theta). \quad (2.2.19)$$

La energía libre de la energía libre de Helmholtz reescalada es dada por

$$\phi = \beta f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z, \quad (2.2.20)$$

la cual se busca minimizar porque se esta trabajando en el estado de equilibrio termodinámico del modelo HMF, es así que al considerar el límite de campo medio $N \rightarrow \infty$, la integral (2.2.18) puede ser evaluada empleando técnicas de punto de silla, luego la ecuación (2.2.20) toma la forma

$$\phi = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\pi}{\beta} \right) + \frac{\beta}{2} + \min_{y \geq 0} \left(\frac{y^2}{2\beta} - \ln(2\pi I_0(y)) \right). \quad (2.2.21)$$

De la ecuación anterior, tenemos que ϕ solo depende del modulo y y se tienen infinitos mínimos cuando

$$\frac{y}{\beta} = \frac{I_1(y)}{I_0(y)}, \quad (2.2.22)$$

lo cual se obtiene al minimizar el último termino de la ecuación (2.2.21). La ecuación (2.2.22) es una ecuación de consistencia la cual para $\beta < 2$ tiene por solución de mínima energía libre $y = 0$, lo que corresponde a una distribución de equilibrio homogéneo, es decir con magnetización igual a cero. Para el caso con $\beta > 2$ la solución de mínima energía no desaparece (distinta de cero) y el valor de y depende de β , denotada como \bar{y} la cual puede ser calculada de forma numérica. De este modo la magnetización de equilibrio m para un estado no homogéneo es dada por el cociente de las funciones de Bessel,

$$m = \frac{\bar{y}}{\beta} = \frac{I_1(\bar{y})}{I_0(\bar{y})}. \quad (2.2.23)$$

De lo anterior, notar que este tipo de sistema en su estado de equilibrio tiene una transición de fase en la temperatura critica $\beta_c = 2$ la cual es de segundo orden según trabajos de [Antoni and Ruffo \(1995\)](#); [Dauxois et al. \(2002\)](#). Las predicción canónica de la magnetización de equilibrio asociada a una energía específica es

confirmada en la Figura 2.2.1, donde es posible observar el paso continuo de la magnetización de cero a un valor finito, cuando decrece la temperatura (o incrementa β).

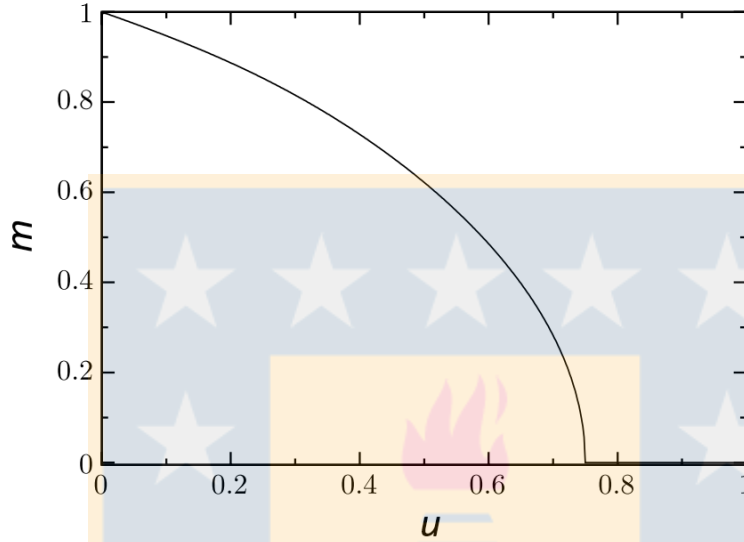


Figura 2.2.1: Magnetización de equilibrio m en función de la densidad de energía u .

La Figura 2.2.1 muestra la densidad de energía $u = H/N$ en función de la magnetización de equilibrio m . Esto se puede obtenerse de la energía libre dada por

$$u = \frac{\partial(\beta f)}{\partial \beta}, \quad (2.2.24)$$

que resulta en

$$u = \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2}(1 - m^2), \quad (2.2.25)$$

que corresponde a una ecuación que relaciona la energía de un sistema con su magnetización en el estado de equilibrio, entonces cuando se trabaja con el modelo HMF para una determinada energía inicial, y al saber que esta se conserva en todo momento (sistema conservativo), es posible saber su correspondiente magnetización de equilibrio por medio de la ecuación 2.2.25. Pero se debe recalcar que esto no es aplicable para los QSS ya que estos se presentan en una etapa previa a que el sistema se relaje al estado de equilibrio, además estos estados son obtenidos

cuando el sistema es iniciado en un estado inestable alcanzando distintos QSS ya que estos dependen de las distintas condiciones iniciales de cada caso, lo que se estudiara en las próximas secciones.

2.3. Condiciones iniciales en el modelo HMF

Cuando un sistema dado por el modelo HMF con interacción atractiva es iniciado en estado inestable alcanza QSS en una etapa previa antes de que el sistema alcance el estado de equilibrio. Típicamente en variados trabajos este estado inicial inestable es dado por una distribución de partículas tipo *Water-Bag* (Latora et al., 2001; Pluchino et al., 2004c; Campa et al., 2009), que es dada por

$$f_0(\theta, p) = \frac{1}{4\theta_0 p_0} \Theta(\theta_0 - |\theta|) \Theta(p_0 - |p|), \quad (2.3.1)$$

donde Θ es la función escalón o *heaviside* y θ_0 con p_0 son los límites máximos para las posiciones y velocidades respectivamente de las partículas.

Las condiciones iniciales del modelo HMF (magnetización y la energía inicial), se relación con la distribución de partículas *Water-Bag* por medio de los límites θ_0 y p_0 , ya que estos son determinados en base a estas condiciones. Para el caso de la magnetización inicial dada, considerando una distribución de partículas como la (2.3.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= (M_x, M_y) \\ &= \left(\int f_0(\theta, p) \cos(\theta) d\theta dp, \int f_0(\theta, p) \sin(\theta) d\theta dp \right), \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

notar que $\sin(\theta)$ es una función impar y la función escalón para los ángulos de $f_0(\theta, p)$ es una función par, de modo que su producto es igual a cero, así tenemos que la única componente no nula de \mathbf{M}_0 es M_x . Para la componente x de la magnetización inicial, la integral puede ser resuelta haciendo uso del método de integración por parte, así se obtiene

$$\mathbf{M}_0 = \left(\frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}, 0 \right), \quad (2.3.3)$$

luego,

$$|\mathbf{M}_0| = M_0 = \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}. \quad (2.3.4)$$

Así, se tiene que si la distribución inicial de partículas es simétrica en θ , luego $M_y = 0$, lo cual en el límite termodinámico, $N \rightarrow \infty$, se sigue cumpliendo (Pakter and Levin, 2011). De esta forma es posible determinar el valor del límite máximo θ_0 para una magnetización inicial M_0 dada cuando se tiene una distribución de partículas *Water-Bag*.

Ahora, para el caso de la energía inicial o total (sistema conservativo), cuando se considera una distribución de partículas tipo *Water-Bag* se tiene que

$$u_0 = \int f_0(\theta, p) \left[\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}(1 - M^2) \right] d\theta dp, \quad (2.3.5)$$

notar que la primera integral del lado derecho de la ecuación (2.3.5) para el caso de la variable p puede ser resuelta por medio del método de integración por parte, donde se debe recordar que la función escalón es una función par y la integral de $p^2/2$ es una función impar de modo que su producto es cero, mientras que la segundo integral es de integración directa e impone que la magnetización sea igual a M_0 debido a la función escalón asociada a las posiciones, así se tiene que

$$u_0 = \frac{p_0^2}{6} + \frac{1}{2}(1 - M_0^2), \quad (2.3.6)$$

lo cual corresponde a la energía inicial del sistema cuando se considera una distribución *Water-Bag* para una magnetización M_0 dada. Con la ecuación (2.3.6) par una energía y magnetización inicial dada es posible determinar el valor del límite máximo p_0 .

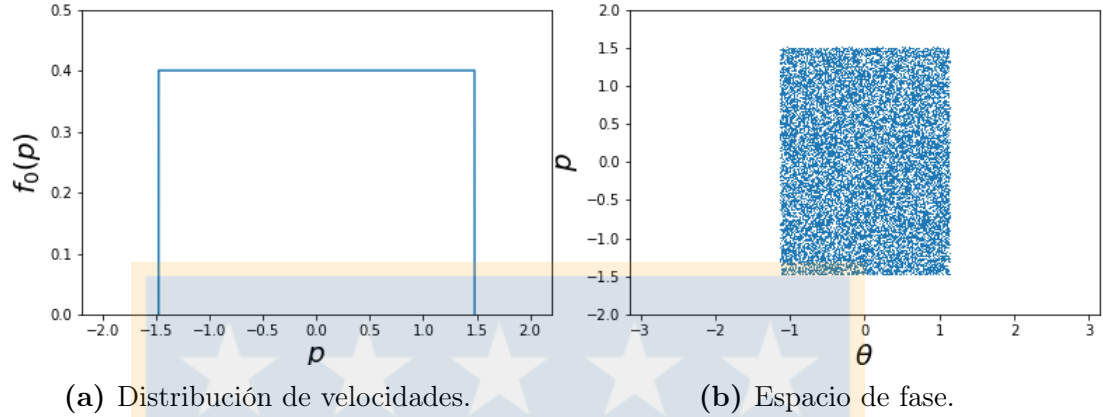


Figura 2.3.1: Distribución de partículas *Water-Bag*, con $u_0 = 0,55$ y $M_0 = 0,8$.

Las ecuaciones (2.3.4) y (2.3.6) determinan el estado inicial inestable para cuando el modelo HMF ferromagnético es iniciado con una distribución de partículas *Water-Bag* con una energía y magnetización inicial dadas (ver Figura 2.3.1).

Los QSS característicos de este tipo de sistemas son alcanzados cuando el modelo HMF es iniciado en un estado inestable como el presentado en esta sección. Estos QSS dependen de las condiciones iniciales del sistema, es decir dependen de la magnetización y energía inicial, por lo que se obtiene estados con distintas características. Una ventaja importante de estudiar los sistemas con interacciones de largo alcance por medio del modelo HMF, es que este al ser un modelo simplificado su costo computacional es bajo, por lo que para estudiar estos distintos QSS lo que se hace es desarrollar códigos de simulaciones de partículas que emulen como este sistema responde a las distintas condiciones iniciales, para posteriormente, mediante los datos obtenidos de las simulaciones, estudiar las principales características de estos distintos QSS. A continuación se presentara el proceso y funcionamiento de estos códigos de simulación de partículas del modelo HMF.

2.4. Simulaciones de partículas del modelo HMF

Las simulaciones numéricas más utilizadas en el estudio de modelo HMF son las de partículas (Pluchino et al., 2004a,c; Antoniazzi et al., 2007; Pakter and

Levin, 2011; Rocha Filho et al., 2012) las cuales mediante el uso de un integrador simpléctico resuelven las ecuaciones de movimiento de este sistema (ecuaciones (2.2.4) y (2.2.6)) para así estudiar la evolución de todas partículas durante el tiempo de simulación. El integrador simpléctico utilizado en este trabajo es de segundo orden por lo cual a continuación se describirán los pasos del algoritmo utilizado para obtener el código numérico con el cual se realizaron las simulaciones del modelo HMF. Estos pasos son:

1. El estado inicial para las simulaciones es dado por un distribución de partículas tipo *Water-Bag* $f_0(\theta, p) = \Theta(\theta_0 - |\theta|)\Theta(p_0 - |p|)/4\theta_0 p_0$, donde se debe determinar los valores de θ_0 y p_0 que entregan el dominio inicial de posiciones y velocidades, respectivamente, de las N partículas a simular. Estos últimos valores son determinados en base a las condiciones iniciales y las ecuaciones que los relacionan. Para una energía inicial u_0 dada, de la ecuación (2.3.6), se puede determinar p_0 resolviendo la ecuación,

$$p_0^2 = 6 \left(u_0 - \frac{1}{2}(1 - M_0^2) \right), \quad (2.4.1)$$

en el código de simulaciones de partículas y nos entrega el dominio inicial en velocidades $[-p_0, p_0]$ de las N partículas.

2. Para una magnetización inicial M_0 dada, de la ecuación de la ecuación (2.3.4) se puede determinar θ_0 , resolviendo

$$\frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} - M_0 = 0, \quad (2.4.2)$$

usando el método de Newton-Raphson en el código de simulaciones de partículas. Este método consiste en encontrar las raíces de

$$f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta} - M_0 = 0, \quad (2.4.3)$$

las cuales corresponde a $-\theta_0$ y θ_0 en este caso, iterando $\theta_{n+1} = \theta_n - f(\theta_n)/f'(\theta_n)$.

Con los dominios iniciales de velocidades y posiciones para las N partículas, es posible definir la distribución de partículas *Water-Bag* para iniciar las simulaciones de partículas para determinadas energías y magnetizaciones iniciales.

3. Teniendo ya definido las posiciones y velocidades iniciales para las N partículas, el siguiente paso es integrar las ecuaciones de movimiento del modelo HMF. Esto se hace por medio de un integrador simpléctico de segundo orden conocido como *leap-frog*, el cual se obtiene por medio de la derivada centrada en t para una función $f(t)$

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t - \Delta t)}{2\Delta t}, \quad (2.4.4)$$

donde Δt un pequeño paso en el dominio de $f(t)$. Para utilizar esta última expresión de derivada en un simulación de partículas, necesitamos discretizarla, es decir, cada valor del dominio de la función $f(t)$ debe estar a una distancia Δt de otro. Esta discretización se hace al realizar una expansión de Taylor de $f(t + \Delta t)$ y $f(t - \Delta t)$ hasta el termino de tercer orden, luego si se restar ambas expresiones obteniendo

$$f'(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t - \Delta t)}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (2.4.5)$$

donde $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ corresponde al error de truncamiento el cual es cuadrático.

Podemos escribir las ecuaciones de movimiento a integrar como

$$\frac{dp}{dt} = a(\theta(t)) \quad (2.4.6)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = p(t), \quad (2.4.7)$$

donde $a(\theta(t))$ corresponde a la aceleración, $p(t)$ a la velocidad en el tiempo y θ a la posición. Luego utilizando la ecuación (2.4.5), se tiene para la ecuación de velocidad

$$\frac{p(t + \Delta t) - p(t - \Delta t)}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) = a(\theta(t)), \quad (2.4.8)$$

donde las velocidades son evaluadas en $(t + \Delta t)$ y $(t - \Delta t)$ y la aceleración es evaluada en el tiempo t .

Realizando el mismo procedimiento anterior para las posiciones pero evaluándolas en $(t + 2\Delta t)$ y t , se obtiene la velocidad evaluada en $(t + \Delta t)$, es decir

$$\frac{\theta(t + 2\Delta t) - \theta(t)}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) = p(t + \Delta t). \quad (2.4.9)$$

Al considerar que este procedimiento llevado al código de simulación lo que se hace es discretizar el tiempo, por lo que se puede utilizar la notación $f_n = f(n\Delta t)$, donde $t = n\Delta t$ con $n = 0, 1, 2, \dots$, así utilizando esta notación en las ecuaciones (2.4.8) y (2.4.9) y reordenándolas, es posible escribir

$$p_{n+1} = p_{n-1} + 2\Delta t a(\theta_n) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (2.4.10)$$

$$\theta_{n+2} = \theta_n + 2\Delta t p_{n+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (2.4.11)$$

Este es el método de *leap-frog*, notar que cuando este método es usado en un programa no se utiliza el término $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ ya que este solo representa el error de truncamiento. El nombre de *leap-frog* viene de que la solución avanza en $2\Delta t$, con la posición evaluada en $(\theta_0, \theta_2, \theta_4, \dots)$ los cuales son valores pares, mientras que la velocidad es evaluada en valores impares (p_1, p_3, p_5, \dots) . Este orden de iteración es necesario ya que la aceleración, la cual es una función de la posición, necesita ser evaluada en un tiempo que este centrado entre la velocidad nueva y la antigua. El método de *leap-frog* también puede ser escrito como

$$p_{n+1/2} = p_{n-1/2} + \Delta t a(\theta_n) \quad (2.4.12)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta t p_{n+1/2}, \quad (2.4.13)$$

donde la solución avanza en Δt y las velocidad es evaluada en pasos medios, mientras que la posición es evaluada en pasos enteros.

Cuando el modelo HMF es iniciado en una distribución de partículas *Water-Bag*, la cual es simétrica en posiciones, se tiene que $M_y = 0$, luego sus ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d\theta_i}{dt} = p_i \quad (2.4.14)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -M_x \sin(\theta_i), \quad (2.4.15)$$

con $M_x = \sum_{i=1}^N \cos(\theta_i)/N$ la magnetización en el eje x del sistema. Aplicando el método *leap-frog* a estas ecuaciones se obtienen

$$p_{n+1/2} = p_{n-1/2} - \Delta t M_x \sin(\theta) \quad (2.4.16)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta t p_{n+1/2}. \quad (2.4.17)$$

En las simulaciones de partículas del modelo HMF, las ecuaciones (2.4.16) y (2.4.17) son iteradas N_t veces, de modo que $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ y $\Delta t N_t$ corresponde al tiempo total de la simulación. Así en cada instante $n\Delta t$ se guarda la magnetización M_x del sistema, y las posiciones y velocidades de las N partículas de la simulación, siendo esto el paso final del código desarrollado para las simulaciones de partículas del modelo HMF. Por último notar que con esta información guardada de cada simulación, es posible obtener las distribuciones de velocidades y las de posiciones en cada instante del tiempo de simulación, y además con M_x podemos calcular la magnetización del sistema $M = |M_x|$ para un instante dado, por lo que también es posible

estudiar la evolución temporal de esta cantidad.

A modo de resumen, el código de simulaciones de partículas del modelo HMF aquí descrito sigue los siguientes pasos:

- Toma una energía inicial (total) y una magnetización inicial entre 0 y 1.
- Determina p_0 .
- Determina θ_0 .
- Determina las posiciones y velocidades iniciales de las N partículas, las cuales se encuentran entre $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ y $-p_0 < p < p_0$ respectivamente. Las partículas son distribuidas en su estado inicial en acuerdo con una distribución de partículas *Water-Bag*.
- Por medio del método de *leap-frog* (integrador simpléctico de segundo orden) las ecuaciones de movimiento del modelo HMF son integradas.
- Se guardan las posiciones y velocidades de las N partículas, además de la magnetización M_x del sistema, en cada instante hasta llegar al tiempo total de integración deseado.
- Con toda la información obtenida de cada simulación es posible estudiar las distribuciones de velocidades y de posiciones de cada caso, además de la evolución temporal de la magnetización del sistema.

La precisión de los cálculos de las simulaciones empleadas con este algoritmo se puede obtener al estudiar la conservación de energía de los sistemas simulados (sistemas conservativos). Es así, que se calcula la precisión de la conservación de la energía de las simulaciones numéricas haciendo uso de la siguiente ecuación

$$\frac{\Delta u}{u_0} = \frac{u_f - u_i}{u_0}, \quad (2.4.18)$$

donde u_f y u_i corresponden a la energía final e inicial, respectivamente, calculadas con los datos de la simulación de partículas. Mientras que u_0 es la energía ingresada como condición inicial en cada caso a simular. A modo de ejemplo, en este trabajo el lenguaje utilizado para escribir este código de simulación fue Python 3.6 y se tiene que precisión en la conservación de la energía igual a

$$\Delta u/u_0 = 10^{-3}.$$

Notar que si bien mediante el calculo de precisión de la conservación de la energía antes mostrado, se podría argumentar que existe una conservación de la energía en las simulaciones bastante buena, pero esto no es garantía de que ocurra en todo momento de la simulación, ya que este calculo solo se hace en base al instante inicial y final de la simulación, por lo que para asegurarse de que la conservación de la energía realmente se cumple en todo momento se debe realizar un gráfico que muestre la evolución de la energía total del sistema en el tiempo. Por ejemplo, para una simulación de $N = 2 \times 10^5$ partículas con $M_0 = 0,6$ y $u_0 = 0,7$ se obtiene la Figura 2.4.1, donde se puede observar como u en el tiempo tiene unos pequeños desvíos de $u = 0,7$, pero son tan mínimos que se pueden despreciar, además se tiene $\Delta u/u_0 = 0,000558 \approx 10^{-3}$, por lo que se puede decir u no cambia su valor en el tiempo, es decir existe conservación de la energía en la simulación lo cual comprueba la exactitud de los datos obtenidos en este tipo de simulaciones numéricas.

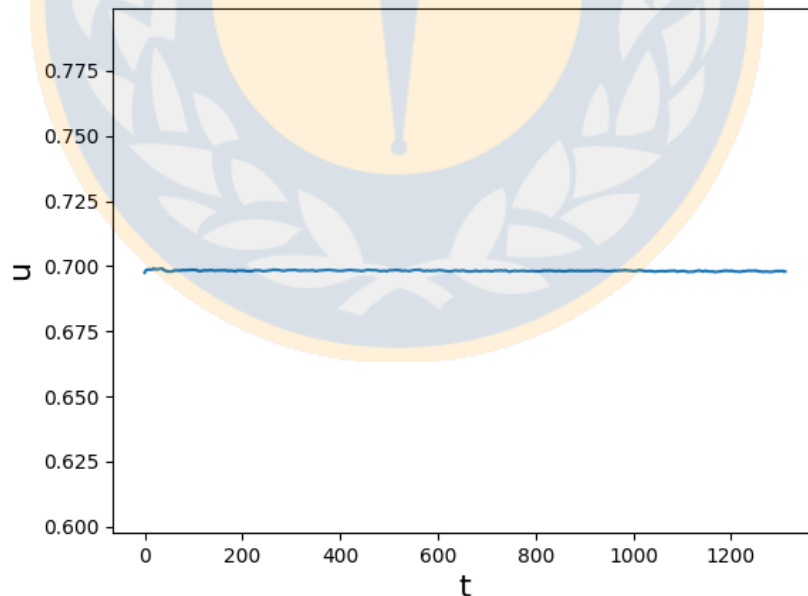


Figura 2.4.1: Energía u en el tiempo para una simulación de $N = 2 \times 10^5$ partículas con $M_0 = 0,6$ y $u_0 = 0,7$.

Con los datos obtenidos de las simulaciones del código aquí descrito es posible estudiar los distintos QSS que se obtiene en el modelo HMF para las distintas

combinaciones de condiciones iniciales, los cuales al ser diferentes uno de otros es importante conocer sus principales características y como se clasifican, lo cual profundizaremos en las secciones siguientes.

2.5. Estados cuasi-estacionarios del modelo HMF

Los QSS son una etapa que presenta el sistema durante su evolución a alcanzar el estado de equilibrio termodinámico. Como bien se comentó anteriormente, este estado cuasi-estacionario son alcanzados posterior a una “violenta relajación” del sistema la cual ocurre en los primeros instantes. Cuando el sistema ya se encuentra en esta etapa cuasi-estacionaria, se tiene que cantidades como la magnetización o la temperatura del sistema permanecen fijas entorno a un valor distinto al predicho para el estado de equilibrio, pero este comportamiento solo ocurre por un periodo determinado, de aquí el nombre cuasi-estacionario. El tiempo de vida de los QSS depende del número de partículas del sistema, de hecho de observaciones numéricas se tiene que la relajación al equilibrio diverge como ley de potencia de la forma N^γ (Barré et al., 2006), donde el exponente γ es determinado de las distintas correlaciones que presente el sistema. Por medio de la teoría cinética tradicional, es posible observar la lenta relajación algebraica de las autocorrelaciones de las velocidades del modelo HMF (Bouchet and Dauxois, 2005), de donde se obtiene que $\gamma > 1$ pero depende de cada sistema, por ejemplo para QSS homogéneos, es decir con una magnetización muy cercana o igual a cero, se tiene que $\gamma = 1,7$ (Barré et al., 2006), pero este valor solo es aplicable a este caso en particular, ya que para distintas condiciones iniciales obtenemos distintos QSS por lo que también se obtendrán distintos γ .

Podemos observar estos QSS si estudiamos la evolución temporal de la magnetización de un sistema de $N = 10^4$ partículas iniciado con $M_0 = 0,8$ y $u_0 = 0,69$, lo cual se muestra en la Figura 2.5.1. El sistema tiene una magnetización inicial distinta de cero pero sufre una “violenta relajación” a un estado con una magnetización igual o muy cercana a cero (ver Figura 2.5.1a), esta relajación ocurre en los primeros instantes de la evolución de este sistema. Luego, en la Figura 2.5.1b observamos todo el tiempo de vida de este estado cuasi-estacionario el cual tiene una magnetización muy cercana o igual a cero, notar que si bien este

estado tiene un tiempo de vida largo si considerar que la mayoría del tiempo de la simulación el sistema permaneció en este estado, este tiempo es finito, ya que para la etapa final de la evolución, la magnetización del sistema se aleja de cero, relajándose a un valor igual a $M = 0,307$, lo que corresponde a la magnetización del sistema para el estado de equilibrio. Es valor de M esta en acuerdo con las perdiciones canónicas de este sistema (ver Sección 2.2.1), es decir el sistema ha alcanzado el estado de equilibrio termodinámico.

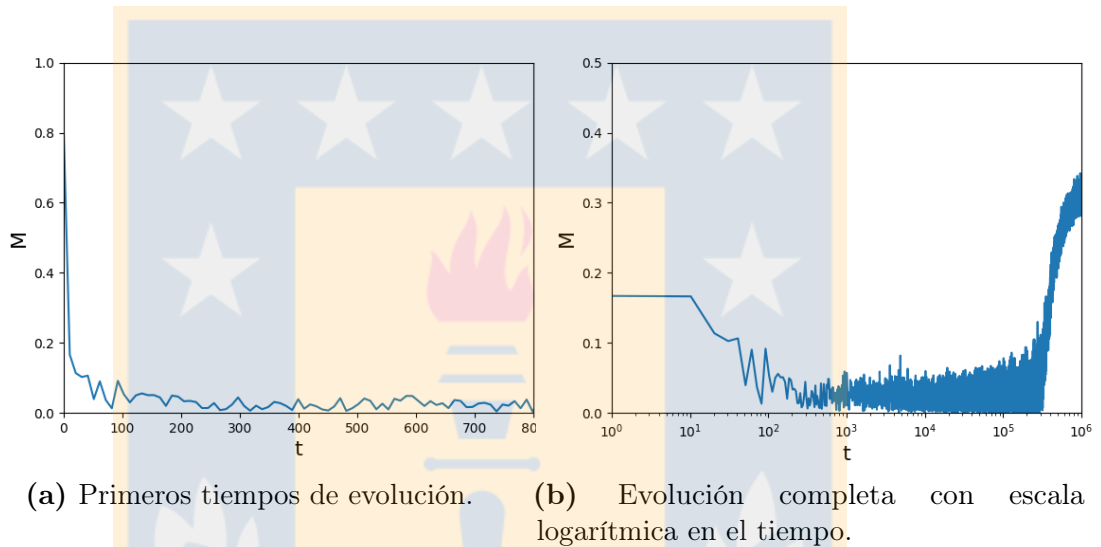


Figura 2.5.1: Evolución en el tiempo de la magnetización de un sistema de $N = 10^4$ con $M_0 = 0,8$ y $u_0 = 0,69$. La magnetización de equilibrio de este sistema es $m = 0,307$ según las predicciones canónicas vistas en la Sección 2.2.1.

Los QSS dependen de las condiciones iniciales del sistema, un estado inestable dado por una distribución de partículas tipo *Water-Bag*, generará QSS lejos del equilibrio termodinámico, de modo que sus distribuciones de partículas son no gaussianas (Antoniazzi et al., 2007; Latora et al., 2001), pero si de soporte finito, como se puede observar en la Figura 2.5.2, donde se tiene dos diferentes QSS, para un sistema modelado por el modelo HMF pero que fue iniciado con distintas condiciones iniciales y se relajó a un estado cuasi-estacionario homogéneo (Figura 2.5.2a) y no homogéneo en las posiciones de las partículas (Figura 2.5.2b), en cada caso.

Como este tipo de sistema no maximiza la entropía de Boltzmann-Gibbs en su etapa cuasi-estacionaria, lo que se hace es recurrir a generalizaciones de la estadística tradicional para explicar su comportamiento aparentemente anómalo.

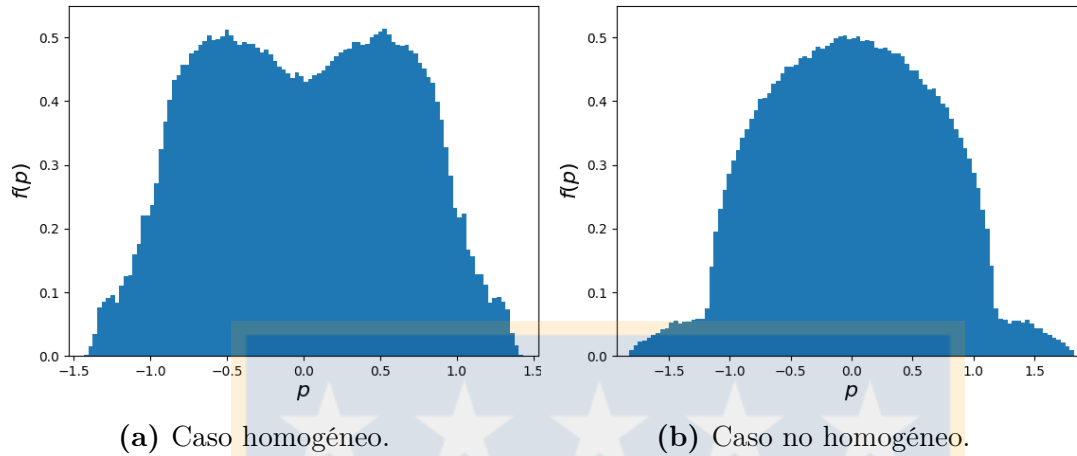


Figura 2.5.2: Funciones de distribuciones de velocidad para dos QSS diferentes del modelo HMF.

Ejemplo de esto, es el uso de la estadística de Tsallis (Tsallis, 1988), la cual se basa en una entropía generalizada que depende de un índice entropíco que se deriva de propiedades fractales aplicadas en este formalismo. Otro caso es la estadística de Lynden-Bell (Lynden-Bell, 1967), la que se basa en el principio de “relajación violenta” que presentan estos sistemas, donde su idea central consiste en tratar las distribuciones microscópica de partículas como si fueran de grano grueso, es decir, distribuciones macroscópica, lo que se realiza por medio de la introducción de un promedio local en el espacio de fase del sistema (Bachelard et al., 2008).

Es posible encontrar variados trabajos que apoyan el uso de estas estadísticas, tanto la de Tsallis (Pluchino et al., 2007; Latora et al., 2001; Pluchino et al., 2004a,c) como la de Lynden-Bell (Campa et al., 2009; Bachelard et al., 2008; Benetti et al., 2012) para explicar el comportamiento de estos sistema en todas sus etapas. Pero, se debe notar que los trabajos que usan estas estadísticas generalizadas, lo que buscan es explicar el comportamiento del sistema todo momento, es decir, desde el estado inicial, pasando por la etapa de violenta relajación, alcanzado los QSS y finalmente el estado de equilibrio termodinámico. Si bien han sido los QSS los que motivaron el uso de este tipo de estadísticas, solo son usados como justificativos al argumento de que el sistema obedece alguna de estas estadística. Se debe tener presente, que este trabajo se centrará

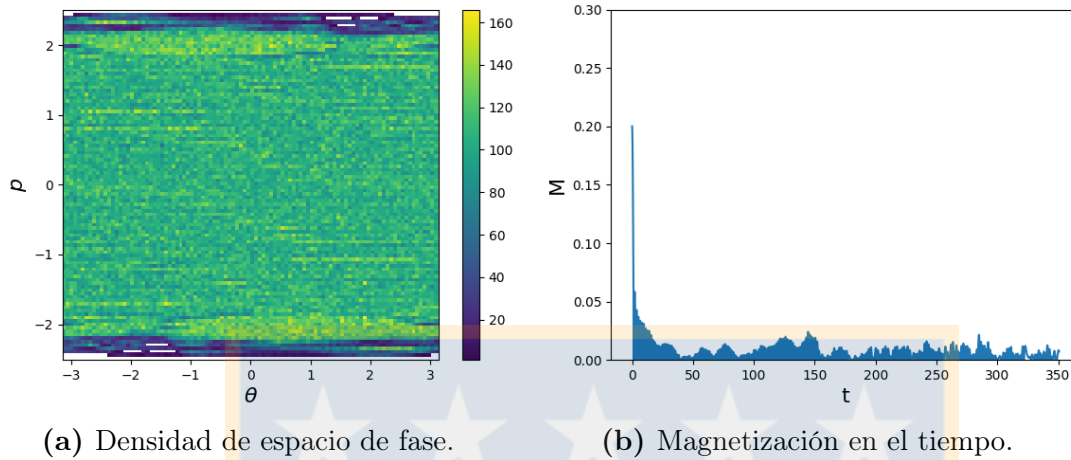
en diferenciar y clasificar los distintos QSS que alcanzan estos sistemas, y la clasificación no se basará en estadísticas de este tipo, si no que se centrará en el tipo de estructura que presentan los espacios de fases de cada caso, lo cual tiene relación con procesos físicos concretos que el sistema está sufriendo en su etapa cuasi-estacionario.

Existen una diferencia importante en los distintos QSS, y esta tiene relación con la magnetización, ya que si un sistema en su estado cuasi-estacionario presenta una magnetización igual o muy cercana a cero, se dice que este es un estado cuasi-estacionario paramagnético, y si tiene una magnetización distinta de cero, que es un estado cuasi-estacionario ferromagnético (Bachelard et al., 2008; Benetti et al., 2012).

2.5.1. Estados cuasi-estacionarios paramagnéticos

Los QSS paramagnéticos se caracterizan por ser estados donde la magnetización del sistema es igual o muy cercana a cero $M_s = 0$, por lo que son estados que se caracterizan por tener un espacio de posiciones de las partículas homogéneo lo cual puede ser observado en los espacios de fase de estos estados (ver Figura 2.5.3a). De igual forma, al estudiar la magnetización del sistema en el tiempo es posible distinguir el estado inicial del sistema, la violenta relajación, y el estado cuasi-estacionario donde el sistema presenta una magnetización igual o muy cercana a cero (Figura 2.5.3b).

Estos tipo de QSS se pueden alcanzar cuando el sistema es iniciado con una magnetización $M_0 = 0$, el cual en su etapa cuasi-estacionaria, las partículas se mantiene distribuidas de forma uniforme por el espacio, esto debido a que la fuerza que actúa en cada partícula es cero debido a que desde el instante inicial las correlaciones están casi ausentes, por lo que el sistema permanece en estados especialmente homogéneos hasta alcanzar el estado de equilibrio termodinámico donde ya se tiene una magnetización distinta de cero. Se debe comentar que estos casos con $M_0 = 0$ no existe la etapa de “violenta relajación” (Pluchino et al., 2004b). Pero, los QSS paramagnéticos no solo se alcanza para $M_0 = 0$, si no que es posible alcanzarlos con otras combinaciones de condiciones iniciales como veremos a continuación.



(a) Densidad de espacio de fase.

(b) Magnetización en el tiempo.

Figura 2.5.3: Estado cuasi-estacionario paramagnético de un sistema de $N = 10^6$ partículas iniciado con $M_0 = 0,2$ y $u_0 = 1,4$.

En la Figura 2.5.3 se puede observar el espacio de fase y la magnetización de un estado cuasi-estacionario paramagnético, pero este tipo de caso no es el único, se debe tener presente que los QSS son dependientes de las condiciones iniciales, es por esto que en el año 2007 Antoniazzi et al. (2007) realizaron un estudio de ciertos QSS paramagnéticos del modelo HMF. Su trabajo consistió en hacer varias simulaciones donde los sistemas eran iniciados con un distribución tipo *Water-Bag* y todos compartían el mismo valor de la energía inicial el cual era $u_0 = 0,69$, pero cada caso se diferenciaba en el valor de la magnetización inicial. Observaron que iniciado el sistema en un estado con una magnetización inicial entre $0 < M_0 \leq 0,897$, se podía distinguir la creación y propagación de dos clústeres en el espacio de fase (ver Figura 2.5.4b). Estos dos clústeres igual afectaban a las distribuciones de partículas de los QSS, donde en las distribuciones de velocidad era posible observar una distribución no gaussiana de soporte finito, que presentaba dos *bumps* simétricos como se ven en la Figura 2.5.4c. La magnetización del sistema en estos estados era muy cercana a cero y en ciertos instantes era igual a cero (Figura 2.5.4a), de modo que se trata de QSS paramagnéticos como el mostrado en la Figura 2.5.4.

La explicación dada es que, para estados iniciales muy cercanos al homogéneo en posiciones, existen dos ondas contra-propagantes de la misma velocidad en el sistema, con la cual ciertas partículas pueden entrar en resonancia formando dos

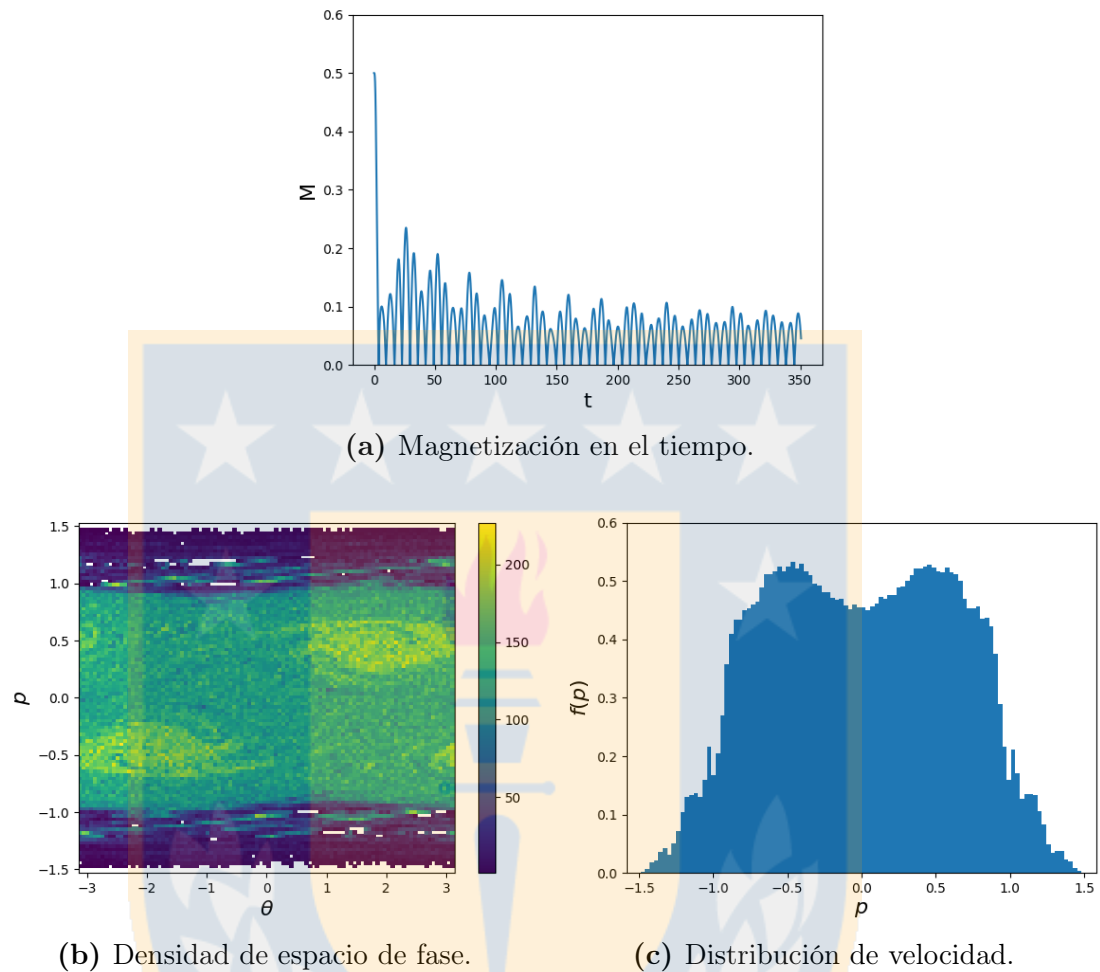


Figura 2.5.4: Estado cuasi-estacionario paramagnético con $M_0 = 0,5$, $u_0 = 0,69$ y $N = 10^6$.

zonas de mayor densidad en el espacio de fase, dos clústeres. Ambos clústeres se forman muy tempranos en el tiempo y adquieren rápidamente velocidades constantes pero opuestas, lo que se mantiene durante la siguiente evolución temporal del sistema. Esto muestra que no es una característica transitoria del QSS, si no más bien una propiedad intrínseca.

A modo de dar un argumento dinámico a este fenómeno, mostraron que tomando el Hamiltoniano del modelo HMF para una partícula

$$u(\theta_i, p_i) = \frac{p_i^2}{2} + 1 - M_x \cos(\theta_i) - M_y \sin(\theta_i), \quad (2.5.1)$$

y considerando que para tiempos muy cortos se puede realizar la aproximación $\theta \sim \theta_0 + p_0 t$ y que se tiene una distribución inicial de partículas tipo *Water-Bag*, se puede obtener $M_x \simeq (\sin \theta_0 \sin p_0 t) / (\theta_0 p_0 t)$ y $M_y = 0$, donde θ_0 es el ancho de la distribución en las posiciones y p_0 el ancho en las velocidades. Utilizando estos resultado y reemplazándolos en la ecuación (2.5.1), es posible escribir

$$u(\theta_i, p_i) = \frac{p_i^2}{2} + \frac{\sin \theta_0}{2\theta_0 p_0 t} [\sin(\theta_i - p_0 t) + \sin(\theta_i + p_0 t)], \quad (2.5.2)$$

lo que corresponde al Hamiltoniano de una partícula que interactúa con dos ondas de velocidades de fase $\pm p_0$. Dependiendo de las condiciones iniciales del sistema, las partículas pueden quedar atrapadas en una de las dos resonancias, lo que explicaría la formación de los dos clústeres en el espacio de fase.

En complemento al argumento dinámico presentado, [Antoniazzi et al. \(2007\)](#) comentan que según sus hallazgos numéricos al aumentar M_0 las velocidades relativas entre los dos clústeres disminuía de modo que estos tendían a fusionarse. Esto último justificaría que para magnetizaciones iniciales pequeñas, como el caso mostrado en la Figura 2.5.3, no sea distinguible de forma clara si hay dos clústeres contra-propagantes, esto debido a que las zonas de resonancias se encuentran cercanas a los extremos del espacio de fase por lo que las partículas quedan más cercanas al centro por lo que se distribuyen de forma más uniforme.

De esta forma se estudian y explican los QSS paramagnéticos del modelo HMF, que si bien muchas veces los trabajos que los ocupan siempre se limitan a casos partículas de combinaciones de condiciones iniciales ([Martelloni et al., 2016](#); [Campa and Chavanis, 2017](#)), terminan mostrando estados con características similares a los aquí mostrados. Además la explicación de la formación de las estructuras características de este tipo de QSS, se basada en primeros principios del modelo HMF por lo que es aplicable a variados casos que tengan distintas condiciones iniciales pero que sean QSS paramagnéticos.

2.5.2. Estados cuasi-estacionarios ferromagnéticos

Los QSS ferromagnéticos son estados en donde su magnetización es distinta de cero $M_s \neq 0$. Esto implica que son estados no homogéneos en el espacio de posiciones y como todo QSS del modelo HMF, dependen de las condiciones iniciales. Es así que Pakter and Levin (2011) en el año 2011 notaron que las distribuciones de partículas de un plasma no neutro confinado por un campo magnético externo (Levin et al., 2008b) y las de un sistema autogravitante bidimensional microcanónico (Teles et al., 2010) eran similares a las obtenidas en un QSS ferromagnético del modelo HMF.

Los sistemas que presentan este tipo de QSS, tiene una magnetización que oscila entorno a un valor distinto de cero (ver Figura 2.5.5a) y las distribuciones de partículas en el estado cuasi-estacionario son de tipo *core-halo*, lo cual se puede ver en la distribución de velocidades de la Figura 2.5.5c. Estas distribuciones se caracterizan por tener un núcleo denso de partículas de baja energía, rodeado por un *halo* difuso o menos denso, de partículas con mayor energía, esto se puede observar en la densidad de espacio de fase mostrado en la Figura 2.5.5b.

En base a lo visto en el sistema de plasma y autogravitacional antes mencionado, Pakter y Levin, explican el mecanismo de formación de estas distribuciones de partículas. Argumentan que medida que el sistema evoluciona, se forman ondas de densidad de propagación macroscópicas. Algunas partículas entran en resonancia con las oscilaciones macroscópicas ganando una gran cantidad de energía a expensas del movimiento colectivo. Esto es similar al mecanismo del amortiguamiento de Landau (Landau, 1946). Las partículas resonantes pueden ganar suficiente energía para alcanzar estados de alta energía, formando así un *halo* difuso. Por otro lado la pérdida de energía amortigua las oscilaciones macroscópicas, de modo que las partículas sobrantes se condensan en estados de baja energía, dando como resultado un núcleo denso.

Para el caso del modelo HMF las oscilaciones de la magnetización del sistema en el tiempo $M(t)$ juegan el papel de oscilaciones colectivas que impulsan algunas partículas a estados de mayor energía, lo que da lugar a la formación del *halo*. Las

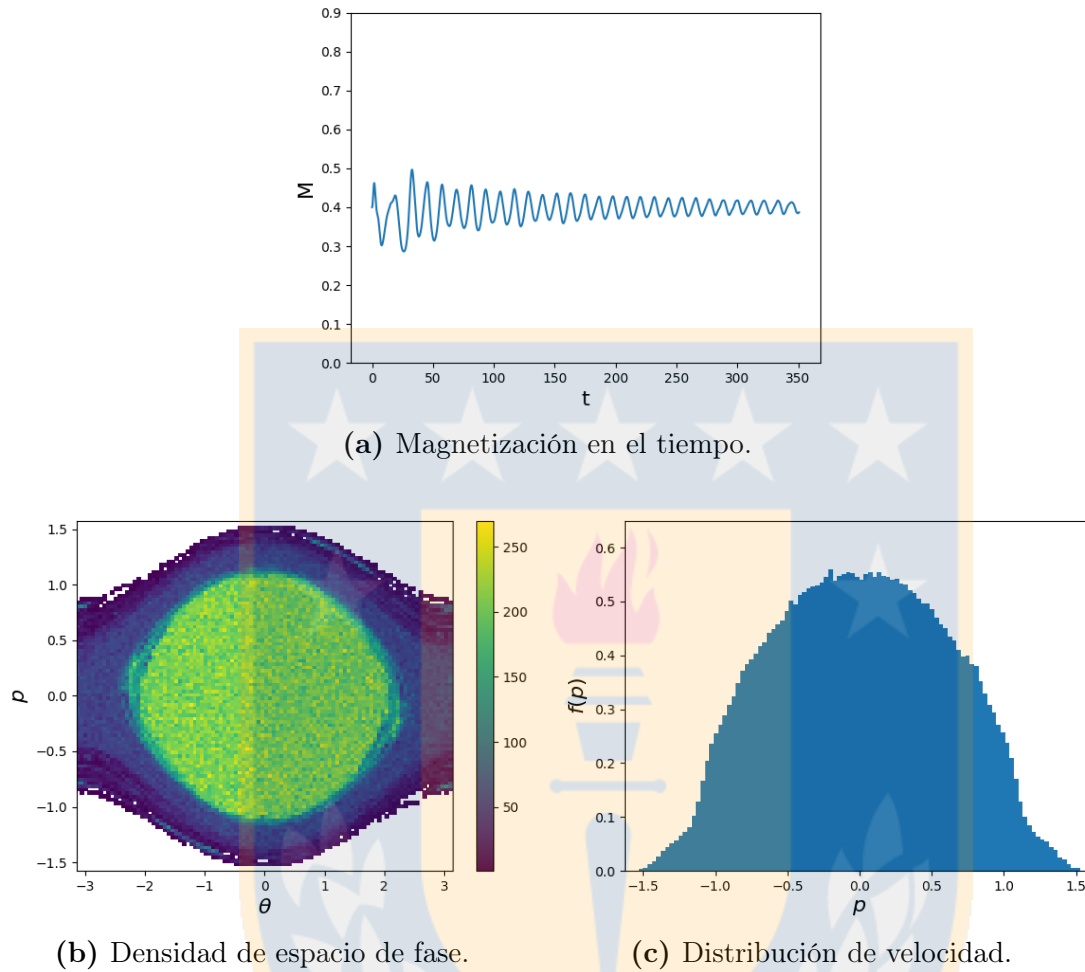


Figura 2.5.5: Estado cuasi-estacionario ferromagnético compuesto por $N = 10^6$ partículas e iniciado con $M_0 = 0,4$, $u_0 = 0,6$.

oscilaciones macroscópicas de $M(t)$ se amortiguan significativamente en uno o dos periodos de oscilación y la extensión del *halo* se determina en el mismo tiempo, según observaciones de Pakter y Levin (Pakter and Levin, 2011). Dado que la dinámica hamiltoniana de este sistema es conservativa (sistema conservativo), la ganancia de energía de ciertas partículas resonantes debe resultar en la pérdida de energía de otras partículas las cuales componen el núcleo. En principio se esperaría que la formación del *halo* continuará hasta que las oscilaciones del núcleo se hayan extinguido por completo, lo que haría que sus partículas alcancen su “estado fundamental”. Sin embargo, se debe recordar que la ecuación de Vlasov es la que describe la evolución de las funciones de distribuciones de partículas para estos sistemas (Barré et al., 2006), por lo que la restricción de incompresibilidad impuesta por la dinámica de Vlasov no permite que el núcleo colapse al mínimo

de la energía potencial, si no que las partículas se organizan de manera tal que ocupen todos los estados de baja energía hasta la densidad del espacio de fase es la máxima permitida η_0 (Levin et al., 2014). Es en base a todo lo anterior Pakter y Levin propusieron un *ansatz* para la distribución de partículas de un estado cuasi-estacionario ferromagnético del modelo HMF,

$$f_{ch}(\theta, p) = \eta_0 [\Theta(u_F - u) + \chi \Theta(u_h - u) \Theta(u - u_F)], \quad (2.5.3)$$

donde los estados que cumplen con esta distribución de partículas son aquellos dados por el modelo HMF iniciado con una distribución de partículas *Water-Bag*, luego se tiene que $\eta_0 = 1/4\theta_0 p_0$. En el estado cuasi-estacionario ferromagnético, la función de distribución del núcleo es la misma que la de un gas de Fermi totalmente degenerado de espín η_0 (Pakter and Levin, 2011). Por lo anterior se tiene que tiene u_F es la energía de Fermi y marca el límite hasta donde se extiende la distribución del núcleo. El valor de u_F se debe determinar de manera coherente con el caso que se estudia. Por otro lado se tiene que u_h es la máxima energía del *halo*, $u(\theta, p, M_s) = p^2/2 + 1 - M_s \cos \theta$ corresponde a la energía de una sola partícula, M_s es la magnetización del sistema en el estado cuasi-estacionario y χ es la razón entre la densidad del espacio de fase del *halo* y el núcleo.

Los parámetros u_F y χ se calculan utilizando la conservación de la energía y la norma, respectivamente,

$$u = \frac{1}{2} \int p^2 f_{ch}(\theta, p) dp d\theta + \frac{1}{2}(1 - M_s^2), \quad (2.5.4)$$

$$1 = \int f_{ch}(\theta, p) dp d\theta, \quad (2.5.5)$$

y M_s es dado por

$$M_s = \int \cos(\theta) f_{ch}(\theta, p) d\theta dp \quad (2.5.6)$$

y no depende del tiempo ya que es la magnetización de un estado estacionario.

Para determinar u_h es un trabajo más complejo en comparación a los otros parámetros. Dependiendo de las condiciones iniciales, algunas partículas pueden ganar suficiente energía para escapar por completo del potencial de confinamiento y comenzar a moverse en órbitas giratorias. Esto hace que sea difícil determinar con precisión la energía más alta posible de la partícula resonante. Es por esto que el modelo HMF es similar a los sistemas autogravitatorios en tres dimensiones, en los que las partículas pueden escapar del potencial gravitatorio del cúmulo (Levin et al., 2014). Es por esto, que lo que se hace para determinar u_h es hacer una simulación de partículas del modelo HMF para un tiempo corto y no con demasiadas partículas. Dado que la formación de resonancias es un proceso rápido, u_h se puede definir como la energía más alta alcanzada por cualquier partícula después de unas pocas oscilaciones de la magnetización del sistema en el tiempo (Pakter and Levin, 2011).

Se debe tener presente que el *ansatz* de Pakter y Levin es un método semi analítico que genera un ajuste a la distribución de partículas de un estado cuasi-estacionario ferromagnético y además explica que tipo de proceso físico ayudo a su creación. Si bien, trabajos relacionados a este tipo de estados se limitan a condiciones iniciales específicas (de Buyl et al., 2011; Konishi, 2016), siempre recurren a esta explicación cuando comentan la formación de sus estados.

2.6. Clasificación de los estados cuasi-estacionarios del modelo HMF

En secciones previas se reviso las principales características de los diferentes tipos de QSS del modelo HMF cuando este era iniciado en un estado dado por una distribución de partículas *Water-Bag*. Si bien existe una gran variedad de QSS, debido a su dependencia de las condiciones iniciales, se puede reconocer una clasificación general de cada estado cuasi-estacionario, esta clasificación tiene relación con la magnetización M_s alcanzada por el sistema en su etapa cuasi-estacionaria, donde, si $M_s \neq 0$ se tienen QSS paramagnéticos, para los cuales se espera que su espacio de fase muestre una estructura tipo *core-halo*, mientras

que para el caso $M_s = 0$, QSS paramagnéticos se espera que el espacio de fase se completamente homogéneo o posee dos clústeres simétricos contra-propagantes.

De los primeros trabajos que estudiaron a los estados QSS paramagnéticos del modelo HMF siempre los presentaron como estados donde $M_s = 0$ y que tenían un espacio de fase uniforme, sin la presencia de alguna estructura relevante (Latora et al., 2001; Pluchino et al., 2004a,c, 2007). Posteriormente, gracias al trabajo de Antoniazzi et al. (2007) se sabe que estos estados pueden tener espacios de fases donde existan estructuras importantes como dos clústeres contraprogantes y que poseen una explicación dinámica que se obtiene directamente de las bases del modelo HMF. Es así que en año 2008 Bachelard et al. (2008) estudiando la trayectoria regulares de partículas en el espacio de fase para ciertos QSS específicos, presentaron un diagrama de clasificación de los distintos QSS del modelo HMF cubriendo, según sus comentarios, todo el espacio de condiciones iniciales para este tipo sistema.

El diagrama presentado por Bachelard et al. (2008) clasifica a los distintos QSS del modelo HMF en dos grandes categorías, QSS paramagnéticos que presentan dos clústeres contraprogantes en sus espacios de fase, y QSS ferromagnéticos que presentan una estructura tipo *core-halo* en sus espacios de fase. Este diagrama de clasificación es mostrado en la Figura 2.6.1. Notar que la Figura 2.6.1, muestra el espacio de condiciones iniciales, es decir de las magnetizaciones iniciales M_0 y energía del sistema U . Este diagrama es dividido por una línea que representa una transición de fase fuera del equilibrio del modelo HMF. Esta transición de fase tiene relación con el cambio de los QSS de estados ferromagnéticos a estados paramagnéticos cuando se van cambiando las condiciones iniciales del modelo HMF. El orden de la transición de fase por el momento no se ha determinado con precisión, por ejemplo, para los autores que presentan este diagrama de fase, argumentan que es de segundo orden, según sus predicciones obtenidas por medio de la teoría de Lynden-Bell, mientras que otros autores como Pakter and Levin (2011) por medio de un análisis semi analítico de los QSS del modelo HMF predicen una transición de fase de primer orden. Por otro lado, autores como Benetti et al. (2012) argumentan que esta transición de fase es de primer orden, confirmando lo argumentado por Pakter and Levin (2011), pero

mencionan que esto es solo valido hasta una magnetización, aún no determinada con presión, cercana a $M_0 = 0,6$, porque a partir de este valor, los sistemas con condiciones iniciales próximas a la zona de transición, son sistemas fuertemente dependiente de las condiciones iniciales, por lo que es esta zona de la curva de transición de fase la que produce un desacuerdo en el orden de la transición de fase.

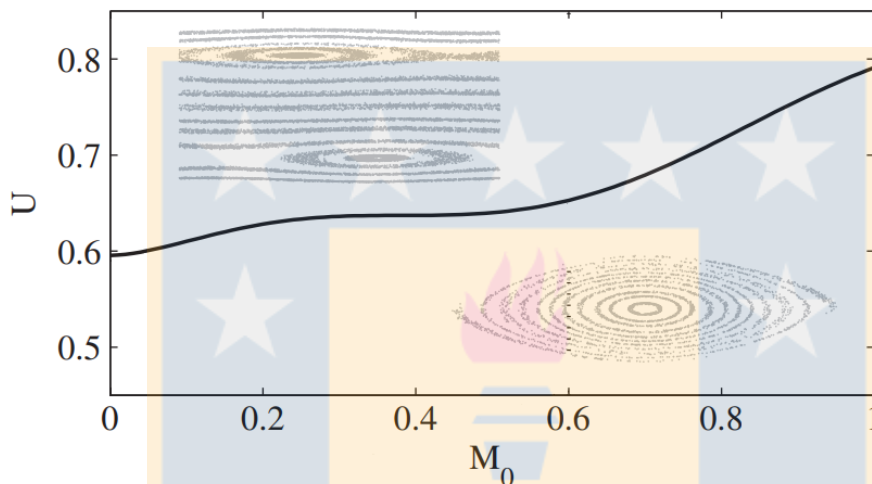


Figura 2.6.1: Diagrama de fase y de clasificación de los QSS del modelo HMF (Bachelard et al., 2008). Espacio de condiciones iniciales del modelo HMF (M_0, U), donde los QSS ferromagnéticos (parte inferior del diagrama) son clasificados como estados poseen una *core-halo* en su espacio de fase y los QSS paramagnéticos (parte superior del diagrama) son clasificados como estados con dos clústeres contra-propagantes en sus espacios de fase.

Como se puede observar, el diagrama de la Figura 2.6.1 muestra una clasificación para todos los QSS del modelo HMF obtenidos de todas las diferentes combinaciones de condiciones iniciales. Esta clasificación sugiere que todos los QSS paramagnéticos presentan dos clústeres contra-propagantes mientras que los QSS ferromagnéticos presentan estructuras tipo *core-halo* en sus espacios de fase. Por último notar que esta clasificación no deja la posibilidad de que puedan existir diferentes tipos de estructuras en cada caso y hasta el momento es el único trabajo que presentan una clasificación de los QSS en base a su magnetización y a sus estructuras en el espacio de fase.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Planteamiento del problema

Como ya se ha presentado en secciones anteriores, sistemas modelados por campos medios como el modelo HMF, presentan distintos tipos de QSS, los cuales poseen distintas características, que van desde el grado de homogeneidad de las las partículas (magnetización del sistema) a tener distintas estructuras en sus espacios de fase. Existen trabajos como el de [Antoniazzi et al. \(2007\)](#) que estudiaron ciertos QSS paramagnéticos del modelo HMF y mediante aproximaciones basadas en los primeros principios de este sistema lograron derivar un modelo de dos ondas de densidad contra-propagantes que estarían presentes en este sistema, donde ciertas partículas entrarían en resonancia con estas ondas y formarían los dos clústeres contra-propagantes que se pueden observar en el espacio de fase de estos casos. Posteriormente, [Bachelard et al. \(2008\)](#) estudiaron las trayectorias regulares de partículas en el espacio de fase de los QSS del modelo HMF y determinaron que los casos paramagnéticos presentaban dos clústeres contrapropagantes en sus espacios de fase, mientras que los caso ferromagnéticos presentaban una única estructura estacionaria central en el espacio de fase. Es así que [Pakter and Levin \(2011\)](#) notaron que los QSS ferromagnéticos del modelo HMF poseen una estructura tipo *core-halo* en sus espacios de fase y mediante comparaciones con plasmas no neutros ([Levin et al., 2008b](#)) argumentaron que la formación de esta estructura es debido a la propagación de una onda de densidad con la cual las partículas interactúan perdiendo o ganando energía a expensas de ese movimiento colectivo, esto se puede explicar a través de un mecanismo similar

al amortiguamiento de Landau, el cual explicaría porque algunas partículas alcanzaban estados energéticos más altos formando el *halo* en el espacio de fase, mientras que otras partículas pierden energía condensándose en un núcleo de estos energéticos más bajos formando así el *core* de la estructura *core-halo* tan característica de los QSS ferromagnéticos.

De lo comentado en el párrafo anterior, los estudios de los distintos QSS obtenidos para las diferentes combinaciones de condiciones iniciales del modelo HMF (magnetización y energía inicial), clasifican estos distintos estados en dos grandes categorías, QSS paramagnéticos o ferromagnéticos, donde las estructuras que presentan en sus espacios de fase se justifican mediante la propagación de ondas de densidad en el sistema, y dependiendo de las condiciones iniciales, es posible tener el caso de los dos clústeres contra-propagantes (altas energías iniciales) o de la estructura core-halo (bajas energías iniciales). Pero se debe notar que tener esta clasificación y caracterización para los QSS resulta contradictoria con el hecho que este es un sistema dinámico, lo cual implica que es un sistema que depende de sus condiciones iniciales y además estas son muy variadas porque a diferencia de un sistema termodinámico clásico, el modelo HMF no solo depende de su energía inicial si no que también de su magnetización inicial.

Existen trabajos como el de Yamaguchi (2011), quien mostró un caso de estado cuasi-estacionario del modelo HMF para una determinada combinación de condiciones iniciales que además de presentar los dos clústeres contra-propagantes principales, también presentaba un tercer clúster estacionario central, si bien su objetivo era medir la factibilidad de aplicar la estadística generalizada de Lynden-Bell (Lynden-Bell, 1967) en el modelo HMF, nos permite inferir que desde el punto de vista de la magnetización del sistema estos casos compartirían la misma clasificación (QSS paramagnéticos), pero no necesariamente esto va a indicar que también tendrán el mismo número y tipo de estructuras en sus respectivos espacios de fase. Por otro lado también es posible profundizar en los fenómenos físicos que este involucra en estos distintos casos, que si bien ya se tiene conocimiento que los diferentes casos son producto de la propagación de ondas en el sistema, esto solo sería una explicación parcial del tipo de interacciones que se puedan generar durante la evolución del sistema. Además se debe recordar que las distintas

condiciones iniciales influyen en las zonas de resonancias e interacción de estas ondas de densidad en el espacio de fase. Por lo antes comentado el propósito de este trabajo es responder la pregunta: ¿Qué mecanismos físicos están involucrados en la formación de los clústeres en el espacio de fase del modelo HMF y como estos clasificarían los QSS alcanzados para las distintas condiciones iniciales?

3.2. Hipótesis

En el modelo Hamiltoniano de campo medio (HMF) atractivo se forman dos ondas de densidad contrapropagantes las cuales son resonantes con ciertas partículas y son las responsables de la formación de distintos clústeres en el espacio de fase. Cuando la energía disponible u_0 es baja, la velocidad de fase relativa entre las ondas contrapropagantes también lo es, por lo tanto se forma un único clúster en el centro del espacio de fase del sistema, mientras que cuando u_0 es relativamente alta, la superposición lineal de estas ondas produce una tercera onda estacionaria, de modo que habrá dos clústeres contra-propagantes y un clúster estacionario en el espacio de fase de los QSS. Cuando $u_0 \gg 1$ las superposición no lineal de estas ondas termina en la formación de más de tres clústeres en el sistema.

3.3. Objetivos

3.3.1. Objetivo General

Estudiar la evolución del modelo Hamiltoniano de campo medio (HMF), y la transición de estos sistemas hacia estados cuasi-estacionarios no gaussianos. En particular se busca determinar que mecanismos físicos están involucrados en la formación de clústeres en el espacio de fase de los distintos estados cuasi-estacionarios.

3.3.2. Objetivo específicos

- **Objetivo 1:** Realizar simulaciones numéricas del modelo Hamiltoniano de campo medio (HMF). Las simulaciones considerarán un gran número N de partículas indistinguibles, las cuales interactúan por medio de un potencial sinusoidal atractivo y que serán restringidas a moverse en un espacio unidimensional con condiciones de borde periódicas.

- **Objetivo 2:** Estudiar la dinámica de las partículas en sistemas con interacciones de largo alcance, en simulaciones para largos tiempos según parámetros macroscópicos del estado inicial. Las condiciones iniciales corresponden a un sistema de N partículas indistinguibles, distribuidas en el espacio de fases según una distribución tipo *Water-Bag*, caracterizada unívocamente mediante su magnetización inicial M_0 , y por la energía total u_0 de las partículas, es decir, su energía cinética más su energía potencial.
- **Objetivo 3:** Identificar y clasificar el estado cuasi-estacionario alcanzado a largos tiempos de un sistema de partículas en el modelo HMF como función de su magnetización, energía inicial y el mecanismo involucrado en la formación de los clústeres en su espacio de fase.

3.4. Metodología

3.4.1. Metodología 1: Simulaciones numéricas

Para llevar a cabo este trabajo se realizarán simulaciones numéricas de partículas, basadas en el modelo HMF con interacción atractiva, sistema descrito por el Hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)]. \quad (3.4.1)$$

Como ya se comentó en la sección 2.2, este modelo describe a un sistema de N partículas de masa unitaria, posición θ_i y momentum lineal o velocidades p_i , que se mueven en un círculo unitario. Estas partículas están totalmente acopladas a través de un potencial sinusoidal de rango infinito de tipo atractivo, donde obtenemos que el modelo HMF presenta QSS los cuales se encuentran fuera del estado de equilibrio termodinámico y su tiempo de vida diverge con el número de partículas.

Las ecuaciones de movimiento de este sistema son directamente derivadas del Hamiltoniano (3.4.1):

$$\dot{\theta}_i = p_i, \quad (3.4.2)$$

$$\dot{p}_i = -M_x \sin \theta_i + M_y \cos \theta_i, \quad (3.4.3)$$

donde $\mathbf{M} = (M_x, M_y) = (\sum \cos \theta_i, \sum \sin \theta_i)/N$, es la magnetización del sistema y cuantifica el grado de homogeneidad de las partículas.

Este sistema al ser conservativo para resolver sus ecuaciones de movimiento de forma numérica se hará uso de un integrador simpléctico de segundo orden (conocido como método del salto de la rana o *leap-frog*), explicado en detalle en la sección 2.4, el cual tiene por solución para las velocidades y posiciones

$$p_{n+1/2} = p_{n-1/2} + \Delta t \dot{p}(\theta_n), \quad (3.4.4)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta t p_{n+1/2} \quad (3.4.5)$$

siendo Δt el paso de tiempo. Las ecuaciones (3.4.4) y (3.4.5), para N partículas, serán iteradas por un determinado número de pasos de tiempo para así obtener la evolución y solución de este sistema. Este método será utilizado para las distintas simulaciones numéricas de las diferentes combinaciones de condiciones iniciales del modelo HMF, las cuales son la magnetización inicial $|\mathbf{M}_0|$ y energía inicial $u_0 = \langle p^2 \rangle / 2 + (1 - |\mathbf{M}_0|^2) / 2$, que entregaran las posiciones y velocidades iniciales de las N partículas de donde se comenzará su iteración. Todo este procedimiento se llevará a cabo en un código escrito en Python 3.6 siguiendo los pasos descritos en la sección 2.4 para su elaboración.

3.4.2. Metodología 2: Condiciones iniciales en el modelo HMF

Los sistemas dados por el modelo HMF poseen condiciones de borde periódicas y pueden ser iniciados con distintas combinaciones de condiciones iniciales, y a diferencia de un sistema termodinámico usual, estos no solo depende de su energía total, si no también de su magnetización, tema tratado en detalle en la sección 2.3. En el presente trabajo para alcanzar distintos QSS para cada combinación de condiciones iniciales el sistema será iniciado en un estado inestable, descrito por una distribución de partículas $f(\theta, p)$ tipo *Water-Bag*:

$$f_0(\theta, p) = \frac{1}{4\theta_0 p_0} \Theta(\theta_0 - |\theta|) \Theta(p_0 - |p|), \quad (3.4.6)$$

donde Θ es la función de Heaviside y θ_0 con p_0 son los límites máximos para las posiciones y velocidades respectivamente de las partículas. En este caso la magnetización inicial es dada por $M_0 = M_x = \sin(\theta_0)/\theta_0$ y $M_y = 0$ ya que la función de distribución de partículas (3.4.6) es simétrica en posiciones, característica que el sistema mantiene durante toda su evolución. Por esto último, cuando se hable de la magnetización del sistema, se estará refiriendo a la magnetización M_x . Por otro lado de la energía inicial del sistema u_0 cuando se tiene una distribución de partículas *Water-Bag*, se tiene la ecuación

$$\frac{p_0^2}{6} = u_0 + \frac{1}{2}(M_0^2 - 1), \quad (3.4.7)$$

que impone una restricción para los estados energéticos iniciales accesibles para el modelo HMF, se debe cumplir que $u_0 > \frac{1}{2}(1 - M_0^2)$.

En este trabajo, se realizarán distintas simulaciones numéricas de partículas basadas en el modelo HMF, con distintas condiciones iniciales para la magnetización $0 < M_0 < 1$ y para la energía total $\frac{1}{2}(1 - M_0^2) < u_0 < 2$, para luego estudiar la dinámica del sistema en sus distintas etapas. Como la distribución (3.4.6) es inicialmente inestable, se espera que el sistema relaje violentamente a otros estados cuasi-estables, para finalmente llegar al equilibrio termodinámico.

Las simulaciones se realizarán para tiempos largos, lo cual debe contemplar que como en este tipo de sistemas se tienen QSS los cuales tienen un tiempo de vida que depende de su número de partículas N y escalan de la forma N^γ , siendo $\gamma > 1$ y que depende de las correlaciones de cada sistema, las simulaciones deben considerar un tiempo prudente con el cual se puede estudiar en detalle la etapa cuasi-estacionaria de estos sistemas ya que cada caso tendrá grandes números de partículas, por ejemplo, para $N = 10^6$ partículas con un paso de tiempo $\Delta t = 0,01$, se tendrán como mínimo 2^{17} pasos de iteración en las simulaciones. Por otro lado mencionar que el paso de tiempo Δt que se usará en la integración de las ecuaciones de movimiento por medio de las iteraciones en las simulaciones numéricas, será lo suficientemente pequeño para evitar inestabilidades numéricas.

Estas simulaciones se correrán en un ordenador compuesto por un procesador Intel

Core i7-8700 de 6 núcleos y 12 hilos con frecuencia una base de 3,2 [GHz] y una memoria ram de 8Gb de 2400 [MHz], donde simulaciones como las mencionadas anteriormente tardan aproximadamente 3 horas.

3.4.3. Metodología 3: Clasificación de los distintos estados cuasi-estacionarios

Los distintos QSS del modelo HMF serán clasificados según las condiciones iniciales caracterizadas por la magnetización M_0 y energía total u_0 . Así, se realizarán simulaciones con distintas combinaciones de M_0 y u_0 , donde se analizará el estado cuasi-estacionario que alcanza el sistema, se estudiará la magnetización del sistema en este estado, para así determinar si es un estado homogéneo o paramagnético, lo cual implica que la distribución de partículas es uniforme en el espacio; o si es un estado no homogéneo o también conocido como ferromagnético, el cual se caracteriza por una magnetización distinta de cero y donde las partículas tienden a agruparse en ciertas regiones del espacio. En paralelo, se estudiará el tipo de distribución de partículas que posea el estado cuasi-estacionario, donde, analizando la densidad del espacio de fases, se podrá determinar el tipo y el número de estructuras presentes en cada caso, ya que este sistema se caracteriza por tener distintos tipos de estructuras para sus distintos QSS, las cuales, por mencionar algunas, van de estructuras tipo *core-halo*, un núcleo denso rodeado por un *halo* difuso, hasta clústeres contrapropagantes que viajan de forma periódica por el espacio de fase. Se hará especial énfasis en estudiar la formación de estas estructuras y así determinar mediante que mecanismos físicos se forman los distintos clústeres que sean característicos de cada clasificación. Se buscará determinar como las condiciones iniciales afectan a la etapa cuasi-estacionaria del modelo HMF mediante la determinación de que mecanismos físicos son los responsables del desarrollo de las distintas estructuras presentes en el espacio de fase de cada QSS.

Se realizará un diagrama de clasificación de las distintas combinaciones de condiciones iniciales del modelo HMF, donde esta clasificación no solo contendrá información de la magnetización de los QSS, sino que también proporcionará información del tipo y número de estructuras presentes en las densidades de espacio de fase de cada caso y que mecanismo físico es el responsable de su formación. En

el diagrama del espacio de condiciones iniciales se pretende identificar zonas, o sea determinar magnetizaciones iniciales y energías totales, que compartan una clasificación similar basadas en las características antes mencionadas.



Capítulo 4

Resultados

4.1. Casos simulados

Se realizaron simulaciones de partículas del modelo HMF con interacción atractiva donde el estado inicial del sistema era dado por una distribución de partículas *Water-Bag*.

Las condiciones iniciales, es decir, la energía y magnetización inicial de las simulaciones, son dadas por punto del espacio de condiciones iniciales del sistemas (M_0, u_0) , por lo que es necesario definir los límites, dominios, que tiene este espacio.

Se debe tener cuidado al elegir el dominio de las condiciones iniciales, si bien lo que se busca es cubrir la mayor cantidad de puntos del espacio de condiciones iniciales, con lo que respecta a M_0 es sencillo, es una cantidad normalizada por definición por lo que su dominio es $0 < M_0 < 1$, pero para el caso de u_0 es diferente, al escoger una distribución de partículas *Water-Bag* para el estado inicial, la energía inicial o total (sistema conservativo) debe cumplir con la ecuación

$$u_0 = \frac{p_0^2}{6} + \frac{1}{2}(1 - M_0^2). \quad (4.1.1)$$

Sabemos que p_0 se determina al escoger un M_0 y un u_0 , por lo que esta cantidad

se puede despejar en función de las condiciones iniciales

$$p_0 = \sqrt{6u_0 - 3(1 - M_0^2)}, \quad (4.1.2)$$

donde la expresión que se encuentra dentro de la raíz cuadrada no puede ser negativa y su mínimo valor es cero porque p_0 debe ser una cantidad real, así se tiene que la energía inicial mínima permitida para una magnetización inicial M_0 tiene que cumplir con

$$u_0 = \frac{1}{2}(1 - M_0^2). \quad (4.1.3)$$

De este modo la ecuación (4.1.3) nos entrega el mínimo valor posible de la energía inicial para cada magnetización inicial, así se obtiene el mínimo inferior del dominio de u_0 , mientras que el límite superior no tiene ninguna dificultad a la hora de escogerse, sin embargo en base a las simulaciones aquí realizadas, no se encontraron resultados interesantes ni relevantes para este estudio cuando u_0 tenía un valor superior a 2, de modo que esta cantidad es escogida como límite superior para energía inicial del sistema. Luego, las distintas condiciones iniciales escogidas para estudiar sus diferentes QSS se encuentran dentro de la “Zona Permitida” señalada en la Figura 4.1.1.

Se considera una grilla para el espacio de condiciones iniciales, donde la magnetización inicial es tomada en el dominio de $0 < M_0 < 1$ con un paso de 0,05 al igual que la energía en el dominio $\frac{1}{2}(1 - M_0^2) < u_0 < 2$, es decir se tiene una grilla de 21×41 puntos. Luego al descartando aquellos puntos que están fuera de la “Zona Permitida” anteriormente definida, se obtienen todas las condiciones iniciales usadas en este trabajo. En total se realizaron 716 simulaciones con diferentes condiciones iniciales con el objetivo de cubrir una gran cantidad de puntos del espacio de condiciones iniciales y así estudiar el tipo de QSS que se alcanza en cada caso.

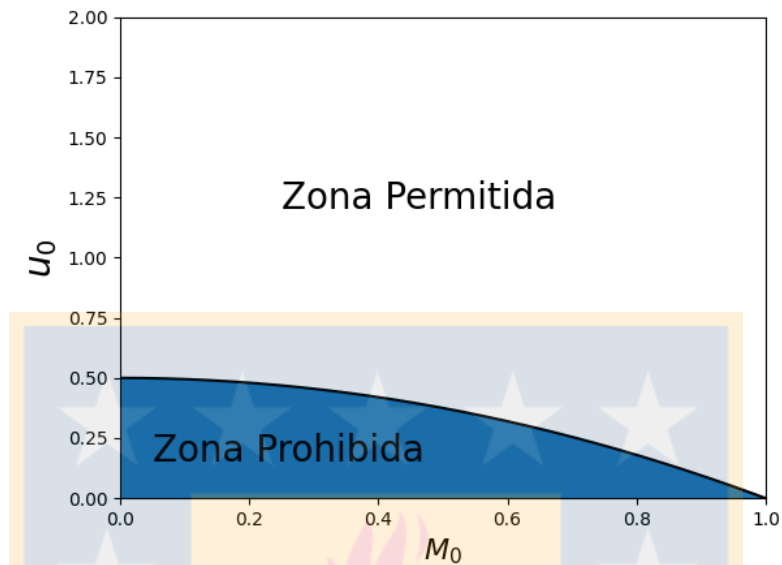


Figura 4.1.1: Espacio de condiciones iniciales del modelo HMF. En la “Zona Prohibida” se encuentran combinaciones de condiciones iniciales (M_0, u_0) que no son permitidas para el modelo HMF, mientras que en la “Zona Permitida” se encuentran las condiciones iniciales que no presentan ningún problema para este tipo de sistema.

A continuación se presentarán los distintos tipos de QSS alcanzados basándose en la clasificación ya conocida, de la magnetización del sistema en la etapa cuasi-estacionaria, pero se agrega la subclasificación basada en el tipo y número de estructuras que existen en el espacio de fase el mecanismo responsable de su formación en cada estado correspondiente. Se debe mencionar que esta clasificación se aplica todos los QSS exceptuando los casos donde se tiene $M_0 = 0$, porque como ya se presentó en capítulos anteriores, para esta condición inicial no es posible encontrar estructuras en sus espacios de fase, por lo que serán clasificados únicamente, en este trabajo, como QSS paramagnéticos.

4.2. Clasificación de estados cuasi-estacionarios paramagnéticos

4.2.1. Estados cuasi-estacionarios paramagnéticos con dos clústeres contra-propagantes

Como ya se presento en capítulos anteriores, la clasificación, QSS paramagnéticos del modelo HMF proviene de la magnetización del sistema en su etapa cuasi-estacionaria M_s , la cual es igual o muy cercana a cero, en este estado. Esto último significa que las partículas en estos estados se encuentran distribuidas de forma homogénea por el espacio. Lo anterior son las definiciones y teoría, pero cuando llevamos esto a la practica, es decir a simulaciones de partículas para este trabajo, notamos que los QSS paramagnéticos, como ya se menciona, dependen de las condiciones iniciales, por lo que es posible notar diferencias en los distintos casos catalogados como paramagnéticos, donde podemos tener estados cuasi-estacionarios más cercano al homogéneo completo como el de la Figura 4.2.1b o estados que no son homogéneos en todo momento, pero si permanecen cerca de esta como es el caso del la Figura 4.2.1a.

Este tipo de QSS se caracterizan por tener dos clústeres contra-propagantes en sus densidades de espacios de fase, como se puede ver en las Figuras 4.2.2 y 4.2.3 y dependiendo de las condiciones iniciales estos clústeres se van alejando o acercando entre ellos.

[Antoniazzi et al. \(2007\)](#) realizaron variadas simulaciones del modelo HMF para estudiar sus QSS, para todos los casos que simularon mantuvieron fija la energía inicial $u_0 = 0,69$ pero fueron cambiando M_0 . De la observación de sus simulaciones numéricas concluyeron que conforme se aumentaba la magnetización inicial los dos clústeres tendían a fusionarse. Esta conclusión es correcta pero solo es una parte de una conclusión más general, ya que este tipo de sistemas no solo depende de M_0 si no que también lo hace de la energía inicial, lo cual se pude observar el estudiar este tipo de casos por medio del modelo de dos ondas contra-propagantes las cuales generan dos zonas de resonancias en el espacio de fase de estos QSS formando así los dos clústeres contra-propagantes tan característicos de estos casos

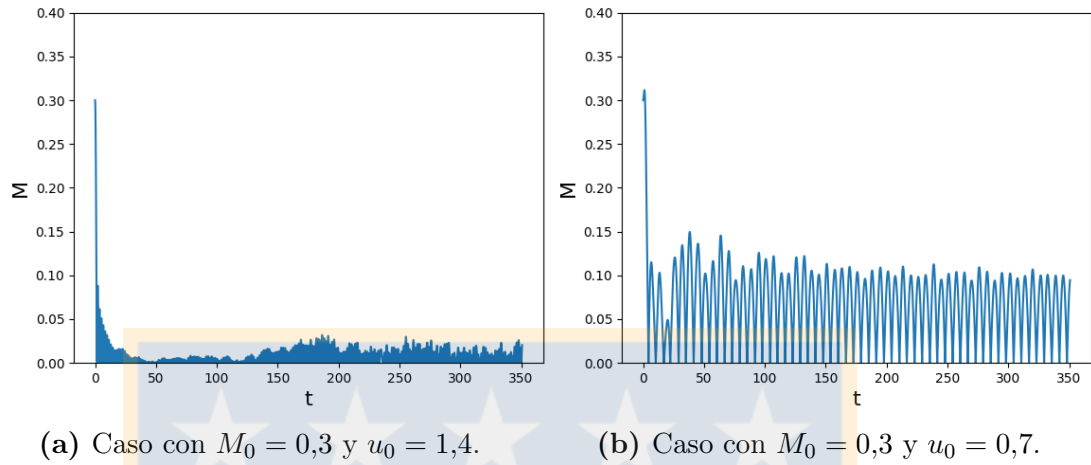


Figura 4.2.1: Evolución temporal de la magnetización M del sistema. Caso con $N = 1 \times 10^6$ partículas.

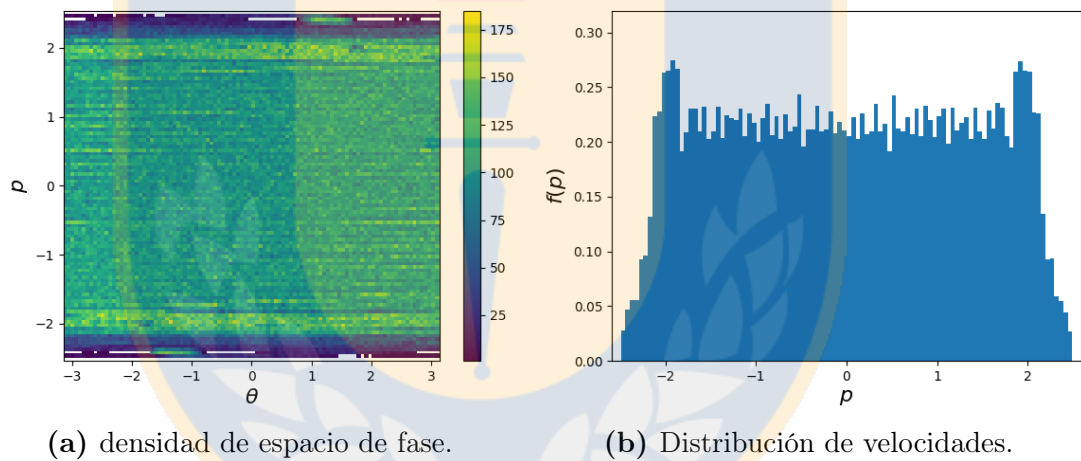
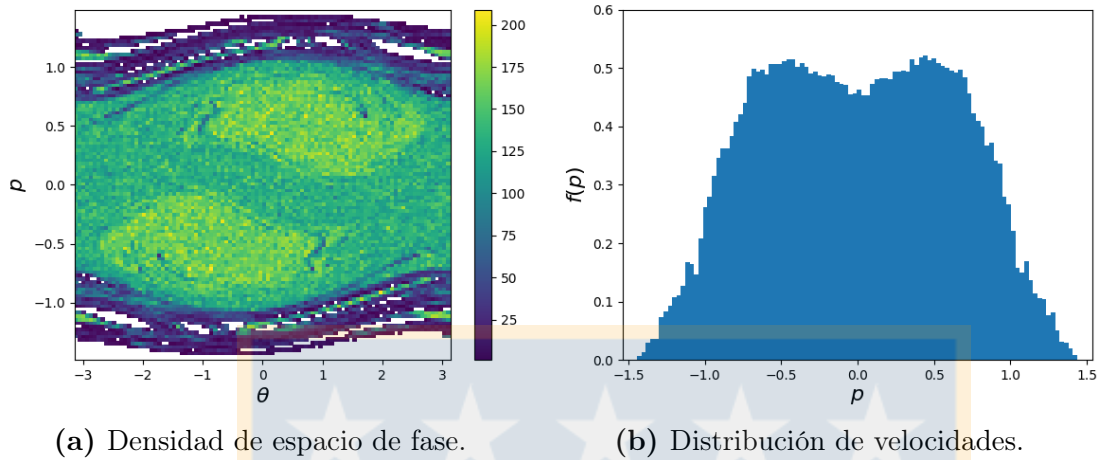


Figura 4.2.2: Estado cuasi-estacionario paramagnético. Caso en $t = 127,36$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,3$ y $u_0 = 1,4$.

debido a la interacción onda-partícula. Es así que p_0 , el cual nos entrega dominio de velocidades de las partículas en su estado inicial y también la velocidad de fase de las ondas contra-propagantes, no solo depende de M_0 si no que también de u_0 , por lo que la velocidad de fase de las ondas contra-propagantes también cambia para distintos valores de energías iniciales. Así se pueden tener casos como los presentados en las las Figuras 4.2.2 y 4.2.3, donde se tiene una $M_0 = 0,3$ la cual es una magnetización pequeña por lo que los clústeres, según lo ya argumentado, están relativamente separados, pero notamos que el caso con $u_0 = 1,4$ tiene los clústeres contra-propagantes más separados que el caso con $u_0 = 0,7$, lo cual es



(a) Densidad de espacio de fase.

(b) Distribución de velocidades.

Figura 4.2.3: Estado cuasi-estacionario paramagnético. Caso en $t = 127,36$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,3$ y $u_0 = 0,7$.

debido que al aumentar u_0 pero manteniendo fijo el valor de M_0 , la velocidad de fase p_0 de las ondas contra-propagantes aumenta, por lo que las zonas de resonancias en el espacio de fase se separan.

Se debe notar que en el caso con $M_0 = 0,3$ y $u_0 = 1,4$, no es fácil distinguir los dos clústeres contra-propagantes en su densidad de espacio de fase (ver Figura 4.2.2a), principalmente debido a que las zonas de resonancias se encuentran en una estado energético alto, lo cual no es muy sencillo de alcanzar para la mayoría de las partículas. Sin embargo, se sabe que existen dos clústeres en el espacio de fase ya que al estudiar la distribución de velocidades del estado cuasi-estacionario (ver Figura 4.2.2b), se puede observar que esta tiene dos *bumps* simétricos cercanos a $p = \pm 2,38$, el cual es el valor de la velocidad de fase de las ondas contra-propagantes causantes de los dos clústeres contrapropagantes de este tipo de sistema.

Por otro lado, notar que el caso con $u_0 = 1,4$ tienen los dos clústeres más separados que el caso con $u_0 = 0,7$, esto permite que las partículas puedan distribuirse de forma más uniforme por el espacio de posiciones, haciendo que el estado cuasi-estacionario tenga un M_s muy cercano a cero como se ve en la Figura 4.2.1a. Pero, el caso con $u_0 = 0,7$ tiene los dos clústeres más cercanos al centro, por lo que más partículas los compone (son más grandes) generando que en el espacio

existan zonas con mayor probabilidad de tener partículas, por lo que no es un espacio del todo homogéneo lo cual hace que en ciertos instantes M_s no sea cero pero en otros si, lo cual hace que la magnetización del sistema en su etapa cuasi-estacionaria oscile entorno a cero como se muestra en la Figura 4.2.1b.

Dentro de las simulaciones realizadas en este estudio, se obtuvieron QSS que cumplen con las características de los estados aquí estudiados, pero en su espacio de fase entre los dos clústeres contra-propagantes presentaron la formación de pequeñas estructuras (clústeres) (ver Figura 4.2.4a). Éstas estructuras no son tan evidentes en sus distribuciones de velocidades (ver Figura 4.2.4b) ni durante toda la etapa cuasi-estacionaria del sistema, es decir, en alguna etapa de la evolución en el espacio de fase se puede observar que las partículas que componen estas pequeñas estructuras tienden a condensarse haciendo más evidente el clúster, mientras que en otra etapa estos clústeres muestran una dilatación haciendo más complejo su observación. Estos casos se presentan para altas energías iniciales ($u_0 > 1,2$) y altas magnetizaciones iniciales ($M_0 > 0,5$). Es importante comentar que estos pequeños clústeres no muestran ser estructuras recurrentes en este tipo de casos, ya que una vez que se repiten pruebas con las mismas condiciones iniciales, las pequeñas estructuras pueden no surgir en el espacio de fase. Por esto último, y sumado a que en algunas etapas de la evolución del sistema es complejo detectar a estas estructuras, es que los incluimos en esta sección que estudia los QSS paramagnéticos con dos clústeres contra-propagantes, sin embargo se sugiere un estudio basado en simulaciones que se apoyen en algún método sistemático que cuantifique la correlación de las partículas que participan en estas pequeñas estructuras (clústeres) y que mida su tiempo de vida, esto podría entregar nueva información de la dinámica microscópica de este tipo de casos, la cual ayudaría a futuros estudios del modelo HMF cuando este presenta este tipo de QSS.

Independiente de las diferencias aquí comentadas en los QSS paramagnéticos, todos los casos estudiados en esta sección cumplen con tener dos clústeres contra-propagantes en sus densidades de espacio de fase y además de tener un M_s cercano o igual a cero en ciertos instantes, por lo que clasificarlos como estados cuasi-estacionarios paramagnéticos con dos clústeres contra-propagantes es correcto y aporta información no solo de la magnetización del estado cuasi-estacionario si no

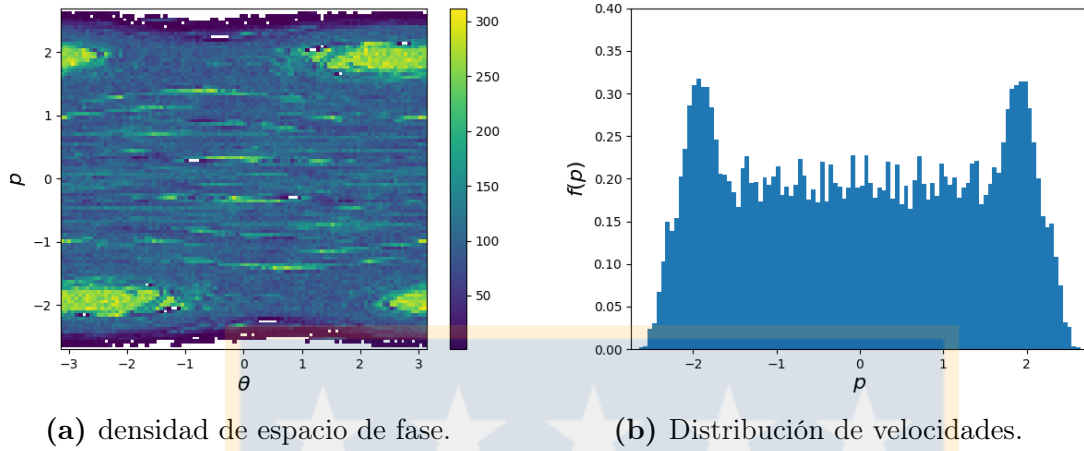


Figura 4.2.4: Estado cuasi-estacionario paramagnéticos. Caso en $t = 311,4$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,8$ y $u_0 = 1,5$.

también del tipo de estructura que poseen en sus espacios de fase. Las condiciones iniciales que generan este tipo de QSS componen dos zonas no contiguas en el espacio de condiciones iniciales, esto se ejemplifica más en detalle en la sección 4.4 donde se muestra de forma gráfica las diferentes zonas correspondientes a las diferentes clasificación de los distintos QSS del modelo HMF. Por último comentar, que dentro de las zonas del espacio de condiciones iniciales del modelo HMF asignada para los casos aquí estudiados, se tiene una sub-zona asociada a los QSS que presentan estos pequeños clústeres no recurrentes que en ocasiones se observan entre los dos clústeres contra-propagantes principales.

4.2.2. Estados cuasi-estacionarios paramagnéticos con tres clústeres

Entre los diferentes QSS al cual sistemas dados por el modelo HMF pueden relajarse, es posible encontrar casos donde no solo existen dos clústeres en el espacio de fase, si no que también hay un tercer clúster estacionario más pequeño en el centro del espacio de fase. Esto se puede ver en la densidad de espacio de fase, Figuras 4.2.6a y 4.2.7a, de estos casos y también es apreciable en las distribuciones de velocidades (ver Figuras 4.2.6b y 4.2.7b), donde en el centro de los dos *bumps* más grandes, asociados a los dos clústeres contra-propagantes, hay una pequeña estructura. La particularidad de estos caso es que también entran dentro de la categoría de QSS paramagnéticos, ya que la magnetización del sistema en esta

etapa cuasi-estacionaria M_s es muy cercana a cero, oscilando en torno a este valor como se puede ver en la Figura 4.2.5.

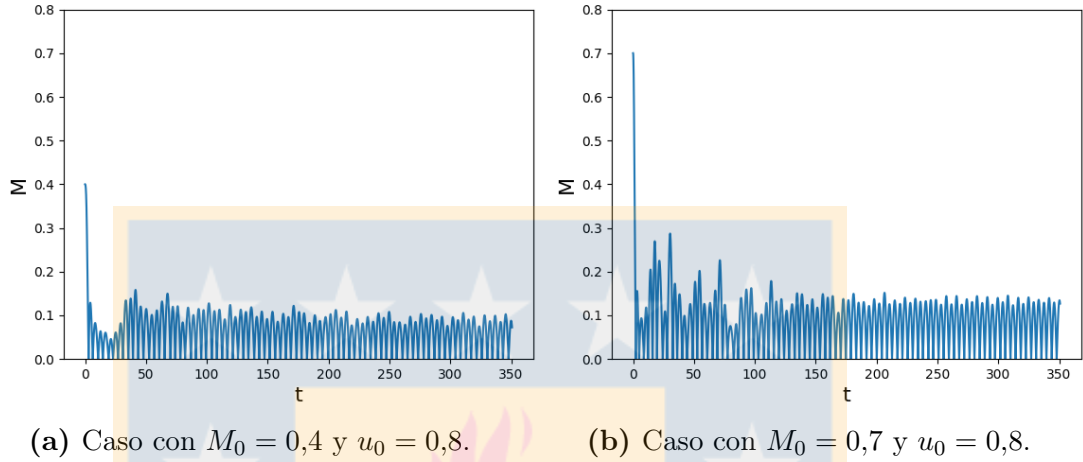


Figura 4.2.5: Evolución temporal de la magnetización M del sistema. Caso con $N = 1 \times 10^6$ partículas.

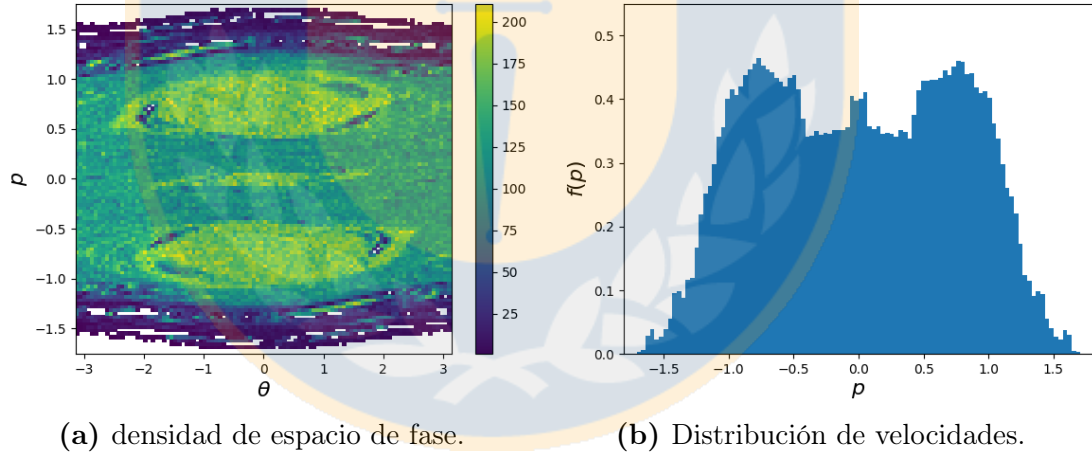


Figura 4.2.6: Estado cuasi-estacionario paramagnético. Caso en $t = 223,36$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,4$ y $u_0 = 0,8$.

En el caso de QSS paramagnéticos de [Antoniazzi et al. \(2007\)](#) estudiado previamente, se mostró la existencia de dos ondas contra-propagantes, de modo que ciertas partículas podían entrar en resonancia con estas ondas formando dos zonas de mayor densidad en el espacio de fase, que se traducen en dos clústeres contra-propagantes. A diferencia de eso casos, en las Figuras 4.2.6 y 4.3.3 se tiene la presencia de un tercer clúster que surge en $p = 0$. Una explicación a la existencia de este tercer clúster esta en notar que tanto en el caso con

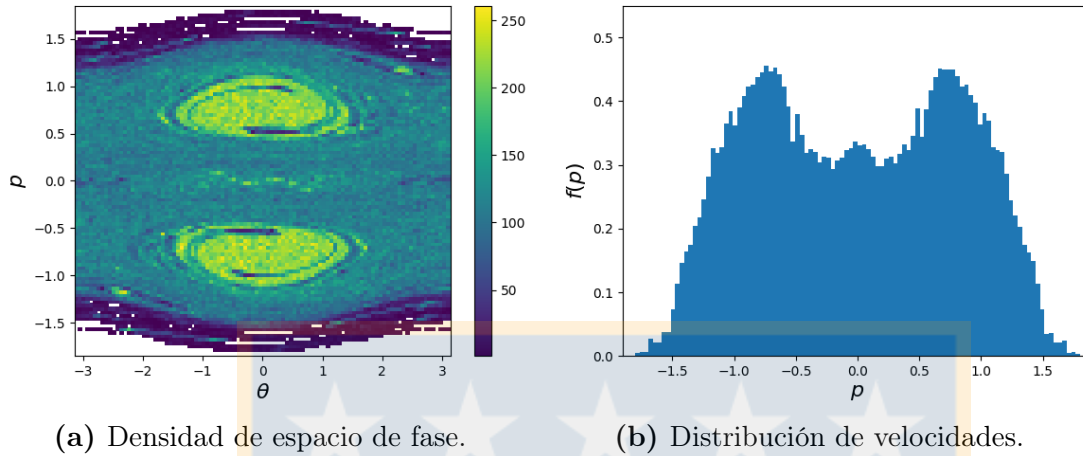


Figura 4.2.7: Estado cuasi-estacionario paramagnético. Caso en $t = 223,36$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,7$ y $u_0 = 0,8$.

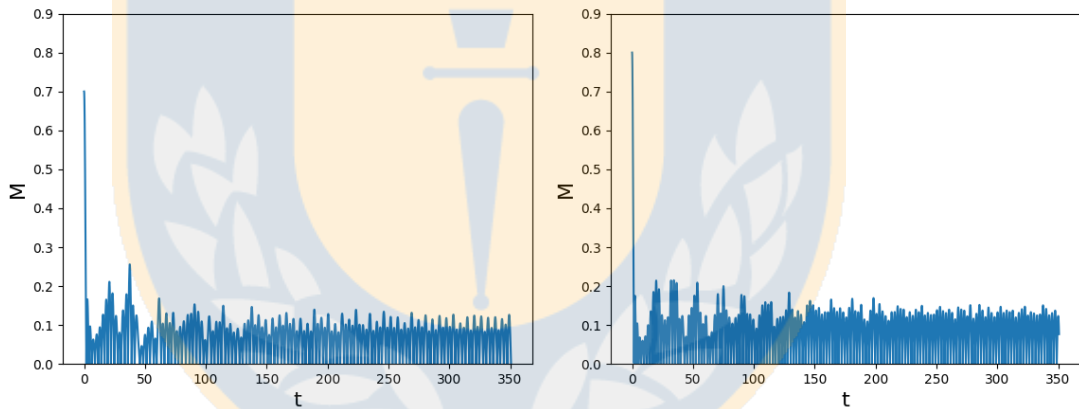
$M_0 = 0,4$ y $u_0 = 0,8$ como en el caso con $M_0 = 0,7$ y $u_0 = 0,8$, los dos clústeres contra-propagantes están alejados uno del otro (ver Figuras 4.2.6 y 4.3.3), esto deja una población de partículas no menor en el centro del espacio de fase. Al tener dos ondas de la misma amplitud (mismo tamaño de los clústeres) pero contra-propagantes, se puede argumentar que la superposición lineal de estas ondas genera una onda estacionaria, es decir, con velocidad de fase igual a cero $p = 0$. Lo que aquí se observa es una tercera zona de resonancia, ya que esa población de partículas que se encuentra cercana al centro del espacio de fase puede entrar en resonancia con esta onda estacionaria formando este tercer clúster y dependiendo de las condiciones iniciales este clúster será más grande o más pequeños, ya que de esto depende cuan alejados este los clústeres principales y cuantas partículas queden en un estado más cercano al centro del espacio de fase y así puedan interactuar con esta onda estacionaria.

Es importante notar que la clasificación de QSS paramagnéticos con dos clústeres contra-propagantes no es del todo correcta en estos casos, si bien podrían entrar dentro de esta clasificación faltaría informar sobre la presencia del tercer clúster el cual trae consigo otro fenómeno importante que ocurre en el sistema, la existencia de una onda estacionaria, por lo anterior una clasificación correcta para este tipo de casos sería estados cuasi-estacionarios paramagnéticos con tres clústeres, donde se tiene la información de los dos clústeres contra-propagantes y del tercer clúster

estacionario. Las condiciones iniciales que generan este tipo de QSS aquí estudiado se muestran de forma gráfica (una zona del espacio de condiciones iniciales) en la sección 4.4, donde se profundiza más en este tema.

4.2.3. Estados cuasi-estacionarios paramagnéticos con cinco clústeres

Como ya se a presentado, tener QSS paramagnéticos no impla tener solo dos clústeres contra-propagantes en sus espacios de fase ya que existen casos donde además existe un tercer clúster estacionario. Es así que también existe un tercer tipo de QSS paramagnético, donde en el espacio de fase hay más de tres clústeres, cinco en este caso. Al igual que los casos anteriores, la magnetización del sistema en su etapa cuasi-estacionaria es muy cercana a cero como se puede ver en la Figura 4.2.8.

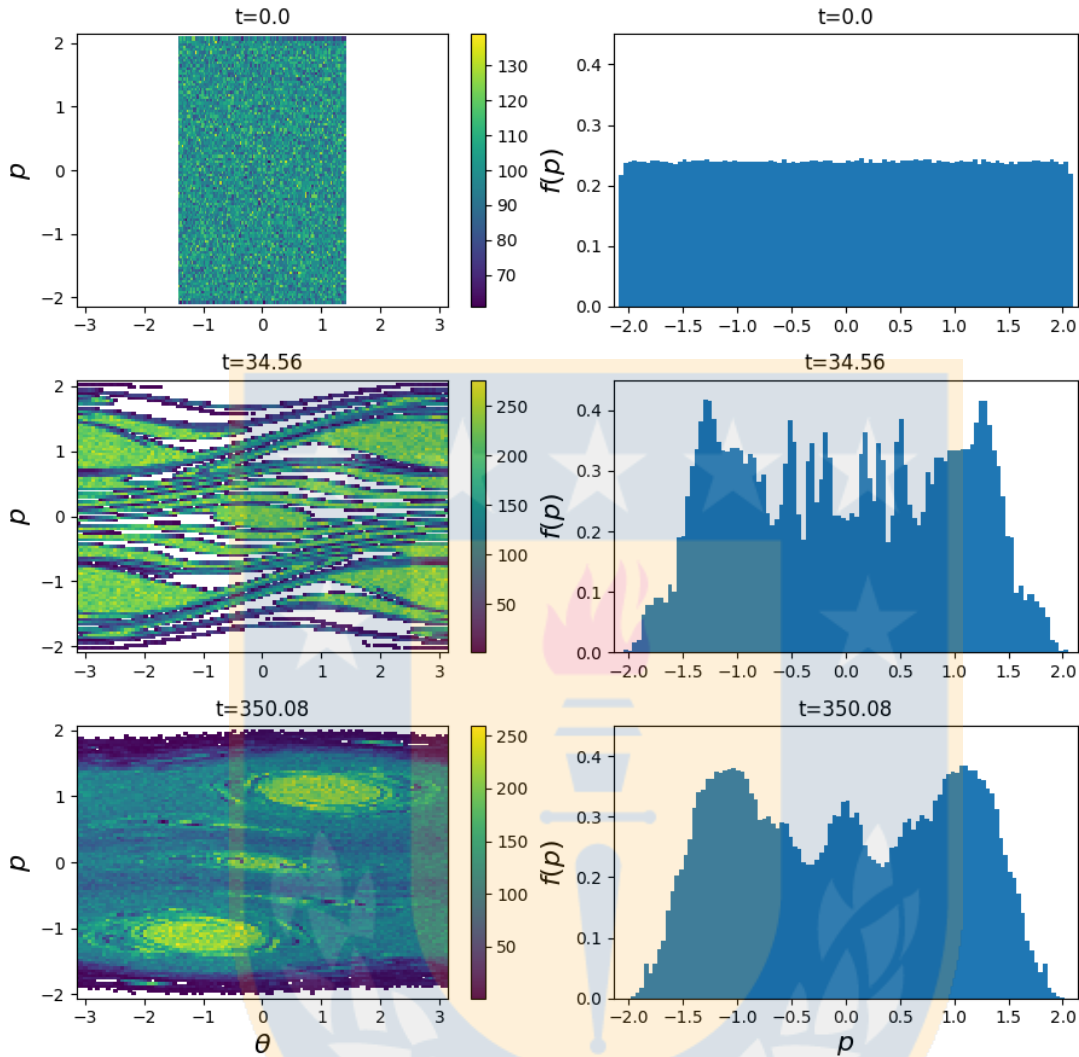


(a) Caso con $M_0 = 0,7$ y $u_0 = 1$.

(b) Caso con $M_0 = 0,8$ y $u_0 = 1,1$.

Figura 4.2.8: Evolución temporal de la magnetización M del sistema. Caso con $N = 1 \times 10^6$ partículas.

Como se puede ver en las Figuras 4.2.9 y 4.2.10 la formación de estos clústeres que se encuentran en el centro de los dos clústeres contra-propagantes principales comienzan en una etapa temprana del sistema. Antes de alcanzar el estado cuasi-estacionario el sistema atraviesa una etapa de “violenta relajación” donde se pasa de un estado inicial ferromagnético (con $M_s \neq 0$) a un estado paramagnético, pero durante esta transición se puede observar la formación de los dos clústeres principales y debido a condiciones iniciales que en estos caso tiene energías iniciales altas, estos clústeres se forma alejados uno del otro. Esto último deja

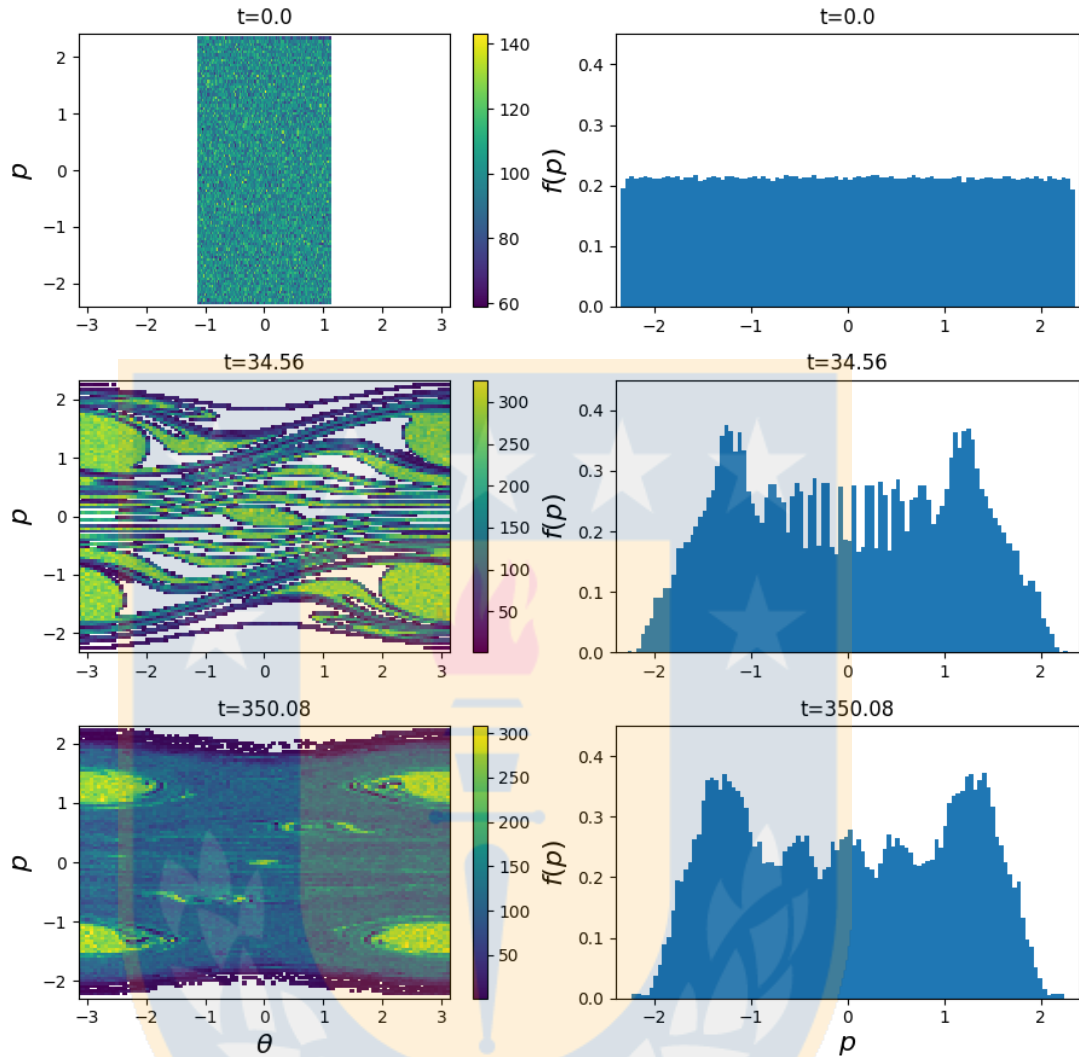


(a) densidad de espacio de fase.

(b) Distribución de velocidades.

Figura 4.2.9: Estado cuasi-estacionario paramagnético en diferentes tiempos en $t = 223, 36$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0, 7$ y $u_0 = 1$.

una población de partículas no menor en el centro, pero a diferencia de los caso con un solo clúster estacionario en el centro, en el espacio de fase de estos caso existen varias líneas de corrientes las cuales arrastran a estas partículas a lo largo del espacio de fase por un periodo de tiempo, como se puede ver en las Figuras 4.2.9a y 4.2.10a en $t = 34, 56$. Finalmente cuando ya se ha alcanzado la etapa cuasi-estacionaria estas líneas de corriente se condensan en clústeres que se mueven de forma periódica a lo largo del espacio de fase como se muestra en las Figuras 4.2.9a y 4.2.10a en $t = 350, 08$. Se tienen espacios de fase con cinco clústeres, donde hay dos clústeres contra-propagantes pequeños que se mueven de



(a) Densidad de espacio de fase.

(b) Distribución de velocidades.

Figura 4.2.10: Estado cuasi-estacionario paramagnético en diferentes tiempos con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,8$ y $u_0 = 1,1$.

forma periódica a lo largo del espacio de fase entre el clúster estacionario y uno de los clústeres principales como se puede ver en las densidades de espacio de fase de las Figuras 4.2.9a y 4.2.10a. Pero, ahora como el tercer clúster estacionario ya no es la única estructura en el centro del espacio de fase de estos sistemas, los otros dos nuevos clústeres se llevan consigo varias partículas del clúster estacionario, es así que en casos como el de la Figura 4.2.10, el clúster del centro es muy pequeño y se necesita revisar su distribución de velocidad (ver Figura 4.2.10b) para confirmar la presencia de esta estructura.

Una explicación a estas dos nuevas estructuras que se suman a los tres clústeres ya explicados en secciones anteriores, puede ser dada desde el punto de la propagación de ondas de densidades en el sistema las cuales pueden interactuar entre sí. Como ya se argumentó, la superposición lineal entre las dos ondas contra-propagantes generaban una onda estacionaria en el centro, ahora, siguiendo este mismo argumento, podemos decir que la interacción de cada una de estas ondas que forman los clústeres principales con la onda estacionaria asociadas al clúster central, forman una cuarta y quinta onda las cuales también son contra-propagantes, lo que corresponde a una superposición no lineal.

Por los casos vistos en esta sección, una buena clasificación que contenga toda la información de este tipo de QSS sería, estados cuasi-estacionarios paramagnéticos con cinco clústeres, la cual entrega información sobre la magnetización del sistema en la etapa cuasi-estacionaria y el tipo y número de estructuras que se forman en el espacio de fase. Hacer esta clasificación es importante ya que en estos casos encontramos la existencia de un mecanismo de interacción de ondas que se solo se presenta en este tipo de QSS del modelo HMF. Las condiciones iniciales que generan este tipo de estados pertenecen a una zona específica en el espacio de condiciones iniciales del modelo HMF y se muestra de forma gráfica en un diagrama de clasificación en la sección 4.4.

4.3. Clasificación de estados cuasi-estacionarios ferromagnéticos

4.3.1. Estados cuasi-estacionarios ferromagnéticos con una *core-halo*

Los QSS ferromagnéticos se caracterizan por tener magnetización distinta de cero, es decir la magnetización del sistema en la etapa cuasi-estacionaria fluctúa entorno a un valor distinto de cero. Otra característica de estos estados es que la estructura que tienen en su espacio de fase corresponde a una *core-halo*, con un núcleo denso de partículas en estados de baja energía, rodeados por un *halo* menos denso de partículas en estados de energía más alta.

Los QSS estudiados en esta sección son ferromagnéticos lo cual se puede ver en la Figura 4.3.1 y además poseen una estructura *core-halo* en su densidad de espacio de fase (ver Figuras 4.3.2 y 4.3.3). Pero, estos QSS se caracterizan por tener un núcleo muy grande (respecto a su *halo* y sin ningún tipo de estructura en el interior, por otro lado su *halo*, pese a ser menos denso, es posible de distinguir en la densidad de espacio de fase de estos casos y se caracteriza por no tener ningún tipo de estructura secundaria en su interior.

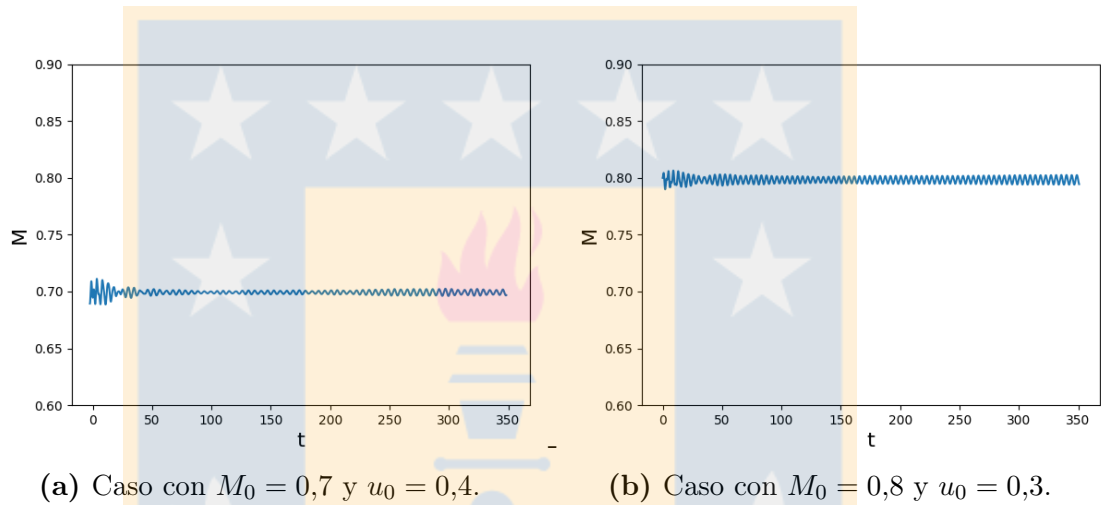


Figura 4.3.1: Evolución temporal de la magnetización M del sistema. Caso con $N = 1 \times 10^6$ partículas.

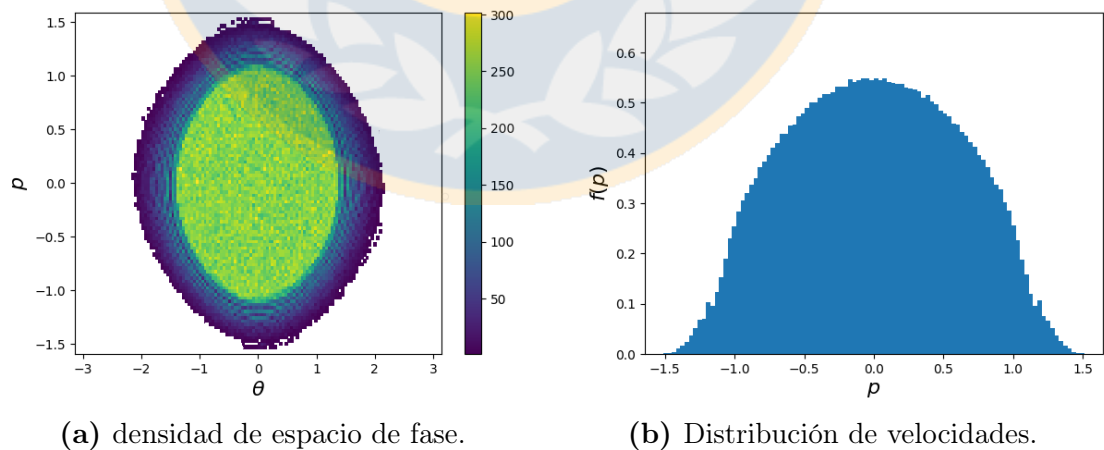


Figura 4.3.2: Estado cuasi-estacionario ferromagnético. Caso en $t = 250,25$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,7$ y $u_0 = 0,4$.

La principal característica de los QSS aquí presentados es su magnetización (ver Figura 4.3.1), la cual cuando estudiamos su evolución temporal notamos que solo

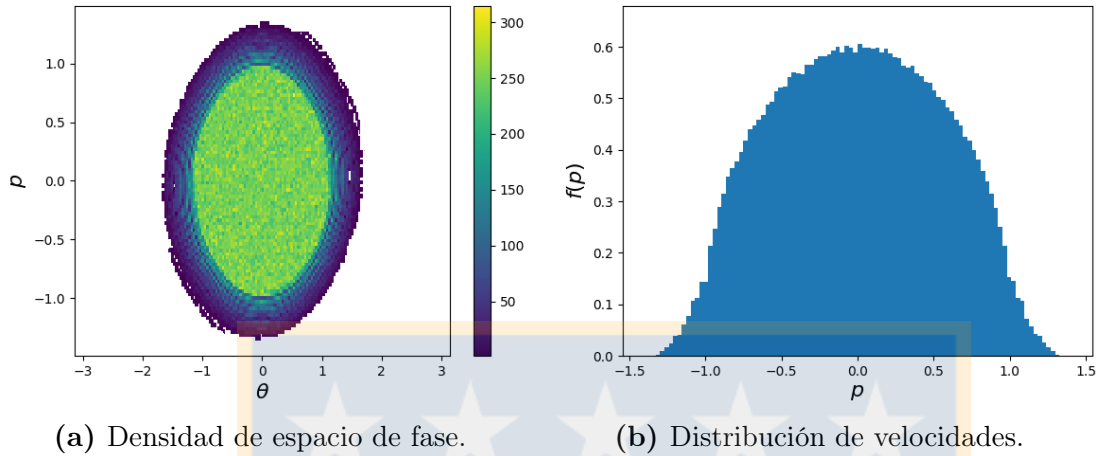


Figura 4.3.3: Estado cuasi-estacionario ferromagnético. Caso en $t = 250,25$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,8$ y $u_0 = 0,3$.

queda fluctuando entorno al valor de magnetización inicial, donde las fluctuaciones son de mayor amplitud en la etapas de la “violenta relajación”, pero posteriormente, ya en la etapa cuasi-estacionaria, estas fluctuaciones son de menor amplitud. Se muestra un comportamiento completamente diferente al visto en otros tipos de QSS en los cuales la magnetización en la etapa de “violenta relajación” mostraba una caída abrupta a algún valor lejano al inicial, pero aquí solo muestra pequeñas fluctuación entorno al valor de magnetización inicial como se puede ver en la Figura 4.3.1. Es así, que de la característica antes mencionada [Benetti et al. \(2012\)](#) estudiaron la estabilidad de la envolvente de la función de distribución de partículas de este tipo de casos, la cual definieron como $\theta_e(t) = \sqrt{3\langle\theta^2\rangle}$, donde $\theta_e(0) = \theta_0$. Para estudiar la estabilidad de la envolvente, determinaron la ecuación dinámica de la envolvente, la cual se obtiene derivando dos veces respecto al tiempo a $\theta_e(t)$ y considerando la conservación de la energía y usando la ecuación de movimiento $\ddot{\theta} = -M_x \sin \theta$ ya que $M_y = 0$ en todo tiempo por simetría (estado inicial dado por una distribución *Water-Bag*), se tiene

$$\ddot{\theta}_e = \frac{3}{\theta_e(t)}(2u + M_x(t) \cos \theta_e(t) - 1), \quad (4.3.1)$$

donde se ignoraron las correlaciones entre las posiciones y velocidades. Notar que $u = p_0^2/6 + (1 - M_0^2)/2$ y $M_0 = \sin(\theta_0)/\theta_0$. Luego, al considerar que la magnetización en estos casos aproximadamente permanece constante en todo

momento, se obtiene que la envolvente es estacionario $\ddot{\theta}_e = 0$, lo que resulta en la curva

$$(2u - 1)\theta_0 + \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0 \quad (4.3.2)$$

la cual entrega QSS con magnetización constante e igual a su valor inicial. Es importante comentar que los QSS pertenecientes a la curva (4.3.2) concuerdan con los estados aquí clasificados, tienen una magnetización igual o muy cercana a su valor inicial, es decir, distinta de cero en todo momento, y en sus densidades de espacio de fase se tienen una estructura como las presentadas en las Figuras 4.3.2a y 4.3.3a.

Por otro lado, en base a la presente investigación, notar que estos estados tienen una estructura *core-halo* en sus espacios de fase las cuales tienen un núcleo relativamente grande con un *halo* más pequeño, de modo que el límite entre el núcleo y el *halo* no es muy notorio en la distribución de velocidad del estado cuasi-estacionario (ver Figuras 4.3.2b y 4.3.3b), por ello es mejor estudiar la densidad de espacio de fase donde es posible diferenciar estar dos partes de la estructura *core-halo* (ver Figuras 4.3.2a y 4.3.3a).

Antes de continuar con la clasificación de los QSS de esta sección es importante recordar que el mecanismo físico responsable de la formación de la estructura que encontramos en el espacio de fase de los QSS ferromagnéticos es el amortiguamiento de Landau (tratado en profundidad en la sección 2.5.2). Este mecanismo describe la interacción de las partículas del sistema con una onda de densidad que se propaga en el modelo HMF, haciendo que algunas partículas ganen energía a expensas del movimiento colectivo, formando el *halo*, y otras pierdan energía debido a la amortiguación de la onda, formando el núcleo de la estructura *core-halo*. En base a las simulaciones y el estudio aquí realizado, es posible argumentar que esta onda de densidad presente en los QSS ferromagnéticos, es producto de dos ondas contra-propagantes, que debido a que estos QSS son para bajas energías, la velocidad relativa entre las ondas es muy pequeña generando así que en el espacio de fase las zonas de resonancias estén muy juntas, lo cual

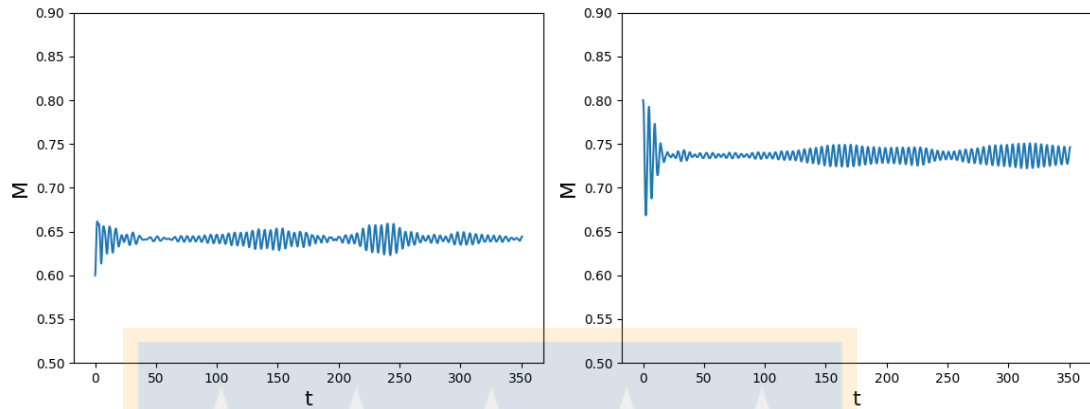
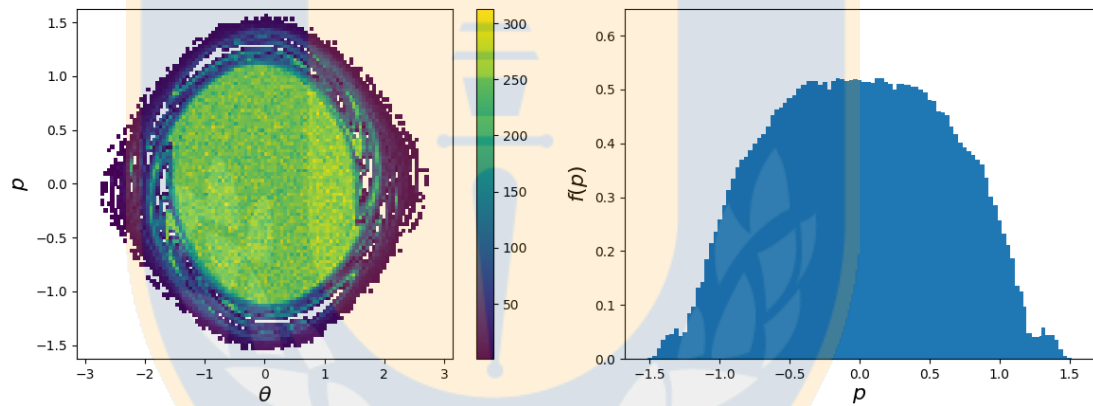
termina en la formación de una única estructura que aquí correspondería a la *core-halo*. Esto se argumenta debido a que se observó que conforme la energía en cada simulación disminuía, los dos clústeres contra-propagantes se juntaban cada vez más, para al final colapsar en una única estructura y coincide cuando se ha alcanzado un QSS ferromagnético del modelo HMF. La magnetización influye también en el límite de energía cuando se pasa de un caso paramagnético a uno ferromagnético, haciendo que en el espacio de condiciones iniciales del modelo HMF no se tenga una recta que separe las zonas asociadas a cada QSS, si no que se tenga una curva dependiente de M_0 y u_0 . La explicación aquí dada es aplicable a todos los tipos de QSS ferromagnéticos del modelo HMF, ya que todos tienen una estructura tipo *core-halo* en sus espacios de fase.

Por lo visto en esta sección la clasificación, estados cuasi-estacionarios ferromagnéticos con una *core-halo* es acertada, ya que proporciona toda la información de este tipo de estados, los cuales solo tienen una estructura tipo *core-halo* en sus espacios de fase y son estados ferromagnéticos porque la magnetización del sistema en toda la etapa estudiada es distinta de cero ya que permanece fluctuando entorno al valor de magnetización inicial (no muestra un cambio abrupto). Por último comentar que la curva (4.3.2) se encuentra dentro de la zona del espacio de condiciones iniciales que entregan estados cuasi-estacionarios ferromagnéticos con una *core-halo*, de modo es posible argumentar que esto último corrobora la presente clasificación. Todo esto se analiza más en detalle en la sección 4.4.

4.3.2. Estados cuasi-estacionarios ferromagnéticos con una *core-halo* con estructuras en el *halo*

Los estados ferromagnéticos aquí estudiados también tienen estructuras tipo *core-halo* en sus espacios de fase pero, a diferencia de los casos ya vistos sus *halo* poseen pequeñas estructuras como se pueden ver en las Figuras 4.3.5 y 4.3.6.

Cuando se estudia la evolución en el tiempo de la magnetización de los casos aquí presentados, la cual se puede ver en la Figura 4.3.4, se puede notar que son QSS ferromagnéticos y que su magnetización oscila entorno a un valor distinto de cero, esta oscilación tiene algún tipo de modulación que es posible observar como un

(a) Caso con $M_0 = 0,6$ y $u_0 = 0,6$.(b) Caso con $M_0 = 0,8$ y $u_0 = 0,4$.**Figura 4.3.4:** Evolución temporal de la magnetización M del sistema. Caso con $N = 1 \times 10^6$ partículas.

(a) densidad de espacio de fase.

(b) Distribución de velocidades.

Figura 4.3.5: Estado cuasi-estacionario ferromagnético. Caso en $t = 263,04$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,6$ y $u_0 = 0,6$.

cambio en las amplitud de la oscilación de M en determinados instantes donde esta aumenta para posteriormente disminuir. Es importante notar que aquí no necesariamente la magnetización del sistema debe oscilar en torno a M_0 , solo basta con ver, por ejemplo, el caso de la Figura 4.3.4a, donde el sistema es iniciado con $M_0 = 0,6$ pero cuando la evolución comienza la magnetización del sistema se relaja a un valor aproximado de $M_s = 0,64$, que si bien es cercano al valor inicial, no se observa el mismo comportamiento visto en los QSS ferromagnéticos con una *core-halo*. Otra particularidad de los estados aquí estudiados esta en los *halos* de las características estructuras *core-halo* de estos casos, los *halos* tienen

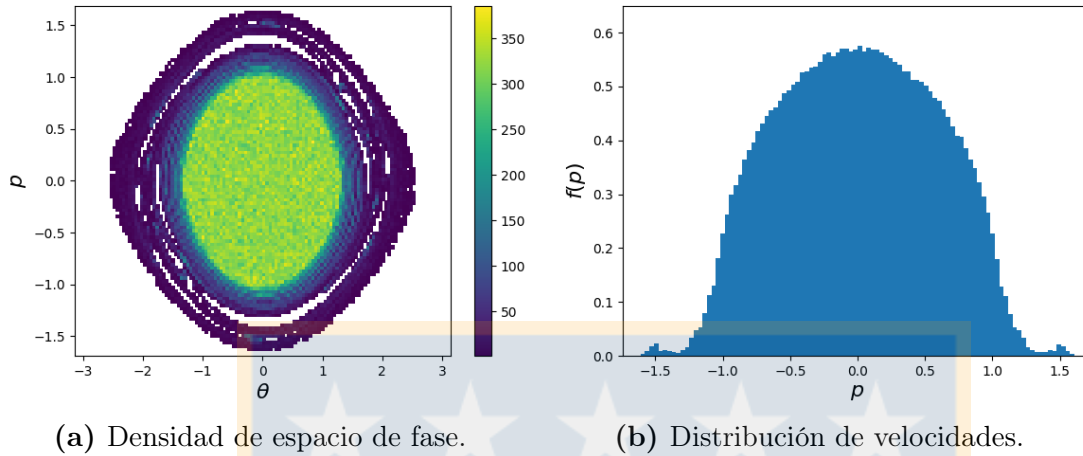


Figura 4.3.6: Estado cuasi-estacionario ferromagnético. Caso en $t = 263,04$ con $N = 1 \times 10^6$, $M_0 = 0,8$ y $u_0 = 0,4$.

agujeros lo cuales se pueden ver en las densidades de espacio de fase presentadas en las Figuras 4.3.5a y 4.3.6a. Estos agujeros se mueven a forma cíclica en torno al núcleo pero estando dentro del *halo* generando pequeñas zonas de mayor densidad producto de unos agujeros o *holes* que se presentan en el sistema. Estas estructuras, los agujeros, son detectados en las distribuciones de velocidades de estos casos (Figuras 4.3.5b y 4.3.6b), las cuales muestran un pequeño valle casi al final de las colas de la distribución, por lo que se puede argumentar que este tipo de estructuras son una característica importante en este tipo de casos debido a que es posible detectarlas con diferentes herramientas que usen para estudiar estos QSS. De esto último es que viene la clasificación de estados cuasi-estacionarios con una *core-halo* con estructuras en el *halo*, ya que esta es una particularidad que distingue a estos estados. Este tipo de casos los encontramos para determinadas combinaciones de condiciones iniciales y de hecho existen dos zonas separadas en el espacio de condiciones iniciales donde los encontramos. Las condiciones iniciales que generan este tipo de QSS forman dos zonas no contiguas en el espacio de condiciones iniciales lo cual se profundizan más en detalle en la sección 4.4.

Es importante comentar que no se tiene una justificación clara a la existencia de estos agujeros en el *halo*, pero podrían tener alguna relación con la modulación que presentan la oscilación de la magnetización en el tiempo de estos casos (ver Figura 4.3.4). Para determinar esta relación sería necesario un estudio de las

frecuencias asociadas a la magnetización, por ejemplo estudiar esta señal mediante un espectrograma, el cual sea capaz de determinar los tiempos en que se activen ciertas frecuencias que puedan existir en la oscilación de la magnetización, para posteriormente comparar estos tiempos con la aparición de los agujeros en el *halo*, pero este solo sería el primer paso para un estudio más complejo que tenga como objetivo relacionar algún fenómeno físico con la aparición de estas estructuras. Es por lo anterior, que es importante tener un diagrama que clasifique las diferentes condiciones iniciales en base a los diferentes QSS de este tipo de sistema, mediante un criterio que no solo se base en la magnetización del estado cuasi-estacionario, si no que busque ciertas recurrencias entre los diferentes tipos de estructuras que existen en los espacios de fase de los distintos caso y así poder tener una base de información para poder estudiar en mayor detalle los posibles fenómenos físicos que pueden existir en este tipo de sistemas.

4.4. Diagrama de clasificación de estados cuasi-estacionarios

Como ya observamos en las secciones anteriores de este capítulo, hemos visto que existen distintos tipos de QSS, los cuales no solo se diferencian en su magnetización, si no que es posible crear una subclasificación basándose en el tipo y número de estructuras que encontramos en sus espacios de fase. Además esta clasificación entrega información específica del mecanismo físico responsable de la formación de las estructuras del espacio de fase de cada caso estudiado. Es así que en la Figura 4.4.1 se tiene un diagrama que clasifica a los distintos tipos de QSS que se alcanzan para las distintas condiciones iniciales del modelo HMF cuando es iniciado con una distribución de partículas *Water-Bag*. La clasificación de estos estados es:

Estados cuasi-estacionarios paramagnéticos: Son estados que se caracterizan por tener una magnetización igual o muy cercana a cero, donde esta cantidad oscila entorno a este valor. Luego, al considerar el número y tipo de estructuras presentes el espacios de fase de cada caso tenemos la siguiente subclasificación:

- **Estados cuasi-estacionarios paramagnéticos con dos clústeres contra-propagantes:** Estados que muestran dos grandes estructuras, clústeres, los cuales se mueven a lo largo del espacio de fase en direcciones

opuestas debido a que son formados por la interacción de las partículas del sistema con dos ondas contra-propagantes. Dependiendo de las condiciones iniciales estos dos clústeres se separan o se juntan. Se debe notar la importancia de estudiar este tipo de estados para las distintas combinaciones de condiciones iniciales, ya que en trabajos como el [Antoniazzi et al. \(2007\)](#) mostraron la existencia de estos estados para una energía fija igual a $u_0 = 0,69$ y argumentaron que solo se encontraban en el rango $0 < M_0 \leq 0,897$ ya que para mayor magnetización inicial estos dos clústeres tendrían fusionarse, pero como se puede ver en el diagrama de la Figura 4.4.1 si también consideramos valores distintos de u_0 es posible encontrar estos estados para un rango de magnetizaciones iniciales aún mayor. Esto último es debido a que si se considera una energía inicial mayor, esto hace que las dos zonas de resonancias de las ondas contra-propagantes que crean los dos clústeres, se separen, de modo que, si bien se tienen valores de magnetizaciones iniciales grande, lo cual según observaciones numéricas debería hacer que los clústeres se junten, no ocurre debido a u_0 tiene un valor superior a $u_0 = 0,69$ evitando la fusión de los clústeres. Por otro lado se comentó que dentro de este tipo de QSS existen casos donde se forman pequeñas estructuras (clústeres) entre los dos clústeres contra-propagantes principales que no son recurrentes en el sistema, es decir no están presentes durante todo el tiempo de vida del QSS, si no que logran ser distinguibles en determinados instantes sin relación alguna, y tampoco se puede afirmar que vuelvan a surgir si se repiten las simulaciones con las mismas condiciones iniciales, pero al ser un caso interesante para el cual se necesita un estudio más en detalle de la dinámica microscópica del modelo HMF, son igualmente reportados en esta clasificación la cual los incluye dentro de los QSS paramagnéticos con dos clústeres contra-propagantes. Los QSS aquí comentados son alcanzados para las condiciones iniciales que pertenecen a las dos zonas amarillas no contiguas nombradas como P2C (paramagnético con dos clústeres) en la Figura 4.4.1 y se agrega una sub-zona P2C* para diferenciar a los QSS que además presentan estos pequeños clústeres no recurrentes en el sistema.

- **Estados cuasi-estacionarios paramagnéticos con tres clústeres:** Estados que tiene los dos clústeres contra-propagantes principales, pero también tiene un tercer clúster estacionario y más pequeño en el centro del

espacio de fase. La explicación de la presencia de este tercer clúster, según el presente trabajo, es debido a una tercera zona de resonancia en el centro del espacio de fase asociada a una onda estacionaria, la cual se justifica gracias a las otras dos ondas contra-propagantes que forman los clústeres principales que poseen el mismo tamaño, por lo cual las ondas tienen la misma amplitud de modo que se puede argumentar que la suma de estas (superposición lineal) genera una tercera onda con una velocidad de fase igual a cero, es decir onda estacionaria. Este tipo de QSS se alcanzan para determinadas condiciones iniciales ya que las zonas de resonancias asociadas a los dos clústeres principales se deben encontrar lo suficientemente separadas una de otra para así dejar una población de partículas no menor en el centro del espacio de fase las cuales interactuarán con la onda estacionaria formando el tercer clúster central. Se debe comentar que trabajos como el de [Bachelard et al. \(2008\)](#), que clasificó los distintos QSS asociadas a todas las condiciones iniciales del modelo HMF, clasificó estos casos como un estado con solo dos clústeres contra-propagantes. Las condiciones iniciales que presentan QSS paramagnéticos con tres clústeres son las que pertenecen a la zona roja nombrada P3C (paramagnético con tres clústeres) de la Figura 4.4.1.

- **Estados cuasi-estacionarios paramagnéticos con cinco clústeres:** En estos estados existen los dos clústeres contra-propagantes principales y el clúster estacionario en el centro, pero además existen otros dos pequeños clústeres que se encuentran entre uno de los dos clústeres principales y el estacionario, estos dos nuevos clústeres también son contra-propagantes. Según observaciones numéricas del presente estudio, este caso solo ocurre cuando se tienen energías iniciales altas, aproximadamente sobre $u_0 = 0,9$ de modo que los clústeres principales están muy separados uno del otro, y cuando comienza la evolución del sistema, se puede ver como corrientes de partículas en el espacio de fase se condensan formando estas estructuras, las cuales no son caso aislado, si no que existen para variadas combinaciones de condiciones iniciales, donde estas estructuras se pueden ver tanto en el espacio de fase como en las distribuciones de velocidades. Se puede argumentar que la existencia de estos dos nuevos clústeres (cuarto y quinto clúster) es producto de la interacción de las ondas contra-propagantes, asociadas a los dos clústeres principales, con la onda estacionaria asociada al

clúster central (superposición no lineal), por esto estos dos nuevos clústeres también son contra-propagantes. Estos QSS no han sido reportados de forma clara en la literatura y son clasificados como casos donde solo existen dos clústeres contra-propagantes en el sistema en el trabajo de [Bachelard et al. \(2008\)](#). Las condiciones iniciales que generan QSS paramagnéticos con cinco clústeres pertenecen a la zona celeste nombrada P5C (paramagnético con cinco clústeres) de la Figura 4.4.1.

Estados cuasi-estacionarios ferromagnéticos: En estos estados tenemos que la magnetización del sistema cuando se alcanza la etapa cuasi-estacionaria permanece oscilando en torno a un valor distinto de cero. Además se caracterizan por tener una estructura tipo *core-halo* en sus espacios de fase de la cual se puede obtener una subclasificación debido a la presencia de otras estructuras en el *halo*:

- **Estados cuasi-estacionarios ferromagnéticos con una *core-halo*:** Estados que presentan una distribución de partículas tipo *core-halo*, la cual se puede ver en sus espacios de fase, donde se tiene un núcleo denso de partículas en estados de energías más bajas, rodeado por un *halo* menos denso de partículas en estados energéticos más altos. La formación de este tipo de estructura ha sido explicado como resultado de un fenómeno conocido como amortiguamiento de Landau, donde existe transferencia de energía entre una onda de densidad con las partículas (fenómeno explicado en la sección 2.5.2). Esta onda de densidad se explica como resultado de la propagación de dos ondas contrapropagantes del sistema pero como los QSS ocurren en bajas energías estas ondas se colapsan en una sola. En estos casos al estudiar la magnetización del sistema en el tiempo, es posible notar que esta no sufre grandes cambios desde su valor inicial, mostrando pequeñas oscilaciones entorno a un valor igual o muy cercano al inicial, lo cual concuerda con los QSS pertenecientes a la curva teórica (4.3.2), que es representada como una línea segmentada en la Figura 4.4.1, la cual representa los QSS que tienen una magnetización fija y diferente de cero. Se debe notar que este tipo de QSS, según los resultados de esta investigación, se encuentran en la zona gris que rodea a esta curva en el espacio de condiciones iniciales (ver Figura 4.4.1), esto debido a que se realizó simulaciones para un determinado número de puntos de este espacio, por lo que no se tiene un caso continuo, pero se debe notar como esta curva

se queda en el centro de la zona gris asociada a estos QSS corroborando los resultados de esta clasificación.

La estructura *core-halo* de estos QSS presente en los espacios de fase de estos casos, no posee ningún tipo de estructuras en su interior en los casos clasificados como QSS ferromagnéticos con una *core-halo* y las condiciones iniciales que generan estos casos pertenecen a la zona gris de la Figura 4.4.1.

- **Estados cuasi-estacionarios ferromagnéticos con una *core-halo* con estructuras en el *halo*:** Estos estados se caracterizan por tener una magnetización distinta de cero la cual se aleja de su valor inicial mostrando una oscilación, la cual parece tener algún tipo de modulación, ya que en determinados periodos de tiempos la oscilación cambia su amplitud. También es posible observar en sus espacios de fase una estructura tipo *core-halo*, pero el *halo* de estos casos muestra la presencia de ciertas estructuras las cuales viajan de forma periódica en torno al núcleo. Estas estructuras del *halo* no son un caso aislado y son posibles de detectar en las distribuciones de velocidades de estos casos ya que en las colas de las distribuciones se observan pequeñas crestas y valles que concuerdan con las posiciones de estas estructuras. La explicación de estas estructuras por el momento no es posible de argumentar, ya que no existe ningún trabajo previo que haya reportado este tipo de casos, los cuales son solo clasificados como estados con una *core-halo*, pero sugerimos que la modulación de la oscilación de la magnetización de estos estados podrían tener alguna relación con la presencia de estas estructuras del *halo*, pero se necesita un trabajo más en detalle para probar este tipo de afirmaciones. Las condiciones iniciales que presentan QSS ferromagnéticos con una *core-halo* con estructuras en el *halo* pertenecen a las zonas verdes nombradas FCHE (ferromagnético con una *core-halo* con estructuras) de la Figura 4.4.1, donde es posible observar que estas conforman dos zonas no contiguas en el espacio de condiciones iniciales.

Existen diversos QSS del modelo HMF, lo cual es debido a las diferentes condiciones iniciales que tiene este tipo de sistema, de aquí la importancia de tener un diagrama como el de la Figura 4.4.1, clasifica los distintos casos, pero no solo lo haga mediante un criterio tan generalizado como el que se basa en la magnetización

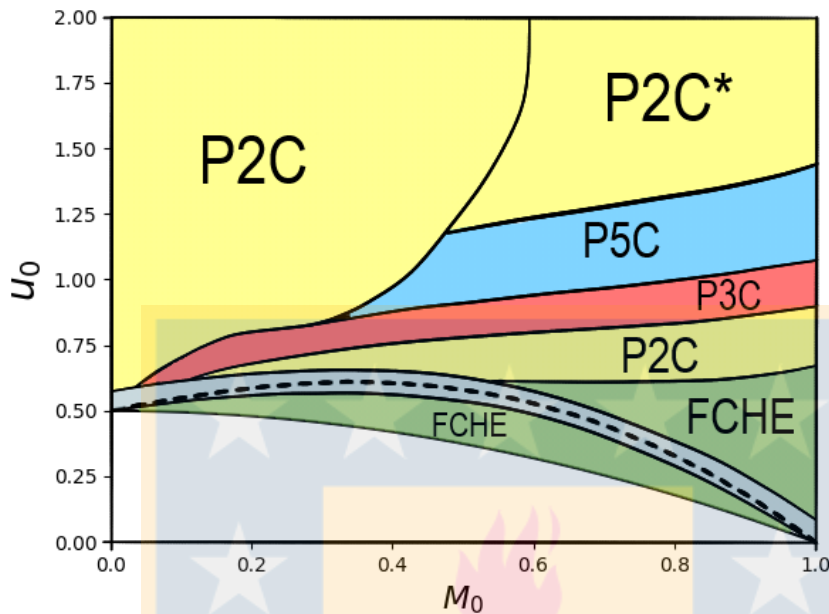


Figura 4.4.1: Espacio de condiciones iniciales. Diagrama de clasificación de los QSS asociados a distintas condiciones iniciales del modelo HMF. Las zonas de esta diagrama corresponde a la clasificación: zonas amarillas P2C con la subzona P2C* son los QSS paramagnéticos con dos clústeres contra-propagantes pero en P2C* se presentan pequeños clústeres no recurrentes, zona roja P3C son los QSS paramagnéticos con tres clústeres, zona celeste P5C son los QSS paramagnéticos con cinco clústeres, zona verde FCHE son los QSS ferromagnéticos con una *core-halo* con estructuras en el *halo* y la zona gris que contiene a la línea segmentada corresponde a los QSS ferromagnéticos con una *core-halo*. La línea segmentada corresponde a estados ferromagnéticos donde la magnetización del sistema permanece fija en su valor inicial.

del sistema en la etapa cuasi-estacionaria, si no con un criterio que pueda clasificar los QSS mediante características más específicas, como lo es el ver el número y tipo de estructuras que tienen los distintos espacios de fase de estos sistemas. En este diagrama se clasifican QSS que no han sido reportados hasta el momento como es el caso de los cinco clústeres lo cual recalca la importancia de tener este tipo de estudios. Por otro lado al revisar en términos generales esta clasificación es posible notar que en los distintos QSS existe la propagación de ondas de densidades en el sistema (ondas contra-propagantes) y que dependiendo de las condiciones iniciales estas ondas presentarán diferentes interacciones, por ejemplo onda-onda o partículas-ondas, lo cual termina en diferentes mecanismos físicos que son los responsables de la formación de diferentes estructuras en el espacio de fase de estos

estados. De este modo, cada clasificación trae información del mecanismo físico responsable de la formación de las estructuras que son características de cada QSS pertenecientes a una misma categoría de clasificación, lo que proporciona información importante para el estudio de la etapa cuasi-estacionaria de sistemas con interacciones de largo alcance como el modelo HMF. Finalmente es importante mencionar que esta clasificación es corroborado en la literatura mediante una curva en el espacio de condiciones iniciales (línea segmentada de la Figura 4.4.1) que es calculada de forma teórica por [Benetti et al. \(2012\)](#) y es asociada a determinados QSS que según la presente clasificación son QSS ferromagnéticos con una *core-halo*.



Capítulo 5

Conclusión

El presente estudio ha sido capaz de mostrar que además de la típica clasificación de los QSS en base a su magnetización postulada por [Bachelard et al. \(2008\)](#), podemos tener subclasificaciones de estos estados, las cuales se basan en el número y tipo de estructuras que se encuentran en las distribuciones de partículas de cada caso, las cuales se explican mediante mecanismos físicos concretos presentes en cada QSS clasificado.

Se ha mostrado que los sistemas modelados por campos medios, como el modelo HMF, poseen una variedad de distintos tipos de QSS los cuales son generados para las distintas combinaciones de condiciones iniciales. Esto último está en acuerdo con una de las principales características de estos sistemas, su fuerte dependencia a sus condiciones iniciales. Es más aún, se ha observado que dentro de los variados casos es posible encontrar características comunes que comparten determinados QSS, lo cual permite concluir que en los estados pertenecientes a una misma clasificación encontraremos el mismo mecanismo físico responsable de la formación de sus clústeres característicos. De lo anterior, se afirma que las ondas de densidad contrapropagantes presentes en el modelo HMF más sus diferentes condiciones iniciales son las responsables de los diferentes QSS encontrados en este sistema, ya que como se mostró para bajas energías, la velocidad de fase relativa entre estas ondas es muy pequeña lo cual termina en la formación de una única zona de resonancia que mediante el mecanismo de amortiguamiento de Landau se forma una estructura tipo *core-halo* en el espacio de fase de los

QSS ferromagnéticos. Mientras que para energías altas la superposición lineal de las ondas produce una onda estacionara la cual a su vez genera una nueva zona de resonancia en espacio de fase, formando así un nuevo clúster estacionario que se suma a los dos clústeres contrapropagantes principales reportados por (Antoniuzzi et al., 2007) para determinados QSS paramagnéticos. Para energías aún mayor la superposición no lineal de estas ondas (ondas contrapropagantes y onda estacionara) agregan dos zonas de resonancias extras al espacio de fase generando así el caso de los cinco clústeres en los QSS paramagnéticos. Por todo lo anterior, se debe destacar que la clasificación de estos QSS solo en base a su magnetización es muy general, haciendo que muchos casos sean completamente ignorados haciendo que el estudio de la etapa cuasi-estacionara en el modelo HMF sea más complejo debido a la perdida de información que esto genera.

La clasificación aquí mostrada además de presentar QSS no reportados hasta el momento en la literatura, también posee una parte corroborada por esta, como es el caso de los QSS con una *core-halo* marcada que son alcanzados para condiciones iniciales que calzan con una curva teórica en el espacio de condiciones iniciales del modelo HMF calculada por Benetti et al. (2012). Por lo anterior, tener este tipo de investigaciones en el modelo HMF, es decir tener un diagrama de clasificación que presenta características específicas de los variados tipos de QSS, fomenta el estudio de este tipo de sistemas en su etapa cuasi-estacionara enfocándose en la dinámica que posee cada estado, ya que como se mostró, es posible explicar estos casos mediante mecanismos físicos concretos que ocurren en el sistema. Es así que futuros estudios relacionados con este tema deberían enfatizar en la búsqueda de relaciones entre los distintos QSS aquí clasificados, y estados peculiares pertenecientes a diferentes sistema que posean una caracterización completa de su evolución, vinculada a mecanismos físicos similares a los aquí usados en la explicación de las características de los QSS. De este modo se ayudaría a estudios que buscan explicar la etapa cuasi-estacionara tan característica de sistemas con interacciones de largo alcance como el modelo HMF, y que resulta, hasta el momento, una tarea compleja de realizar.

Bibliografía

- Antoni, M. and Ruffo, S. (1995). Clustering and relaxation in hamiltonian long-range dynamics. *Phys. Rev. E*, 52:2361–2374.
- Antoniazzi, A., Fanelli, D., Barré, J., Chavanis, P.-H., Dauxois, T., and Ruffo, S. (2007). Maximum entropy principle explains quasistationary states in systems with long-range interactions: The example of the hamiltonian mean-field model. *Phys. Rev. E*, 75:011112.
- Bachelard, R., Chandre, C., Fanelli, D., Leoncini, X., and Ruffo, S. (2008). Abundance of regular orbits and nonequilibrium phase transitions in the thermodynamic limit for long-range systems. *Phys. Rev. Lett.*, 101:260603.
- Barré, J. and Yamaguchi, Y. Y. (2009). Small traveling clusters in attractive and repulsive hamiltonian mean-field models. *Phys. Rev. E*, 79:036208.
- Barré, J., Bouchet, F., Dauxois, T., Ruffo, S., and Yamaguchi, Y. Y. (2006). The vlasov equation and the hamiltonian mean-field model. *Physica A*, 365:177–183.
- Benetti, F. P. d. C., Teles, T. N., Pakter, R., and Levin, Y. (2012). Ergodicity breaking and parametric resonances in systems with long-range interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 108:140601.
- Borgonoviand, F., Celardo, G. L., Maianti, M., and Pedersoli, E. (2004). Broken ergodicity in classically chaotic spin systems. *J. Stat. Phys.*, 116:1435.
- Bouchet, F. and Barré, J. (2005). *J. Stat. Phys.*, 118:1073.
- Bouchet, F. and Dauxois, T. (2005). Prediction of anomalous diffusion and algebraic relaxations for long-range interacting systems, using classical statistical mechanics. *Phys. Rev. E*, 72:045103.
- Campa, A. and Chavanis, P.-H. (2017). The quasilinear theory in the approach of long-range systems to quasi-stationary states. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2017(5):053202.
- Campa, A., Dauxois, T., and Ruffo, S. (2009). *Phys. Rep.*, 480:57.
- Chandrasekhar, S. (1942). *Principles of Stellar Dynamics, Astrophysical Monographs, Dover Publications*.
- Chavanis, P. H. (2006). *Int. J. Mod. Phys. B*, 20:3113.

- Chen, C. and Davidson, R. C. (1994). Nonlinear properties of the kapchinskij-vladimirskij equilibrium and envelope equation for an intense charged-particle beam in a periodic focusing field. *Phys. Rev. E*, 49:5679.
- Dauxois, T., Ruffo, S., Arimondo, E., and Wilkens(Eds.), M. (2002). *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long Range Interactions*, in: *Lecture Notes in Physics*, Springer, 602.
- de Buyl, P., Mukamel, D., and Ruffo, S. (2011). Self-consistent inhomogeneous steady states in hamiltonian mean-field dynamics. *Phys. Rev. E*, 84:061151.
- De Nigris, S. and Leoncini, X. (2015). Crafting networks to achieve, or not achieve, chaotic states. *Phys. Rev. E*, 91:042809.
- Fisher, M. E. (1964). The free energy of a macroscopic system. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17(5):377–410.
- Kac, M. (1959). On the partition function of a one-dimensional gas. *Phys. Fluids*, 2:8.
- Kaganovich, I. D., Davidson, R. C., Dorf, M. A., Startsev, E. A., Sefkow, A. B., Lee, E. P., and Friedman, A. (2010). Physics of neutralization of intense high-energy ion beam pulses by electrons. *Phys. Plasmas*, 17:056703.
- Konishi, E. (2016). Core-halo quasi-stationary states in the hamiltonian mean-field model. *International Journal of Modern Physics B*, 30(12):1630007.
- Landau, L. (1946). *J. Phys. USSR*, 10:25.
- Latora, V., Rapisarda, A., and Tsallis, C. (2001). Non-gaussian equilibrium in a long-range hamiltonian system. *Phys. Rev. E*, 64:056134.
- Levin, Y., Pakter, R., and Rizzato, F. B. (2008a). Collisionless relaxation in gravitational systems: From violent relaxation to gravothermal collapse. *Phys. Rev. E*, 78:021130.
- Levin, Y., Pakter, R., Rizzato, F. B., Teles, T. N., and Benetti, F. P. (2014). Nonequilibrium statistical mechanics of systems with long-range interactions. *Phys. Rep.*, 535:1 – 60.
- Levin, Y., Pakter, R., and Teles, T. N. (2008b). Collisionless relaxation in non-neutral plasmas. *Phys. Rev. Lett.*, 100:040604.
- Lynden-Bell, D. (1967). *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 136:101.
- Lynden-Bell, D. (1999). *Physica A*, 263:293.
- Martelloni, G., Martelloni, G., de Buyl, P., and Fanelli, D. (2016). Generalized maximum entropy approach to quasistationary states in long-range systems. *Phys. Rev. E*, 93:022107.
- O’Dell, D., Giovanazzi, S., Kurizki, G., and Akulin, V. M. (2000). Bose-einstein

- condensates with $1/r$ interatomic attraction: Electromagnetically induced “gravity”. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5687.
- Padmanabhan, T. (1990). *Phys. Rep.*, 188:285.
- Pakter, R. and Levin, Y. (2011). Core-halo distribution in the hamiltonian mean-field model. *Phys. Rev. Lett.*, 106:200603.
- Pluchino, A., Latora, V., and Rapisarda, A. (2004a). Dynamical anomalies and the role of initial conditions in the hmf model. *Physica A*, 338:60 – 67.
- Pluchino, A., Latora, V., and Rapisarda, A. (2004b). Dynamical anomalies and the role of initial conditions in the hmf model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 338(1):60–67.
- Pluchino, A., Latora, V., and Rapisarda, A. (2004c). Metastable states, anomalous distributions and correlations in the hmf model. *Physica D*, 193:315 – 328.
- Pluchino, A., Rapisarda, A., and Tsallis, C. (2007). Nonergodicity and central-limit behavior for long-range hamiltonians. *EPL*, 80(2):26002.
- Rocha Filho, T. M., Amato, M. A., and Figueiredo, A. (2012). Nonequilibrium phase transitions and violent relaxation in the hamiltonian mean-field model. *Phys. Rev. E*, 85:062103.
- Ruelle, D. (1970). Superstable interactions in classical statistical mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 18(2):127–159.
- Teles, T. N., Levin, Y., Pakter, R., and Rizzato, F. B. (2010). Statistical mechanics of unbound two-dimensional self-gravitating systems. *J. Stat. Mech.*, 2010:P05007.
- Tsallis, C. (1988). Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *J. Stat. Phys.*, 52:479.
- Tsuchiya, T., Konishi, T., and Gouda, N. (1994). Quasiequilibria in one-dimensional self-gravitating many-body systems. *Phys. Rev. E*, 50:2607.
- Yamaguchi, Y. Y. (2011). Construction of traveling clusters in the hamiltonian mean-field model by nonequilibrium statistical mechanics and bernstein-greene-kruskal waves. *Phys. Rev. E*, 84:016211.