

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS FÍSICAS



Teorías de Gauge Extendidas y Supergravedad

por

Sebastián Andrés Salgado Rebolledo

Tesis para optar al grado académico
de Doctor en Ciencias Físicas

CONCEPCIÓN - CHILE

DICIEMBRE 2016

Director de Tesis : Dr. Fernando Izaurieta Aranda

Comisión : Dr. Fernando Izaurieta Aranda

Dr. Mauricio Cataldo Monsalves

Dr. Julio Oliva Zapata



Agradecimientos

Para empezar, quiero agradecer a toda mi familia por su apoyo incondicional en todas las etapas de mi vida.

También deseo agradecer a mis compañeros y amigos de la Universidad de Concepción, con los cuales compartí gratos y entretenidos momentos, especialmente a Alexander Smith, Ariana Muñoz, Diego Molina, Esteban Fernández, Evelyn Rodríguez, Fabián Orellana, Fabrizio Cordonier, Fabrizio Bugini, Gustavo Rubio, Henry Navarro, Luis Avilés, Marcelo Calderón, Natalia Astudillo, Nicolás González, Pablo Rodríguez, Patrick Concha y Sebastián Infante.

Quisiera agradecer a todos los Profesores que me han ayudado a lo largo de los años, tanto en la Universidad de Concepción como en otras instituciones. En particular, a los Profesores Claudio Faúndez, Hernán Astudillo, Igor Kondrashuk, Joaquín Díaz de Valdés, José Aguirre, Juan Crisóstomo, Julio Oliva, Mauricio Cataldo, Myrna Sandoval, Paulraj Manidurai, Renato Saavedra y Ricardo Caroca.

Quiero además agradecer, el haber tenido la oportunidad de trabajar con mi Director de Tesis, Prof. Fernando Izaurieta Aranda, quien no sólo es un excelente Profesor e investigador, sino también una gran persona y un muy buen amigo. Le agradezco en especial, por haber tenido siempre la mejor disposición para guiarme, tanto en mis estudios de Magíster como en los de Doctorado. Su dedicación a la ciencia y su ingenio, han sido y serán siempre una referencia y un ejemplo en el desarrollo de mis investigaciones.

Debo destacar la excelente labor del Profesor Jaime Araneda como Director del Programa de Doctorado en Ciencias Físicas, quien siempre se mostró dispuesto a ayudarme en los muchos y diferentes problemas burocráticos que tuve que sortear.

Agradezco también al Profesor Luis Roa, Director del Departamento de Física,

por haberme ayudado a llevar a cabo mis objetivos en numerosas oportunidades.

También agradezco a los amigos y colegas que, a lo largo de este periodo, he conocido y con quienes he compartido interesantes conversaciones, pues ellos han sido un pilar fundamental en mi desarrollo. En particular a Felipe González, Gonzalo Del Rio, Jorge Mattheos, Marcela Muñoz, Mariana Soto y Vanessa Cartes.

Agradezco a los Profesores Agustí Reventós y José Izquierdo por su amable ayuda y hospitalidad en la Universidad Autónoma de Barcelona y en la Universidad de Valladolid respectivamente.

Mis visitas a la Universidad de Columbia y a la Universidad de Roma, han sido posibles gracias al apoyo financiero de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica CONICYT a través de la Beca Asistencia a Eventos y Cursos Cortos para Estudiantes de Doctorado N° 81150450 y el Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico FONDECYT, proyectos N° 1130653, 1150719.

Mi dedicación exclusiva al Programa de Doctorado de la Universidad de Concepción ha sido gracias a la Beca de de Doctorado Nacional de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica CONICYT-PCHA, Folio 21140490, periodo 2014-2018.



Resumen

Esta tesis trata sobre la construcción y el análisis de las teorías de gauge de alto orden y su relación con las álgebras diferenciales libres. En este contexto, se analiza el trabajo realizado recientemente por Antoniadis y Savvidy y se plantea un formalismo alternativo. Posteriormente analizaremos algunas aplicaciones. Algunos resultados interesantes en este contexto son

1. La proposición de un nuevo formalismo que da lugar a la construcción de nuevos invariantes topológicos.
2. El estudio de generalizaciones al teorema de Chern–Weil que incluyen formas de orden mayor.
3. La generalización del método de separación en subespacios para incluir formas de orden mayor.
4. El estudio de la relación que existe entre las teorías de alto orden y algunas teorías de gravedad y supergravedad ya conocidas.

Para llevar a cabo el mencionado formalismo, será necesario introducir nuevas herramientas matemáticas a las que llamaremos arreglos de formas diferenciales o formas diferenciales libres. Estas cantidades se componen de múltiples formas diferenciales y permiten construir álgebras diferenciales libres desde un nuevo punto de vista. Utilizando estas estructuras se lleva a cabo la construcción un análogo al invariante de Chern–Pontryagin, cuyas componentes son equivalentes a los invariantes presentados en las teorías de gauge de alto orden de Antoniadis y Savvidy. Por último, por medio del uso de un mecanismo conocido como el método de D’Auria–Fre,

encontramos una relación entre una particular clase de teoría de gauge extendida y la teoría de la supergravedad estándar en cuatro dimensiones.



Abstract

This thesis deals with the construction and analysis of the so called high order gauge theories and their relation with free differential algebras. In this context, we analyze the recent work done by Antoniadis and Savvidy. Then we propose an alternative way to make possible the inclusion of higher rank forms and study some applications. Some interesting results related with this are

1. The proposition of a new formalism that gives rise to the construction of new topological invariants.
2. The study of generalizations for Chern–Weil theorem that include higher rank forms.
3. The generalization of the separation subspaces method in order to include higher rank forms.
4. The study of the link between higher gauge theories and some theories for gravity and supergravity.

To carry out the formalism mentioned above, it will be necessary to introduce new mathematical tools which we will call arrays of differential forms or free differential forms. These quantities are composed with many differential forms and allow us to construct some free differential algebras with a different point of view. Using these structures, the construction of an analogous quantity for the of Chern–Pontryagin density whose components are equivalent to the invariants presented in higher gauge theories developed by Antoniadis and Savvidy is carried out. Finally, using a mechanism known as D’Auria–Fre method we find a relation between a particular higher rank gauge theory and four dimensional standard supergravity.

Tabla de Contenido

Agradecimientos	III
Resumen	v
Abstract	vii
1. Introducción	1
2. Teorías de gauge y formas Chern–Simons	6
2.0.1. Ecuaciones del movimiento	9
2.1. Formas Chern–Simons y de transgresión	10
2.1.1. Lagrangiano a partir de formas de transgresión	12
2.2. Fórmula extendida de homotopía de Cartan	14
2.2.1. Operadores de homotopía	15
2.2.2. Fórmula de homotopía extendida	16
2.3. Problemas de las teorías Chern–Simons para la gravedad	20
3. Modificacione a las teorías de gauge	26
3.1. Teorías de gauge tensoriales	26
3.1.1. Transformaciones de gauge	27
3.2. Formas Chern–Simons Extendidas	29
3.2.1. Formas Chern–Simons en $(2n + 2)$ dimensiones	30
3.2.2. Formas Chern–Simons en $(2n + 3)$ dimensiones	32
3.2.3. Formas Chern–Simons en $(2n + 5)$ dimensiones	33
3.2.4. Formas Chern–Simons en $(2n + 7)$ dimensiones	35

3.3.	Álgebras diferenciales libres	36
3.3.1.	Ecuacion de Maurer–Cartan	36
3.3.2.	El concepto de álgebra diferencial libre	38
3.3.3.	Formalismo de D’Auria–Fre	40
3.3.4.	Potenciales, curvatura e identidades de Bianchi	41
4.	Teorías de gauge y arreglos diferenciales	45
4.1.	Preliminares	45
4.2.	Exponenciación	52
4.3.	Elemento inverso	54
4.4.	Asociatividad	55
4.5.	Regla de Leibniz	56
4.6.	Transformaciones de gauge	57
4.7.	Construcción de invariantes	59
5.	Formas de transgresión y ecuaciones triangulares	67
5.1.	Invariante $(2n + 3)$ -dimensional	67
5.1.1.	Teorema de Chern–Weil para $\Gamma^{(2n+3)}$	68
5.1.2.	Fórmula de homotopía para $\Gamma^{(2n+3)}$	70
5.2.	Invariante $(2n + 6)$ -dimensional	73
5.2.1.	Teorema de Chern–Weil para $\Xi^{(2n+6)}$	73
5.2.2.	Fórmula de homotopía para $\Xi^{(2n+6)}$	76
5.3.	Invariante $(2n + 8)$ -dimensional	80
5.3.1.	Teorema de Chern–Weil para $\Upsilon^{(2n+8)}$	80
5.3.2.	Fórmula de homotopía para $\Upsilon^{(2n+8)}$	83
6.	Formas CSAS en (super)gravedad	87
6.1.	Gravedad CSAS en 4-dimensiones	87
6.1.1.	Introducción de 0-formas	89
6.1.2.	Caso AdS	90
6.2.	Acción CSAS y superálgebra de Maxwell	92
7.	Conclusiones y proyecciones	99

A. Fórmula extendida de homotopía de Cartan	101
B. Electrodinámica con p-formas	103
C. Transformaciones de gauge e identidades de Bianchi	110
C.0.1. Transformaciones de gauge	110
C.0.2. Intensidades de Campo	111
C.0.3. Transformaciones de gauge de las intensidades de campo . . .	111
C.0.4. Identidades de Bianchi	112
D. Identidades para arreglos diferenciales	113
D.0.1. Intensidades de Campo	113
D.0.2. Transformaciones de los campos de gauge	114
D.0.3. Transformaciones de las formas de curvatura	114
Bibliografía	115



Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, las interacciones electromagnética, nuclear débil y nuclear fuerte han sido exitosamente descritas por medio de la electrodinámica cuántica, la cromodinámica cuántica, la teoría electrodébil y la teoría gran unificada. El conjunto de estas teorías constituyen el modelo estándar, el cual es basado en el grupo $U(1) \times SU(2) \times SU(3) \sim SU(5)$. El principal logro de los últimos años fue el descubrimiento del bosón de Higgs, predicho en la década de 1960 por François Englert, Peter Higgs y Tom Kibble. Este resultado fue basado en fundamentos teóricos provenientes de los patrones de simetría asociados con el subgrupo $U(1) \times SU(2)$ del grupo del modelo estándar.

Estas construcciones, forman parte de la teoría cuántica de campos, la cual es una de las piedras angulares de la física teórica actual. Hasta el momento, esta teoría ha sido experimentalmente comprobada con una enorme precisión. Sin embargo, las razones del porque las reglas de dicha teoría cuántica funcionan en la forma observada, sigue siendo un tema de investigación abierto.

Por otro lado, la teoría de la gravedad describe perfectamente los fenómenos gravitacionales macroscópicos, esto es, desde la escala humana a escalas cosmológicas. Einstein mostró que la teoría de la gravedad es una teoría de la geometría del espacio-tiempo, sin embargo, no existe una teoría para gravedad a escalas microscópicas.

Existen diferentes opiniones acerca de este punto. Una postura considera que la teoría de cuerdas y la gravedad cuántica de lazos, no son satisfactorias a la hora de proporcionar modelos de gravedad cuántica. Otras posturas afirman que la no

existencia de una teoría cuántica para la gravedad no supone un problema debido a que los efectos gravitacionales son despreciables en esas escalas cuando se realizan experimentos con energías accesibles en la Tierra. Además, estos requieren distancias extremadamente cortas, del orden de la longitud de Planck (10^{-33} cm), o equivalentemente, energías extremadamente altas.

En el año 1900, David Hilbert intentó formular la física en un riguroso contexto matemático, con la intención de describir todos los fenómenos naturales. En dicha época, resultaba razonable pensar esto, sin embargo, el experimento de Michelson–Morley y la catástrofe ultravioleta de la radiación de cuerpo negro no podían ser explicados utilizando las teorías clásicas. Esto dio lugar al desarrollo de nuevas y revolucionarias teorías ya que el experimento de Michelson–Morley condujo a la teoría de la relatividad especial y la catástrofe ultravioleta llevó al desarrollo de la mecánica cuántica.

Por otro lado, puesto que la teoría de la relatividad general es la evolución lógica de la relatividad especial, se tiene que la ausencia de una teoría cuántica para la gravedad, en la actualidad supone un problema semejante al que se tenía a comienzos del siglo XX. Una buena opción para abordar este problema es estudiar las posibles simetrías de una aún hipotética teoría cuántica de la gravedad.

Una importante propiedad de los modelos de teoría de campos es que, a veces, ellos son basados en simetrías que no pueden ser detectadas a escala humana pero que se manifiestan a escalas de energías suficientemente altas, o equivalentemente, en escalas de distancias suficientemente pequeñas. Un ejemplo de esta situación viene dado por la simetría bajo el grupo $U(1) \times SU(2)$ que presenta la teoría electrodébil, la cual se hace presente a energías mayores de la masa del bosón de Higgs. En analogía, es posible que una teoría para gravedad cuántica exhiba nuevas simetrías que no son visibles a energías menores que la escala de Planck.

Los logros de las mencionadas teorías que describen las interacciones fundamentales, son basados en diferentes principios de simetría. Por ejemplo, la teoría de la relatividad general es basada en el principio de equivalencia y una importante extensión de esta teoría, la supergravedad, resulta de incluir supersimetría en la formulación de Einstein.

Por esta razón, resulta natural preguntarse que tipo de simetrías se pueden es-

perar en fenómenos que existen a energías mayores a la de la escala de Planck. La búsqueda de una respuesta a esta interrogante ha conducido en el último tiempos a postular que dichas simetrías pueden estar relacionadas con estructuras matemáticas denominadas álgebras diferenciales libres y algebroides. Las teorías que parecen presentar simetrías descritas por estas estructuras algebraicas son conocidas como teorías de gauge de alto orden (higher gauge theories) o teorías de gauge extendidas. Lo interesante de estas teorías, es que los primeros resultados parecen indicar que se relacionan la teoría de cuerdas y con teorías de supergravedad en altas dimensiones. Sin embargo, una importante diferencia entre teoría de cuerdas y teorías de gauge de alto orden, es que la teoría de cuerdas contiene estados de alto espín masivos, mientras que las teorías de gauge de alto orden en principio, describirían únicamente estados de alto espín sin masa. Esta propiedad de las teorías de gauge de alto orden indica que ellas describen energías que son grandes, incluso comparadas con la escala de Planck.

En el último tiempo ha sido formulada una particular teoría de gauge de alto orden, o teoría de gauge extendida, la cual incluye campos de gauge descritos por p -formas diferenciales [1–5]. La idea de extender los campos de gauge a tensores de rango más alto fue usada en Ref. [6] para construir a de invariantes topológicos en cinco dimensiones que conducen a una densidad invariante de gauge e independiente de la métrica, la cual puede ser entendida como el análogo cuatridimensional de la densidad de Chern–Simons. Estos resultados fueron generalizados en Refs. [7–9] al caso de mayores dimensiones, encontrando polinomios en las formas de curvatura, análogos a las densidades de Chern–Pontryagin, las cuales conducen a diferentes tipos de invariantes de gauge análogos a las formas Chern–Simons.

En efecto, La primera serie de $(2n + 3)$ -formas exactas viene dadas por $\Gamma^{(2n+3)} = \langle F^n, H \rangle = d\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+2)}$, donde $H = dB + [A, B]$ es una 3-forma intensidad de campo, definida a partir de una 2-forma campo de gauge B . La segunda serie de formas invariantes $(2n + 4)$ -dimensionales es definida análogamente, viene dada por $\Gamma^{(2n+4)} = \langle F^n, I \rangle$ y es definida en términos de la 4-forma $I = dC + [A, C]$ que juega el rol de intensidad de campo para la 3-forma campo de gauge C . Repitiendo este proceso, es posible definir invariantes topológicos en $2n + 6$ y $2n + 8$ dimensiones,

dados por

$$\begin{aligned}\Xi^{(2n+6)} &= \langle F^n, K \rangle + n \langle F^{n-1}, H_4^2 \rangle, \\ \Upsilon^{(2n+8)} &= \langle F^n, M \rangle + 3n \langle F^{n-1}, I, K \rangle + n(n-1) \langle F^{n-2}, H_4^3 \rangle,\end{aligned}$$

siendo K y M una 6-forma y una 8-forma que juegan el rol de curvaturas para campos de gauge extendidos, descritos por formas diferenciales de orden aún mayor. Todas las formas $\Gamma^{(2n+3)}$, $\Gamma^{(2n+4)}$, $\Xi^{(2n+6)}$ y $\Upsilon^{(2n+8)}$, son análogas a los invariantes de Pontryagin–Chern de las usuales teorías de gauge, en el sentido que ellas son invariantes de gauge, cerradas e independiente de la métrica.

En Refs. [7–9] fueron encontradas expresiones explícitas para formas Chern–Simons asociadas a estos invariantes topológicos, las cuales, en analogía a las formas Chern–Simons usuales, son libres de background, cuasi-invariantes de gauge y definidas sólo localmente.

El principal objetivo de esta tesis es describir las simetrías que presentan estos invariantes, por medio de la introducción de ciertas estructuras, a las que hemos denominado arreglos diferenciales.

La presente tesis está organizada como sigue: en el Capítulo 2 se considera una revisión de las teorías de Yang–Mills y de las formas de Chern–Simons. Se llevará a cabo la revisión del teorema de Chern–Weil, de las formas de transgresión, de la fórmula extendida de homotopía de Cartan, y de algunos aspectos de las teorías de Chern–Simons para gravedad y supergravedad.

En el Capítulo 3 se realiza una revisión sobre las teorías de gauge extendidas desarrolladas en Refs. [1–5, 7–9], y sobre el concepto de álgebra diferencial libre.

El Capítulo 4 contiene los resultados principales de la tesis. Esto consiste en demostrar que, utilizando álgebras diferenciales libres, es posible formular una teoría de gauge no abeliana con campos de gauge descritos por p -formas. Además, se muestra que dichas álgebras describen las simetrías que presentan los invariantes de Antoniadis y Savvidy.

En el Capítulo 5, se estudian las generalizaciones del teorema de Chern–Weil para los invariantes introducidos en el Capítulo 2. Para esto se definen nuevas formas de transgresión y se lleva a cabo la generalización del método de separación en subespacios basado en la fórmula extendida de homotopía de Cartan.

En el Capítulo 6, se consideran algunas aplicaciones, en las que las formas de Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy describen lagrangianos de acciones para gravedad y supergravedad. También será estudiada la relación que existe entre dichas teorías Chern–Simons y la teoría de la (super)gravedad estándar en cuatro dimensiones.

Finalmente, en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones generales, incluyendo un resumen de los principales resultados de la presente tesis y posibles generalizaciones y aplicaciones para los resultados obtenidos.

Se incluyen cuatro apéndices. El Apéndice A, describe brevemente la electrodinámica con p -formas desarrollada en la década de 1980 por Claudio Bunster [10]. En el Apéndice B, se revisa la fórmula extendida de homotopía de Cartan. El Apéndice C se presentan las transformaciones de gauge y ciertas identidades de los campos de gauge extendidos, encontradas en Refs. [7–9]. Finalmente, en el Apéndice D se incluye información equivalente a la del Apéndice C, pero relativa al caso de arreglos diferenciales.



Capítulo 2

Teorías de gauge y formas Chern–Simons

Con el objetivo de describir las interacciones nucleares fuertes, Yang y Mills propusieron una generalización del principio de invariancia de gauge local, pasando desde el grupo $U(1)$ al grupo $SU(2)$. Esta generalización puede ser llevada más allá de manera de incluir grupos especiales unitarios de dimensión arbitraria $SU(N)$. De esta forma, la función de onda fermiónica viene dada por un multiplete N -dimensional, donde cada elemento es un campo de Dirac de 4 componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}.$$

Recordemos que el lagrangiano fermiónico libre, $L_{1/2} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$, se mantiene invariante bajo la transformación de gauge global

$$\psi \rightarrow \psi' = U(\xi)\psi,$$

donde $U(\xi) = e^{ig\xi}$ es un elemento del grupo $SU(N)$, y donde $\xi = \xi^a T_a$ siendo ξ^a parámetros arbitrarios constantes y $\{T_a\}$ los generadores del grupo de Lie que

satisfacen la siguiente álgebra,

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T^c, \quad (2.1)$$

y la identidad de Jacobi

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0.$$

La imposición de localidad exige que los parámetros pasen de ser constantes a ser funciones dependientes del espacio-tiempo y que la simetría siga siendo válida. Esto puede ser logrado por medio de la introducción de un número $\dim \text{SU}(N)$ de campos de gauge A^a . Notemos que la dimensión del grupo $\text{SU}(N)$ es $N^2 - 1$. Los campos A^a pueden ser usados como una conexión para el transporte paralelo de vectores al interior del espacio interno $(N^2 - 1)$ -dimensional de isospín. Las propiedades de transformación de los campos de gauge A^a son elegidas de manera que la derivada covariante de ψ

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - igA_\mu) \psi, \quad (2.2)$$

cambie en la misma forma que el campo ψ bajo una transformación de gauge, es decir,

$$D_\mu \psi \rightarrow (D_\mu \psi)' = U(\xi) (D_\mu \psi). \quad (2.3)$$

Para que esto sea posible, el campo A_μ debe transformar como

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1}. \quad (2.4)$$

Esto conduce a que el lagrangiano

$$L_{1/2} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi, \quad (2.5)$$

sea localmente invariante bajo las transformaciones del grupo.

Con el objeto de incluir la dinámica de los campos de gauge, es necesario añadir un tercer término al lagrangiano que contenga derivadas de dichos campos. Tomando en cuenta la ley de transformación de las derivadas covariantes, la manera natural de encontrar este término es calcular conmutador de la derivada covariante de un

multiplete. En efecto, es directo ver que

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = -ig F_{\mu\nu} \psi, \quad (2.6)$$

con

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu]. \quad (2.7)$$

El término $F_{\mu\nu}$ es llamado tensor de intensidad de campo y de las leyes de transformación (2.4) implican que cambia del siguiente modo bajo transformaciones de gauge

$$F'_{\mu\nu} = U(\xi) F_{\mu\nu} U^{-1}(\xi).$$

De aquí vemos que es posible encontrar un término invariante de gauge y cuadrático en las derivadas de A_μ a partir de la traza del producto de dos intensidades de campo. En efecto, tomando en cuenta la ciclicidad de la traza

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \text{Tr}(F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}) = F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}.$$

Así tenemos que el lagrangiano de Yang–Mills es dado por

$$\mathcal{L}_{YM} = i\bar{\psi}\partial\psi + g\bar{\psi}A\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Consideremos ahora algunas propiedades básicas del campo A_μ . Bajo una transformación de gauge infinitesimal, en la que el elemento del grupo puede escribirse como $U = e^{ig\xi} = 1 + ig\xi$, siendo 1 el elemento identidad, la ecuación (2.4) toma la forma

$$A'_\mu = A_\mu + ig(\xi A_\mu - A_\mu \xi) + \partial_\mu \xi,$$

de modo que la variación del campo de gauge es dada por

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \xi - ig[A_\mu, \xi], \quad (2.9)$$

o bien, por componentes,

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu \xi^a + g f_{bc}^a A_\mu^b \xi^c. \quad (2.10)$$

Este resultado conduce a que la siguiente ley de transformación infinitesimal para el tensor $F_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= (1 + ig\xi) F_{\mu\nu} (1 - ig\xi) \\ &= F_{\mu\nu} - ig [F_{\mu\nu}, \xi], \end{aligned} \quad (2.11)$$

de donde

$$\delta F_{\mu\nu} = -ig [F_{\mu\nu}, \xi], \quad (2.12)$$

o bien, por componentes

$$\delta F_{\mu\nu}^a = gf_{bc}^a F_{\mu\nu}^b \xi^c. \quad (2.13)$$

Veamos ahora que las transformaciones de gauge forman una estructura algebraica cerrada. En efecto, el conmutador entre dos transformaciones de gauge es dado por

$$[\delta_\eta, \delta_\xi] A_\mu = \partial_\mu [\eta, \xi] - ig [A_\mu, [\eta, \xi]], \quad (2.14)$$

y definiendo el parámetro $\psi = [\eta, \xi]$ podemos escribir

$$[\delta_\eta, \delta_\xi] A_\mu = -ig \delta_\psi A_\mu.$$

2.0.1. Ecuaciones del movimiento

Consideremos ahora el lagrangiano bosónico puro

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Las correspondientes ecuaciones del movimiento vienen dadas por las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^a} = 0, \quad (2.16)$$

las cuales en este caso toman la forma

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + gf_{bc}^a A^{b\mu} F_{\mu\nu}^c = 0, \quad (2.17)$$

o bien, en forma equivalente

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - ig [A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0. \quad (2.18)$$

2.1. Formas Chern–Simons y de transgresión

Las teorías de gauge de Yang–Mills son teorías de conexión. Esto quiere decir que su campo fundamental, es decir, el potencial de gauge, es una conexión. Estas teorías dependen directamente de la existencia de una variedad espacio-tiempo sin dinámica que tiene una métrica background fija, es decir, sin grados de libertad. En contraposición, en Relatividad General, la teoría que describe la cuarta interacción fundamental, la construcción difiere de las teorías que constituyen el modelo estándar en, a lo menos, dos puntos fundamentales:

1. La Relatividad General no es una teoría de gauge debido a que el campo fundamental no es una conexión, sino un tensor métrico. Aunque en Relatividad General existe una conexión, esta no es el campo fundamental ya que, dada una métrica, la conexión de Levi–Civita queda completamente determinada. El formalismo de Palatini es un intento por evitar este problema, sin embargo, no logra resolverlo.
2. En Relatividad General el espacio-tiempo tiene grados de libertad.

Por lo tanto, una teoría de gauge para el campo gravitacional requiere que

- El campo fundamental sea dado por una conexión.
- La acción no considere un espacio-tiempo background fijo y conduzca, en algún límite, a la acción de Einstein–Hilbert.

Un tipo acción para gravedad que satisface estas condiciones es dado por la acción de Chern–Simons, cuyo lagrangiano L_{CS}^{2n+1} es proporcional a una forma de Chern–Simons. Estas son formas diferenciales, que pueden ser obtenidas a partir del invariante topológico de Chern–Pontrjaguin

$$\mathcal{P}_{2n+2} = \langle F^{n+1} \rangle, \quad (2.19)$$

donde $\langle \cdots \rangle$ denota al operador traza simetrizada. Aquí, \mathcal{P}_{2n+2} corresponde a una $(2n+2)$ -forma diferencial que satisface la condición $d\mathcal{P}_{2n+2} = 0$. De acuerdo con el lema de Poincaré, localmente podemos escribir $\mathcal{P}_{2n+2} = d\mathcal{C}_{2n+1}$ donde \mathcal{C}_{2n+1} es una $(2n+1)$ -forma llamada forma de Chern–Simons. Es posible demostrar [11] que la forma de Chern–Simons satisface la condición $\delta_{\text{gauge}}\mathcal{C}_{2n+1} = d\Omega$, lo cual garantiza que si consideramos a la forma Chern–Simons como un lagrangiano sobre una variedad $2n+1$ dimensional, la correspondiente acción es invariante bajo transformaciones de gauge

$$\delta S_{CS} = \int_{\mathcal{M}_{2n+1}} \delta \mathcal{C}_{2n+1} = \int_{\mathcal{M}_{2n}} d\Omega. \quad (2.20)$$

Las formas de Chern–Simons son ‘libres de background’ e invariantes bajo transformaciones generales de coordenadas [11, 12]. A partir de (2.19) es posible probar que la $(2n+1)$ -forma de Chern–Simons es dada por,

$$\mathcal{C}_{2n+1} = (n+1) \int_0^1 dt \langle AF_t^n \rangle, \quad (2.21)$$

donde $F_t = tdA + t^2 A^2$. En particular, para $n = 1$ se encuentra que (2.19) toma la forma

$$\mathcal{P}_4 = d \left\langle AdA + \frac{2}{3} A^3 \right\rangle, \quad (2.22)$$

de modo que (2.21) puede escribirse como

$$S_{CS} = \int_{\mathcal{M}_3} \left\langle AdA + \frac{2}{3} A^3 \right\rangle. \quad (2.23)$$

Es importante notar que las formas Chern–Simons están definidas sólo localmente. Para verificar esta afirmación consideremos el siguiente teorema.

Teorema de Chern–Weil

Sea $\mathcal{P}_{2n+2} = \langle F^{n+1} \rangle$ el polinomio invariante de Chern–Pontrjaguin. Sean además A_0 y A_1 son dos 1-formas conexiones de gauge de un fibrado basado en una variedad \mathcal{M} $(2n+1)$ -dimensional, con F_0 y F_1 sus correspondientes 2-formas de curvatura. Entonces

1. $\langle F^{n+1} \rangle$ es una forma cerrada.

2. La diferencia $\langle F_1^{n+1} \rangle - \langle F_0^{n+1} \rangle$ es una forma exacta¹

$$\langle F_1^{n+1} \rangle - \langle F_0^{n+1} \rangle = dQ_{2n+1}(A_1, A_0), \quad (2.24)$$

donde

$$\begin{aligned} Q_{2n+1}(A_1, A_0) &= (n+1) \int_0^1 dt \langle \theta F_t^n \rangle, \\ \theta &= A_1 - A_0, \\ A_t &= A_0 + t \theta, \\ F_t &= dA_t + A_t A_t. \end{aligned}$$

La cantidad $Q_{2n+1}(A_1, A_0)$ es llamada $(2n+1)$ -forma transgresión. Es directo probar [11] que la forma de transgresión puede ser expresada en términos de formas de Chern–Simons para A_1 y A_0

$$Q_{2n+1}(A_1, A_0) = \mathcal{C}_{2n+1}(A_1) - \mathcal{C}_{2n+1}(A_0) + d\mathcal{B}_{2n}, \quad (2.25)$$

donde A_1 y A_0 están evaluadas sobre la misma álgebra de Lie y \mathcal{B}_{2n} es una $2n$ -forma por determinar.

2.1.1. Lagrangiano a partir de formas de transgresión

Los lagrangianos de Chern–Simons son definidos como

$$L_{\text{CS}}^{2n+1} = k\mathcal{C}_{2n+1}(A) = k(n+1) \int_0^1 dt \langle AF_t^n \rangle.$$

En la práctica, las formas de Chern–Simons son usadas como lagrangianos, básicamente debido a que conducen a teorías de gauge con una estructura de fibrado, cuyo único campo dinámico es una 1-forma conexión de gauge A . Además, bajo una transformación de gauge, cambian en una derivada total, es decir, son invariantes salvo un término de borde. En efecto, recordemos que bajo una transformación de

¹Una demostración a este teorema puede ser encontrada en [11]

gauge

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow A'_1 = U^{-1}A_1U - U^{-1}dU, \\ A_0 &\rightarrow A'_0 = U^{-1}A_0U - U^{-1}dU, \end{aligned}$$

los polinomios $\langle F_0^{n+1} \rangle, \langle F_1^{n+1} \rangle$ se mantienen invariantes. Esto significa que

$$\delta (dQ_{2n+1} (A_1, A_0)) = \delta \langle F_1^{n+1} \rangle - \delta \langle F_0^{n+1} \rangle = 0,$$

de donde $d[\delta Q_{2n+1} (A_1, A_0)] = 0$. Haciendo $A_0 = 0$ y $A_1 = A$ se encuentra que

$$d[\delta \mathcal{C}_{2n+1} (A)] = 0,$$

de modo que, haciendo uso del lema de Poincaré, la variación de \mathcal{C}_{2n+1} puede escribirse como

$$\delta \mathcal{C}_{2n+1} (A) = d\Omega.$$

Es importante recordar que una conexión, no puede ser globalmente nula, a menos que el bundle sea trivial. Este hecho y el resultado que las formas Chern–Simons pueden ser obtenidas a partir de las formas transgresión, únicamente anulando una conexión, constituyen la razón por la cual las formas Chern–Simons pueden ser definidas sólo localmente. Esto hace que la interpretación de formas Chern–Simons como lagrangianos para teorías de gauge sea impreciso. Sin embargo, este hecho es solo un impase debido a que es necesario integrarlas sobre todo \mathcal{M} para obtener la correspondiente acción.

Teniendo en cuenta que los lagrangianos Chern–Simons son formas proporcionales a formas \mathcal{C}_{2n+1} y que las formas transgresión pueden considerarse como generalizaciones que, a diferencia de las formas Chern–Simons, son completamente invariantes de gauge y globalmente bien definidas, resulta natural postular la existencia de lagrangianos basados en las formas transgresión

$$L_T^{2n+1} (A_1, A_0) = kQ_{2n+1} (A_1, A_0).$$

A partir de este lagrangiano podemos construir una teoría de gauge sobre una varie-

dad orientable \mathcal{M} $(2n + 1)$ -dimensional descrita por medio de la acción

$$S_T^{(2n+1)}(A_1, A_0) = k(n+1) \int_{\mathcal{M}} \int_0^1 dt \langle \theta F_t^n \rangle,$$

donde k es una constante dimensionada. Esta ecuación describe la dinámica de una teoría con dos campos independientes: las dos 1-formas conexión A_0 y A_1 .

2.2. Fórmula extendida de homotopía de Cartan

El lagrangiano de transgresión

$$L_T^{2n+1}(A_1, A_0) = k(n+1) \int_0^1 dt \langle \theta F_t^{n-1} \rangle,$$

tiene, en principio, toda la información necesaria acerca de la teoría. Sin embargo, en la práctica, se trabaja con grupos o subgrupos de gauge bien determinados que contienen diferentes subgrupos, los cuales tienen un claro significado físico. Por esta razón resulta necesario desdoblar el lagrangiano $L_T^{2n+1}(A_1, A_0)$ en partes que reflejen de explícitamente la estructura del grupo. Este desdoblamiento describe la relación entre las formas de Chern–Simons y de transgresión. Una manera de ver, de un modo intuitivo, la relación entre los lagrangianos Chern–Simons de transgresión, es considerar el teorema de Chern–Weil. A partir de (2.24) resulta directo comprobar la siguiente identidad

$$dQ_{2n+1}(A_1, A_0) + dQ_{2n+1}(A_2, A_1) + dQ_{2n+1}(A_0, A_2) = 0, \quad (2.26)$$

donde A_1, A_2, A_0 son tres 1-formas conexión independientes, evaluadas en una misma álgebra de Lie. Del lema de Poincaré se tiene que la suma de las tres formas de transgresión presentes en (2.26) puede escribirse localmente como una derivada total

$$Q_{2n+1}(A_1, A_0) + Q_{2n+1}(A_2, A_1) + Q_{2n+1}(A_0, A_2) = -dQ_{2n}(A_2, A_1, A_0), \quad (2.27)$$

donde $Q_{2n}(A_2, A_1, A_0)$ es una $2n$ -forma que depende de las tres conexiones. Sin embargo, no es posible determinar la forma explícita de $Q_{2n}(A_2, A_1, A_0)$ utilizan-

do únicamente el teorema de Chern–Weil. La ecuación (2.27) es conocida como la ecuación triangular y puede ser escrita de un modo más conveniente en la siguiente forma

$$Q_{2n+1}(A_2, A_0) = Q_{2n+1}(A_1, A_0) + Q_{2n+1}(A_2, A_1) + dQ_{2n}(A_2, A_1, A_0),$$

la cual permite entender a $Q_{2n+1}(A_1, A_0)$ como una forma de transgresión que interpola entre A_0 y A_1 y que por esta razón puede ser escrita como la suma de dos transgresiones, introduciendo una 1-forma auxiliar intermediana A_2 y una derivada total. Es interesante notar que A_2 es completamente arbitraria y puede ser elegida convenientemente. El fundamento matemático sobre el cual descansa el resultado anterior viene dado en la fórmula extendida de homotopía de Cartán. Dicha fórmula muestra que la ecuación triangular y el teorema de Chern–Weil tienen un origen común y permite obtener una expresión explícita para la $2n$ -forma $Q_{2n}(A_2, A_1, A_0)$.

2.2.1. Operadores de homotopía

En 1985 Juan Mañes, Raymond Stora y Bruno Zumino [13] mostraron que el teorema de Chern–Weil corresponde a un caso especial de la fórmula extendida de homotopía de Cartán. Para analizar esto consideremos los siguientes elementos. Sea $\{A_i\}_{i=0}^{r+1}$ un conjunto de 1-formas conexión de gauge sobre un fibrado d -dimensional basado en una variedad \mathcal{M} . Sea además T_{r+1} un simplex $(r+1)$ -dimensional orientado, parametrizado por el conjunto $\{t^i\}_{i=0}^{r+1}$, donde los parámetros t^i satisfacen

$$t^i \in [0, 1], \quad \sum_{i=0}^{r+1} t^i = 1.$$

Esta última ecuación implica que la combinación lineal

$$A_t = \sum_{i=0}^{r+1} t^i A_i,$$

transforma como una conexión de gauge en la misma forma como hace cada A_i . Es posible considerar cada A_i como un elemento asociado al i -ésimo vértice del simplex

T_{r+1} , de modo podemos denotar $T_{r+1} = (A_0, A_1, \dots, A_{r+1})$. Las derivadas exteriores sobre \mathcal{M} y T_{r+1} son denotadas por d y d_t . Aquí, tanto d como d_t son operadores impares y por lo tanto anticonmutan. Consideraremos además un operador par de antiderivación l_t , el cual incrementa el grado de dt en y y disminuye el grado en dx , es decir,

$$l_t : \Omega^p(M) \times \Omega^q(T_{r+1}) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M) \times \Omega^{q+1}(T_{r+1}),$$

y satisface la regla de Leibniz al igual que d y d_t . Este operador es definido de modo que constituya un álgebra gradada junto a los d y d_t

$$d^2 = d_t^2 = \{d, d_t\} = 0, \quad (2.28)$$

$$[l_t, d] = d_t, \quad (2.29)$$

$$[d_t, l_t] = 0. \quad (2.30)$$

La acción de l_t sobre el álgebra de polinomios generada por $\{A_t, F_t, d_t A_t, d_t F_t\}$ es definida de modo tal que el álgebra (2.28-2.30) sea satisfecha y que el álgebra de polinomios sea estable bajo la aplicación de los operadores d , d_t y l_t . En resumen, los operadores d , d_t y l_t cambian el grado de una (r, s) -forma en (dx^μ, dt^i) como sigue

$$(r, s) \xrightarrow{d} (r+1, s),$$

$$(r, s) \xrightarrow{d_t} (r, s+1),$$

$$(r, s) \xrightarrow{l_t} (r-1, s+1),$$

de modo que la acción de las derivadas exteriores d y d_t sobre los elementos del álgebra de polinomios es definida del modo usual mientras que la única elección satisface el álgebra (2.28-2.30) y mantiene el álgebra de polinomios cerrada es dada por

$$l_t A_t = 0, \quad l_t F_t = d_t A_t.$$

2.2.2. Fórmula de homotopía extendida

Sea ahora π un polinomio en las formas $\{A_t, F_t, d_t A_t, d_t F_t\}$ y una (m, q) -forma sobre $\mathcal{M} \times T_{r+1}$, es decir, es una m -forma en dx^μ y una q -forma en dt . Utilizando las

relaciones del álgebra (2.28-2.30) se tiene (Ver Apéndice A)

$$\frac{1}{p!} d_t l_t^p \pi = \frac{1}{(p+1)!} [l_t^{p+1}, d] \pi, \quad (2.31)$$

donde $m \geq p$ ya que el operador l_t disminuye el grado de la forma diferencial en \mathcal{M} . Integrando la ecuación (2.31) sobre T_{r+1} se tiene

$$\frac{1}{p!} \int_{T_{r+1}} d_t l_t^p \pi = \frac{1}{(p+1)!} \int_{T_{r+1}} [l_t^{p+1}, d] \pi, \quad (2.32)$$

y utilizando el teorema de Stokes sobre el simplex, podemos integrar directamente el lado izquierdo de la ecuación (2.32), obteniendo

$$\frac{1}{p!} \int_{\partial T_{r+1}} l_t^p \pi = \frac{1}{(p+1)!} \int_{T_{r+1}} (l_t^{p+1} d\pi - d l_t^{p+1} \pi). \quad (2.33)$$

Ahora notemos que, dado que π es una (m, q) -forma, la cantidad $l_t^{p+1} \pi$ debe ser una $(m-p, q+p+1)$ -forma. Denotando $r = q+p$, se tiene que $l_t^{p+1} \pi$ es una $(r+1)$ -forma sobre T_{r+1} , de modo que la ecuación (2.33) toma la forma

$$\frac{1}{p!} \int_{\partial T_{r+1}} l_t^p \pi = \frac{1}{(p+1)!} \int_{T_{r+1}} l_t^{p+1} d\pi - \frac{(-1)^{r+1}}{(p+1)!} d \int_{T_{r+1}} l_t^{p+1} \pi. \quad (2.34)$$

La ecuación (2.34) es conocida como fórmula de homotopía de Cartan extendida. Si consideramos que π viene dado por la $(2n, 0)$ -forma diferencial $\langle F_t^n \rangle$, se tiene $q = 0$ y $p = r$, de modo que dicha fórmula resulta

$$\frac{1}{p!} \int_{\partial T_{p+1}} l_t^p \langle F_t^n \rangle = \frac{(-1)^p}{(p+1)!} d \int_{T_{p+1}} l_t^{p+1} \langle F_t^n \rangle. \quad (2.35)$$

Caso $p = 0$

En el primer caso, el simplex viene dado por $T_1 = (A_0, A_1)$ y su borde es dado por los puntos extremos. La conexión homotópica es dada por

$$A_t = t^0 A_0 + t^1 A_1 = A_0 + t^1 (A_1 - A_0),$$

y la ecuación (2.35) se escribe

$$\int_{\partial T_1} \langle F_t^n \rangle = d \int_{T_1} l_t \langle F_t^n \rangle.$$

Integrando directamente en el lado izquierdo y aplicando directamente el operador de homotopía en el lado derecho se tiene

$$\langle F_1^n \rangle - \langle F_0^n \rangle = d \int_{T_1} n \langle F_t^{n-1} (d_t A_t) \rangle.$$

En este caso existe un único parámetro $t = t^0$, de modo que

$$\begin{aligned} d_t A &= \frac{\partial A_t}{\partial t^1} dt^1 = (A_1 - A_0) dt, \\ F_t &= tF + (t^2 - t) A^2. \end{aligned}$$

Así, la fórmula extendida de homotopía de Cartan, toma la forma

$$\begin{aligned} \langle F_1^n \rangle - \langle F_0^n \rangle &= d \left\{ n \int_0^1 dt \langle F_t^{n-1} (A_1 - A_0) \rangle \right\} \\ &= dQ_{2n+1}(A_1, A_0), \end{aligned}$$

es decir, el caso $p = 0$ reproduce el teorema de Chern–Weil.

Caso $p = 1$

Para este caso, la ecuación (2.35) toma la forma

$$\int_{\partial T_2} l_t \langle F_t^{n+1} \rangle = -\frac{1}{2} d \int_{T_2} l_t^2 \langle F_t^{n+1} \rangle,$$

o bien, aplicando los operadores l_t

$$(n+1) \int_{\partial T_2} \langle F_t^n (d_t A_t) \rangle = -\frac{1}{2} d \int_{T_2} n(n+1) \langle F_t^{n-1} (d_t A_t)^2 \rangle, \quad (2.36)$$

donde

$$\begin{aligned} A_t &= A_1 + t^0 (A_0 - A_1) + t^2 (A_2 - A_1), \\ F_t &= dA_t + A_t A_t. \end{aligned}$$

Aquí el simplex es dado por $T_2 = (A_0, A_1, A_2)$ y su borde corresponde a los ‘segmentos’

$$\partial T_2 = \partial (A_0 A_1 A_2) = (A_1 A_2) - (A_0 A_2) + (A_0 A_1).$$

El lado izquierdo de esta ecuación (2.36) puede ser integrado en forma análoga a la integral del caso $p = 0$

$$(n+1) \int_{\partial T_2} \langle F_t^n (d_t A_t) \rangle = Q_{2n+1}(A_2, A_1) - Q_{2n+1}(A_2, A_0) + Q_{2n+1}(A_1, A_0),$$

mientras que el lado derecho resulta

$$\int_{T_2} n(n+1) \langle F_t^{n-1} (d_t A_t)^2 \rangle = -2n(n+1) \int_0^1 dt \int_0^t ds \langle F_{st}^{n-1} (A_2 - A_1) (A_0 - A_1) \rangle,$$

donde hemos renombrado $t = 1 - t^0$, $s = t^2$, $A_{st} = A_0 + t(A_1 - A_0) + s(A_2 - A_1)$ y $F_{st} = dA_{st} + A_{st}^2$. De este modo, para el caso $p = 1$ la ecuación finalmente se escribe

$$Q_{2n+1}(A_2, A_1) - Q_{2n+1}(A_2, A_0) + Q_{2n+1}(A_1, A_0) = -dQ_{2n}(A_2, A_1, A_0),$$

o bien, en forma equivalente

$$Q_{2n+1}(A_2, A_0) = Q_{2n+1}(A_2, A_1) + Q_{2n+1}(A_1, A_0) + dQ_{2n}(A_2, A_1, A_0),$$

con

$$Q_{2n}(A_2, A_1, A_0) = n(n+1) \int_0^1 dt \int_0^t ds \langle F_{st}^{n-1} (A_2 - A_1) (A_1 - A_0) \rangle.$$

2.3. Problemas de las teorías Chern–Simons para la gravedad

Las formas Chern–Simons son considerados objetos de gran interés en física teórica. Estas cantidades juegan un importante rol en superconductividad, aislantes topológicos, electromagnetismo, formalismo hamiltoniano de sistemas mecánicos, anomalías en teoría cuántica de campos, etc. En Refs. [12, 14, 15] ha sido estudiado el rol que juegan las formas Chern–Simons como lagrangianos de acciones invariantes de gauge para gravedad y supergravedad, donde los grupos de gauge son los grupos de Poincaré y (Anti)de-Sitter.

Las teorías Chern–Simons tienen muchos atributos que hacen de ellas buenas candidatas para la descripción de fenómenos naturales. Sin embargo, ellas también presentan algunos inconvenientes. Entre las dificultades más importantes se encuentran:

- ¿Cómo hacer contacto con Relatividad General?
- ¿Cómo llevar a cabo el acoplar con la materia?
- El que las teorías sean sólo válidas en dimensiones impares.

Una opción para afrontar el primer problema es utilizar álgebras diferentes a las de Poincaré y (Anti)de-Sitter. Un procedimiento que permite obtener nuevas álgebras a partir de una conocida viene dado por la expansión de álgebras de Lie vía semigrupos (o S-expansión), introducida en Ref. [16–18]. Utilizando dicho mecanismo, en Ref. [19], fue contruido un lagrangiano Chern–Simons a partir del álgebra \mathfrak{B}_5 , la cual obtenida por S-expansion de $\text{SO}(4, 2)$, encontrando

$$L_{CS}^{(5)} = \alpha_1 l^2 \epsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e + \alpha_3 \epsilon_{abcde} \left(\frac{2}{3} R^{ab} e^c e^d e^e + 2l^2 k^{ab} R^{cd} T^e + l^2 R^{ab} R^{cd} h^e \right),$$

donde α_1 y α_3 son constantes arbitrarias y l es un parámetro con dimensiones de longitud. Además de los campos vielbein e^a y conexión de espín ω^{ab} , tenemos dos campos bosónicos, h^a y k^{ab} . Los términos aquí presentes son, de izquierda a derecha,

el de Gauss–Bonnet extendido a 5 dimensiones, el término de Einstein–Hilbert y dos términos de acoplamiento geometría-materia. Es interesante notar que en el límite $l \rightarrow 0$ el único término que prevalece es el Einstein–Hilbert.

Estudios del límite no relativista y aplicaciones de las correspondientes ecuaciones del movimiento a la cosmología y a los agujeros negros pueden ser encontradas en Refs. [20–24]. Por otra parte, en Ref. [25], fue encontrado que una adecuada elección del semigrupo conduce encontrar familias de álgebras de Lie que generalizan las álgebras de Poincaré y (A)dS. En Refs. [26–28] fue probado que estas álgebras permiten contruir acciones para gravedad en diferentes dimensiones que en un determinado límite conducen a la teoría de la gravitación estándar.

En el caso de teorías para gravedad en dimensiones mayores que 3, el segundo problema presenta múltiples aspectos. Entre los más importantes se encuentra el problema de como acoplar las citadas formas Chern–Simons a las diferentes formas de materia, tales como branas de distintas dimensiones. La interacción entre campos de gauge y materia es proporcionada por el acoplamiento minimal estándar, que en el caso del electromagnetismo, es dado por

$$S^{\text{EM}} = \int_{\mathcal{M}} d^D x J^\mu(x) A_\mu(x), \quad (2.37)$$

donde $J^\mu(x)$ es la corriente generada por una partícula puntual, cargada con respecto al grupo de gauge $U(1)$. La característica esencial que selecciona a (2.37) entre todos los posibles términos de interacción es la invariancia de gauge. Si el campo A transforma como una conexión electromagnética, es decir, $A \rightarrow A' = A + d\Lambda$, entonces S^{EM} permanece invariante, siempre que $J^\mu(x)$ este localizada en el espacio y sea una cantidad conservada $\partial_\mu J^\mu = 0$. La densidad de carga correspondiente a una partícula puntual q ubicada en la posición $x = z(\tau)$ a lo largo de la línea de universo, parametrizada por el parámetro afín τ , es dada por

$$\rho = q \delta^{(2n)}(x - z(\tau)),$$

de manera la correspondiente densidad de corriente será

$$J^\mu(x) = \rho u^\mu = q \dot{z}^\mu \delta^{(2n)}(x - z(\tau)),$$

con $u^\mu = \dot{z}^\mu$. Puesto que la densidad de corriente J^μ tiene soporte en la línea de universo de la partícula cargada, se tiene que (2.37) puede ser también escrita en la forma

$$S^{\text{EM}} = q \int_{\mathcal{M}_1} \int_{\mathcal{M}_{D-1}} d^{D-1}x \delta^{(2n)}(x - z(\tau)) dz^\mu A_\mu(x),$$

o bien, integrando directamente sobre el espacio transversal a la línea de universo descrita por la variedad 1-dimensional \mathcal{M}_1 , se tiene

$$S^{\text{EM}} = q \int_{\mathcal{M}_1} dz^\mu A_\mu(z). \quad (2.38)$$

Esto significa que el acoplamiento de una partícula puntual eléctricamente cargada con un campo electromagnético externo tiene algunas características interesantes.

- La acción no hace referencia a la métrica del espacio-tiempo donde la interacción tiene lugar.
- Aunque la acción depende explícitamente de un campo de gauge que no es invariante, la acción sí lo es, siempre que la carga sea conservada en el sistema.
- La forma del término de interacción es una expresión del acoplamiento minimal de materia cargada con el campo electromagnético y es implementada por medio de la sustitución de la derivada ordinaria por una derivada covariante de gauge.

El hecho que el término de interacción tenga esta forma, significa que el campo que media la interacción electromagnética es una conexión sobre un *fibre bundle*. Esta forma es común a todas las interacciones fundamentales de la naturaleza, y corresponde al ejemplo más simple de un sistema Chern–Simons. En efecto, la forma (2.38) de la acción S^{EM} corresponde a una integral sobre una variedad $(0+1)$ -dimensional, la cual corresponde al caso $n = 0$ en la ecuación (2.21) que define las formas Chern–Simons

$$S_{\text{CS}} = k \int_{\mathcal{M}_1} \mathcal{C}_1(A) = k \int_{\mathcal{M}_1} \langle A \rangle. \quad (2.39)$$

Aquí, la variedad \mathcal{M}_1 es la línea de universo de una partícula cargada, la cual es una variedad embebida en el espacio de dimensionalidad \mathcal{M}_{2n+1} que es identificado como

el espacio-tiempo. El espacio-tiempo $(2n + 1)$ -dimensional que embebe puede tener una métrica que induce otra métrica natural sobre la línea de universo, sin embargo, ésta no es necesaria para construir la acción.

Por otra parte, en Ref. [10], C. Bunster, estudió la generalización de (2.37) para describir el acoplamiento entre una $(p - 1)$ -brana a un potencial de gauge, dado por una interacción de la forma

$$S_{\text{int}} = \int_{\mathcal{M}_D} J^{\mu_1 \cdots \mu_p} A_{\mu_1 \cdots \mu_p} dx^D. \quad (2.40)$$

Bunster mostró que esta forma de acoplamiento minimal sólo puede ser definida (para cualquier $p > 1$) si la conexión es abeliana, es decir, si ella transforma como $A \rightarrow A' = A + d\Lambda$, donde Λ es una $(p - 1)$ -forma. Por esta razón, una motivación central de esta tesis es estudiar invariantes topológicos en el contexto de teorías de gauge no abelianas con campos de gauge descritos por p -formas con $p \geq 2$.

Las teorías de gauge pueden ser formuladas de dos maneras distintas conocidas como cuadros diferencial e integral. Un clásico ejemplo de esto son las ecuaciones de Maxwell, las cuales pueden ser formuladas en términos de ecuaciones integrales que relacionan los flujos eléctricos y magnéticos a través de superficies y corrientes, lo que corresponde al cuadro integral, o alternativamente en términos de las conocidas ecuaciones de Maxwell, lo que corresponde al cuadro diferencial. En forma análoga, cualquier teoría de gauge puede ser formulada en las dos maneras antes mencionadas. En la formulación diferencial, la conexión es dada por una 1-forma A que bajo un transformaciones de gauge cambia como

$$A \rightarrow A' = g^{-1}Ag + g^{-1}dg. \quad (2.41)$$

Como ya hemos mencionado, la conexión es el campo fundamental de una teoría de gauge, es decir, la variación en el principio de acción debe hacerse con respecto de A , mientras en la formulacion de integral de camino se integra sobre todas las posibles conexiones. En este contexto, tanto el lagrangiano como la acción de la teoría dependen de la curvatura

$$F = dA + A^2, \quad (2.42)$$

la cual es una 2-forma evaluada en el álgebra \mathfrak{g} que, bajo una transformación de

gauge, se ve modificada en la forma $F \rightarrow F' = g^{-1}Fg$. La formulación alternativa al cuadro diferencial es la formulación integral. En dicha formulación se usa el concepto de traslación paralela determinada por un elemento del grupo

$$U_\gamma = P \exp \left(\int_0^t A_\mu(\gamma(\tau)) \dot{\gamma}^\mu(\tau) d\tau \right) \in G, \quad (2.43)$$

la cual se realiza a lo largo de la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$, $\tau \rightarrow \gamma(\tau)$ de parámetro τ . El transporte paralelo queda unívocamente determinado como solución de la ecuación diferencial matricial de primer orden

$$\frac{d}{dt} U_\gamma(t) = [A_\mu(\gamma(t)) \dot{\gamma}^\mu(t)] U_\gamma(t), \quad (2.44)$$

para el transporte paralelo a lo largo de γ desde $\tau = 0$ hasta $\tau = t$.

La curvatura puede ser entonces calculada a partir de U_γ para una curva cerrada γ en el límite en el cual ésta se reduce a un tamaño infinitesimal.

Ilustremos ahora la idea básica de una teoría de gauge extendida. Consideremos primero el caso donde el grupo de gauge es $G = U(1)$. En este caso la 1-forma conexión transforma como

$$A \longrightarrow A' = A + d\varphi, \quad (2.45)$$

de modo que la 2-forma curvatura (2.42) toma la forma $F = dA$. La teoría de gauge abeliana admite la siguiente generalización.

Sea A una p -forma que será el campo fundamental de la teoría. El lagrangiano y la acción dependen sólo de la $(p+1)$ -forma $F = dA$. El caso $p = 2$ del campo A es conocido en la literatura como campo de Kalb–Ramond, y en el caso general, la teoría es conocida como electrodinámica de p -formas [10] (ver Apéndice B). Sin embargo, en Ref. [10] fue probado que no es posible llevar a cabo esta construcción para el caso de teorías de gauge no abelianas con $p \geq 2$.

En la literatura, han sido llevado a cabo varios intentos para construir dichos modelos. De Ref. [10] sabemos que los puntos de una curva tienen un orden natural y que la definición de transporte paralelo a lo largo de una curva hace uso de este orden. Para subvariedades de mayores dimensiones, no es posible encontrar dicho orden. Esta falta de orden natural, condujo al ‘no-go theorem’ que regula la existencia

de teorías de gauge no abelianas para objetos extendidos.



Capítulo 3

Modificacione a las teorías de gauge

En este capítulo se revisarán las teorías de gauge extendidas desarrolladas en Refs. [1–5, 7–9] y las estructuras algebraicas conocidas como álgebras diferenciales libres (FDA) mostradas en [29, 30].

3.1. Teorías de gauge tensoriales

Las teorías de gauge tensoriales son construidas bajo las restricciones que plantea el principio de gauge local. Para llevar a cabo dicha construcción es necesario extender el principio de gauge a campos de más alto orden. Por el momento nos restringiremos a los campos tensoriales de gauge no triviales más simples, tales como tensores de segundo y tercer orden.

Para describir un campo de gauge tensorial de tres índices $A_{\mu\nu\lambda}$, es necesario introducir un campo tensorial de orden dos $A_{\mu\nu}$. A partir de éstos, se definen los correspondientes tensores de intensidad de campo en la siguiente forma

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu\lambda} &= D_\mu A_{\nu\lambda} - D_\nu A_{\mu\lambda}, \\ G_{\mu\nu\lambda\rho} &= D_\mu A_{\nu\lambda\rho} - D_\nu A_{\mu\lambda\rho} - ig ([A_{\mu\lambda}, A_{\nu\rho}] + [A_{\mu\rho}, A_{\nu\lambda}]), \end{aligned} \quad (3.1)$$

o bien, en términos de sus componentes,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu\lambda}^a &= \partial_\mu A_{\nu\lambda}^a - \partial_\nu A_{\mu\lambda}^a + gf^{abc} (A_\mu^b A_{\nu\lambda}^c + A_{\mu\lambda}^b A_\nu^c), \\ G_{\mu\nu\lambda\rho}^a &= \partial_\mu A_{\nu\lambda\rho}^a - \partial_\nu A_{\mu\lambda\rho}^a + gf^{abc} (A_\mu^b A_{\nu\lambda\rho}^c + A_{\mu\lambda}^b A_{\nu\rho}^c + A_{\mu\rho}^b A_{\nu\lambda}^c + A_{\mu\lambda\rho}^b A_\nu^c). \end{aligned}$$

Debe ser notado que en la definición de las intensidades de campo de orden mayor, son necesarios campos de gauge tensoriales del mismo orden y campos tensoriales de orden menor.

3.1.1. Transformaciones de gauge

Consideremos ahora las transformaciones de gauge para campos de gauge tensoriales. Estas deben ser definidas de modo que formen una estructura algebraica cerrada, y por lo tanto, el conmutador de dos transformaciones de gauge extendidas debe conducir a otra transformación de gauge. Para lograr esto, es necesario introducir nuevos parámetros de gauge. Consideraremos un parámetro vectorial $\xi_\mu = \xi_\mu^a T_a$ y un tensor de segundo orden $\xi_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu}^a T_a$. A partir de éstos, se definen las transformaciones de gauge extendidas como sigue:

$$\begin{aligned} \delta_\xi A_\mu &= \partial_\mu \xi - ig [A_\mu, \xi], \\ \delta_\xi A_{\mu\nu} &= \partial_\mu \xi_\nu - ig [A_\mu, \xi_\nu] - ig [A_{\mu\nu}, \xi], \\ \delta_\xi A_{\mu\nu\lambda} &= \partial_\mu \xi_{\nu\lambda} - ig ([A_\mu, \xi_{\nu\lambda}] + [A_{\mu\nu}, \xi_\lambda] + [A_{\mu\lambda}, \xi_\nu] + [A_{\mu\nu\lambda}, \xi]). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Es directo verificar que estas transformaciones forman una estructura cerrada. En efecto, el conmutador de dos transformaciones de gauge, que actúan sobre un campo de gauge tensorial de segundo orden es dado por

$$[\delta_\eta, \delta_\xi] A_{\mu\nu} = -ig (\delta_\eta [A_\mu, \xi_\nu] + \delta_\eta [A_{\mu\nu}, \xi] - \delta_\xi [A_\mu, \eta_\nu] - \delta_\xi [A_{\mu\nu}, \eta]),$$

pero

$$\delta_\eta [A_\mu, \xi_\nu] = \partial_\mu [\eta, \xi_\nu] + [\partial_\mu \xi_\nu, \eta] - ig ([A_\mu, \eta] \xi_\nu - \xi_\nu [A_\mu, \eta]),$$

y del mismo modo

$$\begin{aligned} \delta_\eta [A_{\mu\nu}, \xi] &= \partial_\mu [\eta_\nu, \xi] + [\partial_\mu \xi, \eta_\nu] - ig ([A_\mu, \eta_\nu] \xi + [A_{\mu\nu}, \eta] \xi \\ &\quad - \xi [A_\mu, \eta_\nu] - \xi [A_{\mu\nu}, \eta]). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} [\delta_\eta, \delta_\xi] A_{\mu\nu} &= -ig \{ \partial_\mu ([\eta, \xi_\nu] + [\eta_\nu, \xi]) - ig [A_\mu, ([\eta, \xi_\nu] + [\eta_\nu, \xi])] \\ &\quad - ig [A_{\mu\nu}, [\eta, \xi]] \}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Luego, definiendo los parámetros de gauge $\psi_\nu = [\eta, \xi_\nu] + [\eta_\nu, \xi]$, $\psi = [\eta, \xi]$, podemos escribir

$$[\delta_\eta, \delta_\xi] A_{\mu\nu} = -ig \delta_\psi A_{\mu\nu},$$

lo cual prueba que $[\delta_\eta, \delta_\xi] A_{\mu\nu}$ es una transformación de gauge con parámetros de gauge ψ y ψ_ν .

Consideremos ahora la acción de dos transformaciones de gauge sobre un campo de gauge tensorial de orden 3. Del mismo modo que en el caso anterior, se tiene

$$[\delta_\eta, \delta_\xi] A_{\mu\nu\lambda} = -ig \delta_\psi A_{\mu\nu\lambda}, \quad (3.5)$$

con

$$\delta_\psi A_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu \psi_{\nu\lambda} - ig [A_\mu, \psi_{\nu\lambda}] - ig [A_{\mu\nu}, \psi_\lambda] - ig [A_{\mu\lambda}, \psi_\nu] - ig [A_{\mu\nu\lambda}, \psi],$$

donde los nuevos parámetros vienen dados por

$$\psi = [\eta, \xi], \quad (3.6)$$

$$\psi_\nu = [\eta, \xi_\nu] + [\eta_\nu, \xi], \quad (3.7)$$

$$\psi_{\nu\lambda} = [\eta, \xi_{\nu\lambda}] + [\eta_\nu, \xi_\lambda] + [\eta_\lambda, \xi_\nu] + [\eta_{\nu\lambda}, \xi]. \quad (3.8)$$

Debemos notar que las transformaciones con diferentes parámetros no son cerradas en forma separada unas de otras. La clausura separada sólo ocurre para el primer caso, el cual coincide con el de las teorías de Yang–Mills.

3.2. Formas Chern–Simons Extendidas

La idea de extender los campos de gauge a tensores de orden más alto fue usada en Ref. [7] para construir un invariante topológico en cinco dimensiones similar al invariante Chern–Pontrjagin en 4 dimensiones. Estos resultados fueron generalizados en Refs. [8, 9] al caso de mayores dimensiones, encontrando diferentes polinomios en las formas curvaturas, también análogos a las densidades de Chern–Pontrjagin, las cuales conducen a densidades invariantes de gauge similares a las formas Chern–Simons.

Para lograr esto, se define la 1-forma campo de gauge correspondiente al campo de gauge vectorial A_μ como $A = A_\mu dx^\mu$ y la 2-forma ‘campo de gauge’ correspondiente al campo de gauge tensorial $A_{\mu\nu}$ como $B = A_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu$. Las correspondientes 2-forma y 3-forma ‘curvaturas’ vienen dadas por $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ y $H = F_{\mu\nu\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$ respectivamente, donde

$$F = dA + A^2, \quad H = DB = dB + [A, B]. \quad (3.9)$$

Es directo demostrar que F y H satisfacen las siguientes identidades de Bianchi,

$$DF = 0, \quad DH + [B, F] = 0. \quad (3.10)$$

Las variaciones infinitesimales de los campos de gauge, escritas en el lenguaje de formas diferenciales, vienen dadas por

$$\delta A = D\xi_0, \quad \delta B = D\xi_1 + [B, \xi_0], \quad (3.11)$$

donde ξ_0 y ξ_1 son una 0-forma y una 1-forma parámetros de gauge respectivamente [7]. Del mismo modo, las variaciones infinitesimales de los campos A y B vienen dadas por

$$\delta F = D(\delta A) = [F, \xi_0], \quad \delta H = D(\delta B) + [\delta A, B]. \quad (3.12)$$

Las leyes de transformación de los campos extendidos, las definiciones de sus formas curvatura y las correspondientes identidades de Bianchi pueden ser encontradas en el Apéndice C.

3.2.1. Formas Chern–Simons en $(2n + 2)$ dimensiones

En Ref.[7], fue encontrado un invariante topológico en un espacio-tiempo $(4 + 1)$ dimensional que puede ser construido a partir de la traza simetrizada y de las formas curvaturas generalizadas

$$\Gamma = \langle F, H \rangle.$$

Este invariante 5-dimensional mantiene muchas de las propiedades del invariante topológico de Chern–Pontrjagin. Aquí, Γ es invariante bajo difeomorfismos y es independiente de la métrica espacio-temporal.

En recientes artículos, Refs.[7–9], este invariante fue llevado al caso de mayores dimensiones, encontrando que, en general, puede definirse un invariante $(2n + 3)$ -dimensional dado por

$$\Gamma^{(2n+3)} = \langle F^n, H \rangle, \quad (3.13)$$

el cual es una forma cerrada, invariante bajo transformaciones de gauge y no globalmente exacta [8]. En efecto, de la identidad de Bianchi se tiene

$$d\Gamma^{(2n+3)} = \langle F^n, [F, B] \rangle = 0.$$

Así tenemos que, usando el lema de Poincaré, podemos escribir localmente Γ_{2n+3} como la derivada exterior de una $(2n + 2)$ -forma. En efecto, dado que $H = dB + [A, B]$, tenemos

$$\Gamma^{(2n+3)} = d\sigma_{2n+2},$$

donde

$$\sigma^{(2n+2)} = \langle F^n, B \rangle, \quad (3.14)$$

será llamada $(2n + 2)$ -forma de Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy (CSAS). Es posible obtener una expresión diferente para σ_{2n+2} . Para esto, seguiremos el procedimiento usual, utilizado para encontrar formas Chern–Simons. Dado que

$$\delta F = D(\delta A), \quad \delta H = D(\delta B) + [\delta A, B], \quad (3.15)$$

tenemos que la variación de $\Gamma^{(2n+3)}$ es dada por

$$\delta\Gamma^{(2n+3)} = \delta\langle F^n, H \rangle = d(\langle \delta A, F^{n-1}, H \rangle + \cdots + \langle F^{n-1}, \delta A, H \rangle + \langle F^n, \delta B \rangle).$$

Introduciendo una familia de parámetros homotópicos t , $0 \leq t \leq 1$, que parametrizan los campos de gauge y las correspondientes las curvaturas en la forma

$$\begin{aligned} A_t &= tA, & F_t &= tF + (t^2 - t)A^2 = t dA + t^2 A^2, \\ B_t &= tB, & H_t &= tH + (t^2 - t)[A, B] = t dB + t^2[A, B], \end{aligned}$$

se encuentra

$$\delta\langle F_t^n H_t \rangle = d(\langle \delta A_t, F_t^{n-1}, H_t \rangle + \cdots + \langle F_t^{n-1}, \delta A_t, H_t \rangle + \langle F_t^n, \delta B_t \rangle), \quad (3.16)$$

donde $\delta = \frac{\partial}{\partial t} \delta t$. Luego, podemos definir la $(2n+2)$ -forma CSAS en una forma alternativa, dada por

$$\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+2)}(A, B) = \int_0^1 dt (n \langle A, F_t^{n-1}, H_t \rangle + \langle F_t^n, B \rangle). \quad (3.17)$$

Este resultado es análogo a la usual forma de Chern–Simons (2.21) pero en dimensiones pares. Es posible probar que las expresiones (3.14) y (3.17) coinciden, salvo por términos de superficie. En particular, para $n = 1$ se tiene

$$\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(4)} = \langle FB \rangle - \frac{1}{2} d \langle AdB \rangle,$$

de modo que la acción CSAS en cuatro dimensiones puede ser escrita como

$$S_{\text{CSAS}}^{(4)} = \int_{\mathcal{M}^4} \langle FB \rangle. \quad (3.18)$$

Es directo probar que la acción (3.18) es invariante, módulo termino de borde, bajo las transformaciones (3.11) y es análoga a la acción de Chern–Simons en 3 dimensiones dada en (2.23).

3.2.2. Formas Chern–Simons en $(2n + 3)$ dimensiones

En Refs. [7–9] fue estudiada la segunda serie de formas invariantes, definida en $2n + 4$ dimensiones y dada por

$$\Gamma^{(2n+4)} = \langle F^n, I \rangle = d\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+3)}, \quad (3.19)$$

donde la correspondiente $(2n + 3)$ -forma Chern–Simons $\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+3)}$ es definida en términos de la 3-forma campo de gauge C y la 4-forma intensidad de campo $I = dC + [A, C]$. Utilizando las propiedades de la traza simetrizada, puede ser probado que (3.19) es invariante bajo transformaciones de gauge escalares estandar δ_ξ y bajo las transformaciones de gauge tensoriales δ_{ξ_2} . En efecto, en el primer caso, la variación de $\Gamma^{(2n+4)}$ es dada por

$$\delta_\xi \Gamma^{(2n+4)} = \langle F^n, \delta_\xi I \rangle + n \langle \delta_\xi F, F^{n-1}, I \rangle,$$

utilizando las leyes de las transformaciones extendidas, se encuentra

$$\delta_\xi \Gamma^{(2n+4)} = 0.$$

Para probar que $\Gamma^{(2n+4)}$ es cerrado e invariante bajo las transformaciones de gauge tensoriales δ_{ξ_2} es necesario usar las siguientes identidades de la traza simetrizada [31]

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{(d_1 + \dots + d_{i-1})d_\Theta} \langle \Lambda_1, \dots, [\Theta, \Lambda_i], \dots, \Lambda_n \rangle = 0, \quad (3.20)$$

$$d \langle \Lambda_1, \dots, \Lambda_i, \dots, \Lambda_n \rangle = \sum_{i=1}^n (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} \langle \Lambda_1, \dots, D\Lambda_i, \dots, \Lambda_n \rangle, \quad (3.21)$$

donde cada Λ_i es una d_i -forma Λ_i y Θ es una d_Θ -forma diferencial arbitraria. Haciendo uso de la identidad (3.20) es directo ver que

$$\delta_{\xi_2} \Gamma^{(2n+4)} = \langle F^n, [I, \xi_2] \rangle = 0,$$

mientras que de (3.21) podemos escribir

$$d\Gamma^{(2n+4)} = \langle F^n, DI \rangle + n\langle DF, F^{n-1}, I \rangle,$$

de modo que, usando las identidades de Bianchi, se tiene

$$d\Gamma^{(2n+4)} = \langle F^n, [F, C] \rangle = 0.$$

Para encontrar la correspondiente forma Chern–Simons, seguimos el procedimiento mostrado en el caso anterior. Para ello usamos los potenciales de gauge homotópicos $A_t = tA$, $C_t = tC$ y tomamos la derivada con respecto del parámetro de la forma $\Gamma^{(2n+4)}(A_t, C_t)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \Gamma^{(2n+4)}(A_t, C_t) &= \int_0^1 dt n \left\langle F_t^{n-1}, \frac{dF_t}{dt}, I_t \right\rangle + \left\langle F_t^n, \frac{dI_t}{dt} \right\rangle \\ &= \int_0^1 dt (n\langle F_t^{n-1}, D_t A, I_t \rangle + \langle F_t^n, D_t C + [A, C] \rangle). \end{aligned}$$

Integrando por partes y utilizando el teorema fundamental del cálculo, esta ecuación toma la forma

$$\Gamma^{(2n+4)}(A, C) = d \int_0^1 dt \{ \langle C, F_t^n \rangle + n \langle I_t, A, F_t^{n-1} \rangle \},$$

de modo que podemos definir la $(2n + 3)$ -forma CSAS como

$$\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+3)} = \int_0^1 dt (n \langle A, F_t^{n-1}, I_t \rangle + \langle F_t^n, C \rangle).$$

3.2.3. Formas Chern–Simons en $(2n + 5)$ dimensiones

La tercera serie de formas invariantes, definida en $2n + 6$ dimensiones, es dada por

$$\Xi^{(2n+6)} = \langle F^n, K \rangle + n\langle F^{n-1}, I^2 \rangle.$$

No es complicado ver que $\Gamma^{(2n+6)}$ es invariante bajo las transformaciones extendidas. En efecto, la variación del primer término es dada por

$$\delta\langle F^n K \rangle = \langle F^n, ([K, \xi] + 2[I, \xi_2] + [F, \xi_4]) \rangle + n\langle [F, \xi], F^{n-1}, K \rangle,$$

y utilizando la identidad (3.20), esta expresión toma la forma

$$\delta\langle F^n, K \rangle = 2\langle F^n, [I, \xi_2] \rangle. \quad (3.22)$$

La variación del segundo término es dada por

$$\delta\langle F^{n-1}, I^2 \rangle = 2\langle F^{n-1}, ([I, \xi] + [F, \xi_2]), I \rangle + (n-1)\langle [F, \xi], F^{n-2}, I^2 \rangle,$$

de modo que repitiendo el proceso se tiene

$$\delta\langle F^{n-1}, I^2 \rangle = 2\langle F^{n-1}, [F, \xi_2], I \rangle. \quad (3.23)$$

Luego, de (3.22,3.23) vemos que

$$\delta\Xi^{(2n+6)} = 2n\langle F^{n-1}, [F, \xi_2], I \rangle + 2\langle F^n, [I, \xi_2] \rangle = 0,$$

lo cual prueba la invariancia.

Por otra parte, de (3.21) se tiene

$$d\Xi^{(2n+6)} = \langle F^n, DK \rangle + n\langle D, F, F^{n-1}, K \rangle + 2n\langle F^{n-1}, DI, I \rangle + n(n-1)\langle DF, F^{n-2}, I^2 \rangle,$$

y utilizando la identidad de Bianchi, la derivada exterior toma la forma

$$d\Xi^{(2n+6)} = 2\langle F^n, [I, C] \rangle + 2n\langle F^{n-1}, [G, C], I \rangle + \langle F^n, [F, E] \rangle = 0.$$

De acuerdo con el lema de Poincaré, esta ecuación implica que $\Xi^{(2n+6)}$ puede ser expresada, localmente, como la derivada exterior de una determinada $(2n+5)$ -forma. En efecto, siguiendo el mismo procedimiento de la subsección anterior, definiendo potenciales de gauge homotópicos $A_t = tA$, $C_t = tC$, $E_t = tE_t$ y tomando la derivada

de la forma $\Xi^{(2n+6)}(A_t, C_t, E_t)$ con respecto del parámetro se encuentra

$$\Xi^{(2n+6)}(A, C, E) = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \Xi^{(2n+6)}(A_t, C_t, E_t) = d\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+5)}(A, C, E)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+5)}(A, C, E) = \int_0^1 dt [& n(n-1) \langle F_t^{n-2}, A, I_t^2 \rangle + 2n \langle F_t^{n-1}, I_t, C \rangle \\ & + n \langle F_t^{n-1}, A, K_t \rangle + \langle F_t^n, E \rangle]. \end{aligned}$$

Esta forma $(2n+5)$ -dimensional no es única y puede, al igual que en el caso de las usuales formas de Chern–Simons, ser modificada por la adición de una forma diferencial dada por $d\beta^{(2n+4)}$.



3.2.4. Formas Chern–Simons en $(2n+7)$ dimensiones

La cuarta serie de formas invariantes es definida en $(2n+8)$ dimensiones de la siguiente manera

$$\Upsilon^{(2n+8)} = \langle F^n, M \rangle + 3n \langle F^{n-1}, I, K \rangle + n(n-1) \langle F^{n-2}, I^3 \rangle = d\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+7)}.$$

Una vez más, es directo probar que $\Upsilon^{(2n+8)}$ es invariante de gauge tanto para el caso del parámetro escalar como para el caso de parámetros de gauge tensoriales [8]. Del mismo modo un cálculo directo muestra que $\Upsilon^{(2n+8)}$ es una forma cerrada y por lo tanto, puede ser expresada localmente como la derivada exterior de una determinada $(2n+7)$ -forma. En efecto, siguiendo el mismo procedimiento de la subsección anterior, se encuentra

$$\Upsilon^{(2n+8)} = d\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+7)}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+7)} = & \int_0^1 dt \{ n \langle F_t^{n-1}, A, M_t \rangle + \langle F_t^n, G \rangle + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, A, K_t, I_t \rangle \\ & + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, I_t^2, C \rangle + 3n \langle F_t^{n-1}, E, I_t \rangle + 3n \langle F_t^{n-1}, K_t, C \rangle \\ & + n(n-1)(n-2) \langle F_t^{n-3}, A, I_t^3 \rangle \}. \end{aligned}$$

Todas las formas $\Gamma^{(2n+3)}$, $\Gamma^{(2n+4)}$, $\Xi^{(2n+6)}$ y $\Upsilon^{(2n+8)}$ son análogas a los invariantes de Pontrjagin–Chern \mathcal{P}_{2n} de la usuales teorías de gauge, en el sentido que son invariantes de gauge, cerradas e independientes de la métrica.

En Refs. [7–9] fueron encontradas expresiones explícitas y equivalentes para las formas $\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+m)}$ las cuales difieren en término términos de borde $\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+m)} \sim \mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+m)} + d\varphi^{(2n+m-1)}$. Esto no presenta inconsistencias ya que todas dichas expresiones son definidas sólo localmente.

3.3. Álgebras diferenciales libres

Es esta sección, haremos una breve revisión de las álgebras diferenciales libres, su aplicación al caso de teorías de gauge en gravedad y del formalismo de D’Auria–Fre. Los resultados mostrados aquí serán utilizados en el resto de la tesis.

3.3.1. Ecuación de Maurer–Cartan

Para introducir el concepto de álgebra diferencial libre, es conveniente comenzar analizando de las ecuaciones de Maurer–Cartan. Estas ecuaciones corresponden a la formulación dual de un álgebra de Lie. En efecto, dado un grupo de Lie G , su correspondiente álgebra de Lie está definida en el espacio tangente a la identidad de la variedad del grupo y caracteriza las propiedades locales de éste. Si $\{T_a\}_{a=1}^{\dim G}$ es base del álgebra de Lie \mathfrak{g} , entonces los generadores T_a satisfacen ciertas relaciones de conmutación

$$[T_a, T_b] = C_{ab}{}^c T_c, \quad (3.24)$$

donde los coeficientes C_{ab}^c son llamados constantes de estructura y deben ser tales que se cumpla la identidad de Jacobi

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_c, [T_a, T_b]] + [T_b, [T_c, T_a]] = 0. \quad (3.25)$$

Dado un elemento de un grupo $g(y) = \exp(y^a T_a) \in G$, la 1-forma invariante izquierda

$$\omega(y) = g^{-1}(y)dg(y), \quad (3.26)$$

pertenece al álgebra de Lie y puede escribirse en términos de su base

$$\omega(y) = \omega^a(y)T_a. \quad (3.27)$$

El conjunto de 1-formas $\omega^a(y)$ define una base cotangente sobre G . De esta forma, si en lugar de considerar el espacio tangente, consideramos una base de 1-formas $\{\omega^a\}_{a=1}^{\dim G}$ del espacio cotangente, que satisfacen la condición de dualidad $\omega^a(T_b) = \delta_b^a$, entonces los elementos de la base dual satisfacen las ecuaciones de Maurer–Cartan

$$d\omega^a + \frac{1}{2}C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c = 0. \quad (3.28)$$

La identidad de Jacobi para las constantes de estructura puede ser obtenida a partir de la condición de integrabilidad $d^2 = 0$ y las ecuaciones de Maurer–Cartan. En efecto, tomando la derivada exterior a (3.28) se encuentra

$$d^2\omega^a = -\frac{1}{2}C_{bc}^a C_{ef}^b \omega^e \wedge \omega^f \wedge \omega^c = 0. \quad (3.29)$$

Estas dos maneras de describir un álgebra de Lie son completamente equivalentes. Sin embargo, considerar álgebras de Lie duales tiene la ventaja que ellas pueden ser extendidas al caso de p -formas con $p > 1$. Dicha generalización conduce al concepto de álgebra diferencial libre.

Es de interés notar que, en una teoría de gauge, los campos A^a asociados a los generadores de simetría T_a satisfacen ecuaciones similares a las de Maurer–Cartan

en la definición de la 2-forma curvatura. En efecto,

$$F = dA + \frac{1}{2} [A, A],$$

$$F^a = dA^a + \frac{1}{2} C_{bc}^a A^b \wedge A^c.$$

Aquí vemos que cuando la curvatura es nula, se obtienen las ecuaciones de Maurer–Cartan escritas en términos los campos de gauge.

3.3.2. El concepto de álgebra diferencial libre

Las álgebras diferenciales libres generalizan el concepto de álgebra de Lie, de modo tal que las ecuaciones de Maurer–Cartan acepten, en general, p -formas [29, 30, 32].

Sea M una variedad arbitraria y sea $\{\Theta^{A_1(p_1)}, \Theta^{A_2(p_2)}, \dots, \Theta^{A_n(p_n)}\}$ un conjunto base de formas exteriores definidas sobre \mathcal{M} , rotuladas por un índice A y por el grado p de la forma, el cual puede ser diferente para diferentes valores de A . Esto significa que cada p_i toma valores $0, 1, 2, \dots, N$ mientras que $i = 1, 2, \dots, n$.

La derivada exterior $d\Theta^{A(p)}$ puede ser expresada como una combinación lineal de los elementos de la base, lo cual conduce a escribir una ecuación de Maurer–Cartan generalizada en la forma

$$d\Theta^{A(p)} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} \Theta^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)} = 0, \quad (3.30)$$

donde los coeficiente $C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)}$ son llamados constantes de estructura generalizadas. Aquí, N es igual a $p_{\text{máx}} + 1$, siendo $p_{\text{máx}}$ el grado máximo en el conjunto $\{\Theta^{A(p)}\}$. La simetría de las constantes $C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)}$ es inducida por la permutación de las formas $\Theta^{A(p)}$ en el producto cuña y son distintas de cero sólo si

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = p + 1. \quad (3.31)$$

La ecuación (3.30) es autoconsistente si y sólo si $d^2\Theta^{A(p)}$ es idénticamente cero. Esto significa que la aplicación de d a (3.30) conduce a las siguientes condiciones de

integrabilidad

$$d^2\Theta^{A(p)} + d\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} \Theta^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)}\right) = 0,$$

de manera que

$$\sum_{n=1}^N C_{B_1(p_1)B_2(p_2)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} d\Theta^{B_1(p_1)} \wedge \Theta^{B_2(p_2)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)} = 0. \quad (3.32)$$

Pero, de (3.30) sabemos que podemos escribir $d\Theta^{B_1(p_1)}$ en términos de las p -formas de la base

$$d\Theta^{B_1(p_1)} = -\sum_{m=1}^N \frac{1}{m} C_{D_1(q_1)\dots D_m(q_m)}^{B_1(p_1)} \Theta^{D_1(q_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{D_m(q_m)}. \quad (3.33)$$

De (3.33) y (3.32) tenemos

$$\sum_{n,m=1}^N \frac{1}{m} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} C_{D_1(q_1)\dots D_m(q_m)}^{B_1(p_1)} \Theta^{D_1(q_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{D_m(q_m)} \wedge \Theta^{B_2(p_2)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)} = 0. \quad (3.34)$$

Esta ecuación es conocida como identidad de Jacobi generalizada.

Definición:

Sea $\{\Theta^{A(p)}\}$ un conjunto de formas exteriores definidas sobre \mathcal{M} . Si $d\Theta^{A(p)}$ puede ser expandida en la base $\{\Theta^{A(p)}\}$ en la forma

$$d\Theta^{A(p)} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} \Theta^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)} = 0, \quad (3.35)$$

y las constantes de estructura generalizadas satisfacen la identidad de Jacobi gene-

ralizada

$$\sum_{n,m=1}^N C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} C_{D_1(q_1)\dots D_m(q_m)}^{B_1(p_1)} \Theta^{D_1(q_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{D_m(q_m)} \wedge \Theta^{B_2(p_2)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)} = 0, \quad (3.36)$$

entonces (3.35) y (3.36) definen un álgebra diferencial libre.

Ejemplo:

El álgebra de Lie ordinaria es obtenida cuando todas las formas Θ tienen el grado $p = 1$. En este caso $p_1 = 1$, $p_2 = 1$ y $p = 1$. Por lo tanto, $p_1 + p_2 = 2$ y $N = 2$. Con esta información, (3.35) toma la forma,

$$d\Theta^{A(1)} = -\frac{1}{2} C_{B_1(1)B_2(1)}^{A(1)} \Theta^{B_1(1)} \Theta^{B_2(1)},$$

mientras que de la ecuación (3.36)

$$\frac{1}{2} C_{B_1(1)B_2(1)}^{A(1)} C_{D_1(1)D_2(1)}^{B_1(1)} \Theta^{D_1(1)} \Theta^{D_2(1)} = 0.$$

De esta manera, obtenemos las ecuaciones de Maurer–Cartan y la identidad de Jacobi un álgebra de Lie ordinaria.

3.3.3. Formalimo de D’Auria–Fre

Consideremos ahora el gaugeo de las álgebras diferenciales libres. Definimos las curvaturas F^a , $F^{A(p+1)}$ como el lado izquierdo de las ecuaciones (3.28) y (3.35) respectivamente y entonces podemos decir que las p -formas tienen curvatura nula. En el caso de las álgebras de Lie ordinarias, esto corresponde a una variedad ‘rígida’ del grupo $G = \exp(\mathfrak{g})$. Una teoría dinámica de las p -formas de una FDA puede ser construidas relajando las condiciones $F^a = 0$, $F^{A(p+1)} = 0$, es decir, considerando que los potenciales FDA A^a , $A^{A(p)}$ tienen curvatura no nula. En ese caso, los potenciales A^a forman una base cotangente en una variedad ‘blanda’ que puede entenderse como una deformación de la variedad original.

Hemos visto que existen dos maneras totalmente equivalentes de describir un álgebra de Lie. La forma de Maurer–Cartan es mas apropiada en el estudio de teorías

gravitacionales debido a que, en dicho caso, el objetivo es la construcción de acciones para potenciales asociados a un grupo. Si se comienza con las ecuaciones de Maurer–Cartan, se tiene que la transición a los potenciales es llevada a cabo reemplazando las 1-formas ω^a por un conjunto de 1-formas A^a potenciales de gauge asociados a un grupo. Este cambio conduce a la definición de curvatura

$$F^a = dA^a + \frac{1}{2}C_{bc}{}^a A^b A^c, \quad (3.37)$$

o bien,

$$F = dA + \frac{1}{2}[A, A].$$

Por medio de una diferenciación directa de (3.37) se obtiene la identidad de Bianchi, dada por

$$DF^a = dF^a + C_{bc}{}^a A^b F^c = 0. \quad (3.38)$$

Es posible extender estos conceptos, asociados a la variedad de grupo, al caso de las álgebras diferenciales libres.

3.3.4. Potenciales, curvatura e identidades de Bianchi

Sea $\{A^{B_1(p_1)}, A^{B_2(p_2)}, \dots, A^{B_n(p_n)}\}$ un conjunto de p -formas potenciales de gauge, rotuladas por un índice B y por el grado p , el cual puede ser diferente para diferentes valores de B . Esto significa que el índice i de B_i toma valores $0, \dots, n$, y que cada índice p_i toma valores de $1, \dots, n$ en forma independiente. Si consideramos las p -formas potenciales de gauge $A^{B_i(p_i)}$, como los potenciales de gauge de un álgebra diferencial libre, en la misma forma en que las componentes A^a son los potenciales de gauge de un grupo ordinario, entonces la curvatura asociada a los potenciales $A^{B_i(p_i)}$ viene dada por

$$F^{A^{(p+1)}} = dA^{A^{(p)}} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A^{(p)}} A^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge A^{B_n(p_n)}. \quad (3.39)$$

Por medio de una aplicación directa del operador derivada exterior, es posible demostrar que las formas de curvatura verifican una identidad diferencial conocida como

identidad de Bianchi generalizada

$$\begin{aligned}
 dF^{A(p+1)} &+ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} F^{B_1(p_1+1)} \wedge A^{B_2(p_2)} \wedge \dots \wedge A^{B_n(p_n)} \\
 &+ \dots + (-1)^{p_1+\dots+p_{n-1}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} A^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge A^{B_{n-1}(p_{n-1})} \wedge F^{B_2(p_2+1)} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Esta identidad induce otra definición. Si $H^{A(p+1)}$ es un conjunto de $(p+1)$ -formas, entonces la combinación

$$\begin{aligned}
 \nabla H^{A(p+1)} &= dH^{A(p+1)} + \sum_{n=1}^N C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} H^{B_1(p_1+1)} \wedge A^{B_2(p_2)} \wedge \dots \wedge A^{B_n(p_n)} \\
 &+ \dots + (-1)^{p_1+\dots+p_{n-1}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} A^{B_1(p_1)} \\
 &\wedge \dots \wedge A^{B_{n-1}(p_{n-1})} \wedge H^{B_2(p_2+1)},
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

es llamada derivada covariante adjunta de $H^{A(p+1)}$. Con esta definición la identidad de Bianchi establece que la derivada covariante adjunta de la curvatura es cero tal como sucede con los grupos ordinarios.

Formas compuestas

Un tema de interés para los objetivos de esta tesis, es analizar si un álgebra diferencial libre puede ser reducida a un grupo de Lie. Esta interrogante aparece de modo natural cuando se intenta identificar la variedad sobre la cual las formas invariantes izquierdas $\Theta^{A(p)}$ o los potenciales $A^{B(p)}$ están definidas. Puesto que hasta ahora, la dimensión de \mathcal{M} no ha sido fijada, tampoco se ha establecido sobre cuantos vectores tangentes independientes T_a pueden ser proyectadas las ecuaciones de Maurer–Cartan generalizadas. En general la ecuación (3.35) define un álgebra diferencial libre. Las posibles extensiones de un álgebra de Lie \mathfrak{g} han sido estudiadas en Refs. [29, 30] y se fundan en la existencia de las clases de cohomología de Chevalley en el álgebra de Lie [32].

Para que la variedad \mathcal{M} sea la un grupo de Lie ordinario, las ecuaciones de Maurer–Cartan generalizadas deben poder escribirse como las de un álgebra de Lie. Esto significa que la variedad \mathcal{M} debe tener una dimensión mínima $d = \dim \mathcal{M}$ que admita las formas $\Theta^{A(p)}$ y que además admita una base $T(\mathcal{M})$ de vectores tangentes invariantes izquierdos de un álgebra de Lie \mathfrak{g} que verifiquen las relaciones de conmutación

$$[T_a, T_b] = C_{ab}^c T_c,$$

y que el valor que toma $\Theta^{A(p)}$ al actuar sobre una combinación de p vectores tangentes T_a , sea una constante $K_{a_1 \dots a_p}^{A(p)}$, es decir,

$$\Theta^{A(p)}(T_{a_1}, \dots, T_{a_p}) = \frac{1}{p} K_{a_1 \dots a_p}^{A(p)}. \quad (3.42)$$

Para saber si esto es posible, debemos considerar la descripción dual de álgebra de Lie, es decir, en términos de las 1-formas invariantes izquierdas. Tomando en cuenta la relación de dualidad entre los vectores T_a y las correspondientes 1-formas ω^a , la ecuación (3.42) es equivalente a

$$\Theta^{A(p)} = \frac{1}{p} K_{a_1 \dots a_p}^{A(p)} \omega^{a_1} \wedge \dots \wedge \omega^{a_p}. \quad (3.43)$$

Diferenciando directamente las ecuaciones (3.43) se tiene

$$d\Theta^{A(p)} = K_{a_1 a_2 \dots a_p}^{A(p)} d\omega^{a_1} \wedge \omega^{a_2} \wedge \dots \wedge \omega^{a_p}, \quad (3.44)$$

luego, reemplazando las ecuaciones de Maurer–Cartan del álgebra de Lie, las ecuaciones (3.44) toman la forma

$$d\Theta^{A(p)} = -\frac{1}{2} K_{a_1 a_2 \dots a_p}^{A(p)} C_{bc}^{a_1} \omega^b \wedge \omega^c \wedge \omega^{a_2} \wedge \dots \wedge \omega^{a_p}.$$

Por otro lado, utilizando (3.30) podemos escribir $d\Theta^{A(p)}$ en términos de los elementos de la base, es decir,

$$d\Theta^{A(p)} = -\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1) \dots B_n(p_n)}^{A(p)} \Theta^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge \Theta^{B_n(p_n)}, \quad (3.45)$$

de modo que para que sea posible identificar los potenciales del álgebra diferencial libre en términos de los potenciales del álgebra de Lie, debe tenerse

$$\Theta^{B_1(p_1)} = \frac{1}{p_1} K_{b_1^1 \dots b_{p_1}^1} \omega^{b_1^1} \wedge \dots \wedge \omega^{b_{p_1}^1}, \quad (3.46)$$

⋮

$$\Theta^{B_n(p_n)} = \frac{1}{p_n} K_{b_1^n \dots b_{p_n}^n} \omega^{b_1^n} \wedge \dots \wedge \omega^{b_{p_n}^n}. \quad (3.47)$$

Cualquier solución de las ecuaciones algebraicas (3.46-3.47) conduce a interpretar el álgebra diferencial libre como un álgebra de Lie y reduce la teoría a estar definida sobre la variedad de un grupo ordinario. Es importante notar que dicha solución no es necesariamente única.



Capítulo 4

Teorías de gauge y arreglos diferenciales

4.1. Preliminares

En esta sección, formularemos las teorías de gauge extendidas en términos de lo que llamaremos arreglos diferenciales, o bien formas diferenciales libres. Si \mathcal{M} es una variedad arbitraria, entonces una forma diferencial libre es un arreglo $V = (V^{(0)}, \dots, V^{(D)})$ o conjunto de formas exteriores definidas sobre \mathcal{M} y rotuladas por el grado $p = 0, 1, \dots, D$ de la forma, el cual es diferente para cada componente del arreglo. Adicionalmente, cada forma componente del arreglo está evaluada en un álgebra de Lie \mathfrak{g} , de generadores T_a , es decir,

$$V^{(p)} = \frac{1}{p!} V_{\mu_1 \dots \mu_p}^a dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \otimes T_a, \quad p = 0, \dots, D.$$

Denotaremos con $\Omega(M^{(D)})$ al conjunto de arreglos construidos a partir de los espacios $\Omega^p(M^{(D)})$ con $p = 0, \dots, D$. Dado que $\Omega^p(M^{(D)})$ tiene dimensión

$$\dim(\Omega^p(M^{(D)})) = \binom{D}{p},$$

tenemos que un arreglo de $\Omega(M^{(D)})$ tiene

$$\sum_{p=0}^D \binom{D}{p} = 2^D,$$

componentes.

Para esto, introduciremos una estructura algebraica diferente, con base $\{\theta_{(p)}\}_{p=0}^D$, de modo que podemos escribir $V = \sum_p V^{(p)}\theta_{(p)}$. La suma de arreglos es definida como

$$\begin{aligned} + : \Omega(M^{(D)}) \times \Omega(M^{(D)}) &\longrightarrow \Omega(M^{(D)}), \\ V + W &= (V^{(0)}, \dots, V^{(D)}) + (W^{(0)}, \dots, W^{(D)}) = ((V + W)^{(0)}, \dots, (V + W)^{(D)}), \end{aligned}$$

donde

$$(V + W)^{(p)} = V^{(p)} + W^{(p)},$$

que en términos de elementos $\theta_{(p)}$ toma la forma

$$V + W = \sum_p (V^{(p)} + W^{(p)})\theta_{(p)} = \sum_p (V + W)^{(p)}\theta_{(p)}.$$

El producto de arreglos es definido como

$$\begin{aligned} \circ : \Omega(M^{(D)}) \times \Omega(M^{(D)}) &\longrightarrow \Omega(M^{(D)}), \\ V \circ W &= ((V \circ W)^{(0)}, \dots, (V \circ W)^{(D)}), \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde cada elemento $(V \circ W)^{(p)}$ del arreglo producto es una p -forma y una función de las componentes $(V^{(p)}, W^{(q)})$. En términos de coeficientes matriciales el producto \circ puede escribirse como

$$(V \circ W)^{(p)} = \sum_{q,r} \alpha_{(q)(r)}^{(p)} V^{(q)} \wedge W^{(r)}, \tag{4.2}$$

lo que en términos de los elementos $\theta_{(p)}$ toma la forma

$$(V \circ W) = \left(\sum_q V^{(q)} \theta_{(q)} \right) \circ \left(\sum_r W^{(r)} \theta_{(r)} \right) = \left(\sum_{q,r} V^{(q)} \wedge W^{(r)} \right) \theta_{(q)} \circ \theta_{(r)}. \quad (4.3)$$

Puesto que

$$\begin{aligned} (V \circ W) &= \sum_p (V \circ W)^{(p)} \theta_{(p)} = \sum_p \left(\sum_{q,r} \alpha_{(q)(r)}^{(p)} V^{(q)} \wedge W^{(r)} \right) \theta_{(p)} \\ &= \sum_{q,r} (V^{(q)} \wedge W^{(r)}) \left(\sum_p \alpha_{(q)(r)}^{(p)} \theta_{(p)} \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

tenemos que la comparación de (4.3) con (4.4) conduce a

$$\theta_{(q)} \circ \theta_{(r)} = \sum_p \alpha_{(q)(r)}^{(p)} \theta_{(p)},$$

donde las constantes de estructura del producto \circ componen matrices cuadradas $\alpha^{(p)}$ de $(D+1) \times (D+1)$.

Por otro lado, dado que en el lado izquierdo de (4.2) tenemos una p -forma y al lado derecho una $(q+r)$ -forma, debe cumplirse que $\alpha_{(q)(r)}^{(p)} = 0$ cuando $q+r \neq p$. Esto significa que las matrices $\alpha^{(p)}$ pueden ser escritas en términos de una submatriz $\tilde{\alpha}^{(p)}$ de $(p+1) \times (p+1)$ que sólo tiene componentes no nulas en su antidiagonal, es decir,

$$\alpha^{(p)} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{\alpha}^{(p)} & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{O}_{D-p} \end{array} \right),$$

siendo \mathbb{O}_{D-p} una matriz nula de $(D-p) \times (D-p)$.

Para tener una idea de la forma de los coeficientes de las matrices $\alpha^{(p)}$, haremos una comparación entre la estructura algebraica mostrada hasta aquí y las álgebras diferenciales libres estudiadas anteriormente. Para esto escribamos el conjunto de potenciales de gauge $(A^{(0)}, \dots, A^{(D)})$ como las componentes del arreglo

$$A = \sum_p A^{(p)} \theta_{(p)},$$

de modo tal que cada componente viene dada como una p -forma evaluada en un álgebra de Lie

$$A^{(p)} = [A^{(p)}]^a T_a = \left[\frac{1}{p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p}^a dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \right] T_a.$$

Esto significa que las correspondientes intensidades de campo asociadas a cada $A^{(p)}$ pueden ser escritas como las componentes otro arreglo

$$F = \sum_p F^{(p)} \theta_{(p)},$$

el cual puede ser contruido combinando el parentesis de Lie de \mathfrak{g} con el producto \circ . Para poder definir el arreglo curvatura definimos el arreglo derivada exterior como

$$d = \theta_{(1)} d,$$

de modo que, dado un arreglo X , podemos escribir

$$\begin{aligned} d \circ X &= (\theta_{(1)} d) \circ \left(\sum_r X^{(r)} \theta_{(r)} \right) = \sum_r dX^{(r)} (\theta_{(1)} \circ \theta_{(r)}) \\ &= \sum_r \alpha_{(1)(r)}^{(r+1)} dX^{(r)} \theta_{(r+1)}, \end{aligned}$$

de donde vemos que

$$(d \circ X)^{(r+1)} = \alpha_{(1)(r)}^{(r+1)} dX^{(r)}. \quad (4.5)$$

Con el objeto definir las transformaciones de gauge de los campos potenciales, es necesario introducir un arreglo de parametros ξ compuesto por diferentes formas parámetros. Generalizando la idea de las teorías de gauge convencionales, definimos las transformaciones de los campos de gauge $A^{(p)}$ en términos de las derivadas de los parámetros $\xi^{(q)}$ que componen el arreglo ξ . Para no perder generalidad, definimos I_0 e I_1 como los conjuntos de números naturales, correspondientes a los ordenes de las formas $\xi^{(p)}$ y A^p respectivamente. Notemos que por consistencia, para cada elemento $q \in I_1$ debe haber un elemento $r = q - 1 \in I_0$. Ahora mostraremos que este formalismo, basados en arreglos, permite generar una clase especial de álgebra

diferencial libre en la que todas las constantes de estructura pueden ser obtenidas a partir de las constantes de estructura de un álgebra de Lie [33, 34].

Para esto recordemos que si consideramos las p -formas potenciales de gauge como los potenciales de gauge de un álgebra diferencial libre, en la misma forma en que las componentes A^a son los potenciales de gauge de un grupo ordinario, entonces la curvatura asociada a las p_i -formas $A^{B_i(p_i)}$ viene dada por

$$F^{A(p+1)} = dA^{A(p)} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} C_{B_1(p_1)\dots B_n(p_n)}^{A(p)} A^{B_1(p_1)} \wedge \dots \wedge A^{B_n(p_n)}. \quad (4.6)$$

Si nos restringimos al caso donde las únicas constantes de estructura no nulas son aquellas con dos índices bajos, entonces la ecuación (4.6) toma la forma

$$F^{A(p+1)} = dA^{A(p)} + \frac{1}{2} C_{B(q)C(r)}^{A(p)} A^{B(q)} \wedge A^{C(r)}. \quad (4.7)$$

Definiendo, en analogía con (4.7), las componentes del arreglo F como

$$F^{(p+1)} = (d \circ A)^{(p+1)} + \sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+1)} A^{(q)} A^{(r)},$$

donde, los coeficientes $\gamma_{(q)(r)}^{(p+1)}$ satisfacen la siguiente regla bajo la permutación de sus índices bajos

$$\gamma_{(q)(r)}^{(p+1)} = (-1)^{qr+1} \gamma_{(r)(q)}^{(p+1)}, \quad \forall r, q \in I_1,$$

podemos escribir las componentes de F en términos de conmutadores de los campos de gauge

$$F^{(p+1)} = (d \circ A)^{(p+1)} + \frac{1}{2} \sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+1)} [A^{(q)}, A^{(r)}]. \quad (4.8)$$

Escribiendo esta ecuación en el lenguaje de la FDA se encuentra

$$F^{A(p+1)} = \alpha_{(1)(p)}^{(p+1)} dA^{A(p)} + \frac{1}{2} \sum_{q,r \in I_1} C_{BC}^A \gamma_{(q)(r)}^{(p+1)} A^{B(q)} A^{C(r)},$$

donde hemos usado la ecuación (4.5) y el hecho que $[A^{(q)}, A^{(r)}]$ es un parentesis de Lie. La comparacion con la expresion (4.7) conduce por consistencia a las siguientes

condiciones

$$\begin{aligned}\alpha_{(1)(p)}^{(p+1)} &= 1, \\ C_{BC}^A \gamma_{(q)(r)}^{(q+r)} &= C_{B(q)C(r)}^{A(q+r)},\end{aligned}$$

válidas para $p, q, r \in I_1$. Aplicando el arreglo derivada sobre la ecuación (4.8) se encuentra

$$(d \circ F)^{(p+2)} = \sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+1)} (dA^{(q)} A^{(r)} + (-1)^q A^{(q)} dA^{(r)}),$$

o bien,

$$(d \circ F)^{(p+2)} = \sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+1)} [dA^{(q)}, A^{(r)}].$$

Utilizando la ecuación (4.7) podemos escribir

$$(d \circ F)^{(p+2)} - \sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+1)} [F^{(q+1)}, A^{(r)}] = - \sum_{q,r \in I_1} \sum_{s,t \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+1)} \gamma_{(s)(t)}^{(q+1)} [A^{(s)} A^{(t)}, A^{(r)}],$$

y luego, definiendo el operador derivada covariante de un arreglo $(\mathbb{D} \circ X)$, como

$$(\mathbb{D} \circ X)^{(p+2)} = (d \circ X)^{(p+2)} - \sum_q \sum_{r \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+1)} [X^{(q+1)}, A^{(r)}],$$

la cual, debe estar en consistencia con la definición de derivada covariante ∇ en el caso de las álgebras diferenciales libres, tenemos que las componentes de la derivada covariante del arreglo curvatura vienen dadas por

$$(\mathbb{D} \circ F)^{(p+2)} = - \sum_{q,r \in I_1} \sum_{s,t \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+1)} \gamma_{(s)(t)}^{(q+1)} [A^{(s)} A^{(t)}, A^{(r)}]. \quad (4.9)$$

Si evaluamos la ecuación (4.9) en el caso de curvatura nula encontramos la siguiente identidad

$$\sum_{q,r \in I_1} \sum_{s,t \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+1)} \gamma_{(s)(t)}^{(q+1)} [[A^{(s)}, A^{(t)}], A^{(r)}] = 0,$$

que puede ser escrita en la forma

$$\sum_{q,r \in I_1} \sum_{s,t \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+1)} \gamma_{(s)(t)}^{(q+1)} A^{A(s)} A^{B(t)} A^{C(r)} [[T_A, T_B], T_C] = 0,$$

o bien, en términos de las constantes de estructura de \mathfrak{g}

$$\sum_{q,r \in I_1} \sum_{s,t \in I_1} C_{D(q)C(r)}^{E(p+1)} C_{A(s)B(t)}^{D(q+1)} A^{A(s)} A^{B(t)} A^{C(r)} = 0.$$

Esta ecuación corresponde a la identidad de Jacobi y por lo tanto, la correspondiente identidad de Bianchi para arreglos puede ser escrita como

$$\mathbb{D} \circ F = 0. \quad (4.10)$$

En analogía con las usuales teorías de gauge, definimos las transformaciones de gauge de los potenciales en la forma

$$\delta A^{(p+1)} = (d \circ \xi)^{(p+1)} - \sum_{q,r} \gamma_{(q)(r)}^{(p)} [\xi^{(q+1)}, A^{(r)}], \quad (4.11)$$

pero ahora restringiéndonos al caso en que I_0 e I_1 están compuestos únicamente de números pares e impares respectivamente. Volviendo a rotular los índices, se encuentra que la ecuación (4.11) puede ser escrita en la forma

$$\delta A^{(p+1)} = d\xi^p + \sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q-1)(r)}^{(p+1)} [A^{(r)}, \xi^{(q-1)}]. \quad (4.12)$$

Esto implica que las curvaturas transforman como

$$\delta F^{(p+2)} = d\delta A^{(p+1)} + \sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+2)} [\delta A^{(q)}, A^{(r)}],$$

o bien, en términos de las componentes de ξ

$$\begin{aligned} \delta F^{(p+2)} &= \sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q-1)(r)}^{(p+1)} [dA^{(r)}, \xi^{(q-1)}] - \sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q-1)(r)}^{(p+1)} [A^{(r)}, d\xi^{(q-1)}] \\ &+ \sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+2)} [d\xi^{(q-1)}, A^{(r)}] + \sum_{q,r \in I_1} \sum_{s,t \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+2)} \gamma_{(s-1)(t)}^{(q)} [[A^{(t)}, \xi^{(s-1)}], A^{(r)}]. \end{aligned}$$

Dado que las transformaciones de gauge de la curvatura deben ser homogéneas, se tiene la siguiente condición para los coeficientes $\gamma_{(q)(r)}^{(p+2)}$

$$\sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+2)} [d\xi^{(q-1)}, A^{(r)}] - \sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q-1)(r)}^{(p+1)} [A^{(r)}, d\xi^{(q-1)}] = 0,$$

que puede escribirse de modo más conveniente como

$$\gamma_{(q)(r)}^{(p+2)} = -\gamma_{(q-1)(r)}^{(p+1)} \text{ para } q, r \in I_1. \quad (4.13)$$

Esto significa que las curvaturas transforman homogéneamente como

$$\delta F^{(p+2)} = \sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q-1)(r)}^{(p+1)} [dA^{(r)}, \xi^{(q-1)}] + \sum_{q,r \in I_1} \sum_{s,t \in I_1} \gamma_{(q)(r)}^{(p+2)} \gamma_{(s-1)(t)}^{(q)} [[A^{(t)}, \xi^{(s-1)}], A^{(r)}]. \quad (4.14)$$

Introduciendo la condición (4.13) en (4.14) se encuentra:

$$\delta F^{(p+2)} = d\delta A^{(p+1)} - \sum_{q,r \in I_1} \gamma_{(q-1)(r)}^{(p+1)} [\delta A^{(q)}, A^{(r)}], \quad (4.15)$$

de donde podemos ver que

$$\delta F = \mathbb{D} \circ \delta A,$$

es decir, las curvaturas transforman de manera análoga al caso de las usuales teorías de gauge.

4.2. Exponenciación

La definición de producto introducido para arreglos, permite definir la exponencial de un elemento de $\Omega(M^{(D)})$ compuesto únicamente por formas de orden par.

Sea ϕ un arreglo

$$\phi = \sum_p \phi^{(p)} \theta_{(p)},$$

con $p \in I_0$. Exigiendo que el producto \circ sea asociativo, podemos definir el arreglo $e^\phi \in \Omega(M^{(D)})$ en la forma

$$X = e^\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi^n = \mathbb{I} + \phi + \frac{1}{2} \phi \circ \phi + \frac{1}{3!} \phi \circ \phi \circ \phi + \dots$$

Esta definición requiere que exista un arreglo identidad que denotaremos

$$\mathbb{I} = \sum_p^{(p)} \mathbb{I}^{(p)} \theta_{(p)}.$$

Si exigimos que \mathbb{I} sea una identidad por la derecha, se tiene

$$\begin{aligned} X \circ \mathbb{I} &= X, \\ \sum_{q,r} \alpha_{(q)(r)}^{(p)} X^{(q)} \mathbb{I}^{(r)} &= X^{(p)}. \end{aligned}$$

De aquí podemos ver que las primeras componentes de \mathbb{I} deben verificar las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_{(q)(r)}^{(0)} X^{(q)} \mathbb{I}^{(r)} &= \alpha_{(0)(0)}^{(0)} X^{(0)} \mathbb{I}^{(0)} = X^{(0)}, \\ &\vdots \\ \alpha_{(q)(r)}^{(D)} X^{(q)} \mathbb{I}^{(r)} &= \alpha_{(D)(0)}^{(D)} X^{(D)} \mathbb{I}^{(0)} + \dots + \alpha_{(0)(D)}^{(D)} X^{(0)} \mathbb{I}^{(D)} = X^{(D)}. \end{aligned}$$

Dado que cada $X^{(p)}$ es independiente, debe tenerse que para todo $p \in I_0$ son válidas las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_{(p)(0)}^{(p)} X^{(p)} \mathbb{I}^{(0)} + \alpha_{(p-1)(1)}^{(p)} X^{(p-1)} \mathbb{I}^{(1)} + \dots + \alpha_{(0)(p)}^{(p)} X^{(0)} \mathbb{I}^{(p)} &= X^{(p)}, \\ \begin{cases} \alpha_{(0)(0)}^{(0)} \mathbb{I}^{(0)} = \alpha_{(1)(0)}^{(1)} \mathbb{I}^{(0)} = \dots = \alpha_{(p)(0)}^{(p)} \mathbb{I}^{(0)} = 1, \\ \alpha_{(p-1)(1)}^{(p)} \mathbb{I}^{(1)} = \dots = \alpha_{(0)(p)}^{(p)} \mathbb{I}^{(p)} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Aquí existe una arbitrariedad en la elección de $\alpha_{(p)(0)}^{(p)}$ y $\mathbb{I}^{(0)}$. Por simplicidad escogemos

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^{(0)} &= 1, \\ \alpha_{(p)(0)}^{(p)} &= 1,\end{aligned}$$

donde 1 es la identidad del grupo G . Esta última consideración tiene como consecuencia que

$$\mathbb{I}^{(1)} = 0, \quad \mathbb{I}^{(2)} = 0, \quad \dots \quad \mathbb{I}^{(D)} = 0,$$

de modo que el arreglo identidad es dado por

$$\mathbb{I} = 1\theta_{(0)}.$$

Si además exigimos que \mathbb{I} sea la identidad por la izquierda, se tiene

$$\sum_{q,r} \alpha_{(q)(r)}^{(p)} \mathbb{I}^{(q)} X^{(r)} = X^{(p)},$$

repetiendo el proceso del caso anterior, esta ecuación toma la forma

$$\alpha_{(0)(p)}^{(p)} \mathbb{I}^{(0)} X^{(p)} = X^{(p)},$$

y por lo tanto, $\alpha_{(0)(p)}^{(p)} \mathbb{I}^{(0)} = 1$. En resumen tenemos

$$\alpha_{(0)(p)}^{(p)} = \alpha_{(p)(0)}^{(p)} = 1 \quad \forall p \in I_0.$$

4.3. Elemento inverso

Sean ahora $X = \exp \phi$ e $Y = \exp \varphi$ dos arreglos tales que $X \circ Y = \mathbb{I}$. En aproximación de primer orden se tiene

$$\begin{aligned}X &= e^\phi = \mathbb{I} + \phi, \\ Y &= e^\varphi = \mathbb{I} + \varphi.\end{aligned}$$

Las componentes de la ecuación $X \circ Y = \mathbb{I}$ pueden ser explícitamente vistas como

$$X^{(0)}Y^{(0)} = 1, \quad (4.16)$$

$$\alpha_{(q)(r)}^{(p)} X^{(q)}Y^{(r)} = 0 \text{ para } p \neq 0. \quad (4.17)$$

A partir (4.16) podemos escribir

$$\alpha_{(0)(0)}^{(0)} (1 + \phi^{(0)}) (1 + \varphi^{(0)}) = 1,$$

y dado que cada $\alpha_{(0)(0)}^{(0)} = 1$ encontramos

$$\phi^{(0)} = -\varphi^{(0)}.$$

Por otra parte, (4.17) vemos que para $p > 0$

$$\alpha_{(p)(0)}^{(p)} X^{(p)}Y^{(0)} + \dots + \alpha_{(0)(p)}^{(p)} X^{(0)}Y^{(p)} = 0,$$

pero, dado que trabajamos a primer orden en $\varphi^{(p)}$ y $\phi^{(p)}$, únicamente el primer y último término prevalecen

$$\phi^{(p)} (1 + \varphi^{(0)}) + (1 + \phi^{(0)}) \varphi^{(p)} = 0.$$

Así encontramos $\phi^{(p)} + \varphi^{(p)} = 0$. Esto significa que $\varphi = -\phi$, y al igual que en el caso usual, se tiene $e^\phi \circ e^{-\phi} = \mathbb{I}$.

4.4. Asociatividad

Como fue mencionado anteriormente, exigiremos que el producto \circ sea asociativo, es decir,

$$(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z),$$

o bien, en términos de las componentes de los arreglos X, Y, Z

$$\sum_{q,r} \alpha_{(q)(r)}^{(p)} \left(\sum_{s,t} \alpha_{(s)(t)}^{(q)} X^{(s)}Y^{(t)} \right) Z^{(r)} = \sum_{q,r} \alpha_{(q)(r)}^{(p)} X^{(q)} \left(\sum_{s,t} \alpha_{(s)(t)}^{(r)} Y^{(s)} \circ Z^{(t)} \right),$$

luego, re-rotulando índices se tiene

$$\sum_{q,r,s,t} \left(\alpha_{(q)(r)}^{(p)} \alpha_{(s)(t)}^{(q)} - \alpha_{(s)(q)}^{(p)} \alpha_{(t)(r)}^{(q)} \right) X^{(s)} Y^{(t)} Z^{(r)} = 0,$$

y finalmente, dado que cada factor $X^{(s)} Y^{(t)} Z^{(r)}$ debe ser independiente, tenemos

$$\sum_q \left(\alpha_{(q)(r)}^{(p)} \alpha_{(s)(t)}^{(q)} - \alpha_{(s)(q)}^{(p)} \alpha_{(t)(r)}^{(q)} \right) = 0.$$

Ahora, recordando que coeficientes $\alpha_{(q)(r)}^{(p)} = 0$ para $q + r \neq p$, podemos escribir la ecuación de asociatividad como

$$\alpha_{(p-r)(r)}^{(p)} \alpha_{(s)(p-r-s)}^{(p-r)} - \alpha_{(s)(p-s)}^{(p)} \alpha_{(p-r-s)(r)}^{(p-s)} = 0.$$

Una importante consecuencia de esto se obtiene al considerar $r = s$

$$\alpha_{(p-r)(r)}^{(p)} \alpha_{(r)(p-2r)}^{(p-r)} = \alpha_{(r)(p-r)}^{(p)} \alpha_{(p-2r)(r)}^{(p-r)},$$

de aquí vemos que la matriz $\alpha_{(p-r)(r)}^{(p)}$ deben tener la misma simetría que $\alpha_{(r)(p-2r)}^{(p-r)}$ en sus índices bajos. En adelante, describiremos la simetría de estas matrices por medio de una función genérica

$$\alpha_{(q)(r)}^{(p)} = (-1)^{f(q,r)} \alpha_{(r)(q)}^{(p)}.$$

4.5. Regla de Leibniz

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} [d \circ (X \circ Y)]^{(p)} &= \sum_{r,s,t} \alpha_{(1)(r)}^{(p)} d \left(\alpha_{(s)(t)}^{(r)} X^{(s)} Y^{(t)} \right) \\ &= \sum_{r,s,t} \alpha_{(1)(r)}^{(p)} \alpha_{(s)(t)}^{(r)} (dX^{(s)} Y^{(t)} + (-1)^s X^{(s)} dY^{(t)}), \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} [(d \circ X) \circ Y]^{(p)} &= \sum_{q,r,t} \alpha_{(q)(r)}^{(p)} \alpha_{(1)(t)}^{(q)} dX^{(t)} Y^{(r)} \\ &= \sum_{r,s,t} \alpha_{(r)(t)}^{(p)} \alpha_{(1)(s)}^{(r)} dX^{(s)} Y^{(t)}, \end{aligned}$$

tenemos que la propiedad asociativa de la operación producto \circ nos permite escribir

$$\alpha_{(1)(p-1)}^{(p)} \alpha_{(s)(t)}^{(p-1)} = \alpha_{(p-t)(t)}^{(p)} \alpha_{(1)(s)}^{(p-t)}.$$

Luego, podemos escribir la derivada del producto entre arreglos como

$$[d \circ (X \circ Y)]^{(p)} = [(d \circ X) \circ Y]^{(p)} + \sum_{s,t} \alpha_{(1)(p-1)}^{(p)} \alpha_{(s)(t)}^{(p-1)} (-1)^s X^{(s)} dY^{(t)},$$

o equivalentemente, haciendo uso de la función $f(q, r)$

$$\begin{aligned} [d \circ (X \circ Y)]^{(p)} &= [(d \circ X) \circ Y]^{(p)} \\ &+ \sum_s (-1)^{f(p-s,s)+f(s,p-s-1)+s} \alpha_{(s)(p-s)}^{(p)} X^{(s)} \alpha_{(1)(p-s-1)}^{(p-s)} dY^{(p-s-1)}. \end{aligned}$$

Esto muestra que para conocer la regla de Leibniz para arreglos, es necesario conocer la simetría de las matrices $\alpha^{(p)}$. Diferentes simetrías llevarán a una versión diferente de la regla de Leibniz.

4.6. Transformaciones de gauge

Hasta ahora hemos considerado asociatividad en el producto de arreglos. Además hemos definido la exponenciación, hemos definido el elemento neutro y el elemento inverso para exponenciales de arreglos evaluados un álgebra de Lie. Esto significa que las exponenciales de los arreglos constituyen un grupo. En analogía al caso usual, definimos la acción del grupo sobre un arreglo F como

$$F \rightarrow F' = e^{-\phi} \circ F \circ e^{\phi}.$$

De aquí vemos que la forma infinitesimal de esta ley de transformación resulta

$$F' = (I - \phi) \circ F \circ (I + \phi) = F + [F, \phi]_{\circ},$$

donde definimos el parentesis entre arreglos $[X, Y]_{\circ}$ como $[X, Y]_{\circ} = X \circ Y - Y \circ X$. De esta definición, encontramos que las componentes de $[X, Y]_{\circ}$ son dadas por

$$\begin{aligned} [X, Y]_{\circ}^{(p)} &= \sum_{q,r} \alpha_{(q)(r)}^{(p)} X^{(q)} Y^{(r)} - \sum_{q,r} \alpha_{(q)(r)}^{(p)} Y^{(q)} X^{(r)} \\ &= \sum_{q,r} \alpha_{(q)(r)}^{(p)} \left(X^{(q)} Y^{(r)} - (-1)^{f(r,q)} Y^{(r)} X^{(q)} \right). \end{aligned}$$

Para que el conmutador $[X, Y]_{\circ}$ pueda ser escrito en términos de los conmutadores de formas diferenciales, debe cumplirse que $f(r, q) = rq$, de modo que $\alpha_{(q)(r)}^{(p)} = (-1)^{qr} \alpha_{(r)(q)}^{(p)}$, y puesto que $q, r \in I_0$ se tiene

$$\alpha_{(q)(r)}^{(p)} = \alpha_{(r)(q)}^{(p)},$$

por lo que

$$[X, Y]_{\circ}^{(p)} = \sum_{q,r} \alpha_{(q)(r)}^{(p)} [X^{(q)}, Y^{(r)}].$$

En ese caso la regla de Leibniz para arreglos toma la forma usual

$$d \circ (X \circ Y) = (d \circ X) \circ Y + X \circ (d \circ Y).$$

Este resultado debe ser compatible con los coeficientes gamma. Hasta ahora hemos encontrado propiedades para los coeficientes $\alpha_{(q)(r)}^{(p)}$ para el caso en que $q, r \in I_0$, sin embargo, podemos encontrar una apropiada identificación para estos coeficientes en los casos en que un índice bajo, o ambos índices bajos están contenidos en I_1 .

La opción más simple que satisface las condiciones (4.13) es dada por

$$\alpha_{(q)(r)}^{(p+2)} = \gamma_{(q)(r)}^{(p+2)} = \begin{cases} \delta_{q+r}^{p+2} & \text{para } q, r \in I_1, \\ (-1)^q \delta_{q+r}^{p+2} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

ya que de esta forma, la ley de transformación para F toma la forma

$$\delta F^{(p+2)} = \sum_{q,r \in I_0} \delta_{q+r}^{p+2} [F^{(q)}, \xi^{(r)}]. \quad (4.18)$$

4.7. Construcción de invariantes

Sea $F = (F^{(0)}, \dots, F^{(D)})$ un arreglo de p -formas intensidades de campo rotuladas por el grado p . Es posible construir un ‘arreglo invariante topológico’ análogo al invariante de Chern-Pontrjagin de la siguiente forma

$$\chi_n = (\chi_n^{(0)}, \dots, \chi_n^{(D)}),$$

donde cada entrada corresponde a una s -forma dada por

$$\chi_n^{(s)} = \left\langle (F^{n+1})^{(s)} \right\rangle = \left\langle [F \circ \dots \circ F]^{(s)} \right\rangle,$$

y donde el parentesis $\langle \dots \rangle$ denota al operador traza simetrizada. Utilizando la forma explícita del producto \circ en términos de los coeficientes matriciales podemos escribir

$$\begin{aligned} \chi_n^{(s)} = & \left\langle \sum_{q_1, r_1} \delta_{q_1+r_1}^s F^{(q_1)} \wedge \left(\sum_{q_2, r_2} \delta_{q_2+r_2}^{r_1} F^{(q_2)} \wedge \left(\dots \sum_{q_{n-1}, r_{n-1}} \delta_{q_{n-1}+r_{n-1}}^{r_{n-2}} F^{(q_{n-1})} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \wedge \left(\sum_{q_n, q_{n+1}} \delta_{q_n+q_{n+1}}^{r_{n-1}} F^{(q_n)} \wedge F^{(q_{n+1})} \right) \right) \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.19)$$

o bien,

$$\begin{aligned} \chi_n^{(s)} = & \sum_{q_1, r_1} \dots \sum_{q_{n-1}, r_{n-1}} \sum_{q_n, q_{n+1}} \delta_{q_1+r_1}^s \delta_{q_2+r_2}^{r_1} \dots \delta_{q_{n-1}+r_{n-1}}^{r_{n-2}} \delta_{q_n+q_{n+1}}^{r_{n-1}} \\ & \times \left\langle F^{(q_1)}, F^{(q_2)}, \dots, F^{(q_{n-1})}, F^{(q_n)}, F^{(q_{n+1})} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Utilizando las propiedades de la delta de Kronecker podemos escribir la expresión anterior de un modo más cómodo

$$\chi_n^{(s)} = \sum_{q_1} \dots \sum_{q_{n+1}} \delta_{q_1+\dots+q_{n+1}}^s \left\langle F^{(q_1)}, \dots, F^{(q_{n+1})} \right\rangle, \quad (4.21)$$

De (4.21) podemos ver que el invariante descrito por la forma diferencial no nula de menor orden posible en el arreglo χ_n es una $2n + 2$ -forma dada por $\langle F^{(2)}, \dots, F^{(2)} \rangle$. Esto significa que la el arreglo χ_n es de la forma

$$\chi_n = (0, \dots, 0, \chi_n^{(2n+2)}, \chi_n^{(2n+3)}, \dots, \chi_n^{(D)}).$$

Por razones de comodidad denotaremos a las componentes de χ_n como $\chi_n^{(d)} = \chi_n^{(2n+p)}$ con $p = 0, \dots, D - 2n$. En esta notación, el resultado obtenido en la ecuación (4.21) puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\chi_n^{(2n+p)} = \sum_{(k_2, \dots, k_D) \in K_p} f_p(k_2, \dots, k_D) \langle (F^{(2)})^{k_2}, \dots, (F^{(D)})^{k_D} \rangle, \quad (4.22)$$

donde

$$f_p(k_2, \dots, k_D) = \frac{n!}{k_2! \dots k_D!}. \quad (4.23)$$

Esta expresión tiene un origen y forma diferente a la ecuación (4.21). Para obtener (4.22) fue utilizado el teorema de Newton generalizado. Ahora tenemos una sumatoria en la que cada término contiene potencias de todas las formas curvaturas $F^{(t)}$ (cada t -forma $F^{(t)}$ esta elevada a k_t). Sin embargo, los exponentes (k_2, \dots, k_D) de dichas formas curvatura son combinaciones de números muy específicas. Los coeficientes k_t son distintos de cero, sólo para t par y la suma corre únicamente sobre aquellas combinaciones de números (k_2, \dots, k_N) (donde cada k_t toma valores positivos entre 0 y $n + 1$) que están dentro de K_t , siendo K_t el conjunto de soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} k_2 + \dots + k_D &= n + 1, \\ \sum_{t=3}^D (t - 2) k_t &= p - 2. \end{aligned}$$

Ahora probaremos que las ecuaciones (4.22) y (4.23) puede reproducir los resultados similares a los obtenidos en las referencias [7–9].

Caso $p = 2$

El caso más sencillo es encontrar el invariante de Chern–Pontrjagin para el caso

donde $d = 2n + 2$. Para esto, es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$k_2 + \cdots + k_D = n + 1, \quad \sum_{t=3}^D (t-2) k_t = 0.$$

De la segunda ecuación se tiene

$$k_3 + 2k_4 + \cdots + (D-2) k_D = 0.$$

Puesto que todos los k_t no nulos son enteros positivos, se tiene $k_3 = \cdots = k_D = 0$, y entonces, de la primera ecuación se tiene $k_2 = n + 1$. Como ésta es la única solución posible tenemos que el conjunto $K_{p=2}$ sólo consta de un arreglo de números $K_0 = \{(n+1, 0, \dots, 0)\}$, de modo que $\chi_n^{(2n+2)}$ es dado por

$$\chi_n^{(2n+2)} = f_0(N, 0, \dots, 0) \left\langle (F^{(2)})^{n+1}, (F^{(3)})^0, \dots, (F^{(D)})^0 \right\rangle = \left\langle (F^{(2)})^{n+1} \right\rangle,$$

el cual, claramente coincide con el invariante topológico usual que da lugar a las conocidas formas de Chern–Simons.

Caso $p = 4$

En este caso buscamos el invariante $(2n+4)$ -dimensional. Para esto debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$k_2 + \cdots + k_D = n + 1, \quad \sum_{t=3}^D (t-2) k_t = 2.$$

Tomando en cuenta que los k_t son enteros positivos, vemos que la segunda ecuación conduce a

$$k_3 + 2k_4 = 2.$$

De aquí vemos que $k_5 = \cdots = k_D = 0$, de manera que el sistema de ecuaciones se reduce a

$$k_2 + k_4 = n + 1, \quad k_4 = 1,$$

el cual sólo tiene una solución en los enteros positivos

$$K_2 = \{(n, 0, 1, 0, \dots, 0)\}.$$

Así tenemos que el la $(2n + 4)$ -forma del arreglo χ_n ¹ es dada por

$$\chi_n^{(2n+4)} = \langle (F^{(2)})^n, F^{(4)} \rangle,$$

el cual coincide con el invariante topológico en $(2n + 4)$ -dimensiones encontrado por Antoniadis y Savvidy en Refs. [7–9].

Caso $p = 6$

En este caso buscamos el invariante $(2n + 6)$ -dimensional. Para esto debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$k_2 + \dots + k_D = n + 1, \quad \sum_{t=3}^D (t - 2) k_t = 4.$$

Tomando en cuenta que los k_t son enteros positivos, vemos que la segunda ecuación toma la forma

$$2k_4 + 3k_5 + 4k_6 = 4.$$

Luego, el sistema de ecuaciones se reduce a

$$\begin{aligned} k_2 + k_4 + k_6 &= n + 1, \\ k_4 + 2k_6 &= 2, \end{aligned}$$

el cual sólo tiene dos soluciones en los enteros positivos. Por lo tanto, el conjunto K_4 consta de dos elementos

$$K_4 = \{(n, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0), (n - 1, 0, 2, 0, 1, 0, \dots, 0)\}.$$

¹En rigor, χ no es realmente un arreglo ya que no está evaluado en el álgebra de Lie, sin embargo, seguiremos llamándolo así por simplicidad.

La componente $\chi_n^{(2n+6)}$ es entonces dada por

$$\chi_n^{(2n+6)} = \langle (F^{(2)})^n, F^{(6)} \rangle + \frac{n}{2} \langle (F^{(2)})^{n-1}, (F^{(4)})^2 \rangle$$

el cual coincide, salvo por un coeficiente numerico, con el invariante topologico en $(2n + 6)$ -dimensiones encontrado por Antoniadis y Savvidy en Refs. [7–9].

Caso $p = 8$

En este caso buscamos el invariante $(d = 2n + 8)$ -dimensional. Para esto debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$k_2 + \cdots + k_D = n + 1, \quad \sum_{t=3}^D (t - 2) k_t = 6.$$

Una vez más, de la segunda ecuación se tiene

$$2k_4 + 4k_6 + 6k_8 = 6,$$

y el sistema de ecuaciones se reduce a

$$k_2 + k_4 + k_6 = n + 1,$$

$$k_4 + 2k_6 + 3k_8 = 3.$$

Este sistema tiene tres soluciones en los enteros positivos y por lo tanto el conjunto K_6 consta de tres elementos

$$K_2 = \{(n, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0), (n - 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots, 0), (n - 2, 0, 3, 0, 0, 0, \dots, 0)\},$$

de modo que la componente χ_n^{2n+1} es dada por

$$\chi_n^{(2n+8)} = \langle (F^{(2)})^n, F^{(8)} \rangle + n \langle (F^{(2)})^{n-1}, F^{(4)}, F^{(6)} \rangle + \frac{n(n-1)}{6} \langle (F^{(2)})^{n-2}, (F^{(4)})^3 \rangle.$$

Esta expresión coincide , salvo por coeficientes numéricos, con el invariante topológico en $(2n + 8)$ -dimensiones encontrado por Antoniadis y Savvidy en Refs. [7–9].

Ahora probemos que las expresiones encontradas para $\chi_n^{(2n+6)}$ y $\chi_n^{(2n+8)}$ son formas cerradas e invariantes de gauge. Para esto, utilizaremos las identidades de Bianchi para arreglos dadas en (4.10) y enlistadas en el Apéndice D.

Tomando la derivada exterior de $\chi_N^{(2n+6)}$ tenemos

$$\begin{aligned} d\chi_n^{(2n+6)} &= n \left\langle (F^{(2)})^{n-1}, DF^{(2)}, F^{(6)} \right\rangle + \left\langle (F^{(2)})^n, DF^{(6)} \right\rangle \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2} \left\langle (F^{(2)})^{n-2}, DF^{(2)}, (F^{(4)})^2 \right\rangle \\ &\quad + \frac{n}{2} \left\langle (F^{(2)})^{n-1}, F^{(4)}, DF^{(4)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Utilizando las identidades de Bianchi, esta expresión toma la forma

$$\begin{aligned} d\chi_n^{(2n+6)} &= - \left\langle [F^{(4)}, A^{(3)}], F^n \right\rangle + \left\langle [F^{(2)}, A^{(5)}], (F^{(2)})^n \right\rangle \\ &\quad + n \left\langle [F^{(2)}, A^{(3)}], F^{(4)}, (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle \\ &= - \left\{ \left\langle [F^{(4)}, A^{(3)}], (F^{(2)})^n \right\rangle + n \left\langle [F^{(2)}, A^{(3)}], F^{(4)}, (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle \right\} \\ &\quad + \left\langle [F^{(2)}, A^{(5)}], (F^{(2)})^n \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual prueba que la forma $\chi_N^{(2n+6)}$ es cerrada.

Del mismo modo, tomando la derivada exterior de $\chi_N^{(2n+8)}$ tenemos

$$\begin{aligned} d\chi_n^{(2n+8)} &= \left\langle DF^{(8)}, (F^{(2)})^n \right\rangle + n \left\langle F^{(8)}, DF^{(2)}, (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle + n \left\langle DF^{(4)}, F^{(6)}, (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle \\ &\quad + n \left\langle F^{(4)}, DF^{(6)}, (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle + n(n-1) \left\langle F^{(4)}, F^{(6)}, DF^{(2)}, (F^{(2)})^{n-2} \right\rangle \\ &\quad + \frac{3n(n-1)}{3!} \left\langle DF^{(4)}, (F^{(4)})^2, (F^{(2)})^{n-2} \right\rangle \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left\langle (F^{(4)})^3, DF^{(2)}, (F^{(2)})^{n-3} \right\rangle, \end{aligned}$$

y repitiendo el proceso, se tiene

$$\begin{aligned}
 d\chi_n^{(2n+8)} &= - \left\{ \left\langle [F^{(6)}, A^{(3)}], (F^{(2)})^n \right\rangle + n \left\langle [F^{(2)}, A^{(3)}], F^{(6)}, (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle \right\} \\
 &\quad - \frac{n}{2} \left\{ 2 \left\langle F^{(4)}, [F^{(4)}, A^{(3)}], (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle + (n-1) \left\langle [F^{(4)}, A^{(3)}], (F^{(4)})^2, (F^{(2)})^{n-2} \right\rangle \right\} \\
 &\quad - \left\{ \left\langle [F^{(4)}, A^{(5)}], F^n \right\rangle + n \left\langle F^{(4)}, [F, A^{(5)}], F^{n-1} \right\rangle \right\} + \left\langle [F, A^{(7)}], F^n \right\rangle \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

lo cual prueba que $\chi_n^{(2n+8)}$ es cerrada. Por otra parte, de (4.18) podemos obtener las variaciones de las formas de curvatura (ver Apéndice D). Utilizando estos resultados, se tiene que la variación de $\chi_N^{(2n+6)}$ es dada por

$$\begin{aligned}
 \delta\chi_n^{(2n+6)} &= n \left\langle (F^{(2)})^{n-1}, \delta F^{(2)}, F^{(6)} \right\rangle + \left\langle (F^{(2)})^n, \delta F^{(6)} \right\rangle \\
 &\quad + \frac{n(n-1)}{2} \left\langle (F^{(2)})^{n-2}, \delta F^{(2)}, (F^{(4)})^2 \right\rangle + \frac{n}{2} \left\langle (F^{(2)})^{n-1}, F^{(4)}, \delta F^{(4)} \right\rangle,
 \end{aligned}$$

y reemplazando las expresiones para $\delta F^{(p)}$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \delta\chi_n^{(2n+6)} &= \left\langle [F^{(4)}, \xi^{(2)}], F^n \right\rangle + \left\langle [F^{(2)}, \xi^{(4)}], (F^{(2)})^n \right\rangle + n \left\langle [F^{(2)}, \xi^{(2)}], F^{(4)}, (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle \\
 &= \left\{ \left\langle [F^{(4)}, \xi^{(2)}], (F^{(2)})^n \right\rangle + n \left\langle [F^{(2)}, \xi^{(2)}], F^{(4)}, (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle \right\} \\
 &\quad + \left\langle [F^{(2)}, \xi^{(4)}], (F^{(2)})^n \right\rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Del mismo modo, la variación de $\chi_N^{(2n+8)}$ es dada por

$$\begin{aligned}
 \delta\chi_n^{(2n+8)} &= \left\langle \delta F^{(8)}, (F^{(2)})^n \right\rangle + n \left\langle F^{(8)}, \delta F^{(2)}, (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle + n \left\langle \delta F^{(4)}, F^{(6)}, (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle \\
 &\quad + n \left\langle F^{(4)}, \delta F^{(6)}, (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle + n(n-1) \left\langle F^{(4)}, F^{(6)}, \delta F^{(2)}, (F^{(2)})^{n-2} \right\rangle \\
 &\quad + \frac{n(n-1)}{2} \left\langle \delta F^{(4)}, (F^{(4)})^2, (F^{(2)})^{n-2} \right\rangle \\
 &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left\langle (F^{(4)})^3, \delta F^{(2)}, (F^{(2)})^{n-3} \right\rangle,
 \end{aligned}$$

y utilizando nuevamente las leyes de transformación encontradas, se tiene

$$\begin{aligned}
\delta\chi_n^{(2n+8)} &= - \left\{ \left\langle [F^{(6)}, \xi^{(2)}], (F^{(2)})^n \right\rangle + n \left\langle [F^{(2)}, \xi^{(2)}], F^{(6)}, (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle \right\} \\
&\quad - \frac{n}{2} \left\{ 2 \left\langle F^{(4)}, [F^{(4)}, \xi^{(2)}], (F^{(2)})^{n-1} \right\rangle + (n-1) \left\langle [F^{(4)}, \xi^{(2)}], (F^{(4)})^2, (F^{(2)})^{n-2} \right\rangle \right\} \\
&\quad - \left\{ \left\langle [F^{(4)}, \xi^{(4)}], F^n \right\rangle + n \left\langle F^{(4)}, [F, \xi^{(4)}], F^{n-1} \right\rangle \right\} + \left\langle [F, \xi^{(6)}], F^n \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así tenemos que es posible construir formas cerradas e invariantes de gauge por medio de la traza de las componentes del arreglo $F \circ \dots \circ F$. Resulta interesante notar que los invariantes obtenidos no son exactamente iguales a los presentados por Antoniadis y Savvidy. La razón de esta diferencia está en la elección de los coeficientes $\alpha_{(q)(r)}^{(p)}$. Diferentes elecciones de estas matrices conducen a definiciones diferentes para las transformaciones de gauge y para las identidades de Bianchi. El caso presentado aquí es el más simple, sin embargo, analizando las ecuaciones (C.3) del Apéndice C, podemos ver que los campos de gauge de las teorías de gauge de Antoniadis y Savvidy corresponden a los potenciales de una FDA, cuyas constantes de estructura han sido escaladas con coeficientes numéricos.

Capítulo 5

Formas de transgresión y ecuaciones triangulares

En este capítulo estudiaremos las formas de transgresión y el teorema de Chern–Weil en el contexto de las teorías de gauge extendidas. Por otro lado, haciendo uso de la fórmula extendida de homotopía de Cartán, serán obtenidas las correspondientes ecuaciones triangulares y se generalizará el método de separación en subespacios obtenido en referencia [35].

5.1. Invariante $(2n + 3)$ -dimensional

En esta sección mostraremos que es posible definir una forma transgresión y probar el teorema de Chern–Weil a partir del invariante $(2n + 3)$ -dimensional mostrado en el Capítulo 3. Para llevar a cabo esta generalización es necesario considerar

1. Dos 1-formas conexión A_0 y A_1 evaluadas en un álgebra de Lie, cuyas correspondientes curvaturas vienen dadas por

$$F_0 = dA_0 + A_0^2, \quad F_1 = dA_1 + A_1^2.$$

2. Dos campos de gauge descritos por las 2-formas B_0 y B_1 , también evaluadas en el álgebra de Lie. Las correspondientes intensidades de campo o curvaturas

son definidas como sigue

$$H_0 = dB_0 + [A_0, B_0], \quad H_1 = dB_1 + [A_1, B_1].$$

En términos de estos ingredientes fundamentales, definimos las diferencias $\theta = A_1 - A_0$ y $\Phi = B_1 - B_0$ en función de las cuales podemos definir las conexiones homotópicas

$$A_t = A_0 + t\theta, \quad B_t = B_0 + t\Phi, \quad (5.1)$$

y sus correspondientes curvaturas

$$F_t = dA_t + A_t^2, \quad H_t = D_t B_t = dB_t + [A_t, B_t], \quad (5.2)$$

las cuales satisfacen las condiciones,

$$\frac{d}{dt} F_t = D_t \theta, \quad \frac{d}{dt} H_t = D_t \Phi + [\theta, B_t]. \quad (5.3)$$

5.1.1. Teorema de Chern–Weil para $\Gamma^{(2n+3)}$

Siguiendo la formulación de teorema de Chern–Weil, demostrado para el caso del invariante \mathcal{P}_{2n} [11], enunciamos el siguiente, teorema.

Teorema: La diferencia $\Gamma^{(2n+3)}(A_1, B_1) - \Gamma^{(2n+3)}(A_0, B_0)$ es una forma exacta, es decir,

$$\langle F_1^n H_1 \rangle - \langle F_0^n H_0 \rangle = dQ^{(2n+2)}(A_1, B_1, A_0, B_0), \quad (5.4)$$

donde la cantidad

$$Q^{(2n+2)}(A_1, B_1; A_0, B_0) = \int_0^1 dt (n \langle F^{n-1} \theta H_t \rangle + \langle F_t^n \Phi \rangle), \quad (5.5)$$

será llamada $(2n + 2)$ -forma transgresión de Antoniadis–Savvidy, en analogía a las usuales formas de transgresión en $(2n + 1)$ -dimensiones.

Para mostrar este resultado notemos que, usando el teorema fundamental del cálculo, podemos escribir el lado izquierdo de (5.4) en la forma

$$\langle F_1^n H_1 \rangle - \langle F_0^n H_0 \rangle = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \langle F_t^n H_t \rangle, \quad (5.6)$$

diferenciando directamente el lado derecho y utilizando las ecuaciones (5.3), tenemos

$$\begin{aligned} \langle F_1^n H_1 \rangle - \langle F_0^n H_0 \rangle &= \int_0^1 dt \left(\left\langle n F_t^{n-1} \frac{dF_t}{dt} H_t \right\rangle + \left\langle F_t^n \frac{d}{dt} H_t \right\rangle \right) \\ &= \int_0^1 dt \left(n \langle F_t^{n-1} D_t \theta H_t \rangle + d \langle F_t^n \Phi \rangle - \langle F_t^n [B_t, \theta] \rangle \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Luego, integrando por partes se tiene

$$\langle F_1^n H_1 \rangle - \langle F_0^n H_0 \rangle = \int_0^1 dt \left(n d \langle F_t^{n-1} \theta H_t \rangle - n \langle F_t^{n-1} \theta [B_t, F_t] \rangle + d \langle F_t^n \Phi \rangle - \langle F_t^n [B_t, \theta] \rangle \right).$$

El segundo término de la integral puede escribirse de forma más conveniente utilizando la identidad (3.20). Esto permite escribir

$$n \langle F_t^{n-1} \theta [F_t, B_t] \rangle = \langle F_t^n [B_t, \theta] \rangle, \quad (5.8)$$

de modo que

$$\langle F_1^n H_1 \rangle - \langle F_0^n H_0 \rangle = d \int_0^1 dt \left(n \langle F_t^{n-1} \theta H_t \rangle + \langle F_t^n \Phi \rangle \right). \quad (5.9)$$

Escribiendo este resultado en términos de la $(2n + 2)$ -forma de transgresión, obtenemos

$$\langle F_1^n H_1 \rangle - \langle F_0^n H_0 \rangle = dQ^{(2n+2)}(A_0, B_0; A_1, B_1),$$

lo cual demuestra el teorema.

Siguiendo el mismo procedimiento seguido en el caso de las formas Chern–Simons, definimos la $(2n + 2)$ -forma de CSAS como

$$\mathfrak{e}_{\text{CSAS}}^{(2n+2)}(A, B) = Q^{(2n+2)}(A, B; 0, 0) = \int_0^1 dt \langle n A F_t^{n-1} H_t + B F_t^n \rangle.$$

Este resultado está de acuerdo con la expresión encontrada en Ref. [7] y mostrada en el capítulo III. Es interesante notar que las formas de transgresión, tanto la usual como la generalización anterior son definidas globalmente sobre el espacio-tiempo base del principal bundle y son invariantes de gauge off-shell. Por otra parte, las formas Chern–Simons, son definidas localmente y son invariante de gauge off-shell módulo terminos de borde.

5.1.2. Fórmula de homotopía para $\Gamma^{(2n+3)}$

Consideremos ahora la aplicación de la fórmula extendida de homotopía de Cartan [13] al caso del invariante topológico

$$\Gamma^{(2n+3)}(A_t, B_t) = \langle F_t^n, H_t \rangle,$$

es decir,

$$\int_{\partial T_{r+1}} \frac{l_t^p}{p!} \langle F_t^n, H_t \rangle = \int_{T_{r+1}} \frac{l_t^{p+1}}{(p+1)!} d \langle F_t^n, H_t \rangle + (-1)^{p+q} d \int_{T_{r+1}} \frac{l_t^{p+1}}{(p+1)!} \langle F_t^n, H_t \rangle. \quad (5.10)$$

De Ref. [13] sabemos que los operadores d , d_t y l_t definen una álgebra gradada dada por

$$\begin{aligned} d^2 &= 0 & d_t^2 &= 0, & \{d, d_t\} &= 0, \\ [l_t, d] &= d_t, & [l_t, d_t] &= 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, la acción de estos operadores sobre el álgebra de polinomios extendida no está completamente determinada. De Ref. [13] sabemos que la acción de l_t sobre A_t y F_t es dada por,

$$l_t A_t = 0, \quad l_t F_t = l_t (dA_t + A_t A_t) = (dl_t + d_t) A_t = d_t A_t,$$

mientras que la acción de l_t sobre B_t y H_t debe ser determinada exigiendo que los casos particulares de la ecuación (5.10) reproduzcan tanto el teorema de Chern–Weil como la ecuación triangular.

Caso $p = 0$

En este caso, encontramos que la ecuación (5.10) toma la forma,

$$\int_{\partial T_1} \langle F_t^n H_t \rangle = d \int_{T_1} l_t \langle F_t^n H_t \rangle, \quad (5.11)$$

donde $A_t = A_0 + t\theta$ y $B_t = B_0 + t\Phi$. El lado izquierdo de la ecuación (5.11) es dado por

$$\int_{\partial T_1} \langle F_t^n, H_t \rangle = \int_0^1 dt \langle F_t^n, H_t \rangle = \langle F_1^n, H_1 \rangle - \langle F_0^n, H_0 \rangle, \quad (5.12)$$

mientras que el lado derecho puede encontrado haciendo uso de las propiedades del operador l_t . Puesto que el teorema de Chern–Weil debe coincidir con la ecuación

$$\langle F_1^n, H_1 \rangle - \langle F_0^n, H_0 \rangle = d \left\{ n \int_0^1 dt \langle F_t^{n-1}, \theta, H_t \rangle + \int_{T_1} \langle F_t^n, l_t H_t \rangle \right\}, \quad (5.13)$$

nos vemos obligados a exigir que $l_t H_t = d_t B_t$. Por otro lado, de la definición de H_t tenemos

$$\langle F_t^n, l_t (dB_t + A_t B_t - B_t A_t) \rangle = \langle F_t^n, d_t B_t \rangle,$$

de modo que

$$\langle F_t^n, ((d + A_t)(l_t B_t) + d_t B_t - (l_t B_t) A_t) \rangle = \langle F_t^n, d_t B_t \rangle,$$

y por lo tanto $l_t B_t = 0$. Resumiendo, podemos escribir, $l_t B_t = 0$ y $l_t H_t = d_t B_t$.

Caso $p = 1$

Ahora mostraremos que el método de separación en subespacios desarrollado en referencia [35] puede ser generalizado al caso de teorías de gauge extendidas. Esto significa que el caso $p = 1$ la fórmula extendida de homotopía de Cartan desdobra la forma de transgresión generalizada $Q^{(2n+2)}(A_2, B_2; A_0, B_0)$ en una suma de dos formas de transgresión que dependen del par de campos de gauge intermediarios A_1, B_1 más una forma exacta. En efecto, para $p = 1$ la ecuación (5.10) toma la forma

$$\int_{\partial T_2} l_t \langle F_t^n, H_t \rangle = -d \int_{T_2} \frac{l_t^2}{2} \langle F_t^n, H_t \rangle, \quad (5.14)$$

donde ahora los campos de gauge homotópicos son dados por

$$\begin{aligned} A_t &= t^0 (A_0 - A_1) + t^2 (A_2 - A_1) + A_1, \\ B_t &= t^0 (B_0 - B_1) + t^2 (B_2 - B_1) + B_1. \end{aligned} \quad (5.15)$$

El lado izquierdo de (5.14) corresponde a una integral a lo largo del borde del simplex

$$\begin{aligned} T_2 &= (A_2, B_2; A_1, B_1; A_0, B_0), \\ \partial T_2 &= (A_2, B_2; A_1, B_1) + (A_0, B_0; A_2, B_2) + (A_1, B_1; A_0, B_0), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\partial T_2} l_t \langle F_t^n, H_t \rangle &= Q^{(2n+2)}(A_2, B_2; A_1, B_1) - Q^{(2n+2)}(A_2, B_2; A_0, B_0) \\ &\quad + Q^{(2n+2)}(A_1, B_1; A_0, B_0), \end{aligned}$$

mientras que el lado derecho de (5.14) es dado por

$$d \int_{T_2} \frac{l_t^2}{2} \langle F_t^n, H_t \rangle = dQ^{(2n+1)}(A_2, B_2; A_1, B_1; A_0, B_0), \quad (5.16)$$

donde definimos

$$Q^{(2n+1)}(A_2, B_2; A_1, B_1; A_0, B_0) = \int_{T_2} \frac{l_t^2}{2} \langle F_t^n, H_t \rangle.$$

Así tenemos que la ecuación triangular es dada por

$$\begin{aligned} &Q^{(2n+2)}(A_2, B_2; A_1, B_1) - Q^{(2n+2)}(A_2, B_2; A_0, B_0) + Q^{(2n+2)}(A_1, B_1; A_0, B_0) \\ &= -dQ^{(2n+1)}(A_2, B_2; A_1, B_1; A_0, B_0), \end{aligned} \quad (5.17)$$

o alternativamente

$$\begin{aligned} Q^{(2n+2)}(A_2, B_2; A_0, B_0) &= Q^{(2n+2)}(A_2, B_2; A_1, B_1) + Q^{(2n+2)}(A_1, B_1; A_0, B_0) \\ &\quad + dQ^{(2n+1)}(A_2, B_2; A_1, B_1; A_0, B_0), \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde el término de borde viene dado por

$$Q^{(2n+1)}(A_2, B_2; A_1, B_1; A_0, B_0) = \frac{1}{2} d \int_{T_2} \{ n(n-1) \langle F_t^{n-1}, (d_t A_t)^2, H_t \rangle + 2n \langle F_t^{n-1}, d_t A_t, d_t B_t \rangle \}.$$

Entonces, recordando que

$$\begin{aligned} (d_t A_t) &= dt^0 (A_0 - A_1) + dt^2 (A_2 - A_1), \\ (d_t B_t) &= dt^0 (B_0 - B_1) + dt^2 (B_2 - B_1), \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} Q^{(2n+1)}(A_2, B_2; A_1, B_1; A_0, B_0) &= \int_0^1 dt \int_0^t ds \{ n(n-1) \langle F_t^{n-1}, (A_2 - A_1), (A_1 - A_0), H_t \rangle \\ &\quad + n \langle F_t^{n-1}, A_0, (B_2 - B_1) \rangle + n \langle F_t^{n-1}, A_1, (B_0 - B_2) \rangle \\ &\quad + n \langle F_t^{n-1}, A_2, (B_1 - B_0) \rangle \}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde hemos introducido los parámetros $t = 1 - t^0$ y $s = t^2$.

Es de interés notar que el uso de la fórmula extendida de homotopía de Cartan permite identificar la forma exacta de la contribución del borde. Notemos además que si elegimos $A_0 = 0$ y $B_0 = 0$ obtenemos una expresión que relaciona una forma de transgresión con dos formas CSAS y una derivada total

$$\begin{aligned} Q^{(2n+2)}(A_2, B_2; A_1, B_1) &= \mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+2)}(A_2, B_2) - \mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+2)}(A_1, B_1) \\ &\quad - dQ^{(2n+1)}(A_2, B_2; A_1, B_1; 0, 0). \end{aligned} \quad (5.20)$$

5.2. Invariante $(2n + 6)$ -dimensional

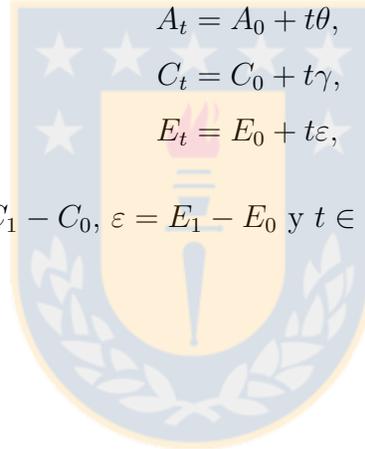
5.2.1. Teorema de Chern–Weil para $\Xi^{(2n+6)}$

Al igual que en el caso anterior, consideremos dos 1-formas conexión A_0, A_1 evaluadas en un álgebra de Lie, junto a sus correspondientes 2-formas curvaturas F_0, F_1 . Incluiremos además, dos 3-formas campos de gauge C_0, C_1 y dos 5-formas

campos de gauge E_0, E_1 junto a sus correspondientes 4-formas y 6-formas curvatura definidas como sigue

$$\begin{aligned} I_0 &= D_0 C_0 = dC_0 + [A_0, C_0], \\ I_1 &= D_1 C_1 = dC_1 + [A_1, C_1], \\ K_0 &= D_0 E_0 + [C_0, C_0] = dE_0 + [A_0, C_0] + [C_0, C_0], \\ K_1 &= D_1 E_1 + [C_1, C_1] = dE_1 + [A_1, C_1] + [C_1, C_1]. \end{aligned}$$

A partir de dichos campos de gauge extendidos, definimos las siguientes conexiones homotópicas



$$\begin{aligned} A_t &= A_0 + t\theta, \\ C_t &= C_0 + t\gamma, \\ E_t &= E_0 + t\varepsilon, \end{aligned}$$

con $\theta = A_1 - A_0$, $\gamma = C_1 - C_0$, $\varepsilon = E_1 - E_0$ y $t \in [0, 1]$.

En adelante denotaremos por comodidad $\mathcal{A}_i = (A_i, C_i, E_i)$, de modo que, usando el teorema fundamental del cálculo, en esta notación podemos escribir

$$\Xi^{(2n+6)}(\mathcal{A}_1) - \Xi^{(2n+6)}(\mathcal{A}_0) = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} (n \langle F^{n-1}, I^2 \rangle + \langle F^n, K \rangle),$$

y luego, realizando la diferenciación con respecto al parámetro homotópico se encuentra

$$\begin{aligned} \Xi^{(2n+6)}(\mathcal{A}_1) - \Xi^{(2n+6)}(\mathcal{A}_0) &= \int_0^1 dt \left\{ n(n-1) \left\langle F_t^{n-2}, \frac{dF_t}{dt}, I_t^2 \right\rangle + 2n \left\langle F_t^{n-1}, I_t, \frac{dI_t}{dt} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + n \left\langle F_t^{n-1}, \frac{dF_t}{dt}, K_t \right\rangle + \left\langle F_t^n, \frac{dK_t}{dt} \right\rangle \right\}. \end{aligned}$$

Hemos visto que $\frac{dF_t}{dt} = D_t\theta$ y además es directo comprobar que

$$\begin{aligned}\frac{dI_t}{dt} &= D_t\gamma + [\theta, C_t], \\ \frac{dK_t}{dt} &= D_t\varepsilon + [\theta, E_t] + 2[C_t, \gamma],\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\Xi^{(2n+6)}(\mathcal{A}_1) - \Xi^{(2n+6)}(\mathcal{A}_0) &= d \int_0^1 dt [n(n-1) \langle F_t^{n-2}, \theta, I_t^2 \rangle + 2n \langle F_t^{n-1}, I_t, \gamma \rangle \\ &\quad + n \langle F_t^{n-1}, \theta, K_t \rangle + \langle F_t^n, \varepsilon \rangle] + \Delta,\end{aligned}$$

donde hemos definido,

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_0^1 dt \{ -2n(n-1) \langle F_t^{n-2}, \theta, I_t, D_t I_t \rangle - 2n \langle F_t^{n-1}, D_t I_t, \gamma \rangle + n \langle F_t^{n-1}, \theta, D_t K_t \rangle \\ &\quad + 2n \langle F_t^{n-1}, I_t, [\theta, C_t] \rangle + \langle F_t^n, ([\theta, E_t] + 2[C_t, \gamma]) \rangle \}.\end{aligned}$$

Utilizando las identidades de Bianchi, se encuentra que Δ toma la forma

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_0^1 dt \{ 2n(n-1) \langle F_t^{n-2}, \theta, I_t, [C_t, F_t] \rangle + 2n \langle F_t^{n-1}, [C_t, F_t], \gamma \rangle + 2n \langle F_t^{n-1}, I_t, [\theta, C_t] \rangle \\ &\quad - n \langle F_t^{n-1}, \theta, 2[C_t, I_t] + [E_t, F_t] \rangle + \langle F_t^n, ([\theta, E_t] + 2[C_t, \gamma]) \rangle \},\end{aligned}$$

y utilizando la identidad (3.20) es directo probar que $\Delta = 0$. Esto significa que podemos definir una $(2n+5)$ -forma de transgresión como

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{(2n+5)}(\mathcal{A}_1; \mathcal{A}_0) &= \int_0^1 dt [n(n-1) \langle F_t^{n-2}, \theta, I_t^2 \rangle + 2n \langle F_t^{n-1}, I_t, \gamma \rangle \\ &\quad + n \langle F_t^{n-1}, \theta, K_t \rangle + \langle F_t^n, \varepsilon \rangle].\end{aligned}\tag{5.21}$$

Este resultado permite escribir el teorema de Chern–Weil en la forma

$$\Xi^{(2n+6)}(\mathcal{A}_1) - \Xi^{(2n+6)}(\mathcal{A}_0) = d\mathcal{T}^{(2n+5)}(\mathcal{A}_1; \mathcal{A}_0).$$

A partir de $\mathcal{T}^{(2n+5)}(\mathcal{A}_1; \mathcal{A}_0)$ podemos obtener la correspondiente forma CSAS $(2n+5)$ -

dimensional introducida en Ref. [9]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n+5)}(A, C, E) &= \mathcal{T}(A, C, E; 0, 0, 0) \\ &= \int_0^1 dt [n(n-1) \langle F_t^{n-2}, A, I_t^2 \rangle + 2n \langle F_t^{n-1}, I_t, C \rangle + n \langle F_t^{n-1}, A, K_t \rangle \\ &\quad + \langle F_t^n, E \rangle]. \end{aligned}$$

5.2.2. Fórmula de homotopía para $\Xi^{(2n+6)}$

Consideremos nuevamente la fórmula de homotopía de Cartán extendida, pero en este caso, para el polinomio invariante $\Xi^{(2n+6)}$ construido a partir de los campos de gauge A_t , C_t y E_t . Siguiendo el mismo procedimiento realizado en las secciones anteriores podemos escribir

$$A_t = t^0 A_0 + t^1 A_1 + \cdots + t^{p+1} A_{p+1}, \quad (5.22)$$

$$C_t = t^0 C_0 + t^1 C_1 + \cdots + t^{p+1} C_{p+1}, \quad (5.23)$$

$$E_t = t^0 E_0 + t^1 E_1 + \cdots + t^{p+1} E_{p+1}, \quad (5.24)$$

junto con la condición $t^0 + t^1 + \cdots + t^{p+1} = 1$ que asegura que dichos campos transformen del modo apropiado y que permite escribir los campos de gauge A_t , C_t y E_t en la forma,

$$A_t = t^0 (A_0 - A_{p+1}) + t^1 (A_1 - A_{p+1}) + \cdots + t^p (A_p - A_{p+1}) + A_{p+1}, \quad (5.25)$$

$$C_t = t^0 (C_0 - C_{p+1}) + t^1 (C_1 - C_{p+1}) + \cdots + t^p (C_p - C_{p+1}) + C_{p+1}, \quad (5.26)$$

$$E_t = t^0 (E_0 - E_{p+1}) + t^1 (E_1 - E_{p+1}) + \cdots + t^p (E_p - E_{p+1}) + E_{p+1}. \quad (5.27)$$

De la fórmula extendida de homotopía de Cartan [13], se tiene

$$\int_{\partial T_{p+1}} \frac{l_t^p}{p!} \Xi^{(2n+6)}(A_t, C_t, E_t) = (-1)^p \int_{T_{p+1}} \frac{l_t^{p+1}}{(p+1)!} \Xi^{(2n+6)}(A_t, C_t, E_t), \quad (5.28)$$

donde ahora, al igual que en el caso de la sección anterior, debemos determinar la acción del operador l_t sobre los elementos $\{A_t, C_t, E_t, F_t, I_t, K_t, d_t A_t, d_t C_t, d_t E_t, d_t F_t, d_t I_t, d_t K_t\}$, la cual debe ser tal que se verifique el teorema de Chern–Weil y

se respete la clausura del álgebra de polinomios. Por el momento sólo sabemos que en el caso estudiado en referencia [13] $l_t A_t = 0$ y $l_t F_t = d_t A_t$.

Caso $p = 0$

En este caso la fórmula extendida de homotopía de Cartan se escribe

$$\int_{\partial T_1} \Xi^{(2n+6)} = d \int_{T_1} l_t \Xi^{(2n+6)}, \quad (5.29)$$

donde

$$\begin{aligned} A_t &= A_0 + t(A_1 - A_0), \\ C_t &= C_0 + t(C_1 - C_0), \\ E_t &= E_0 + t(E_1 - E_0). \end{aligned}$$

El lado izquierdo de (5.28) es dado por

$$\int_{\partial T_1} \Xi^{(2n+6)}(A_t, C_t, E_t) = \Xi^{(2n+6)}(A_1, C_1, E_1) - \Xi^{(2n+6)}(A_0, C_0, E_0),$$

o bien,

$$\int_{\partial T_1} \Xi^{(2n+6)}(\mathcal{A}_t) = \Xi^{(2n+6)}(\mathcal{A}_1) - \Xi^{(2n+6)}(\mathcal{A}_0),$$

mientras que el lado derecho toma la forma,

$$d \int_{T_1} l_t \Xi^{(2n+6)}(\mathcal{A}_t) = d \int_{T_1} [n(n-1) \langle F_t^{n-2}, l_t F_t, I_t^2 \rangle + 2n \langle F_t^{n-1}, I_t, l_t I_t \rangle \quad (5.30)$$

$$+ n \langle F_t^{n-1}, l_t F_t, K_t \rangle + \langle F_t^n, l_t K_t \rangle], \quad (5.31)$$

comparando (5.30) con (5.21) vemos que $l_t I_t = d_t C_t$, $l_t K_t = d_t E_t$. Haciendo uso del álgebra gradada se encuentra

$$l_t I_t = l_t (dC_t + [A_t, C_t]) = d_t C_t + dl_t C_t + A_t l_t C_t + l_t C_t A_t,$$

donde vemos que $l_t C_t$ debe ser una $(2, 1)$ -forma en el álgebra de polinomios que

verifique la siguiente condición

$$\int_{T_1} \langle F_t^{n-1}, I_t, D_t l_t C_t \rangle = 0. \quad (5.32)$$

La única opción no nula es $l_t C_t = d_t F_t$. Si reemplazamos esto en la condición (5.32) tenemos

$$\int_{T_1} \langle F_t^{n-1}, I_t, [d_t A_t, F_t] \rangle = 0. \quad (5.33)$$

Esta ecuación es muy restrictiva y conduce a contradicciones con la definición (5.21). Por esta razón, la única opción válida es $l_t C_t = 0$. Del mismo modo para E_t y K_t se tiene

$$l_t K_t = dl_t E_t + d_t E_t + l_t [A_t, E_t] = d_t E_t + D_t l_t E_t.$$

Para reobtener la expresión (5.21) se debe cumplir que

$$\int_{T_1} \langle F_t^n, d_t E_t + D_t l_t E_t \rangle = 0.$$

Una vez más, si suponemos que $l_t E_t = d_t I_t$ se llega a contradicciones. Por esta razón la única elección consistente es $l_t E_t = 0$.

Caso $p = 1$

Usando las expresiones anteriores en la fórmula extendida de homotopía de Cartan para el caso $p = 1$, se encuentra

$$\int_{\partial T_2} l_t [n \langle F_t^{n-1}, I_t^2 \rangle + \langle F_t^n, K_t \rangle] = -d \int_{T_2} \frac{l_t^2}{2} [n \langle F_t^{n-1}, I_t^2 \rangle + \langle F_t^n, K_t \rangle], \quad (5.34)$$

donde ahora

$$\begin{aligned} A_t &= t^0 A_0 + t^1 A_1 + t^2 A_2 = t^0 (A_0 - A_1) + t^2 (A_2 - A_1) + A_1, \\ C_t &= t^0 C_0 + t^1 C_1 + t^2 = t^0 (C_0 - C_1) + t^2 (C_2 - C_1) + C_1, \\ E_t &= t^0 E_0 + t^1 E_1 + t^2 = t^0 (E_0 - E_1) + t^2 (E_2 - E_1) + E_1. \end{aligned}$$

El lado izquierdo de (5.34) corresponde a una integral a lo largo del borde del simplex

$$\begin{aligned} T_2 &= (\mathcal{A}_2; \mathcal{A}_1; \mathcal{A}_0), \\ \partial T_2 &= (\mathcal{A}_2; \mathcal{A}_1) + (\mathcal{A}_0; \mathcal{A}_2) + (\mathcal{A}_1; \mathcal{A}_0), \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_{\partial T_2} l_t [n \langle F^{n-1}, I^2 \rangle + \langle F^n, K \rangle] = \mathcal{T}^{(2n+5)}(\mathcal{A}_2; \mathcal{A}_1) - \mathcal{T}^{(2n+5)}(\mathcal{A}_2; \mathcal{A}_0) + \mathcal{T}^{(2n+5)}(\mathcal{A}_1; \mathcal{A}_0),$$

de modo que podemos escribir la ecuación triangular

$$\mathcal{T}^{(2n+5)}(\mathcal{A}_2; \mathcal{A}_1) - \mathcal{T}^{(2n+5)}(\mathcal{A}_2; \mathcal{A}_0) + \mathcal{T}^{(2n+5)}(\mathcal{A}_1; \mathcal{A}_0) = -d\mathcal{T}^{(2n+4)}(\mathcal{A}_2; \mathcal{A}_1; \mathcal{A}_0),$$

donde definimos

$$\mathcal{T}^{(2n+4)}(\mathcal{A}_2; \mathcal{A}_1; \mathcal{A}_0) = \int_{T_2} \frac{l_t^2}{2} [n \langle F^{n-1}, I^2 \rangle + \langle F^n, K_t \rangle], \quad (5.35)$$

aplicando el operador l_t directamente se tiene

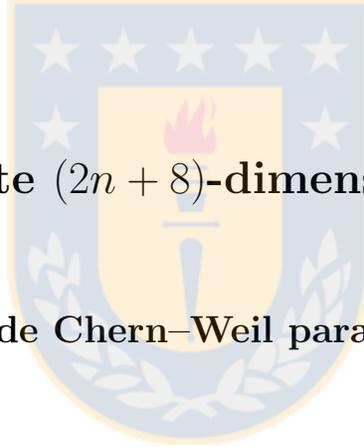
$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(2n+4)}(\mathcal{A}_2; \mathcal{A}_1; \mathcal{A}_0) &= \frac{1}{2} \int_{T_2} [n(n-1)(n-2) \langle F^{n-3}, (d_t A_t)^2, I_t^2 \rangle \\ &\quad + 4n(n-1) \langle F^{n-2}, d_t A_t, I_t, d_t C_t \rangle + 2n \langle F_t^{n-1}, (d_t C_t)^2 \rangle \\ &\quad + n(n-1) \langle F_t^{n-2}, (d_t A_t)^2, K_t \rangle + 2n \langle F_t^{n-1}, d_t A_t, d_t E_t \rangle], \end{aligned}$$

y puesto que,

$$\begin{aligned} dA_t &= (A_0 - A_1) dt^0 + (A_2 - A_1) dt^2, \\ d_t C_t &= (C_0 - C_1) dt^0 + (C_2 - C_1) dt^2, \end{aligned}$$

se tiene que el término de borde es dado por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}^{(2n+4)}(\mathcal{A}_2; \mathcal{A}_1; \mathcal{A}_0) = & \int_0^1 dt \int_0^t ds \left\{ n(n-1)(n-2) \langle F_t^{n-1}, (A_2 - A_1), (A_1 - A_0), I_t^2 \rangle \right. \\
 & + 2n(n-1) [\langle F_t^{n-2}, A_0, (C_2 - C_1), I_t \rangle + \langle F_t^{n-2}, A_1, (C_0 - C_2), I_t \rangle \\
 & + \langle F_t^{n-2}, A_2, (C_1 - C_0), I_t \rangle] + 2n \langle F_t^{n-1}, (C_2 - C_1), (C_1 - C_0) \rangle \\
 & + n(n-1) \langle F_t^{n-2}, (A_2 - A_1), (A_1 - A_0), K_t \rangle \\
 & + n [\langle F_t^{n-1}, A_0, (E_2 - E_1) \rangle + \langle F_t^{n-1}, A_1, (E_0 - E_2) \rangle \\
 & \left. + \langle F_t^{n-1}, A_2, (E_1 - E_0) \rangle \right\}.
 \end{aligned}$$



5.3. Invariante $(2n + 8)$ -dimensional

5.3.1. Teorema de Chern–Weil para $\Upsilon^{(2n+8)}$

Al igual que en el caso anterior, consideremos dos 1-formas A_0, A_1 , dos 3-formas, C_0, C_1 y dos 5-formas campos de gauge E_0, E_1 , todas evaluadas en un álgebra de Lie junto a sus correspondientes pares de 2-formas, 4-formas y 6-formas curvatura. Consideraremos además dos 7-formas campos de gauge G_0, G_1 con sus 8-formas intensidades de campo M_0 y M_1 dadas por

$$\begin{aligned}
 M_0 &= D_0 G_0 + 3[C_0, E_0], \\
 M_1 &= D_1 G_1 + 3[C_1, E_1].
 \end{aligned}$$

Siguiendo el procedimiento de las secciones anteriores introducimos los campos de gauge homotópicos A_t, C_t, E_t , ya mostrados y G_t dado por

$$G_t = G_0 + t\lambda,$$

con $\lambda = G_1 - G_0$ y denotaremos $\mathcal{A}_i = (A_i, C_i, E_i, G_i)$. Del teorema fundamental del cálculo podemos escribir

$$\begin{aligned} \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_1) - \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_0) &= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \{ \langle F_t^n, M_t \rangle + 3n \langle F_t^{n-1}, K_t, I_t \rangle \\ &\quad + n(n-1) \langle F_t^{n-2}, I_t^3 \rangle \}. \end{aligned}$$

Puesto que $\frac{dF_t}{dt} = D_t\theta$, $\frac{dI_t}{dt} = D_t\gamma + [\theta, C_t]$, $\frac{dK_t}{dt} = D_t\varepsilon + [\theta, E_t] + 2[C_t, \gamma]$ y

$$\frac{dM_t}{dt} = D_t\lambda + [\theta, G_t] + 3[C_t, \varepsilon] + 3[\gamma, E_t],$$

se tiene

$$\begin{aligned} &\Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_1) - \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_0) \\ &= \int_0^1 dt \{ nd \langle F_t^{n-1}, \theta, M_t \rangle + d \langle F_t^n, \lambda \rangle + 3n(n-1) d \langle F_t^{n-2}, \theta, K_t, I_t \rangle \\ &\quad + 3nd \langle F_t^{n-1}, \varepsilon, I_t \rangle + 3nd \langle F_t^{n-1}, K_t, \gamma \rangle + 3n(n-1) d \langle F_t^{n-2}, I_t^2, \gamma \rangle \\ &\quad + n(n-1)(n-2) d \langle F_t^{n-3}, \theta, I_t^3 \rangle + n \langle F_t^{n-1}, \theta, D_t M_t \rangle \\ &\quad + \langle F_t^n, ([\theta, G_t] + 3[C_t, \varepsilon] + 3[\gamma, E_t]) \rangle + 3n \langle F_t^{n-1}, \varepsilon, D_t I_t \rangle \\ &\quad + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, \theta, D_t K_t, I_t \rangle + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, \theta, K_t, D_t I_t \rangle \\ &\quad + 3n \langle F_t^{n-1}, ([\theta, E_t] + 2[C_t, \gamma]), I_t \rangle - 3n \langle F_t^{n-1}, D_t K_t, \gamma \rangle \\ &\quad + 3n \langle F_t^{n-1}, K_t, [\theta, C_t] \rangle + n(n-1)(n-2) \langle F_t^{n-3}, \theta, D_t I_t^3 \rangle \\ &\quad - 6n(n-1) \langle F_t^{n-2}, I_t, D_t I_t, \gamma \rangle + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, I_t^2, [\theta, C_t] \rangle \}, \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} &\Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_1) - \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_0) \\ &= d \int_0^1 dt \{ n \langle F_t^{n-1}, \theta, M_t \rangle + \langle F_t^n, \lambda \rangle + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, \theta, K_t, I_t \rangle + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, I_t^2, \gamma \rangle \\ &\quad + 3n \langle F_t^{n-1}, \varepsilon, I_t \rangle + 3n \langle F_t^{n-1}, K_t, \gamma \rangle + n(n-1)(n-2) \langle F_t^{n-3}, \theta, I_t^3 \rangle \} + \Delta, \end{aligned}$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} \Delta = & \int_0^1 dt \{ n \langle F_t^{n-1}, \theta, D_t M_t \rangle + \langle F_t^n, ([\theta, G_t] + 3[C_t, \varepsilon] + 3[\gamma, E_t]) \rangle \\ & + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, \theta, D_t K_t, I_t \rangle + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, \theta, K_t, D_t I_t \rangle + 3n \langle F_t^{n-1}, \varepsilon, D_t I_t \rangle \\ & + 3n \langle F_t^{n-1}, ([\theta, E_t] + 2[C_t, \gamma]), I_t \rangle - 3n \langle F_t^{n-1}, D_t K_t, \gamma \rangle + 3n \langle F_t^{n-1}, K_t, [\theta, C_t] \rangle \\ & + n(n-1)(n-2) \langle F_t^{n-3}, \theta, D_t I_t^3 \rangle - 6n(n-1) \langle F_t^{n-2}, I_t, D_t I_t, \gamma \rangle \\ & + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, I_t^2, [\theta, C_t] \rangle \}. \end{aligned}$$

Haciendo uso de las identidades de Bianchi y de la identidad (3.20) se encuentra

$$\begin{aligned} -n \langle F_t^{n-1}, \theta, [C_t, K_t] \rangle - n(n-1) \langle F_t^{n-2}, \theta, K_t, [C_t, F_t] \rangle + n \langle F_t^{n-1}, K_t, [\theta, C_t] \rangle &= 0 \\ -n \langle F_t^{n-1}, \theta, [E_t, I_t] \rangle - n(n-1) \langle F_t^{n-2}, \theta, [E_t, F_t], I_t \rangle + n \langle F_t^{n-1}, [\theta, E_t], I_t \rangle &= 0, \\ -n \langle F_t^{n-1}, \theta, [G_t, F_t] \rangle + \langle F_t^n, [\theta, G_t] \rangle &= 0, \\ \langle F_t^n, [C_t, \varepsilon] \rangle - n \langle F_t^{n-1}, \varepsilon, [C_t, F_t] \rangle &= 0, \\ \langle F_t^n, [\gamma, E_t] \rangle + n \langle F_t^{n-1}, [E_t, F_t], \gamma \rangle &= 0, \\ -2 \langle F_t^{n-2}, \theta, [C_t, I_t], I_t \rangle - (n-2) \langle F_t^{n-3}, \theta, I_t^2, [C_t, F_t] \rangle + \langle F_t^{n-2}, I_t^2, [\theta, C_t] \rangle &= 0, \\ \langle F_t^{n-1}, [C_t, \gamma], I_t \rangle + \langle F_t^{n-1}, [C_t, I_t], \gamma \rangle + (n-1) \langle F_t^{n-2}, I_t, [C_t, F_t], \gamma \rangle &= 0, \end{aligned}$$

de modo que, al igual que en los casos anteriores $\Delta = 0$. Así tenemos que el teorema de Chern–Weil puede ser escrito como sigue

$$\Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_1) - \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_0) = d\mathcal{Q}^{(2n+7)}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0),$$

donde hemos definido la $(2n+7)$ -forma de transgresión

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{(2n+7)}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0) = & \int_0^1 dt \{ n \langle F_t^{n-1}, \theta, M_t \rangle + \langle F_t^n, \lambda \rangle + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, \theta, K_t, I_t \rangle \\ & + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, I_t^2, \gamma \rangle + 3n \langle F_t^{n-1}, \varepsilon, I_t \rangle + 3n \langle F_t^{n-1}, K_t, \gamma \rangle \\ & + n(n-1)(n-2) \langle F_t^{n-3}, \theta, I_t^3 \rangle \}. \end{aligned}$$

A partir de $\mathcal{Q}^{(2n+7)}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0)$ podemos definir (localmente) la correspondiente forma CSAS $(2n+7)$ -dimensional ya introducida en Ref. [8]

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_{\text{CSAS}}^{(2n+7)}(\mathcal{A}) &= \mathcal{Q}^{(2n+7)}(\mathcal{A}, 0) \\ &= \int_0^1 dt \{ n \langle F_t^{n-1}, A, M_t \rangle + \langle F_t^n, G \rangle + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, A, K_t, I_t \rangle \\ &\quad + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, I_t^2, C \rangle + 3n \langle F_t^{n-1}, E, I_t \rangle + 3n \langle F_t^{n-1}, K_t, C \rangle \\ &\quad + n(n-1)(n-2) \langle F_t^{n-3}, A, I_t^3 \rangle \}. \end{aligned}$$

5.3.2. Fórmula de homotopía para $\Upsilon^{(2n+8)}$

Consideremos nuevamente la fórmula extendida de homotopía de Cartan, pero en este caso para el polinomio invariante Υ_{2n+8} construido a partir de los campos de gauge A_t , C_t , E_t y G_t . Siguiendo el procedimiento mostrado en las secciones anteriores, introducimos los siguientes campos de gauge homotópicos

$$A_t = t^0 A_0 + t^1 A_1 + \cdots + t^{p+1} A_{p+1}, \quad (5.36)$$

$$C_t = t^0 C_0 + t^1 C_1 + \cdots + t^{p+1} C_{p+1}, \quad (5.37)$$

$$E_t = t^0 E_0 + t^1 E_1 + \cdots + t^{p+1} E_{p+1}, \quad (5.38)$$

$$G_t = t^0 G_0 + t^1 G_1 + \cdots + t^{p+1} G_{p+1}, \quad (5.39)$$

donde la condición $t^0 + t^1 + \cdots + t^{p+1} = 1$, permite escribir,

$$A_t = t^0 (A_0 - A_{p+1}) + t^1 (A_1 - A_{p+1}) + \cdots + t^p (A_p - A_{p+1}) + A_{p+1}, \quad (5.40)$$

$$C_t = t^0 (C_0 - C_{p+1}) + t^1 (C_1 - C_{p+1}) + \cdots + t^p (C_p - C_{p+1}) + C_{p+1}, \quad (5.41)$$

$$E_t = t^0 (E_0 - E_{p+1}) + t^1 (E_1 - E_{p+1}) + \cdots + t^p (E_p - E_{p+1}) + E_{p+1}, \quad (5.42)$$

$$G_t = t^0 (G_0 - G_{p+1}) + t^1 (G_1 - G_{p+1}) + \cdots + t^p (G_p - G_{p+1}) + G_{p+1}. \quad (5.43)$$

De la ecuación de homotopía de Cartan extendida se tiene

$$\int_{\partial T_{p+1}} \frac{l_t^p}{p!} \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_t) = (-1)^p d \int_{T_{p+1}} \frac{l_t^{p+1}}{(p+1)!} \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_t), \quad (5.44)$$

donde la acción de l_t sobre G_t y K_t puede ser determinada exigiendo que se verifique el teorema de Chern–Weil y que se respete la clausura del álgebra de polinomios.

Caso $p = 0$

En este caso la ecuación de homotopía toma la forma

$$\int_{\partial T_1} \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_t) = d \int_{T_1} l_t \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_t), \quad (5.45)$$

donde

$$\begin{aligned} A_t &= A_0 + t\theta, & C_t &= C_0 + t\gamma, \\ E_t &= E_0 + t\varepsilon, & G_t &= G_0 + t\lambda. \end{aligned}$$

El lado izquierdo de (5.45) es dado por

$$\int_{\partial T_1} \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_t) = \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_1) - \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_0),$$

mientras que el lado derecho puede ser escrito como

$$\begin{aligned} d \int_{T_1} l_t \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_t) &= d \int_{T_1} \{ n \langle F_t^{n-1}, d_t A_t, M_t \rangle + \langle F_t^n, l_t M_t \rangle + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, d_t A_t, K_t, I_t \rangle \\ &\quad + n(n-1)(n-2) \langle F_t^{n-3}, d_t A_t, I_t^3 \rangle + 3n(n-1) \langle F_t^{n-2}, I_t^2, l_t I_t \rangle \\ &\quad + 3n \langle F_t^{n-1}, l_t K_t, I_t \rangle + 3n \langle F_t^{n-1}, K_t, l_t I_t \rangle \}, \end{aligned}$$

de modo que por comparación con el teorema de Chern–Weil se encuentra

$$l_t M_t = d_t G_t, \quad l_t G_t = 0.$$

Caso $p = 1$

Usando los resultados anteriores en la fórmula extendida de homotopía de Cartan para $p = 1$, se encuentra

$$\int_{\partial T_2} l_t \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_t) = -d \int_{T_2} \frac{l_t^2}{2} \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_t), \quad (5.46)$$

donde ahora

$$\begin{aligned} A_t &= t^0 A_0 + t^1 A_1 + t^2 A_2 = t^0 (A_0 - A_1) + t^2 (A_2 - A_1) + A_1, \\ C_t &= t^0 C_0 + t^1 C_1 + t^2 = t^0 (C_0 - C_1) + t^2 (C_2 - C_1) + C_1, \\ E_t &= t^0 E_0 + t^1 E_1 + t^2 = t^0 (E_0 - E_1) + t^2 (E_2 - E_1) + E_1, \\ G_t &= t^0 G_0 + t^1 G_1 + t^2 = t^0 (G_0 - G_1) + t^2 (G_2 - G_1) + G_1. \end{aligned}$$

El lado izquierdo de (5.46) corresponde a una integral a lo largo del borde del simplex dada por

$$\int_{\partial T_2} l_t \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_t) = \mathcal{Q}^{(2n+7)}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) - \mathcal{Q}^{(2n+7)}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_0) + \mathcal{Q}^{(2n+7)}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0),$$

mientras que para el lado derecho se tiene

$$d \int_{T_2} \frac{l_t^2}{2} \Upsilon^{(2n+8)}(\mathcal{A}_t) = d\mathcal{Q}^{(2n+6)}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0),$$

con

$$d\mathcal{Q}^{(2n+6)}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0) = d \int_{T_2} \frac{l_t^2}{2} [\langle F_t^n, M_t \rangle + 3n \langle F_t^{n-1}, K_t, I_t \rangle + n(n-1) \langle F_t^{n-2}, I_t^3 \rangle],$$

de modo que la ecuación triangular resulta

$$\mathcal{Q}^{(2n+7)}(\mathcal{A}_2; \mathcal{A}_1) - \mathcal{Q}^{(2n+7)}(\mathcal{A}_2; \mathcal{A}_0) + \mathcal{Q}^{(2n+7)}(\mathcal{A}_1; \mathcal{A}_0) = -d\mathcal{Q}^{(2n+6)}(\mathcal{A}_2; \mathcal{A}_1; \mathcal{A}_0).$$

Repitiendo el proceso, se tiene que el término de borde en la ecuación triangular es

dado por

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{Q}^{(2n+6)}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0) \\
 &= n \int_0^1 dt \int_0^t ds \{ (\langle F_t^{n-1}, A_0, (G_2 - G_1) \rangle + \langle F_t^{n-1}, A_1, (G_0 - G_2) \rangle) \\
 &+ \langle F_t^{n-1}, A_2, (G_1 - G_0) \rangle) + (n-1) [\langle F_t^{n-2}, (A_2 - A_1), (A_1 - A_0), M_t \rangle \\
 &+ 3(n-2) \langle F_t^{n-3}, (A_2 - A_1), (A_1 - A_0), K_t, I_t \rangle \\
 &+ (n-2)(n-3) \langle F_t^{n-4}, (A_2 - A_1), (A_1 - A_0), I_t^3 \rangle + 6 \langle F_t^{n-2}, I_t, (C_2 - C_1), (C_1 - C_0) \rangle \\
 &+ 3 (\langle F_t^{n-2}, A_0, (E_2 - E_1), I_t \rangle + \langle F_t^{n-2}, A_1, (E_0 - E_2), I_t \rangle + \langle F_t^{n-2}, A_2, (E_1 - E_0), I_t \rangle) \\
 &+ 3 (\langle F_t^{n-2}, A_0, (C_2 - C_1), K_t \rangle + \langle F_t^{n-2}, A_1, (C_0 - C_2), K_t \rangle + \langle F_t^{n-2}, A_2, (C_1 - C_0), K_t \rangle) \\
 &+ 3 (\langle F_t^{n-1}, C_0, (E_2 - E_1) \rangle + \langle F_t^{n-1}, C_1, (E_0 - E_2) \rangle + \langle F_t^{n-1}, C_2, (E_1 - E_0) \rangle) \\
 &+ 3(n-2) (\langle F_t^{n-3}, A_0, (C_2 - C_1), I_t^2 \rangle + \langle F_t^{n-3}, A_1, (C_0 - C_2), I_t^2 \rangle \\
 &+ \langle F_t^{n-3}, A_2, (C_1 - C_0), I_t^2 \rangle) \}.
 \end{aligned}$$

Capítulo 6

Formas CSAS en (super)gravedad

En este capítulo estudiaremos la relación entre las formas CSAS y algunas teorías de gravedad y supergravedad en 4 dimensiones.

6.1. Gravedad CSAS en 4-dimensiones

Hemos visto que la acción CSAS 4-dimensional es dada por

$$S_{CSAS} = \int_{\mathcal{M}_4} \langle FB \rangle, \quad (6.1)$$

la cual es invariante (módulo terminos de borde) bajo transformaciones de gauge extendidas.

En Refs. [15, 36, 37], A. H. Chamseddine construyó acciones topológicas para gravedad en todas las dimensiones. En dichas referencias fue encontrado que en dimensiones impares es posible construir acciones Chern–Simons, en donde todos los campos dinámicos son componentes de una 1-forma conexión de gauge evaluada en un álgebra de Lie, de modo que bajo una transformación de gauge off-shell gauge, $L_{CS}^{(2n+1)}(A)$ sólo cambia en una forma cerrada. Por esta razón, en la literatura estas teorías son llamadas cuasi-invariantes. El ejemplo mejor conocido de este tipo de teorías es la gravedad 3-dimensional invariante bajo el grupo $SO(2, 2)$, en la que la que el lagrangiano coincide con el de Einstein–Hilbert con constante cosmológica

[14, 38]

$$L_{\text{CS}}^{(3)} = \frac{k}{2} \epsilon_{abc} \left(R^{ab} + \frac{2}{3\ell^2} e^a e^b \right) e^c. \quad (6.2)$$

Esta construcción puede ser llevada a cabo en todas las dimensiones impares y puede ser extendida al caso de superalgebras. En la última década, este tipo de sistemas han sido estudiados en gran detalle, ver por ejemplo Refs. [12, 35, 39–43]. Sin embargo, en el caso de dimensiones pares, no es posible realizar una construcción similar que sólo involucre una 1-forma conexión de gauge. Para lograrlo es necesario utilizar, en adición a la conexión, al menos una 0-forma múltiple ϕ en la representación fundamental del grupo de gauge. De esta forma, es posible construir una acción $2n$ -dimensional dada por

$$S^{(2n)} [A, \phi] = k \int_{\mathcal{M}_{2n}} \epsilon_{a_1 \dots a_{2n+1}} \phi^{a_1} F^{a_2 a_3} \dots F^{a_{2n} a_{2n+1}}, \quad (6.3)$$

donde F^{ab} corresponde a la 2-forma curvatura asociada a los generadores de un grupo especial ortogonal. Esta acción, conocida como gravedad topológica en dimensiones pares, fue obtenida por Chamseddine en [15] a partir de un lagrangiano Chern–Simons, usando un método de reducción dimensional. Este tipo de acción ha atraído la atención recientemente debido a que puede proporcionar una interesante dinámica cosmológica con torsión no nula [44]. Además de la reducción dimensional de Chamseddine, la gravedad topológica tiene otras conexiones con las formas Chern–Simons. Por ejemplo, en Ref. [45] fue encontrado que la acción para gravedad topológica en dimensiones pares aparece de gravedad Chern–Simons utilizando realizaciones no-lineales del grupo de Poincaré. En dicha referencia, el campo escalar ϕ^a fue identificado con el campo coseto asociado con las realizaciones no-lineales del grupo. Exploraciones adicionales fueron desarrolladas en Refs. [46–48], en donde fue mostrado que la acción para gravedad topológica invariante bajo el grupo de Poincaré corresponde, salvo una constante multiplicativa, a un término de Wess–Zumino–Witten gaugeado.

En esta sección, analizaremos la relación que existe entre la gravedad topológica en dimensiones pares de Chamseddine y un caso particular de la estructura presentada en las formas CSAS [8, 9]. Además se analizarán algunos ejemplos de la construcción para los casos de las álgebras AdS, conformal.

6.1.1. Introducción de 0-formas

Siguiendo Refs. [7–9], es posible extender la idea de los invariantes topológicos para construir una $(2n + 1)$ -forma invariante de gauge, análoga a las presentadas por Antoniadis y Savvidy

$$\Gamma_{2n+1} = \langle F^n H_1 \rangle, \quad (6.4)$$

cuya principal diferencia es que aquí hemos incluido la 1-forma $H_1 = D\phi = d\phi + [A, \phi]$. Esto es, una 1-forma que juega el rol de ‘intensidad de campo’ para la 0-forma ϕ , la cual transforma como un tensor del grupo de gauge al igual que F . Es directo ver que Γ_{2n+1} es una forma cerrada, de modo que de acuerdo al lema de Poincaré, debe existir una $2n$ -forma $\mathfrak{C}^{(2n)}$ tal que

$$\Gamma_{2n+1} = d\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n)}. \quad (6.5)$$

La 2-forma F y la 1-forma H_1 satisfacen las siguientes identidades de Bianchi,

$$DF = 0, \quad DH + [\phi, F] = 0,$$

y bajo una transformación de gauge cambian de un modo análogo al de las teorías de gauge extendidas estudiadas en el capítulo 3

$$\delta F = D(\delta A), \quad \delta H_1 = D(\delta\phi) + [\delta A, \phi]. \quad (6.6)$$

De lo anterior vemos que la $2n$ -form $\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{2n}$ es dada por

$$\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n)}(A, \phi) = \langle F^n \phi \rangle.$$

Esto permite utilizar la forma $\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n)}$ para construir acciones para gravedad en dimensiones pares para los grupos de gauge $\text{ISO}(2n - 1, 1)$, $\text{SO}(2n, 1)$ y $\text{SO}(2n - 1, 2)$, así como para otros grupos. Por ejemplo, si el grupo de gauge es el grupo AdS, la forma $\mathfrak{C}_{\text{CSAS}}^{(2n)}$ viene dada por [49]

$$\langle F^n \phi \rangle = \epsilon_{a_1 \dots a_{2n+1}} F^{a_1 a_2} \dots F^{a_{2n-1} a_{2n}} \phi^{a_{2n+1}}, \quad (6.7)$$

la cual coincide con el lagrangiano de Chamseddine para gravedad topológica en dimensiones pares de Ref. [15].

6.1.2. Caso AdS

Para este caso debemos introducir una 1-forma conexión A y un campo escalar ϕ , evaluados en el álgebra $\text{SO}(4, 2)$, a cuyas componentes denotaremos del siguiente modo

$$A = e + \omega = \frac{1}{\ell} e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab},$$

$$\phi = \varphi + \beta = \frac{1}{\ell} \varphi^a P_a + \frac{1}{2} \beta^{ab} J_{ab}.$$

A partir de las relaciones de conmutación del álgebra AdS en cinco dimensiones

$$\begin{aligned} [J_{AB}, J_{CD}] &= \eta_{BC} J_{AD} + \eta_{AD} J_{BC} - \eta_{AC} J_{BD} - \eta_{BD} J_{AC}, \\ [J_{AB}, P_C] &= \eta_{BC} P_A - \eta_{AC} P_B, \\ [P_A, P_B] &= J_{AB}, \end{aligned}$$

con $\eta_{AB} = \text{diag}(-, +, +, +, +)$.

Puesto que en este caso la curvatura puede ser escrita como

$$F = T + \mathcal{R} = \frac{1}{\ell} T^A P_A + \frac{1}{2} \left(R^{AB} + \frac{1}{\ell^2} e^A e^B \right) J_{AB},$$

tenemos que el lagrangiano puede ser explícitamente escrita como

$$\begin{aligned} L_{\text{CSAS}}^{(4)} &= \frac{k}{4\ell} \epsilon_{ABCDE} \left(R^{AB} R^{CD} + \frac{2}{\ell^2} R^{AB} e^C e^D + \frac{1}{\ell^4} e^A e^B e^C e^D \right) \varphi^E \\ &+ \frac{k}{2\ell} \epsilon_{ABCDE} \left(R^{AB} + \frac{1}{\ell^2} e^A e^B \right) \beta^{CD} T^E, \end{aligned} \quad (6.8)$$

el cual es invariante bajo la acción del grupo $\text{SO}(4, 2)$ y válido para la variedad 4 dimensional, correspondiente al borde de la variedad en donde se define el invariante Γ . Para poder interpretar dicho grupo como el grupo conformal en 4 dimensiones,

consideremos el siguiente cambio de base

$$\begin{aligned}\tilde{D} &= P_4, \\ K_a &= P_a + J_{a4}, \\ \Pi_a &= P_a - J_{a4}.\end{aligned}$$

Luego, la conexión A puede escribirse como

$$A = y\tilde{D} + \frac{1}{\ell}j^a K_a + \frac{1}{\ell}V^a \Pi_a + \frac{1}{2}\omega^{ab} J_{ab},$$

con

$$e^a = j^a + V^a, \quad \omega^{a4} = \frac{1}{\ell}(j^a - V^a),$$

donde identificamos a V^a , y y j^a como el campo vielbein, los campos de gauge asociados al generador de dilataciones y el boots conformal respectivamente. De esta forma se tiene que las componentes de la curvatura 5-dimensional se escriben del siguiente modo en términos de las curvaturas 4-dimensionales

$$\begin{aligned}R^{ab} &= \hat{R}^{ab} - \frac{1}{\ell^2}(j^a - V^a)(j^b - V^b), \\ R^{a4} &= \frac{1}{\ell}D(j^a - V^a), \\ T^a &= D(j^a + V^a) + \frac{1}{\ell}(j^a - V^a)e^4, \\ T^4 &= \ell dy + \frac{2}{\ell}j^a V_a,\end{aligned}$$

donde denotamos D_ω y D a las derivadas covariantes construidas a partir de las conexiones ω^{AB} y ω^{ab} respectivamente, y donde \hat{R}^{ab} representa la curvatura de Lorentz en 4 dimensiones. Del mismo modo, En la nueva base, el campo ϕ se descompone del siguiente modo

$$\phi = \frac{1}{\ell}\varphi^4 \tilde{D} + \lambda^a K_a + \theta^a \Pi_a + \frac{1}{2}\beta^{ab} J_{ab}.$$

A partir de (6.8) podemos separar las distintas partes de la acción que se encuentran acopladas con las distintas componentes de los campos escalares en la base conformal,

es decir, con φ^4 , λ^a , θ^a y β^{ab} cada una de las cuales, es invariante bajo la acción del grupo conformal. En estos términos, el lagrangiano se descompone en las siguientes cantidades

$$\begin{aligned}
 L_{\varphi^4} &= \epsilon_{abcd} \left(\frac{1}{4\ell} \hat{R}^{ab} \hat{R}^{cd} + \frac{2}{\ell^3} \hat{R}^{ab} j^c V^d + \frac{4}{\ell^5} j^a j^b V^c V^d \right) \varphi^4, \\
 L_{\lambda^a} &= 2\epsilon_{abcd} \left[\hat{R}^{ab} + \frac{4}{\ell^2} j^a V^b \right] [DV^c - V^c y] \lambda^d, \\
 L_{\beta^{ab}} &= \frac{1}{\ell} \epsilon_{abcd} \left\{ \frac{1}{2} \left[\hat{R}^{ab} + \frac{4}{\ell^2} j^a V^b \right] \left[dy + \frac{2}{\ell^2} j^c V_e \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[\frac{1}{\ell} D j^a D j^b - \frac{1}{\ell} DV^a DV^b + \frac{2}{\ell^2} D j^a DV^b + \frac{2}{\ell} V^a y D j^b + \frac{2}{\ell} j^a y DV^b \right] \right\} \beta^{cd}, \\
 L_{\theta^a} &= -2\epsilon_{abcd} \left[\hat{R}^{ab} + \frac{4}{\ell^2} j^a V^b \right] [D j^c + j^c y] \theta^d.
 \end{aligned}$$



6.2. Acción CSAS y superálgebra de Maxwell

En esta sección utilizaremos el método de descomposición de p -formas en 1-formas, desarrollado en Ref. [30] y aplicado en Refs. [50–52], para construir una forma CSAS a partir de la superálgebra de Maxwell. Luego, probaremos que la correspondiente teoría CSAS coincide con la acción para supergravedad estándar en un determinado límite.

La superálgebra de Maxwell minimal \mathfrak{sm}_4 en 4 dimensiones tiene por generadores a P_a , J_{ab} , Z_{ab} , \tilde{Z}_{ab} , Q_α , Σ_α los cuales satisfacen las siguientes relaciones de

(anti)conmutación

$$\begin{aligned}
 [J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc}J_{ad} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{bd}J_{ac} - \eta_{ac}J_{bd}, \\
 [J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b, \quad [P_a, P_b] = Z_{ab}, \\
 [J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{bd}Z_{ac} - \eta_{ac}Z_{bd}, \\
 [P_a, Q_\alpha] &= -\frac{1}{2}(\gamma_a\Sigma)_\alpha, \quad [J_{ab}, Q_\alpha] = -\frac{1}{2}(\gamma_{ab}Q)_\alpha, \\
 [J_{ab}, \Sigma_\alpha] &= -\frac{1}{2}(\gamma_{ab}\Sigma)_\alpha, \quad [\tilde{Z}_{ab}, Q_\alpha] = -\frac{1}{2}(\gamma_{ab}\Sigma)_\alpha, \\
 \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= -\frac{1}{2}\left[(\gamma^{ab}C)_{\alpha\beta}\tilde{Z}_{ab} - 2(\gamma^aC)_{\alpha\beta}P_a\right], \\
 \{Q_\alpha, \Sigma_\beta\} &= -\frac{1}{2}(\gamma^{ab}C)_{\alpha\beta}Z_{ab}, \\
 [J_{ab}, \tilde{Z}_{cd}] &= \eta_{bc}\tilde{Z}_{ad} + \eta_{ad}\tilde{Z}_{bc} - \eta_{bd}\tilde{Z}_{ac} - \eta_{ac}\tilde{Z}_{bd}, \\
 [\tilde{Z}_{ab}, \tilde{Z}_{cd}] &= \eta_{bc}Z_{ad} + \eta_{ad}Z_{bc} - \eta_{bd}Z_{ac} - \eta_{ac}Z_{bd}, \\
 \text{otros} &= 0.
 \end{aligned}$$

Esta álgebra puede ser encontrada por medio de una S-expansion de la superálgebra $\mathfrak{osp}(4/1)$ [53, 54].

Con el objeto de escribir una acción para la forma CSAS, comenzamos expresando los campo de gauge A y B en la base de la superálgebra de Maxwell

$$A = \frac{1}{\ell}e^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2}k^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{2}\tilde{k}^{ab}\tilde{Z}_{ab} + \frac{1}{\sqrt{\ell}}\psi^\alpha Q_\alpha + \frac{1}{\sqrt{\ell}}\xi^\alpha \Sigma_\alpha,$$

donde e^a es identificado como la 1-forma vierbein, ω^{ab} como la 1-forma conexión de espín, y donde k^{ab} y \tilde{k}^{ab} son dos campos bosónicos. Además, están presentes las 1-formas fermiónicas ψ^α y ξ^α . La correspondiente 2-forma curvatura es entonces dada por

$$F = \frac{1}{\ell}\hat{T}^a P_a + \frac{1}{2}R^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2}f^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{2}\tilde{f}^{ab}\tilde{Z}_{ab} + \frac{1}{\sqrt{\ell}}\Psi^\alpha Q_\alpha + \frac{1}{\sqrt{\ell}}\Xi^\beta \Sigma_\beta,$$

donde definimos

$$\begin{aligned}
 \hat{T}^a &= T^a + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^a\psi, \\
 R^{ab} &= d\omega^{ab} + \omega^a{}_c\omega^{cb}, \\
 f^{ab} &= Dk^{ab} + \frac{1}{\ell^2}e^ae^b + \tilde{k}^a{}_c\tilde{k}^{cb} - \frac{1}{\ell}\bar{\xi}\gamma^{ab}\psi, \\
 \tilde{f}^{ab} &= D\tilde{k}^{ab} - \frac{1}{2\ell}\bar{\psi}\gamma^{ab}\psi, \\
 \Psi^\alpha &= D\psi^\alpha, \\
 \Xi^\beta &= D\xi^\beta - \frac{1}{4}\tilde{k}^{ab}\psi^\alpha(\gamma_{ab})_\alpha{}^\beta - \frac{1}{2\ell}e^a\psi^\alpha(\gamma_a)_\alpha{}^\beta.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, las componentes de la 2-forma B serán denotadas del siguiente modo

$$B = B^a P_a + \frac{1}{2}B^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2}\beta^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{2}\tilde{\beta}^{ab} \tilde{Z}_{ab} + \lambda^\alpha Q_\alpha + \chi^\alpha \Sigma_\alpha,$$

mientras que las componentes de la 3-forma curvatura H serán denotadas como

$$H = H^a P_a + \frac{1}{2}H^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2}\Theta^{ab} Z_{ab} + \frac{1}{2}\tilde{\Theta}^{ab} \tilde{Z}_{ab} + \tilde{H}^\alpha Q_\alpha + \mathcal{H}^\alpha \Sigma_\alpha.$$

Utilizando las relaciones de la FDA, se encuentra que dichas componentes son dadas por [55]

$$H^a = DB^a - \frac{1}{\ell}B^a{}_c e^c + \frac{1}{\sqrt{\ell}}\bar{\psi}\gamma^a\lambda, \quad (6.9)$$

$$H^{ab} = DB^{ab}, \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned}
 \Theta^{ab} &= D\beta^{ab} - B^{[a}{}_c k^{c|b]} - \frac{1}{\ell}B^{[a}{}_c e^{b]} - \tilde{\beta}^{[a}{}_c \tilde{k}^{c|b]} - \frac{1}{\sqrt{\ell}}\bar{\psi}\gamma^{ab}\chi + \frac{1}{\sqrt{\ell}}\bar{\lambda}\gamma^{ab}\xi, \\
 \tilde{\Theta}^{ab} &= D\tilde{\beta}^{ab} - B^{[a}{}_c \tilde{k}^{c|b]} - \frac{1}{\sqrt{\ell}}\bar{\psi}\gamma^{ab}\lambda,
 \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\tilde{H}^\alpha = D\lambda^\alpha + \frac{1}{4\sqrt{\ell}}B^{ab}\psi^\beta(\gamma_{ab})_\beta{}^\alpha, \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^\alpha &= D\chi^\alpha + \frac{1}{4\sqrt{\ell}}B^{ab}\xi^\beta(\gamma_{ab})_\beta{}^\alpha - \frac{1}{2\ell}e^a\lambda^\beta(\gamma_a)_\beta{}^\alpha + \frac{1}{2\sqrt{\ell}}B^a\psi^\beta(\gamma_a)_\beta{}^\alpha \\
 &\quad - \frac{1}{4}\tilde{k}^{ab}\lambda^\beta(\gamma_{ab})_\beta{}^\alpha + \frac{1}{4\sqrt{\ell}}\tilde{\beta}^{ab}\psi^\beta(\gamma_{ab})_\beta{}^\alpha.
 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ahora debemos determinar la forma de las 2-formas B^a , B^{ab} , β^{ab} , $\tilde{\beta}^{ab}$, λ^α , χ^α en términos de las componentes de A , de modo que el álgebra diferencial libre de potenciales A y B se vea reducida a la superálgebra de Maxwell ya introducida. Para poder hacer esto, seguimos el procedimiento desarrollado en Refs. [30, 50]. Debemos expresar la forma B en términos de A por medio del ansatz más general posible, el cual viene dado por las siguientes ecuaciones

$$B^a = \frac{a_1}{2\ell}\omega^a{}_b e^b + \frac{a_2}{2\ell}k^a{}_b e^b + \frac{a_3}{2\ell}\tilde{k}^a{}_b e^b + \frac{a_4}{\ell}\bar{\psi}\gamma^a\psi + \frac{a_5}{\ell}\bar{\psi}\gamma^a\xi + \frac{a_6}{\ell}\bar{\xi}\gamma^a\xi, \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} B^{ab} &= \frac{b_1}{2\ell^2}e^a e^b + \frac{b_2}{2}\omega_c^{[a}k^{c]b]} + \frac{b_3}{2}k^a{}_c k^{cb} + \frac{b_4}{2}\omega_c^{[a}\tilde{k}^{c]b]} + \frac{b_5}{2}\tilde{k}^a{}_c \tilde{k}^{cb} \\ &+ \frac{b_6}{2}\omega^a{}_c \omega^{cb} + \frac{b_7}{\ell}\bar{\psi}\gamma^{ab}\psi + \frac{b_8}{\ell}\bar{\psi}\gamma^{ab}\xi + \frac{b_9}{\ell}\bar{\xi}\gamma^{ab}\xi, \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \beta^{ab} &= \frac{c_1}{2\ell^2}e^a e^b + \frac{c_2}{2}\omega_c^{[a}k^{c]b]} + \frac{c_3}{2}k^a{}_c k^{cb} + \frac{c_4}{2}\omega_c^{[a}\tilde{k}^{c]b]} + \frac{c_5}{2}\tilde{k}^a{}_c \tilde{k}^{cb} \\ &+ \frac{c_6}{2}\omega^a{}_c \omega^{cb} + \frac{c_7}{\ell}\bar{\psi}\gamma^{ab}\psi + \frac{c_8}{\ell}\bar{\psi}\gamma^{ab}\xi + \frac{c_9}{\ell}\bar{\xi}\gamma^{ab}\xi, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}^{ab} &= \frac{d_1}{2\ell^2}e^a e^b + \frac{d_2}{2}\omega_c^{[a}k^{c]b]} + \frac{d_3}{2}k^a{}_c k^{cb} + \frac{d_4}{2}\omega_c^{[a}\tilde{k}^{c]b]} + \frac{d_5}{2}\tilde{k}^a{}_c \tilde{k}^{cb} \\ &+ \frac{d_6}{2}\omega^a{}_c \omega^{cb} + \frac{d_7}{\ell}\bar{\psi}\gamma^{ab}\psi + \frac{d_8}{\ell}\bar{\psi}\gamma^{ab}\xi + \frac{d_9}{\ell}\bar{\xi}\gamma^{ab}\xi, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= \frac{f_1}{\ell}e_a\gamma^a\psi_\alpha + \frac{f_2}{\ell}e_a\gamma^a\xi_\alpha + \frac{f_3}{2}\omega_{ab}\gamma^{ab}\psi_\alpha + \frac{f_4}{2}\omega_{ab}\gamma^{ab}\xi_\alpha + \frac{f_5}{2}k_{ab}\gamma^{ab}\psi_\alpha \\ &+ \frac{f_6}{2}k_{ab}\gamma^{ab}\xi_\alpha + \frac{f_7}{2}\tilde{k}_{ab}\gamma^{ab}\psi_\alpha + \frac{f_8}{2}\tilde{k}_{ab}\gamma^{ab}\xi_\alpha, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \chi_\alpha &= \frac{g_1}{\ell}e_a\gamma^a\psi_\alpha + \frac{g_2}{\ell}e_a\gamma^a\xi_\alpha + \frac{g_3}{2}\omega_{ab}\gamma^{ab}\psi_\alpha + \frac{g_4}{2}\omega_{ab}\gamma^{ab}\xi_\alpha + \frac{g_5}{2}k_{ab}\gamma^{ab}\psi_\alpha \\ &+ \frac{g_6}{2}k_{ab}\gamma^{ab}\xi_\alpha + \frac{g_7}{2}\tilde{k}_{ab}\gamma^{ab}\psi_\alpha + \frac{g_8}{2}\tilde{k}_{ab}\gamma^{ab}\xi_\alpha, \end{aligned} \quad (6.19)$$

donde los coeficientes que acompañan a cada término son constantes arbitrarias y los corchetes en los índices denotan antisimetrización sin normalización. Entonces, introduciendo las ecuaciones (6.14-6.19) en (6.9-6.13), exigimos que el ansatz impuesto verifique las ecuaciones de Maurer–Cartan generalizadas

$$\begin{aligned} H^a &= 0, \\ H^{ab} &= \Theta^{ab} = \tilde{\Theta}^{ab} = 0, \\ \tilde{H}^\alpha &= \mathcal{H}^\alpha = 0, \end{aligned}$$

siempre y cuando las componentes de A verifiquen las ecuaciones de Maurer–Cartan de la superálgebra de Maxwell, es decir,

$$\begin{aligned}\hat{T}^a &= 0, \\ R^{ab} &= f^{ab} = \tilde{f}^{ab} = 0, \\ \Psi^\alpha &= \Xi^\beta.\end{aligned}$$

De esta forma, se encuentra que las componentes de B deben estar dadas por

$$B^a = \frac{a_4}{\ell} \bar{\psi} \gamma^a \psi + \frac{a_5}{\ell} \bar{\psi} \gamma^a \xi, \quad (6.20)$$

$$B^{ab} = 0, \quad (6.21)$$

$$\beta^{ab} = \frac{c_1}{2\ell^2} e^a e^b + \frac{c_5}{2} \tilde{k}^a{}_c \tilde{k}^{cb} + \frac{c_8}{\ell} \bar{\psi} \gamma^{ab} \xi + \frac{c_9}{\ell} \bar{\xi} \gamma^{ab} \xi, \quad (6.22)$$

$$\tilde{\beta}^{ab} = \frac{d_7}{\ell} \bar{\psi} \gamma^{ab} \psi + \frac{d_8}{\ell} \bar{\psi} \gamma^{ab} \xi, \quad (6.23)$$

$$\lambda_\alpha = \frac{f_1}{\ell} e_a \gamma^a \psi_\alpha + \frac{f_7}{2} \tilde{k}_{ab} \gamma^{ab} \psi_\alpha, \quad (6.24)$$

$$\chi_\alpha = \frac{g_1}{\ell} e_a \gamma^a \psi_\alpha + \frac{g_2}{\ell} e_a \gamma^a \xi_\alpha + \frac{g_7}{2} \tilde{k}_{ab} \gamma^{ab} \psi_\alpha + \frac{g_8}{2} \tilde{k}_{ab} \gamma^{ab} \xi_\alpha. \quad (6.25)$$

Los campos dados por las ecuaciones (6.20-6.25) representan la solución más general que puede ser construida a partir de los campos $\{e^a, \omega^{ab}, k^{ab}, \tilde{k}^{ab}, \psi^\alpha, \xi^\alpha\}$. Cualquier elección de las constantes, las cuales quedan libres, representa una solución para la FDA y reduce la teoría a la variedad del supergrupo asociado a la superálgebra sm_4 .

Para poder construir la acción, utilizamos los tensores invariantes encontrados en Ref. [53], dados por

$$\begin{aligned}\langle J_{ab} J_{cd} \rangle &= \alpha_0 \epsilon_{abcd}, \\ \langle \tilde{Z}_{ab} \tilde{Z}_{cd} \rangle &= \alpha_4 \epsilon_{abcd}, \\ \langle Q_\alpha Q_\beta \rangle &= 2\alpha_2 (\gamma_5)_{\alpha\beta}, \\ \langle J_{ab} \tilde{Z}_{cd} \rangle &= \alpha_2 \epsilon_{abcd}, \\ \langle J_{ab} Z_{cd} \rangle &= \alpha_4 \epsilon_{abcd}, \\ \langle Q_\alpha \Sigma_\beta \rangle &= 2\alpha_4 (\gamma_5)_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

donde α_0 , α_2 y α_4 son constantes arbitrarias y sin dimensiones. El lagrangiano CSAS es explícitamente dado por

$$\begin{aligned}
 L_{\text{CSAS}}^{(4)} &= \frac{1}{4}\epsilon_{abcd}(\alpha_0 R^{ab} B^{cd} + \alpha_4 (R^{ab} \beta^{cd} + f^{ab} B^{cd})) \\
 &+ \frac{1}{4}\epsilon_{abcd}\alpha_2 \left(R^{ab} \tilde{\beta}^{cd} + \frac{1}{4}\tilde{f}^{ab} B^{cd} \right) + \alpha_4 \tilde{f}^{ab} \tilde{\beta}^{cd} \\
 &+ \frac{2\alpha_2}{\sqrt{l}} \Psi^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\beta \lambda_\beta + \frac{2\alpha_4}{\sqrt{l}} \Psi^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\beta \chi_\beta + \frac{2\alpha_4}{\sqrt{l}} \lambda^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\beta \Xi_\beta. \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

Luego, utilizando la expansion para los potenciales de la FDA, dados por las ecuaciones (6.20-6.25), el lagrangiano toma la forma

$$\begin{aligned}
 L_{\text{CSAS}}^{(4)} &= \frac{1}{4}\epsilon_{abcd} \left(\alpha_4 R^{ab} \left(\frac{c_1}{2l^2} e^c e^d + \frac{c_5}{2} \tilde{k}^c{}_f \tilde{k}^{fd} + \frac{c_8}{l} \bar{\psi} \gamma^{cd} \xi + \frac{c_9}{l} \bar{\xi} \gamma^{cd} \xi \right) \right) \\
 &+ \frac{1}{4}\epsilon_{abcd}\alpha_2 R^{ab} \left(\frac{d_7}{l} \bar{\psi} \gamma^{cd} \psi + \frac{d_8}{l} \bar{\psi} \gamma^{cd} \xi \right) + \alpha_4 \tilde{f}^{ab} \left(\frac{d_7}{l} \bar{\psi} \gamma^{cd} \psi + \frac{d_8}{l} \bar{\psi} \gamma^{cd} \xi \right) \\
 &+ \frac{2}{l^{3/2}} (\alpha_2 f_1 + \alpha_4 g_1) \Psi^\alpha e_a (\gamma_5)_\alpha{}^\beta (\gamma^a)_\beta{}^\gamma \psi_\gamma \\
 &+ \left(\frac{f_7}{2} \frac{2\alpha_2}{\sqrt{l}} + \frac{g_7}{2} \frac{2\alpha_4}{\sqrt{l}} \right) \Psi^\alpha \tilde{k}_{ab} (\gamma_5)_\alpha{}^\beta (\gamma^{ab})_\beta{}^\gamma \psi_\gamma \\
 &+ \frac{g_2}{l} \frac{2\alpha_4}{\sqrt{l}} \Psi^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\beta e_a (\gamma^a)_\beta{}^\gamma \xi_\gamma + \frac{g_8}{2} \frac{2\alpha_4}{\sqrt{l}} \Psi^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\beta \tilde{k}_{ab} (\gamma^{ab})_\beta{}^\gamma \xi_\gamma \\
 &- \frac{f_1}{l} \frac{2\alpha_4}{\sqrt{l}} e_a \psi^\beta (\gamma^a)_\beta{}^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\gamma \Xi_\gamma - \frac{f_7}{2} \frac{2\alpha_4}{\sqrt{l}} \tilde{k}_{ab} \psi^\beta (\gamma^{ab})_\beta{}^\alpha (\gamma_5)_\alpha{}^\gamma \Xi_\gamma. \quad (6.27)
 \end{aligned}$$

De la ecuación (6.27) podemos ver que si escogemos $c_9 = d_8 = f_1 = f_7 = g_2 = g_8 = 0$, elección que es consistente con las ecuaciones (6.14-6.19) y (6.9-6.13), tenemos que

$$\begin{aligned}
 L_{\text{CSAS}}^{(4)} &= \frac{\alpha_4 c_1}{8} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + 2\alpha_4 g_1 \sqrt{l} \Psi \gamma_5 e_a \gamma^a \psi + \frac{\alpha_4 c_5}{8} l^2 \epsilon_{abcd} R^{ab} \tilde{k}^c{}_f \tilde{k}^{fd} \\
 &+ \frac{\alpha_4 c_8}{4} l \epsilon_{abcd} R^{ab} \bar{\psi} \gamma^{cd} \xi + \frac{\alpha_2 d_7}{4} l \epsilon_{abcd} R^{ab} \bar{\psi} \gamma^{cd} \xi + \frac{\alpha_4 d_7}{4} l \epsilon_{abcd} \tilde{f}^{ab} \bar{\psi} \gamma^{cd} \xi \\
 &+ \alpha_4 g_7 l^{3/2} \Psi \gamma_5 \tilde{k}_{ab} \gamma^{ab} \psi. \quad (6.28)
 \end{aligned}$$

De la ecuación (6.28), podemos ver que cuando $l \ll 1$, el lagrangiano CSAS para

la superálgebra de Maxwell es dado por

$$L_{\text{CSAS}}^{(4)} = \frac{\alpha_4 c_1}{8} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + 2\alpha_4 g_1 \sqrt{l} \Psi \gamma_5 e_a \gamma^a \psi. \quad (6.29)$$

Este lagrangiano reproduce, excepto por coeficientes numéricos, al lagrangiano para supergravedad estándar.



Capítulo 7

Conclusiones y proyecciones

En el último tiempo, han sido llevadas a cabo investigaciones con el objetivo de construir una teoría de campos de gauge que generalice las simetrías de Yang–Mills, de manera que incluya campos de gauge tensoriales no abelianos.

En Refs. [1–5, 7–9] fue formulada una teoría de gauge de las características antes mencionadas, conocida como ‘teoría de gauge extendida’, la cual incluye en su descripción p -formas campos de gauge. La idea central de estos artículos es extender el principio de gauge a campos descritos por formas de ordenes mayores y así construir polinomios en las formas de curvatura que sean análogos a las densidades de Chern–Pontryagin y que conduzcan a densidades invariantes de gauge análogas a las formas Chern–Simons. Por ejemplo, la primera serie de $(2n + 3)$ -formas invariantes, viene dadas por $\Gamma_{2n+3} = \langle F^n H_3 \rangle$, donde $H_3 = dB + [A, B]$ es la 3-forma intensidad de campo asociada a una 2-forma campo de gauge B . Del mismo modo, son introducidos invariantes en $2n + 4$, $2n + 6$ y $2n + 8$ dimensiones, denotados $\Gamma^{(2n+4)}$, $\Xi^{(2n+6)}$ y $\Upsilon^{(2n+8)}$ respectivamente. Basandose en estos resultados, presentados en Refs. [7–9] fueron encontradas expresiones explicitas para las correspondientes formas Chern–Simons asociadas, las cuales, en analogía a las formas Chern–Simons estandar, son libre de background, cuasi-invariantes de gauge y definidas sólo localmente.

En el Capítulo 4 de la presente tesis, se desarrolló una formulación basada estructuras algebraicas, a las que denominamos como arreglos diferenciales libres, las cuales reproducen los resultados de Refs. [1–5, 7–9] como casos particulares.

A diferencia del formalismo desarrollado en dichas referencias, la formulación en

términos de arreglos diferenciales permite, en principio, obtener nuevos invariantes tipo Chern–Pontrjagin y sus correspondientes formas Chern–Simons. Este formalismo permite además obtener de manera directa, tanto de las leyes de transformación de los campos, como las correspondientes identidades de Bianchi asociadas a las formas de curvatura. Esto ofrece muchas ventajas, tanto desde el punto de vista de la facilidad de cálculo como al momento de buscar una interpretación física más directa de los campos físicos.

En el Capítulo 5, se estudiaron las generalizaciones del teorema de Chern–Weil para las formas que hemos llamado formas CSAS. Además fueron definidas las correspondientes formas de transgresión generalizadas. En el mismo capítulo fue generalizado el método de separación en subespacios, basado en la fórmula extendida de homotopía de Cartan.

En el Capítulo 6, fueron llevadas cabo aplicaciones en las que las formas CSAS describen lagrangianos de acciones para gravedad y supergravedad. También fue estudiada la relación que existe entre dichas teorías Chern–Simons y la teoría de la (super)gravedad estándar en cuatro dimensiones.

Finalmente puede ser relevante notar que las formas CSAS en $2n + 5$ y $2n + 7$ dimensiones, son de especial interés para futuras aplicaciones en supergravedad. Esto se debe a que los casos $n = 3$ y $n = 2$ conducen a lagrangianos Chern–Simons en 11 dimensiones que contienen explícitamente y en forma natural, una 3-forma campo de gauge y una 4-forma intensidad de campo. Esto permite conjeturar que podría ser posible construir una teoría de supergravedad Chern–Simons 11-dimensional, haciendo uso del procedimiento mostrado en el capítulo VI de esta tesis, que contenga o desemboque en algún límite en la teoría de supergravedad estandar o CJS.

Apéndice A

Fórmula extendida de homotopía de Cartan

En este apéndice se revisará la fórmula extendida de homotopía de Cartan [13].

Sea $f(l_t)$ una función arbitraria del operador l_t . Utilizando la expansión en serie de potencias de la función f , podemos escribir el conmutador de $f(l_t)$ con el operador derivada exterior como

$$[f(l_t), d] = \left[\sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) l_t^n, d \right] = \sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) [l_t^n, d],$$

pero dado que $[l_t, d] = d_t$ y que

$$[l_t^n, d] = [l_t, d] l_t^{n-1} + \dots + l_t^{n-1} [l_t, d],$$

se tiene

$$[l_t^n, d] = d_t l_t^{n-1} + l_t d_t l_t^{n-2} + \dots + l_t^{n-2} d_t l_t + l_t^{n-1} d_t.$$

Teniendo en cuenta que $[d_t, l_t] = 0$ podemos escribir $[l_t^n, d] = n l_t^{n-1} d_t$, y por lo tanto, el parentesis $[f(l_t), d]$ puede escribirse como

$$[f(l_t), d] = \left(\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} l_t^{n-1} \right) d_t = f'(l_t) d_t = d_t f'(l_t). \quad (\text{A.1})$$

Un ejemplo particularmente interesante de ésto, resulta de elegir $f(l_t) = e^{l_t}$. En dicho caso, $f'(l_t) = e^{l_t}$ y la ecuación (A.1) toma la forma

$$[e^{l_t}, d] = d_t e^{l_t} = e^{l_t} d_t.$$

Luego, aplicando estos operadores sobre un polinomio π en las formas $(A_t, F_t, d_t A_t, d_t F_t)$ dado por una (m, q) -forma sobre $\mathcal{M} \times T_{r+1}$, con $m \geq p$ y $p + q = r$, se tiene

$$d_t e^{l_t} \pi = e^{l_t} d \pi - d e^{l_t} \pi.$$

Esta identidad puede ser escrita en la forma

$$d_t \frac{d}{dl_t} \sum_p \frac{1}{p!} l_t^p \pi = \sum_p \frac{1}{p!} l_t^p d \pi - d \sum_p \frac{1}{p!} l_t^p \pi,$$

de donde se tiene

$$\sum_p d_t \frac{1}{(p-1)!} l_t^{p-1} \pi = \sum_p \frac{1}{p!} l_t^p d \pi - \sum_p d \frac{1}{p!} l_t^p \pi,$$

o bien,

$$\frac{1}{(p-1)!} d_t l_t^{p-1} \pi = \frac{1}{p!} (l_t^p d - d l_t^p) \pi. \tag{A.2}$$

La ecuación (A.2) es conocida como la versión diferencial de la fórmula extendida de homotopía de Cartan.

Apéndice B

Electrodinámica con p -formas

En este apéndice, se realiza una revisión de la electrodinámica de p -formas desarrollada en Refs. [10, 56].

Los objetos de dimensiones mayores que cero, tales como cuerdas o membranas, han jugado un importante rol en la física teórica. Este hecho, es motivación suficiente para intentar generalizar a objetos extendidos, aquellas ideas y construcciones teóricas que han resultado exitosas cuando han sido aplicadas a objetos puntuales, como por ejemplo, la idea de invariancia de gauge. En referencias [10, 56], fue probado que esto sólo es posible si el grupo de gauge es $U(1)$, lo cual significa que no existen teorías de gauge no abelianas del tipo Yang–Mills para sistemas extendidos.

El análisis comienza recordando que, para objetos puntuales, el concepto de invariancia de gauge descansa sobre una 1-forma conexión evaluada en el álgebra de Lie del grupo de gauge. Dicha 1-forma permite transportar campos desde un punto del espacio-tiempo a otro, a lo largo de un camino que une ambos puntos. Esto significa que el problema es extender la electrodinámica al caso donde el potencial de gauge A es dado por una p -forma. Las fuentes del campo, que juega el rol de campo electromagnético, ya no deben ser partículas cargadas, sino objetos extendidos de dimensión $(p - 1)$.

Si un campo $\Phi(x)$ es transportado desde el punto x_1 hasta el punto x_2 a lo largo de un camino Γ , entonces el campo $\Phi_\Gamma(x_2)$ obtenido al transportar $\Phi(x)$ desde x_1

hasta x_2 a lo largo de la curva Γ es dado por

$$\Phi_{\Gamma}(x_2) = P \exp \left(-q \int_{\Gamma} A \right) \Phi(x_1), \quad (\text{B.1})$$

donde, q es una constante de acoplamiento. Aquí el símbolo P indica que la exponencial debe estar ordenada con respecto al parámetro τ que parametriza a Γ y que se incrementa monótonamente al moverse a lo largo de la curva. Para tener una teoría invariante bajo el grupo $U(1)$, cuya acción sobre $\Phi(x)$ es dada por

$$\Phi[x^{\mu}(\tau)] \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \Phi[x^{\mu}(\tau)], \quad (\text{B.2})$$

entonces debemos definir una conexión A sobre el espacio de configuración $x^{\mu}(\tau)$. La conexión A permite llevar a cabo el transporte de $\Phi[x^{\mu}(\tau)]$ a lo largo de cualquier camino $[x^{\mu}(\tau)]$. Análogamente al transporte paralelo de Levi-Civita usado en Relatividad General, la ecuación para el transporte paralelo es en nuestro caso

$$d\Phi(\tau) = -qA(\tau) \Phi(\tau) d\tau, \quad (\text{B.3})$$

donde q es una constante de acoplamiento. De (B.3) vemos que

$$\frac{d\Phi(\tau)}{\Phi(\tau)} = -qA(\tau) d\tau,$$

ecuación que tiene por solución

$$\Phi(\tau_2) = \exp \left[-q \int_{\Gamma} A(\tau) d\tau \right] \Phi(\tau_1).$$

El ordenamiento del camino es necesario, debido a que el hamiltoniano en el tiempo τ , dado por

$$h(\tau) = -qA_{\mu}[x(\tau)] \frac{dx^{\mu}}{d\tau}, \quad (\text{B.4})$$

es tal que su conmutador consigo mismo, a igual tiempo τ , no se anula a menos que el grupo sea abeliano, en cuyo caso el ordenamiento del camino en (B.1) es superfluo.

En efecto, sabemos que el lagrangiano de interacción para una partícula cargada

en un campo electromagnético es dado por

$$L_{int} = qA_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau},$$

y por lo tanto, el hamiltoniano es dado por $H_{int} = p\dot{q} - L_{int}$, con $p^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{A}_\mu}$ y $q_\mu = A_\mu$. Puesto que en este caso $p = 0$, tenemos

$$\mathcal{H}_{int} = -qA_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau},$$

y dado que $x^\mu = x^\mu(\tau)$ tenemos que

$$h(\tau) = \mathcal{H}_{int} = -qA_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Esto significa que

$$\begin{aligned} [h(\tau), h(\tau')] &= q^2 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau'} [A_\mu(x(\tau)), A_\nu(x(\tau'))] \\ &= q^2 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau'} A_\mu^a(x(\tau)) A_\nu^b(x(\tau')) C_{ab}{}^c T_c, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde los T_a son los generadores del grupo y $C_{ab}{}^c$ son las constantes de estructura.

De (B.5) podemos ver que el conmutador se anulará para toda elección de las componentes de A_μ^a en cada punto si y sólo si las constantes de estructura se anulan.

Para saber si es posible extender el principio de gauge a campos definidos sobre objetos de mayores dimensiones, es necesario recordar que si $x^\mu(\sigma)$ con $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^{p-1})$ son las ecuaciones paramétricas de una variedad de dimensión $p-1$ embebida en un espacio-tiempo de Minkowski de dimensión n , entonces podemos considerar campos funcionales $\Phi[x(\sigma)]$, definidos sobre un espacio de configuración en el cual cada punto es una variedad de dimensión $p-1$.

Si la $(p-1)$ -variedad es desplazada desde una configuración inicial $x_1(\sigma)$ a una final $x_2(\sigma)$, ella barre un camino p -dimensional Γ_p en el espacio-tiempo, el cual es la generalización del camino Γ en (B.1).

El correspondiente análogo de la 1-forma conexión, corresponde a una p -forma

dada por

$$A = \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (\text{B.6})$$

Aquí el producto $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$ es la tangente al camino Γ_p , de modo que si introducimos un sistema de coordenadas $(\xi^1, \dots, \xi^p) = (\sigma^1, \dots, \sigma^{p-1}, \tau)$ sobre Γ_p , tenemos

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = \frac{\partial x^{[\mu_1}}{\partial \xi^1} \dots \frac{\partial x^{\mu_p]}{\partial \xi^p} d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^p, \quad (\text{B.7})$$

donde el parentesis cuadrado denota antisimetrización sin normalización.

Es posible postular una generalización de (B.1) dada por

$$\Phi_\Gamma(x_2(\sigma)) = P \exp \left(-q \int_{\Gamma_p} A \right) \Phi(x_1(\sigma)). \quad (\text{B.8})$$

donde A es la p -forma conexión definida en (B.6), sin embargo, esto conduce a un problema, ya que no existe una generalización directa para el operador P . Como primer intento, podría considerarse que es suficiente tener orden en $\tau = \xi^p$ ya que $x^\mu(\xi^1, \dots, \xi^p)$ puede ser pensado como la historia del punto $x^\mu(\sigma)$ en el tiempo τ . Sin embargo, el camino debe ser invariante bajo las reparametrizaciones de Γ_p , es decir, el ordenamiento debe mantenerse invariante si aplicamos una transformación general de coordenadas a (ξ^1, \dots, ξ^p) . Esto es imposible si $p > 1$.

Para continuar con el argumento, es útil reformular la exigencia de covariancia general de (B.8) en una manera más geométrica pero equivalente.

Consideremos ahora diferentes caminos en el espacio de configuración que van desde $x_1(\sigma)$ a $x_2(\sigma)$, pero que corresponden, cuando es visto en el espacio-tiempo, a cortar la misma variedad Γ_p por diferentes secuencias uniparamétricas de secciones $(p-1)$ -dimensionales $x^\mu(\sigma, \tau)$. Para tener invariancia bajo reparametrizaciones, el transporte (B.8) debería ser independiente del camino elegido ya que diferentes elecciones de los cortes corresponden a diferentes elecciones de $\tau = \text{constante}$.

El exigir independencia del camino es común en teoría de campos. La independencia del camino es dada por la condición que establece que los generadores de deformaciones de superficies dadas por \mathcal{H}_\perp y \mathcal{H}_i deben obedecer un álgebra univer-

sal a igual tiempo

$$[\mathcal{H}_\perp(\sigma), \mathcal{H}_\perp(\sigma')] = (\mathcal{H}^i(\sigma) + \mathcal{H}^i(\sigma')) \delta_{/i}(\sigma - \sigma'), \quad (\text{B.9})$$

$$[\mathcal{H}_i(\sigma), \mathcal{H}_\perp(\sigma')] = \mathcal{H}_\perp(\sigma) \delta_{/i}(\sigma - \sigma'), \quad (\text{B.10})$$

$$[\mathcal{H}_i(\sigma), \mathcal{H}_j(\sigma')] = \mathcal{H}_i(\sigma) \delta_{/j}(\sigma - \sigma') + \mathcal{H}_j(\sigma) \delta_{/i}(\sigma - \sigma'), \quad (\text{B.11})$$

donde $\mathcal{H}_i = g^{ij}\mathcal{H}_j$, con g_{ij} la métrica sobre la $(p-1)$ -superficie en la que τ es constante.

Los generadores \mathcal{H} en (B.9-B.11) pueden ser obtenidos considerando (B.8) como solución de la ecuación de propagación

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = h\Phi, \quad (\text{B.12})$$

con $\Phi(\tau_1) = \Phi[x_1]$ y $\Phi(\tau_2) = \Phi[x_2]$. Análogamente al caso de Relatividad General, la ecuación para el transporte paralelo es dado por

$$d\Phi = -qA\phi d\tau, \quad (\text{B.13})$$

donde ahora

$$A[x(\sigma)] = \frac{1}{p!} \int_{x(\sigma)} A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p},$$

pero utilizando la ecuación (B.7) se tiene

$$A[x(\sigma)] = \frac{1}{p!} \int_{x(\sigma)} A_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{p-1}}}{\partial \sigma^{p-1}} \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \tau} d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^p \wedge d\tau. \quad (\text{B.14})$$

Por otro lado, la generalización de la acción de interacción es dada por

$$\begin{aligned} S_{int} &= -q \int \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \\ &= - \int \frac{q}{p!} \int_{x(\sigma)} A_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{p-1}}}{\partial \sigma^{p-1}} \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \tau} d\xi^1 d\xi^{p-1} \wedge d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{int} &= - \int \frac{q}{p!} \int_{x(\sigma)} A_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \xi^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \xi^{\nu_p}} p! \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_p} d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^p \\
 &= - \int \left\{ q \int_{x(\sigma)} A_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{p-1}}}{\partial \sigma^{p-1}} \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \tau} d^{p-1} \sigma \right\} d\tau.
 \end{aligned}$$

De aquí podemos ver que el lagrangiano y el hamiltoniano de interacción son dado por

$$L_{int} = -q \int_{x(\sigma)} A_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{p-1}}}{\partial \sigma^{p-1}} \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \tau} d^{p-1} \sigma, \quad (\text{B.15})$$

$$h = \mathcal{H}_{int} = -q \int_{x(\sigma)} A_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{p-1}}}{\partial \sigma^{p-1}} \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \tau} d^{p-1} \sigma. \quad (\text{B.16})$$

Ahora descomponemos $\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}$ en términos de las componentes normal y tangencial en la forma

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = \xi^\perp n^\mu + \xi^i \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^i}, \quad (\text{B.17})$$

donde n^μ es un vector unitario, orientado hacia el futuro, normal a la superficie $\tau = \text{constante}$ que yace en Γ_p . En estos términos, el hamiltoniano toma la forma

$$\begin{aligned}
 h &= -q A_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{p-1}}}{\partial \sigma^{p-1}} \left(\xi^\perp n^{\mu_p} + \xi^i \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma^i} \right) d^{p-1} \sigma \\
 &= -q \int_{x(\sigma)} d^{p-1} \sigma \left\{ \xi^\perp A_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{p-1}}}{\partial \sigma^{p-1}} n^{\mu_p} + \xi^i A_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{p-1}}}{\partial \sigma^{p-1}} \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma^i} \right\},
 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

definiendo

$$\mathcal{H}_\perp = -q A_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{p-1}}}{\partial \sigma^{p-1}} n^{\mu_p}, \quad (\text{B.19})$$

$$\mathcal{H}_i = -q A_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\mu_{p-1}}}{\partial \sigma^{p-1}} \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma^i}, \quad (\text{B.20})$$

tenemos

$$h = -q \int_{x(\sigma)} d^{p-1} \sigma \left\{ \xi^\perp \mathcal{H}_\perp + \xi^i \mathcal{H}_i \right\}. \quad (\text{B.21})$$

Debemos notar que aquí, el índice i toma valores entre 0 y $p - 1$. Sin embargo, en

nuestro caso la aparición del último factor $\frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma^i}$ hace que

$$\mathcal{H}_i = 0. \quad (\text{B.22})$$

Reemplazando (B.19,B.22) en el álgebra (B.9-B.11) tenemos

$$[\mathcal{H}_\perp(\sigma), \mathcal{H}_\perp(\sigma')] = 0, \quad (\text{B.23})$$

y calculando en forma separada este conmutador se tiene

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_\perp(\sigma), \mathcal{H}_\perp(\sigma')] &= q^2 \left[A_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma^{p-1}} n^{\mu_p}, A_{\nu_1 \dots \nu_p} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\nu_{p-1}}}{\partial \sigma^{p-1}} n^{\nu_p} \right] \\ &= q^2 A_{\mu_1 \dots \mu_p}^a \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \sigma^{p-1}} n^{\mu_p} A_{\nu_1 \dots \nu_p}^b \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \sigma^1} \dots \frac{\partial x^{\nu_{p-1}}}{\partial \sigma^{p-1}} n^{\nu_p} C_{ab}{}^c T_c, \end{aligned}$$

de aquí vemos que el conmutador se anulará, únicamente si las constantes de estructura son nulas. Esto significa que el grupo debe ser abeliano y por lo tanto, (B.23) debe ser válida también para diferentes tiempos τ , lo cual significa que el ordenamiento del camino en (B.8) es superfluo. Este resultado prueba que no es posible construir una teoría de campos de Yang–Mills no abeliana para objetos extendidos en el espacio-tiempo.

Apéndice C

Transformaciones de gauge e identidades de Bianchi

En este apéndice listaremos las transformaciones de gauge, las definiciones de las formas de curvatura y las correspondientes identidades de Bianchi, encontradas en Refs. [1–5]. Estas propiedades son válidas para las teorías de gauge extendidas introducidas por Antoniadis y Savvidy.

C.0.1. Transformaciones de gauge

Las transformaciones de gauge para los campos tensoriales de gauge definidos en las Refs. [7–9] vienen dadas por

$$\delta A = D\xi,$$

$$\delta A_2 = D\xi_1 + [A_2, \xi],$$

$$\delta A_3 = D\xi_2 + [A_3, \xi],$$

$$\delta A_5 = D\xi_4 + 2[A_3, \xi_2] + [A_5, \xi],$$

$$\delta A_7 = D\xi_6 + 3[A_3, \xi_4] + 3[A_5, \xi_2] + [A_7, \xi],$$

donde $DA_{2n+1} = dA_{2n+1} + [A, A_{2n+1}]$.

C.0.2. Intensidades de Campo

Las correspondientes intensidades de campo son

$$\begin{aligned}
 F &= dA + A^2, \\
 F_3 &= dA_2 + [A, A_2], \\
 F_4 &= dA_3 + [A, A_3], \\
 F_6 &= dA_5 + [A, A_5] + [A_3, A_3], \\
 F_8 &= dA_7 + [A, A_7] + 3[A_3, A_5].
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

C.0.3. Transformaciones de gauge de las intensidades de campo

Las variaciones generales de las intensidades de campo son dadas por

$$\begin{aligned}
 \delta F &= D(\delta A), \\
 \delta F_4 &= D(\delta A_3) + [A_3, \delta A], \\
 \delta F_6 &= D(\delta A_5) + [A_5, \delta A] + 2[A_3, \delta A_3], \\
 \delta F_8 &= D(\delta A_7) + [A_7, \delta A] + 3[A_5, \delta A_3] + 3[A_3, \delta A_5], \\
 \delta F_{10} &= D(\delta A_9) + [A_9, \delta A] + 4[A_7, \delta A_3] + 6[A_5, \delta A_5] + 4[A_3, \delta A_7],
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Las transformaciones de gauge para las intensidades de campo se obtienen a partir de (C.2) y (2.41):

$$\begin{aligned}
 \delta F &= [F, \xi], \\
 \delta F_4 &= [F_4, \xi] + [F, \xi_2], \\
 \delta F_6 &= [F_6, \xi] + 2[F_4, \xi_2] + [F, \xi_4], \\
 \delta F_8 &= [F_8, \xi] + 3[F_6, \xi_2] + 3[F_4, \xi_4] + [F, \xi_6], \\
 \delta F_{10} &= [F_{10}, \xi] + 4[F_8, \xi_2] + 6[F_6, \xi_4] + 4[F_4, \xi_6] + [F, \xi_8].
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

C.0.4. Identidades de Bianchi

Las identidades de Bianchi vienen dadas por

$$DF = 0$$

$$DF_3 + [A_2, F] = 0$$

$$DF_4 + [A_3, F] = 0$$

$$DF_6 + 2[A_3, F_4] + [A_5, F] = 0$$

$$DF_8 + 3[A_3, F_6] + 3[A_5, F_4] + [A_7, F] = 0$$



Apéndice D

Identidades para arreglos diferenciales

En este apéndice, recopilaremos información similar a la expuesta en el Apéndice C pero válida para un caso particular de la estructura formada por los arreglos diferenciales utilizados en la última sección del Capítulo 4.

D.0.1. Intensidades de Campo

$$\begin{aligned} F^{(2)} &= dA^{(1)} + \frac{1}{2} [A^{(1)}, A^{(1)}], \\ F^{(4)} &= dA^{(3)} + [A^{(1)}, A^{(3)}], \\ F^{(6)} &= dA^{(5)} + [A^{(1)}, A^{(5)}] + \frac{1}{2} [A^{(3)}, A^{(3)}], \\ F^{(8)} &= dA^{(7)} + [A^{(1)}, A^{(7)}] + [A^{(3)}, A^{(5)}]. \end{aligned} \tag{D.1}$$

D.0.2. Transformaciones de los campos de gauge

$$\begin{aligned}\delta A^{(1)} &= D\xi^{(0)}, \\ \delta A^{(3)} &= D\xi^{(2)} + [A^{(3)}, \xi^{(0)}], \\ \delta A^{(5)} &= D\xi^{(4)} + [A^{(3)}, \xi^{(2)}] + [A^{(5)}, \xi^{(0)}], \\ \delta F^{(8)} &= D\xi^{(6)} + [A^{(3)}, \xi^{(4)}] + [A^{(5)}, \xi^{(2)}] + [A^{(7)}, \xi^{(0)}].\end{aligned}$$

D.0.3. Transformaciones de las formas de curvatura

$$\begin{aligned}\delta F^{(2)} &= D(\delta A^{(1)}), \\ \delta F^{(4)} &= D(\delta C) + [C, \delta A^{(1)}], \\ \delta F^{(6)} &= D(\delta A^{(5)}) + [A^{(5)}, \delta A^{(1)}] + [A^{(3)}, \delta A^{(3)}], \\ \delta F^{(8)} &= D(\delta A^{(7)}) + [A^{(7)}, \delta A^{(1)}] + [A^{(5)}, \delta A^{(3)}] + [A^{(3)}, \delta A^{(5)}],\end{aligned}$$

o bien, en forma equivalente

$$\begin{aligned}\delta F^{(2)} &= [F^{(2)}, \xi^{(0)}], \\ \delta F^{(4)} &= [F^{(4)}, \xi^{(0)}] + [F^{(2)}, \xi^{(2)}], \\ \delta F^{(6)} &= [F^{(6)}, \xi^{(0)}] + [F^{(4)}, \xi^{(2)}] + [F^{(2)}, \xi^{(4)}], \\ \delta F^{(8)} &= [F^{(8)}, \xi^{(0)}] + [F^{(6)}, \xi^{(2)}] + [F^{(4)}, \xi^{(4)}] + [F^{(2)}, \xi^{(6)}].\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] G. Savvidy, Non Abelian Tensor Gauge Fields I, II Int. J. Mod. Phys. A **21** (2006) 4931-4977.
- [2] G. Savvidy, Non-Abelian tensor gauge fields: Generalization of Yang-Mills theory, Phys. Lett. B **625** (2005) 341.
- [3] S. Konitopoulos and G. Savvidy, Propagating modes of a non-Abelian tensor gauge field of second rank, J. Phys. A **41** (2008) 355402.
- [4] J. Barrett, G. Savvidy, A dual lagrangian for non-Abelian tensor gauge fields, Phys. Lett. B **652** (2007) 141-145.
- [5] S. Guttenberg, G. Savvidy, Duality transformation of non-Abelian tensor gauge fields, Mod. Phys. Lett. A **23** (2008) 999.
- [6] G. Savvidy, Topological mass generation in four-dimensional gauge theory, Phys. Lett. B **694** (2010) 65.
- [7] I. Antoniadis and G. Savvidy, New gauge anomalies and topological invariants in various dimensions, Eur. Phys. J. C (2012) **72** 2140.
- [8] S. Konitopoulos, G. Savvidy, Extension of Chern-Simons forms, J. Math. Phys. **55**, 062304 (2014).
- [9] I. Antoniadis, G. Savvidy, Extension of Chern-Simons forms and new gauge anomalies, Int. J. Mod. Phys. A **29** (2014) 1450027.
- [10] C. Teitelboim, Gauge invariance for extended objects, Phys. Lett. B **176** (1986) 63.

- [11] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* 2nd edn. Institute of Physics Publishing, Philadelphia (2003).
- [12] J. Zanelli, *Lectures notes on Chern–Simons (super)gravities*. Second edition (February) 2008. arXiv:hep-th/0502193.
- [13] J. Mañes, R. Stora and B. Zumino, Algebraic Study of Chiral Anomalies, *Commun. Math. Phys.* **102**, 157-174 (1985).
- [14] E. Witten, (2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System, *Nucl. Phys. B* **311** (1988) 46.
- [15] A. H. Chamseddine, Topological gravity and supergravity in various dimensions, *Nucl. Phys. B* **346** (1990) 213.
- [16] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, Expanding Lie (super)algebras through abelian semigroups, *J. Math. Phys.* **47** (2006) 123512.
- [17] F. Izaurieta, A. Pérez, E. Rodríguez, P. Salgado, Dual Formulation of the Lie Algebra S-expansion Procedure, *J. Math. Phys.* **50** (2009) 073511.
- [18] N. González, G. Rubio, P. Salgado, S. Salgado, Einstein–Hilbert action with cosmological term from Chern–Simons gravity, *Jour. Geom. Phys.* **86** (2014) 339.
- [19] F. Izaurieta, P. Minning, A. Perez, E. Rodríguez, P. Salgado, Standard General Relativity from Chern-Simons Gravity, *Phys. Lett. B* **678** (2009) 213.
- [20] N. González, G. Rubio, P. Salgado, S. Salgado, Generalized Galilean algebras and Newtonian gravity, *Physics Letter B* **755** (2016) 433.
- [21] F. Gómez, P. Minning, P. Salgado, Standard cosmology in Chern-Simons gravity, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 063506.
- [22] C.A.C. Quinzacara, P. Salgado, Black hole for the Einstein-Chern-Simons gravity, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 124026; Stellar equilibrium in Einstein-Chern-Simons gravity, *Eur. Phys. Jour. C* **73** (2013) 2479.

- [23] M. Cataldo, J. Crisóstomo, S. del Campo, F. Gómez, C. Quinzacara, P. Salgado, Accelerated FRW Solutions in Chern-Simons Gravity, *Eur. Phys. Jour. C* **74** (2014) 3087.
- [24] J. Crisóstomo, F. Gómez, P. Mella, C. Quinzacara, P. Salgado, Static solutions in Einstein-Chern-Simons gravity, *JCAP* **1606** (2016) 049.
- [25] P. Salgado, S. Salgado, $\mathfrak{so}(D - 1, 1) \oplus \mathfrak{so}(D - 1, 2)$ algebras and gravity *Phys. Lett. B* **728** (2014) 5.
- [26] P. K. Concha, D. M. Peñafiel, E. K. Rodríguez, P. Salgado, Chern-Simons and Born-Infeld gravity theories and Maxwell algebras type, *Eur. Phys. Jour. C* **74** (2014) 2741.
- [27] P.K. Concha, D.M. Peñafiel, E.K. Rodríguez, P. Salgado, Generalized Poincaré algebras and Lovelock–Cartan gravity theory, *Physics Letter B* **742** (2015) 310.
- [28] P.K. Concha, E.K. Rodríguez, P. Salgado, Generalized supersymmetric cosmological term in N=1, *JHEP* 1508 (2015) 009.
- [29] D. Sullivan, *Bulletin de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques Publication Mathématique* No **47** (1981).
- [30] R. D'Auria, P. Fré, Geometric Supergravity in $d = 11$ and Its Hidden Supergroup, *Nucl. Phys. B* **201** (1982) 101.
- [31] B. Zumino, W. Yong-Shi, A. Zee, Chiral anomalies, higher dimensions, and differential geometry, *Nucl. Phys. B* **239** (1984) 477.
- [32] C. Chevalley, S. Eilenberg, Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 63 (1948) 85.
- [33] F. Izurieta, P. Salgado, S. Salgado, Group Structure of the Extended Gauge Theories, submitted to JHEP.
- [34] P. Salgado, S. Salgado, Extended Gauge Theories and Free Differential Algebras, submitted to JHEP.

- [35] F. Izaurieta, E. Rodríguez, P. Salgado, The Extended Cartan Homotopy Formula and a Subspace Separation Method for Chern–Simons Theory, *Lett. Math. Phys.* **80** (2007) 127.
- [36] A. H. Chamseddine, Topological gauge theory of gravity in five and all odd dimensions, *Phys. Lett. B* **233** (1989) 291.
- [37] A. H. Chamseddine, Topological Gravity in (1+1)-dimensions, *Nucl. Phys. B* **340** (1990) 595.
- [38] E. Witten, Topology Changing Amplitudes in (2+1)-Dimensional Gravity, *Nucl. Phys. B* **323** (1989) 113–140.
- [39] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, Topologically massive gauge theories, *Ann. Phys.* **140** (1982) 372–411.
- [40] A. Achúcarro, P.K. Townsend, A Chern-Simons action for three-dimensional anti-de Sitter supergravity theories, *Phys. Lett. B* **180** (1986) 89–92.
- [41] M. Bañados, R. Troncoso, J. Zanelli, Higher dimensional Chern-Simons supergravity, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 2605.
- [42] R. Troncoso, J. Zanelli, New gauge supergravity in seven and eleven dimensions, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 101703.
- [43] J. Zanelli, Chern–Simons forms in gravitation theories, *Class. Quantum Gravity* **29** (2012) 133001.
- [44] A. Toloza, J. Zanelli, Cosmology with Scalar-Euler form Coupling, *Class. Quantum Gravity* **30** (2013) 135003.
- [45] N. Merino, A. Perez, P. Salgado, Even-dimensional topological gravity from Chern-Simons gravity, *Phys. Lett. B* **681** (2009) 85.
- [46] P. Salgado, P. Salgado-Rebolledo, O. Valdivia, Topological gravity and gauged Wess-Zumino-Witten term, *Phys. Lett. B* **728** (2014) 99.
- [47] P. Salgado, R.J. Szabo, O. Valdivia, Topological gravity and transgression holography, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 084077.

- [48] N. González, F. Izaurieta, G. Rubio, S. Salgado, Gauged Wess-Zumino-Witten actions for generalized Poincare algebras, *Phys. Lett. B* **732** (2014) 255.
- [49] P. Catalan, F. Izaurieta, P. Salgado, S. Salgado, Topological gravity and Chern–Simons forms in $d=4$, *Phys. Lett. B* **751** (2015) 205.
- [50] I. Bandos, J.A. de Azcárraga, M. Picón, O. Varela, On the formulation of $D=11$ supergravity and the composite nature of its three-form field, *Ann. of Phys.* **317** (2005) 238.
- [51] A. Pérez, P. Minning, P. Salgado, Eleven-dimensional CJS supergravity and the D’Auria–Fré group, *Phys. Lett. B* **660** (2008) 407.
- [52] F. Izaurieta, I. Muñoz, P. Salgado, A Chern–Simons gravity action in $d=4$, *Phys. Lett. B* **750** (2015) 39.
- [53] P.K. Concha, E.K. Rodríguez, Generalized supersymmetric cosmological term in $N=1$ Supergravity, *JHEP* 1508 (2015) 009.
- [54] J. A. de Azcarraga, J.M. Izquierdo, J. Lukierski, M. Woronowicz, Generalizations of Maxwell (super)algebras by the expansion method, *Nucl. Phys. B* **869** (2013) 303. ∇
- [55] F. Izaurieta, P. Salgado, S. Salgado, Chern–Simons–Antoniadis–Savvidy forms and standard Supergravity, submitted to *Phys. Lett. B*.
- [56] M. Henneaux, C. Teitelboim, p -Form electrodynamics, *Found. Phys.* **16** (1986) 593.