UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

PROPUESTA DE TRABAJO PARA EL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN EDUCACIÓN MEDIA

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

Prof. Guía: Dra. María Del Valle Leo

Seminarista: Javier Ignacio Montoya Pérez

Concepción, 2018

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

PROPUESTA DE TRABAJO PARA EL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN EDUCACIÓN MEDIA

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

Prof. Guía: Dra. María Del Valle Leo

Seminarista: Javier Ignacio Montoya Pérez

Concepción, 2018

Índice:

Índice de ilustraciones

INTRODUCCIÓN:

Este seminario se inicia con los conceptos básicos del estudio de la derivada como una propuesta didáctica para la enseñanza de la misma en la Educación Media. Esta proposición surge con el fin de anteponerse y guiar a los profesores de matemática a la próxima inclusión de estos temas en el currículum nacional.

Estudiar una propuesta de trabajo y sus elementos son fundamentales en nuestra formación como futuros docentes, debido a que fomenta el interés de poseer una mente analítica y crítica para estudiar los problemas de enseñanza-aprendizaje y a su vez, comprometerse en su solución; por otra parte, permite desarrollar un espíritu de constante observación, curiosidad, indagación y crítica argumentativa de la realidad

A partir de los elementos tratados anteriormente fue posible desarrollar una proposición de carácter didáctico que, como propósito, ofrezca una posibilidad de enfrentar comprensivamente la conceptualización de la derivada a profesores de matemática que enfrenten este desafío en cuarto año de educación media, de acuerdo con lo establecido en el currículum nacional vigente.

EL PROBLEMA

Alrededor del año 2011 comienza en el país un periodo de renovación y actualización del currículum nacional y como consecuencia del análisis desarrollado por el Ministerio de Educación, la formación matemática que reciben los estudiantes, desde la Educación Prebásica hasta la Educación Media se inicia considerando contenidos que antes no lo habían sido.

A partir del constante cambio del currículum nacional que se desarrolla, esta situación se ha concretado en un ajuste periódico del currículum escolar, donde se van incluyendo y descartando temáticas pertinentes a las preocupaciones contemporáneas. Esta es la razón que genera la necesidad de abordar la temática por tratar en este seminario: La Derivada. Este tema está en período de hacerse obligatorio en 4°Medio y no hay evidencias que lleve a establecer cómo se está implementado el aprendizaje de este tema en los Establecimientos Educacionales. De esto surge el primer problema, el cual está relacionado con el tipo de establecimientos en el que ya se imparte este contenido, debido a que solamente en los colegios particulares está incluida esta temática, por el momento. ¿Qué se hace en los Establecimientos Públicos y Particulares-Subvencionados?

Otro problema se genera al momento de visualizar los procesos de considerar adaptar el acercamiento al concepto para que los diferentes tipos de establecimientos puedan trabajarlo de manera que se genere una comprensión del tema a tratar y no se pierda la rigurosidad matemática ante la falta, por ejemplo, de conceptos previos, ya que una vez el alumno ingresa a estudios superiores, una herramienta básica necesaria es poder aplicar el concepto de derivada en distintos ámbitos de su uso.

CAPITULO 1: MARCO TEORICO

1.1 Ideas previas

El sistema educativo en Chile está organizado en distintos niveles, parvulario, básico, medio y superior; este trabajo está centrado en Educación Media. Este nivel comprende la educación científico humanista y la educación técnico profesional. Cada uno de ellos persigue el desarrollo y el logro de ciertas competencias necesarias para el desempeño de un ciudadano dentro de la sociedad en la cual debe actuar; en el caso de matemática, estas competencias están centradas en resolver problemas, argumentar y comunicar, representar y modelar.

El marco teórico que se desarrolla a continuación centra sus ideas-fuerza en el sistema educativo, la organización a nivel de educación media, las habilidades a desarrollar y la organización actualizada del currículum nacional, que permite algunas observaciones respecto de los contenidos incluidos.

Desde el punto de vista de la educación matemática se hace necesario dar una mirada a las situaciones problemáticas que se desarrollan en el ámbito de la aplicación de lo establecido en el currículum nacional, especialmente en los cursos de tercero y cuarto medio, que hasta el momento no han logrado ser instaurados como lo han sido todos los niveles anteriores. En consecuencia, uno de los temas en los cuales se tiene interés en analizarlo es el concepto de derivada, centrando la atención en derivada de funciones polinómicas, fraccionarias, radicales y la composición matemática de estas.

En resumen, para analizar a cabalidad la situación que se presenta en Chile en este momento, se hará un análisis en términos de la consecución de los contenidos en educación media, especialmente en tercero y cuarto medio, para realizar una proposición de trabajo sobre el concepto de derivada.

1.2. CURRICULUM NACIONAL: sus fundamentos, estructura y contenido

1.2.1. Fundamentación:

Dentro de las distintas definiciones para el término currículo o currículum, la entregada por Martha Casarini (1999), es la más idónea para la propuesta a laborar, ya que se enfoca en el desarrollo del estudiante en base a la consecución de objetivos dados en el currículum. En síntesis, ella señala que el término currículo se refiere a un proyecto que nace de los propósitos de un sistema educativo para la formación de los ciudadanos en donde se concretan concepciones ideológicas, tales como socio-antropológicas, epistemológicas, pedagógicas y psicológicas, para determinar los objetivos de la educación escolar, es decir, los aspectos del desarrollo y de la incorporación de la cultura que la escuela trata de promover para lo cual propone un plan de acción adecuado para la consecución de estos objetivos.

Esta definición se aborda en base a distintas concepciones ideológicas, las cuales son necesarias para entender la mirada global de la definición, estas son: a) Las Ideologías socio-antropológicas que se focalizan en las personas y grupos; b) Las instituciones sociales como la familia, el parentesco, los grupos de edad, la organización política, las leyes y las actividades económicas; c) La Ideología epistemológica que busca y estudia los principios, fundamentos, extensión y métodos del conocimiento humano; d) La Ideología pedagógica que busca y analiza las maneras de como transmitir un conocimiento en concreto y además se preocupa de la retroalimentación entre las partes involucradas; e) La Ideología Psicológica, la cual hace referencia a la manera de sentir, de pensar y de comportarse de una persona o una colectividad.

Estas ideologías son importantes en el ámbito educacional ya que ayudan a analizar con diferentes prismas una misma situación o problemática; además, también tienen funciones descriptivas sobre el sistema general de la sociedad o uno en específico que sería el educacional.

Por otra parte, la idea principal acerca del currículum y sus constantes modificaciones es adaptarse al cambio marcado y rápido de la cultura con relación a sus orientaciones y contenidos; cabe destacar que no tan sólo se modifican los contenidos, sino que también las habilidades y los valores a reforzar. Durante las últimas dos décadas, a nivel global la educación ha sufrido un impacto importante gracias a la incorporación de las tecnologías de la información y la comunicación (TICS); debido a esto se han introducido nuevas metodologías de trabajo que involucran nuevos elementos de manera periódica, en paralelo con la evolución tecnológica.

Lo anterior permite tener una idea de lo que constituye un sistema educativo, como se generan las formas y estructuras del sistema educativo y los elementos que colaboran con el propósito del sistema.

El currículum nacional en chile está estructurado en tres niveles, Educación Pre-Escolar, Educación Básica y Educación Media. La dependencia administrativa está relacionada con quien administra, en este caso el estado con los colegios municipales, el privado con los colegios particulares, los colegios particulares subvencionados y de administración delegada. Esta última denominación se establece a partir del 29 de enero de 1980 en el DFL N° 3.166, de educación qué sintéticamente puede señalarse que establece: *El Ministerio de Educación Pública podrá entregar la administración de determinados establecimientos de Educación Técnico Profesional de carácter fiscal a instituciones del sector público, o a personas jurídicas que no persigan fines de lucro, cuyo objeto principal diga relación directa con las finalidades perseguidas con la creación del respectivo establecimiento educacional. Con el señalado propósito, el Ministerio de Educación Pública podrá celebrar contratos que permitan el uso de los respectivos inmuebles, y el uso y goce de los bienes muebles, necesarios para el funcionamiento de dichos establecimientos.*

Desde el punto de vista de su estructura el currículum nacional tiene cuatro componentes fundamentales a nivel básico y medio. El siguiente esquema muestra sus componentes los cuales tienen diversas funciones, cada una orientada al logro de los aprendizajes que se definen en el Marco Curricular respectivo:

Titulo: Componentes del curriculum nacional

Fuente: Las características del currículum nacional “El proceso de ajuste curricular y los aportes del proyecto” Educación y Minería, 2012.

Así como muestra este esquema, el centro de las distintas componentes del currículum están dirigidas hacia un aprendizaje efectivo por lo que es necesario parcelar las componentes y estudiarlas de forma individual para conocer su finalidad.

- Marco Curricular y Bases Curriculares: La Ley N°20.370 General de Educación (LGE), denomina “Bases Curriculares” al conjunto de Objetivos de Aprendizaje (conocimientos, habilidades y actitudes) coherentes con los objetivos generales establecidos en dicha ley, por ciclo o por año, para los niveles de educación prebásica, básica y media. Las Bases Curriculares contemplan Objetivos de Aprendizaje (OA) por curso y asignatura, así como Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT) para el ciclo.

Las bases curriculares actualizan los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios que proponía la LOCE (La Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza), centrándose en Objetivos de Aprendizaje (OA) por asignatura, imprescindibles de alcanzar por los estudiantes y que, en su conjunto, dan cuenta de los objetivos generales consignados en la Ley General de Educación (LGE), para cada uno de los niveles de la estructura curricular.

Dada la transición curricular que este cambio implica, y en tanto no se definan bases curriculares para todos los niveles formativos, se mantienen vigentes los Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) del currículum para los niveles de 7° Básico hasta 4° Medio. Los OF corresponden a los aprendizajes que los alumnos deben lograr al finalizar los distintos niveles de enseñanza de Educación Básica y Media, los que hacen referencia a conocimientos, habilidades y actitudes que han sido seleccionados de modo de permitir el desarrollo integral de los alumnos y su desenvolvimiento en diversos ámbitos. Por su parte, los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) corresponden a los conocimientos, habilidades y actitudes implicados en los Objetivos Fundamentales y que el proceso de enseñanza debe convertir en oportunidades de aprendizaje para todos los estudiantes.

b) Planes y Programas de estudio: El Plan de Estudio define la organización del tiempo escolar para el logro de los objetivos de aprendizaje determinados en las Bases Curriculares, definido para cada curso y sus respectivas asignaturas.

El Programa de Estudio, por su parte, entrega orientaciones didácticas que facilitan el proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación de los objetivos de aprendizaje. Tanto en la enseñanza básica como media, se individualizan por asignatura, incluyendo orientaciones que se relacionan con la metodología, la evaluación y los recursos educativos involucrados, pudiendo incluir actividades que ejemplifiquen el proceso didáctico, de manera de apoyar el proceso posterior de planificación de clases.

De acuerdo con la Ley General de Educación, el Ministerio de Educación (MINEDUC), debe elaborar planes y programas de estudio, los que son obligatorios para aquellos establecimientos que no cuenten con los propios.

c) Mapas de Progreso: Describen la secuencia en que comúnmente progresa el aprendizaje en determinadas áreas o competencias clave, considerados como fundamentales en la formación de los estudiantes. Así, ofrecen un marco de referencia para observar el aprendizaje promovido por el currículum al largo de los 12 años de escolaridad. Cada Mapa contiene 7 niveles de aprendizaje, que además muestran ejemplos de trabajos de alumnos que ilustran dicho nivel. Estos mapas son también ocupados para hacer un seguimiento del progreso del estudiante, en general ayuda a identificar sus carencias para tomar acciones en el momento correcto, cabe destacar que en la práctica no son muy usados.

Actualmente en la mayoría de los establecimientos esta herramienta no es utilizada de la forma en que la descripción la aborda, ya que es ocupada para hacer seguimiento en casos particulares de estudiantes con alguna necesidad especial (Programa PIE) y/o problemas disciplinares y de rendimiento académico.

d) Textos de estudio: son un instrumento curricular que permite Implementar y desarrollar el currículum en el aula. Sus destinatarios son los propios estudiantes y sus profesores, que pueden utilizarlos para avanzar en su aprendizaje, a través del uso de las diferentes herramientas y actividades que provee. Existen dos tipos de textos, uno destinado al docente para que guíe la actividad y otro destinado al alumnado para que las desarrolle. Un alcance importante, es que los establecimientos privados escogen por cuenta propia que texto satisface las necesidades del establecimiento, los colegios particulares subvencionados tiene la libertad de escoger si trabajan o no con los textos entregados por el estado, de no ser así se debe dar aviso al Ministerio de Educación con antelación, fundamentando con motivos pedagógicos el porqué de esta decisión, por último los establecimientos municipales no tienen otra opción en ocupar lo otorgados por el estado.

1.2.2. HABILIDADES A DESARROLLAR EN EL AREA DE LA MATEMATICA.

En esta propuesta, al igual que en Educación Básica, se busca que los alumnos transiten fluidamente desde la representación concreta hacia la pictórica, para más tarde avanzar progresivamente hacia un lenguaje simbólico.

Del análisis del currículum en el área de la matemática se dan a conocer las siguientes habilidades a desarrollar en los alumnos; estas son:

-Representar: En este sentido esta habilidad se relaciona con manejar una variedad de representaciones matemáticas de un mismo concepto y transitar fluidamente entre ellas, permitirá a las y los estudiantes lograr un aprendizaje significativo y desarrollar su capacidad de pensar matemáticamente. Toda representación debe transformarse de modo tal que puedan extraerse de ellas variados conocimientos, y así, no solo comunicar datos, sino que también transformar una representación para hacer explícito lo implícito (Duval, 1999). Durante la educación básica, se espera que aprendan a usar representaciones pictóricas tales como diagramas, esquemas y gráficos, para comunicar cantidades, operaciones y relaciones, y que luego conozcan y utilicen el lenguaje simbólico y el vocabulario propio de la disciplina (MINEDUC, 2012).

Badillo, Edo y Font (2014) plantean que los dibujos cumplen básicamente dos funciones al resolver un problema: por una parte, sirven para modelizar el problema y, por otra, son el soporte de la actividad matemática que permite resolverlo. Lo anterior es fundamental, ya que los y las estudiantes, al explicar sus dibujos, logran comprender la actividad matemática que están realizando. Por otra parte, cuando un estudiante realiza y evalúa una tarea matemática, activa un conglomerado formado por situaciones problema, representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos (Font, Godino y Gallardo, 2013).

-Argumentar y comunicar: La habilidad de argumentar se desarrolla principalmente al tratar de convencer a otros de la validez de los resultados obtenidos. Es importante que los alumnos tengan la oportunidad de describir, explicar, argumentar y discutir colectivamente sus soluciones y sus inferencias a diversos problemas, escuchándose y corrigiéndose mutuamente. De esta manera, serán capaces de realizar demostraciones matemáticas de proposiciones, apoyadas por medio de representaciones pictóricas y con explicaciones en lenguaje natural por parte del alumno, para llegar finalmente a un lenguaje matemático en concreto.

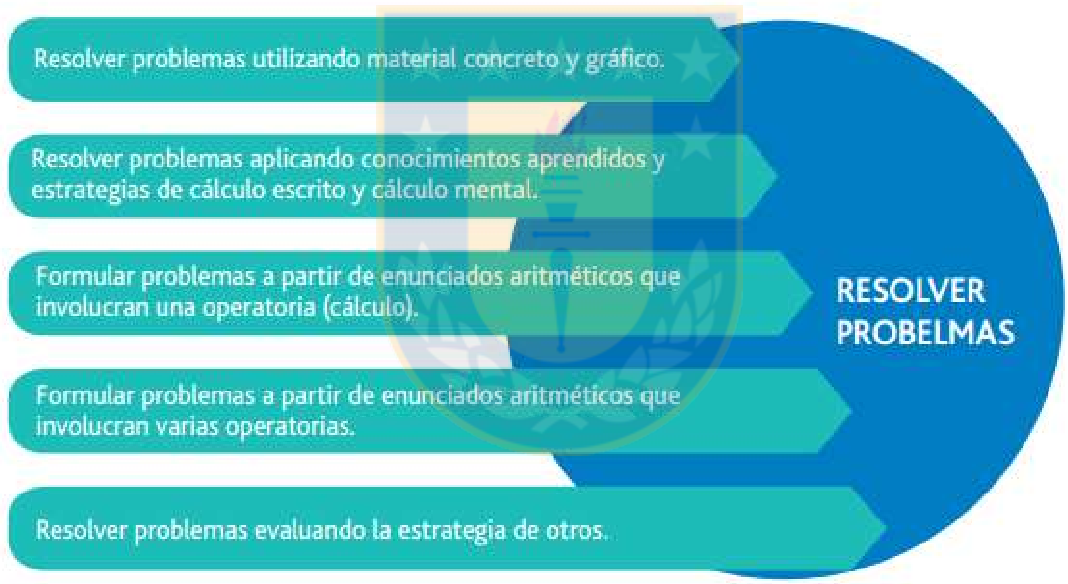
La generalización es uno de los procesos característicos del lenguaje algebraico, que está implícita en general, en las matemáticas y en las diferentes ramas del saber. Radford (2010, 2013) resalta la importancia de la generalización, diferenciando entre generalización algebraica y generalización aritmética. Para Socas (2010, 2012), la generalización es uno de los procedimientos básicos en la producción del conocimiento en las diferentes disciplinas, en particular en la matemática. En esta, la generalización algebraica es un objetivo matemático que emerge como uno de los tres procesos fundamentales que caracterizan al campo conceptual algebraico, junto con la sustitución formal y la modelización.

Desde el punto de vista educativo, el planteamiento de una situación problemática que involucre una generalización algebraica se puede organizar a partir de situaciones diversas, numéricas o geométricas, en las que no viene explicitada la regla, pero sí la descripción organizada de un comportamiento regular que implica muchas veces un razonamiento inductivo (Rauno, Socas & Palarea, 2015).

El razonamiento matemático es un proceso de pensamiento que permite argumentar y obtener conclusiones a partir de premisas previamente establecidas. Según sea el desarrollo de dicho proceso, se distingue entre razonamiento deductivo y razonamiento inductivo. Específicamente, Pólya (1945) sugiere que el razonamiento inductivo requiere del trabajo con casos particulares, de la búsqueda de patrones basados en la regularidad observada en esos casos, de la formulación de una conjetura de acuerdo con el patrón, y de la argumentación posterior de dicha conjetura.

-Resolver problemas: Se habla de resolver problemas cuando el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir. Para ello, necesita usar estrategias, comprobar y comunicar: los alumnos experimentan, escogen o inventan y aplican diferentes estrategias (ensayo y error, usar metáforas o algún tipo de representación, modelar, simulación, transferencia desde problemas similares ya resueltos, por descomposición, etc.), comparan diferentes vías de solución, y evalúan las respuestas obtenidas y su pertinencia. Esta habilidad también puede abordarse utilizando material concreto y gráfico, aplicando conocimientos aprendidos y diferentes estrategias de cálculo escrito y/o cálculo mental, que involucran una o varias operatorias, y evaluar estrategias de otros. A continuación, se presentan procesos clave que procuran desarrollar la habilidad de Resolver Problemas. Este proceso puede resumirse en el siguiente esquema.

Esquema: Habilidad de Resolver problemas



Fuente: Desarrollo de habilidades "Aprender a pensar matemáticamente", 2016.

-<u>Modelar:</u> Esta habilidad considera construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de una realidad para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla; asimismo, ese modelo permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades (objetos, fenómenos, situaciones, etc.), estimar, comparar impactos y representar relaciones. Se espera que, en este ciclo, el estudiante:

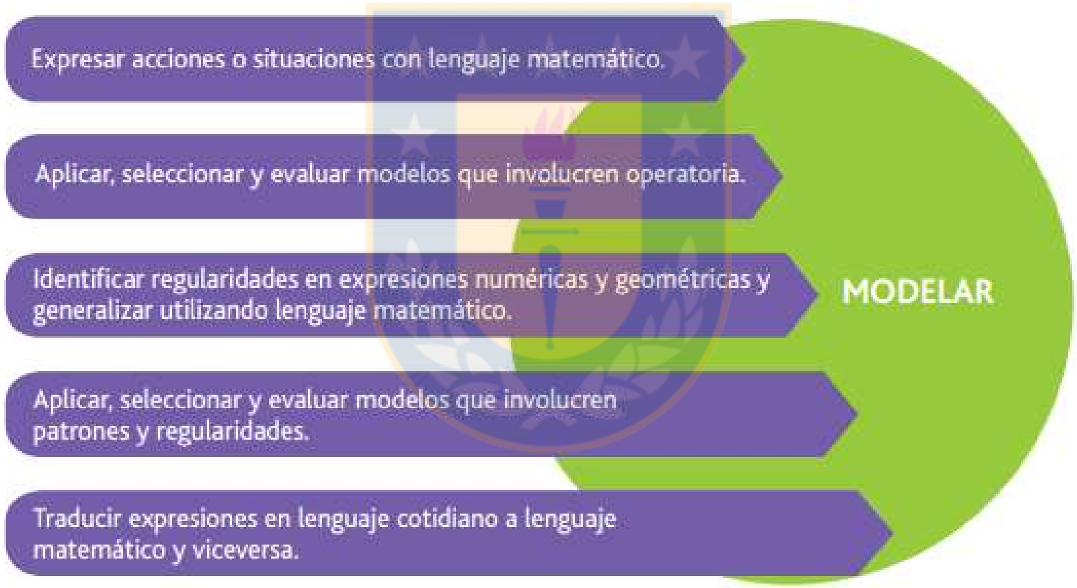
• Use modelos y entienda y aplique correctamente las reglas que los definen

• Seleccione modelos, comparándolos según su capacidad de capturar fenómenos de la realidad

• Ajuste modelos, cambiando sus parámetros o considerando buenos parámetros de un modelo dado

Según MINEDUC: *"Modelar es el proceso de utilizar y aplicar modelos, seleccionarlos, modificarlos y construir modelos matemáticos identificando patrones característicos de situaciones, objetos o fenómenos que se desea estudiar o resolver, para finalmente evaluarlos."*

Esquema: Habilidad de Modelar:



Fuente: Desarrollo de habilidades "Aprender a pensar matemáticamente", 2016.

En consecuencia, según la secuenciación entregada por el Ministerio de Educación, el orden de estas habilidades es: Resolver problemas, Representar, Modelar y Argumentar y Comunicar (esto debido a la estandarización de los programas educativos). Sin embargo, para el desarrollo de estas habilidades, se cree que es necesario para el trabajo en esta unidad (La derivada) hacer una reorganización de estas. Esto se debe a que, en un inicio, es conveniente proponer actividades cotidianas, en donde se trabaja para desarrollar estas habilidades, luego de esto se da paso a una discusión guiada acerca del problema, en donde se espera que el alumno argumente con sus palabras la explicación de la situación y sea capaz de dar a entender el cómo llegó a esas conclusiones, para luego ser capaz de resolver el problema en ese contexto. Finalmente, mediante todo el trabajo ya realizado, se da paso a una estructura formal mediante la cual se puede asociar una situación a un lenguaje matemático mediante un modelamiento.

Cabe destacar que está reorganización de las habilidades puede ser utilizada en más de una unidad de un programa.

1.2.3 CONTENIDOS EN LA ENSEÑANZA MEDIA

Dentro del currículo nacional, si bien se deja en libertad a los establecimientos educativos para escoger el contenido a tratar, este se preocupa de establecer el mínimo de objetivos necesarios según el nivel educativo. En la enseñanza media se abordan 4 ejes primarias: Datos y Azar, Geometría, Algebra y Números. Los ejes anteriormente nombrados se separan en aprendizajes esperados (AE) los cuales secuencian los contenidos a tratar en cada uno de ellos, para seguir un orden lógico evolutivo.

	Números
Primero medio	**AE 01**: Distinguen problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales. **AE 02**: Justificar matemáticamente que los decimales periódicos y semiperiódicos son números racionales. **AE 03**: Establecer relaciones de orden entre números racionales. **AE 04**: Representar números racionales en la recta numérica. **AE 05**: Utilizar la calculadora para realizar cálculos reconociendo sus limitaciones.

	AE 06: Verificar la densidad de los números racionales. **AE 07**: Verificar la cerradura de las operaciones en los números racionales. **AE 08**: Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero. **AE 09**: Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero.
Segundo medio	**AE 01**: Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales; • Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces. • Combinando raíces con números racionales. • Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos. **AE 02**: Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos: • Comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica. • Convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa. • Describiendo la relación entre potencias y logaritmos. • Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas.
Tercero medio	**AE 01**: Reconocer los números complejos como una extensión del campo numérico de los números reales **AE 02**: Utilizar los números complejos para resolver problemas que no admiten solución en los números reales **AE 03**: Resolver problemas aplicando las cuatro operaciones con números complejos.

	AE 04: Formular y justificar conjeturas que suponen generalizaciones o predicciones de números complejos y sus propiedades. **AE 05**: Argumentar la validez de los procedimientos o conjeturas referentes a números complejos y sus propiedades
Cuarto medio	**No aplica**

	Algebra
Primero medio	**AE 01**: Identificar patrones en multiplicaciones de expresiones algebraicas no fraccionarias. **AE 02**: Factorizar expresiones algebraicas no fraccionarias. **AE 03**: Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales. **AE 04**: Analizar representaciones de la función lineal y de la función a fin. **AE 05**: Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación. **AE 06**: Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.
Segundo medio	**AE 01**: Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$: • Reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas. • Representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo. • Determinando puntos especiales de su gráfica. • Seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda.

	AE 02: Resolver de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas de la forma: • $ax^2 = b$ • $(ax + b)^2 = c$ • $ax^2 + bx = 0$ • $ax^2 + bx = c$ • (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$) **AE 03**: Mostrar que comprenden la inversa de una función: • Utilizando la metáfora de una máquina. • Representándola por medio de tablas y gráficos, de manera manual y/o software educativo. • Utilizando la reflexión de la función representada en el gráfico en un plano cartesiano. • Calculando las inversas en casos de funciones lineales y cuadráticas. **AE 04**: Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo: • Por medio de situaciones de la vida real y de otras asignaturas. • Identificándolo con el interés compuesto. • Representándolo de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo • Expresándolo en forma recursiva $f(t + 1) - f(t) = a \cdot f(t)$ • Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.
Tercero medio	**AE 01**: Reconocer el tipo de situaciones que modelan las funciones cuadráticas **AE 02**: Representar la función cuadrática mediante tables y gráficos, y algebraicamente. **AE 03**: Modelar situaciones reales por medio de la función cuadrática para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático. **AE 04**: Reconocer que todas las ecuaciones de segundo grado con una incógnita tienen soluciones en el conjunto de los números complejos.
Cuarto medio	**AE 01:** Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia $f(x) = a \cdot x^2$ con $\|z\| \leq 3$.

	AE 02: Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales. **AE 03**: Determinar la función inversa de una función dada que sea invertible

	Geometría
Primero medio	**AE 01**: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico. **AE 02**: Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar. **AE 03**: Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano. **AE 04**: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano. **AE 05**: Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano. **AE 06**: Establecer el concepto de congruencia a partir de las transformaciones isométricas. **AE 07**: Formular y verificar conjeturas acerca de criterios de congruencia en triángulos. **AE 08**: Resolver problemas relativos a cálculos de vértices y lados de figuras geométricas del plano cartesiano a la congruencia de triángulos.
Segundo medio	**AE 01**: Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos: • Relacionándolas con las propiedades de la semejanza de ángulos. • Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo. • Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados. • Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.

	AE 02: Aplicar las razones trigonométricas en diversos contextos en la composición y descomposición de vectores y determinar las proyecciones de los vectores.
Tercero medio	**AE 01**: Relacionar la geometría elemental con la geometría cartesiana. **AE 02**: Describir la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar **AE 03**: Relacionar sistemas 2x2 de ecuaciones literales con pares de rectas en el plano cartesiano para representar soluciones gráficas. **AE 04**: Resolver problemas de sistemas 2x2 de ecuaciones literales e interpretar la solución en función del contexto cotidiano.
Cuarto medio	**AE 01**: Representar e identificar puntos en un sistema tridimensional de coordenadas. **AE 02**: Representar rectas y planos en el espacio mediante ecuaciones vectoriales y cartesianas. **AE 03**: Determinar áreas de superficies y volúmenes de cuerpos geométricos generados por traslación y de figuras planas en el espacio. **AE 04**: Determinar áreas de superficies y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación de figuras planas en el espacio.

	Datos y azar
Primero medio	**AE 01**: Obtener información a partir del análisis de datos en diversos contextos, presentados en gráficos y tablas de frecuencia, considerando la interpretación de medida de tendencia central.

	AE 02: Producir información en contextos diversos, a través del gráfico y tabla de frecuencia con datos agrupados en intervalos, manualmente o mediante herramientas tecnológicas. **AE 03**: Obtener la cantidad de espacios muestrales y eventos en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia. **AE 04**: Calcular la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas desde una población. **AE 05**: Formular conjeturas y verificarlas en casos particulares acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas de dicha población. **AE 06**: Interpretar información, en diversos contextos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando. **AE 07**: Producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando. **AE 08**: Utilizar el cálculo de medidas de tendencia central y de posición para analizar muestras de datos agrupados en intervalos. **AE 09:** Resolver problemas referidos a cálculos de probabilidades, aplicando el modelo de Laplace o de frecuencias relativas, dependiendo de las características del experimento aleatorio.
Segundo medio	**No aplica**
Tercero medio	**AE 01**: Utilizar el concepto de probabilidad condicional en problemas cotidianos o científicos. **AE 02**: Aplicar el concepto de variable aleatoria discreta para analizar distribuciones de probabilidad en contextos diversos.

	AE 03: Representar funciones de probabilidades y distribuciones de una variable aleatoria discreta. **AE 04**: Comparar el comportamiento de una variable aleatoria en forma teórica y experimental, considerando diversas situaciones o fenómenos **AE 05:** Desarrollar la distribución binomial para experimentos tales como cara o sello y situaciones de éxito o fracaso. **AE 06:** Modelar situaciones o fenómenos mediante la distribución binomial.
Cuarto medio	**AE 01**: Evaluar críticamente información estadística extraída de medios de comunicación, tales como periódicos y revistas, o de internet. **AE 02**: Interpretar el concepto de variable aleatoria continua. **AE 03**: Aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, en el caso de una variable aleatoria continua. **AE 04**: Aproximar, a partir de histogramas de distribuciones binomiales, el grafico de la campana de Gauss. **AE 05:** Aplicar distribuciones normales para resolver problemas de la vida diaria. **AE 06:** Estimar la media poblacional de una distribución normal sobre la base de niveles de confianza dados. **AE 07:** Verificar mediante ejemplos concretos que la media |X| de muestras aleatorias del tamaño *n*, extraídas de una población, se distribuye aproximadamente normal, si se aumenta el tamaño de la muestra. **AE 08:** Modelar situaciones de la vida diaria o de las ciencias naturales con distribuciones aleatorias, como la distribución binomial o de la distribución normal.

Para alcanzar estos aprendizajes esperados, el currículum nacional es flexible en cuanto a la forma de completarlos, sin embargo, deben estar regidos por las habilidades a desarrollar según cada objetivo que se plantea. Dentro de los objetivos y aprendizajes que se trabajan durante la enseñanza media destacan dos tipos de organigrama, uno a nivel anual que secuencia los contenidos durante el año en que se cursa y otro a nivel de enseñanza media que se encarga de enlazar los contenidos de cada año que se debe cursar.

Mediante el estudio de los aprendizajes esperados propuestos (por el currículum), se observa claramente que existen algunos en los cuales la secuenciación entregada no es la óptima para relacionar cada contenido con el que lo precede. Este hecho ocurre, por ejemplo, en el eje de números para primer año medio en que AE8 pretende que el alumno comprenda qué es una potencia de base racional y exponente entero; por otro lado, AE9 solicita al estudiante resolver problemas en esta índole, lo que, en nuestra opinión, no permite la comprensión y aplicación de las propiedades que estas potencias poseen. Esta característica se repite en varias oportunidades en los distintos ejes y niveles, haciendo que el docente sea el encargado de llenar estos vacíos, lo que en la práctica no siempre es realizado de manera efectiva, complejizando un tanto más el proceso de aprendizaje.

Mirándolo desde otro punto de vista, se puede inferir que los vacíos que posee el programa pueden ser utilizados para aplicar actividades que el docente escoge o crea libremente, esta puede ser una instancia enriquecedora para ambas partes ya que se pueden poner a prueba nuevos métodos y así ver cómo reacciona el estudiantado, ya que el objetivo a lograr no está impuesto si no que queda abierto a las necesidades del curso en cuestión.

Luego de analizar las tablas anteriormente presentadas (página 19 a 25), cabe resaltar que en segundo medio no se trabaja el eje de datos y azar como lo es en cuarto medio el eje de números. Por otra parte, los programas de tercero y cuarto medio no han sido actualizados desde el año 2009, sin embargo, hay evidencia de que se han intentado realizar diversas modificaciones o actualizaciones, sin llegar a establecerlas hasta este momento.

1.3 FORMACIÓN DE PROFESORES EN CHILE

La formación de profesores en Chile está dada por todo tipo de establecimiento de educación superior tales como Universidades públicas y privadas e Institutos profesionales. Generalmente en el proceso de formación, el aspecto didáctico está dado por una Facultad de Educación y en lo que respecta a la especialización, esta es de responsabilidad de una facultad competente en el área del conocimiento disciplinar. Este último aspecto conlleva a que la formación del futuro profesor no esté ceñida al currículum nacional, sino más bien a la ciencia en sí misma.

Según Daniel Johnson Mardones *"…La importancia atribuida a la formación inicial e investigación por la literatura especializada y los informes oficiales, no se condice con el estado actual del desarrollo de este campo. La falta de investigación en educación y particularmente en formación inicial está ampliamente documentada, así como la preeminencia de estudios prescriptivos, estudios cualitativos e informes de programas vinculados a políticas públicas dentro de las publicaciones del campo. La Comisión Nacional de Formación Docente sostiene además que "la investigación que se hace en las escuelas de educación es escasa, no siempre es relevante ni alimenta la innovación en los procesos formativos" y agrega que "especialmente preocupante es que tampoco se produce en ellas el mejor y más relevante conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje, ni sobre la profesión docente". (MINEDUC. 2005). Por último, debemos decir que solo el 3,5% de los estudios realizados en Chile en formación inicial entre 1995 y 2007 estaban dedicados a la formación inicial, porcentaje que se eleva a un 13,2% al trabajar con la categoría agregada de "formación y perfeccionamiento docente" (MINEDUC, UAH, CIDE. 2007)…"*

En esta propuesta es importante según mi opinión considerar la representación del saber pedagógico de los profesores en formación mostrando así un problema entre el conocimiento como construcción y la enseñanza como transmisión. Al instante de preparar una clase interactiva es visible el claro predominio de los contenidos cognitivos del aprendizaje y por otra parte la casi nula aparición de los aspectos morales y afectivos que debe tener una clase; además el saber pedagógico se conforma de la agregación y simplificación de contenidos y no por una articulación útil a posteriori.

Hay quienes creen que cualquier persona con las competencias necesarias en matemáticas pueden generar efectivamente el conocimiento en otra, pero existe una gran diferencia entre saber matemáticas y saber enseñar matemáticas; para los aspectos relacionados con la enseñanza se necesitan disciplinas relacionadas con didáctica y psicología, temas que se impartan únicamente a los pedagogos.

La Ley 20.903, crea el Sistema de Desarrollo Profesional Docente que entró en vigencia el 1 de abril de 2016, busca mejorar sustantivamente la profesión docente. Para ello introduce requisitos gradualmente más exigentes para ingresar a la carrera de Pedagogía, aumenta el desafío para las universidades que forman profesores, promueve el desarrollo continuo, crea el acompañamiento inicial e introduce un sistema de evaluación que comienza en forma previa al ejercicio profesional.

Uno de los nuevos requisitos es la aplicación de dos evaluaciones diagnósticas durante la formación inicial en pedagogía. Una de ellas aplicada por las propias universidades al inicio de la carrera, y la otra, aplicada por el Centro de Perfeccionamiento e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP), previo a los últimos 12 meses de carrera. Esta última evaluación -cuya rendición es requisito para la obtención del título profesional y para la acreditación del programa respectivo- estará basada en Estándares Disciplinarios y Pedagógicos aprobados por el Consejo Nacional de Educación (CNED 2016). Por otro lado, los Estándares de Desempeño Docente para la evaluación durante el ejercicio profesional, serán desarrollados en base a los dominios contenidos en el Marco para la Buena Enseñanza (MBE) y también deben ser aprobados por el CNED.

En este contexto, al Consejo Nacional de Educación le corresponderá aprobar o formular observaciones a los Estándares Disciplinarios y Pedagógicos relevantes para la formación inicial y aprobar o formular observaciones a los Estándares de Desempeño relevantes para el desarrollo profesional docente.

Con el fin de contar con un marco de evaluación que permita al Consejo efectuar su análisis con apego a los principios de objetividad, imparcialidad y eficiencia, se ha estimado relevante elaborar los Criterios Técnicos conforme a los cuales se construirán las pautas de evaluación y se realizará el análisis de dichos estándares y sus futuros ajuste y modificaciones.

1.4 Aspectos Didácticos a considerar en esta proposición de trabajo.

Dentro de los aspectos didácticos, se destacan 2 autores, el primero de estos Guy Brousseau relaciona el compromiso entre las partes involucradas mediante las situaciones didácticas y el contrato didáctico. El segundo autor, Yves Chevallard habla del acercamiento del conocimiento al alumno mediante una transformación del saber sabio al saber enseñado.

1.4.1. Contrato didáctico

En todo proceso de enseñanza-aprendizaje se recomienda utilizar un "contrato" profesor-alumno, como resultado del conjunto de códigos y pactos explícitos e implícitos que regulan los comportamientos, interacciones y relaciones entre los participantes.

De Guy Brousseau, en su fascinación por la enseñanza de las matemáticas es posible observar dos puntos importantes: 1) su compromiso por las matemáticas y su capacidad para formar el pensamiento y su poder explicativo. 2) su interés por la transmisión y difusión del saber, así también como el estudio de las condiciones que hacen posible esto.

Brousseau explicita el sentido de la situación didáctica señalando que:

"(...) *Una situación es una situación-problema que necesita una adaptación, una respuesta del alumno. En particular, si la necesidad de esta respuesta ha sido el objeto de una consigna precisa, si el alumno tiene un proyecto, un objetivo declarado, tendremos una "situación-problema estricta" (o formal), e incluso un "problema" si el medio es reducido a un enunciado y si ninguna restricción material, debida a ciertos aspectos físicos de la situación, ni a ninguna condición psicológica o social modifica la interpretación. Una situación didáctica es una situación en la que se manifiesta directa o indirectamente una voluntad de enseñar. En general, se* *puede distinguir, en una situación didáctica, al menos una situación-problema y un contrato didáctico*." (Brousseau; 1986).

De esta cita podemos destacar que la situación didáctica conlleva condiciones que obligan la adaptación de la persona. Así también su ámbito didáctico hace que el aprendizaje se produzca, para esto es necesario que intervenga el contrato didáctico, ya que la situación didáctica se genera por una situación problema y para resolver esto, se necesita el compromiso de las partes, es decir, el contrato en sí.

Brousseau concibe el contrato didáctico como: "*El conjunto de comportamientos (específicos de los conocimientos enseñados) del maestro que son esperados por el alumno y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro*" (Brousseau; 1980; cit. por Sarrazy; 1996; p86).

1.4.2 Transposición didáctica

La idea de transposición didáctica entregada por Yves Chevallard data de 1985 en una obra del mismo nombre. Esta obra se basa en cómo se traspasa un conocimiento o saber matemático entre un profesor y un alumno.

Chevallard es una persona insistente al momento de referirse a la importancia de la relación didáctica que según su concepción es a menudo poco trabajada, esta es: el saber y la relación con el saber. Según esto el concepto de transposición didáctica se basa en la transformación del saber sabio al saber enseñado mediante canales y medios que hagan posible el traspaso del profesor al alumno. Una metáfora que puede interpretar esta idea es la adaptación de una partitura de un instrumento a otro, ya que es la misma pieza musical, adaptado al instrumento en el cual va a ser ejecutada.

Por tanto, "*un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El 'trabajo' que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica*". (Chevallard, 1985, p. 39)

Un ejemplo de transposición didáctica se da al momento de trabajar un mismo contenido en dos establecimientos distintos, uno de ellos, un liceo agrícola y el otro en una zona costera, donde el tipo de situaciones problemas a trabajar deben adaptarse al capital cultural de cada uno de los grupos. Dicho esto, en el eje de números, subsector números enteros, para explicar la distancia entre números positivos y negativos, el profesor del liceo agrícola puede dar ejemplos del trayecto del agua que recorre la puntera, desde el subsuelo hasta la torre de almacenamiento. Por otro lado, en el liceo de la zona costera, se dan ejemplos relativos al mar, como la distancia que existe entre un pescador sobre un bote pesquero, y los peces. Si bien esto se puede considerar una situación en contexto para comenzar el análisis de un tema, también se ciñe a la trasposición dado que el profesor tiene la necesidad de adaptar un contenido a las distintas realidades de cada grupo y así mismo transformar el saber sabio de la matemática pura a algo más cercano a los alumnos. Por otro lado, el docente además de saber adaptar el conocimiento al contexto cotidiano de los alumnos debe conocer aspectos emocionales y sociales de su grupo para poder tener una buena relación y de esta forma generar las condiciones necesarias para realizar un trabajo óptimo, un ejemplo claro de esto sería evitar hablar de temas sensibles para algún alumno o un grupo de estos, o si se debe abordar dicho tema, hacerlo de la mejor manera.

1.5 LA DERIVADA

Uno de los últimos grandes avances para la matemática moderna fue el concepto de derivada, la cual aún tiene en discusión su autoría entre Newton y Leibniz. En este punto se pretende hacer un acercamiento hacia los conceptos fundamentales referentes a esta materia, considerando su definición, fundamentos e historia.

1.5.1 DEFINICIÓN DE DERIVADA

La derivada es una aplicación lineal que mide la rapidez con que cambia el valor de una función según cambie el valor de su variable independiente. La derivada de una función es un concepto acotado, es decir, calcula el límite de la rapidez media con que cambia la función en cierto parámetro. El intervalo cuando es considerado para la variable independiente se acota cada vez más, ubicándose en la vecindad de un punto generando así el concepto de derivada en un punto.

-Definición Matemática de derivada

Sea $f : \,]a,b[\, \to \mathbb{R}$. Para $x_0 \in \,]a,b[$ se define la derivada de f en x_0 por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cuando el límite existe.

En el caso que el límite anterior no exista se dice que f no es derivable en x_0.

Al considerar el conjunto $A \subseteq \,]a,b[$ de todos los puntos donde f tiene derivada se define la función derivada de f

$$f' : A \to \mathbb{R}$$

$$x \to f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

1.5.2 Algebra de derivadas

Así como los antiguos sabios del medio oriente relacionaron letras con números formulando lo que ahora se conoce como algebra, este concepto también puede considerarse una relación algebraica entre funciones o aplicaciones, dentro de esta materia, tenemos 4 propiedades fundamentales, estas son:

Si $f, g\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ son derivables en x, entonces $f + g,\ cf\ , f \cdot g$ son derivables en x con

$a)\ (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Dem:

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right] \\ &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] + \lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right] \\ &= f'(a) + g'(a)\end{aligned}$$

$b)(cf)'(x) = cf'(x)$

Dem:

$$\begin{aligned}(cf)'(x) &= \lim_{x\to a}\frac{cf(x) - cf(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{c(f(x)-f(a))}{x-a} \\ &= c\cdot\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] \\ &= c\cdot f'(x)\end{aligned}$$

$c)(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Dem:

$$(f \cdot g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(f)(x)(g)(x) - (f)(a)g(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(f)(x)(g)(x) - (f)(x)(g)(a) + (f)(x)(g)(a) - (f)(a)g(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$$

$d)$ Sea $g(x) \neq 0, \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Dem:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \qquad = f'(a) \cdot g^{-1}(a) + f(a) \cdot (g^{-1}(a))'$$

$$= f'(a) \cdot g^{-1}(a) + f(a) \cdot -g^{-2}(a) \cdot g'(a)$$

$$= \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

$$= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

1.5.3 Regla de la cadena.

Esta regla surge por una necesidad de encontrar un método que sintetice el proceso de operar sistemáticamente derivadas, ya que gran parte de ellas tienen relación con funciones compuestas. Debido a su carácter iterativo es que se denomina de esta manera.

Sean $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(x)$ está definida. Si f es derivable en x y g es derivable en $(f)(x)$, entonces $h = g \circ f$ es derivable en x y $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. O también: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Dem:

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g(f(a))}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g(f(a))}{x - a} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{f(x) - f(a)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= g'(f(a)) \cdot f'(a)
\end{aligned}
$$

1.5.4 Historia de la Derivada.

Luego de analizar lo relacionado con el concepto de derivada, es necesario hacer un acercamiento a sus raíces y a los conflictos entre sus gestores, para esto se propone un resumen a modo de guía para entender lo ocurre en el transcurso de la historio.

Históricamente existieron cuatro problemas fundamentales que al ser resueltos en el siglo XVI-XVII, dieron vida a lo que hoy se conoce como función derivada, estos fueron: El de la velocidad, el de la recta tangente, el de área bajo una curva y el de máximos y mínimos. Entre los siglos V y IV a.C se destacan en la cultura griega, los trabajos de: Zenón de Elea, para quien el movimiento era imposible y consideraba que el espacio y el tiempo eran infinitamente divisibles. Luego se da paso a la escuela de los atomistas: Leucipio, Demócrito y Jenofonte, quienes se centraron en el materialismo. Para estos el movimiento correspondía a la interacción de los átomos y de alguna manera concibieron el movimiento como una relación del espacio y el tiempo. A fines del siglo IV a. C aparece Eudoxio, quien es considerado el padre de la astronomía. En 370 a. C. logra plasmar su trabajo escrito sobre el método de exhausión, el cual era un método riguroso y esencialmente geométrico de hallar el área bajo una curva a través de polígonos inscritos y circunscritos, logra por este método hallar el área de un círculo. Este método posteriormente lo utilizó Arquímedes durante el siglo lll a.C, considerado por algunos como uno de los matemáticos más brillantes de la historia, junto con Newton y Gauss, trabajó en matemática aplicada, continuó con el método de exhausión y logró mejorarlo, demostró mediante series el área de regiones que a la fecha no existían aproximaciones reales. Hasta el siglo XVI, los matemáticos retoman el trabajo de los griegos respecto a los procesos de variación para resolver problemas que se planteaban desde la mecánica, en ese sentido se retoman los trabajos de Eudoxio y de Arquímedes sobre el método de exhausión para hallar áreas bajo curvas. Aparecen matemáticos como: Luca Valerio (1552-1618), Galileo (1564, 1642), Kepler (1571-1630), Huygens (1596-1695), Descartes (1596-1650), Cavalieri (1598-1647), Fermat (1601-1665), Roberval (1602- 1675), Torricelli (1608-1647), Wallis (1616-1703), Pascal (1623-1662), Hudde (1628- 1704) y Barrow (1630-1677). En este período el rigor matemático cambia respecto del usado por los griegos (Geométrico), se hace necesario buscar nuevas formas de demostrar los procesos matemáticos distintos a los de la geometría y del álgebra, se estudian las relaciones del movimiento, áreas bajo curvas, recta tangente y máximos y mínimos como procesos de variación. Se encuentran diferencias en la calidad del trabajo de algunos matemáticos durante esta época y en ese sentido por ejemplo se destacan los realizados por Fermat, Descartes, Galileo y Barrow. Estos trabajos en el cálculo anteceden al de Newton (1643-1727) en su teoría de fluxiones y al de Leibniz (1646-1716) en la teoría infinitesimal, ambos de maneras distintas lograron darle vida a lo que hoy se conoce como cálculo diferencial e integral. Tanto Newton como Leibniz, usaron los infinitésimos y los infinitos e intentaron dejarlos de lado por las críticas que algunos pensadores como Berkeley (1685-1753) les hicieron, este hecho marca otra etapa más en el avance del rigor matemático el cual tuvo que esperar hasta los trabajos de Cauchy (1789-1957) a quien se le atribuye el rigor actual de las matemáticas, la definición de función derivada entre otros, Dedekind (1831-1916) sobre cortaduras y Cantor (1845-1918) sobre conjuntos. Son los trabajos de estos tres matemáticos los que finalmente permiten a las matemáticas y en particular al cálculo establecerse como un dominio matemático distinto al del álgebra, al de la geometría y al de la aritmética Boyer (1992). La función derivada como objeto del cálculo infinitesimal logra su reconocimiento social, científico y matemático en el siglo XX, plasmando el trabajo de muchas personas durante 20 siglos y diferenciándose de otros objetos de las matemáticas como los del álgebra, los de la geometría y los de la aritmética entre otros, Boyer (1992). Según este último, en la construcción y descubrimiento del cálculo infinitesimal durante su etapa final fue necesario la confrontación y contrastación de los métodos geométricos de Cavallieri y Barrow, con los métodos analíticos de: Descartes, Fermat y Wallis, con los métodos aritméticos de: Roberval, Fermat y Wallis y con los métodos cinemáticos de: Torricelli, Roberval y Barrow. En este sentido es evidente entonces que la influencia de la descendencia histórica de Newton en la cinemática como lo fueron: Arquímedes, Galileo, Torricelli, Roberval y Barrow; así como la influencia de la descendencia histórica de Leibniz en el atomismo, representada por: Demócrito, Kepler, Cavalieri, Fermat, Pascal y Huygens fueron quienes permitieron a Newton y Leibniz el logro del cálculo infinitesimal por caminos diferentes.

CAPITULO 2: OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DE TRABAJO

Para comenzar una propuesta de trabajo es necesario contar con un objetivo, el cual se espera completar, dentro de estos, existen dos tipos de objetivos dentro de la investigación, generales y específicos. Por otra parte es necesario especificar una metodología de trabajo para especificar la forma en que se llevarán las actividades propuestas.

2.1 Objetivos de la investigación:

2.1.1 Objetivo General

- Diseñar una propuesta para generar el concepto de Derivada en Educación Media.

2.1.2 Objetivos Específicos

-Fundamentar la problemática que se suscita en la aplicación del Currículum Nacional a nivel de 4 año Medio, en el eje de algebra.

- Advertir anticipadamente cuáles son las dificultades que suscita el aprendizaje de la derivada en la enseñanza superior.

- Revisar históricamente (epistemológicamente), el proceso de construcción del concepto de derivada.

- Diseñar el proceso de construcción del concepto de derivada en alumnos de 4º Medio.

2.1.3 Metodología de trabajo

- Revisión Bibliográfica

- Diseño de la Proposición de Trabajo:

  - Planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje (Análisis a priori del proceso de aprendizaje)

  - Materiales para el aprendizaje: a) video; b) Guía de Aprendizaje; c) Guía de Ejercicios

  - Instrumentos para la evaluación: a) de proceso a partir de las Guías desarrolladas en clase; b) del cierre del proceso de aprendizaje (prueba escrita)

2.2 CARTA GANTT

Mes Actividades	ene-18	feb-18	mar-18	abr-18	may-18	jun-18	jul-18	ago-18
Revisión bibliográfica								
Situación problema								
Marco teórico								
Objetivos								
Planificación apaisada								
Evaluación sumativa								
Guía de aprendizaje								
Guías de ejercicios								
Proposición de trabajo								

CAPITULO 3: PROPOSICIÓN DE TRABAJO

En el siguiente capítulo se pretende realizar una descripción detallada acerca de la forma de llevar a cabo este trabajo en base a la documentación revisada y en la confección de instrumentos necesarios para entregar estos contenidos segmentados según una unidad pedagógica y las horas de trabajo que esta involucra.

Como en toda preparación para el desarrollo de una unidad es necesario confeccionar una planificación, dado que esta entregará un resumen de lo que se hará, así como también cuando se trabajará. Para la confección de esta planificación será necesario primero haber entregado de manera correcta los contenidos previos, de no ser así al menos saber cuáles son las conductas deficientes para reforzarlas antes de comenzar la unidad. Otro punto para evaluar es el tiempo necesario para el trabajo de la unidad completa, para esto hay que tener conocimiento del grupo con el cual se va a trabajar, y en base a esto estimar un tiempo coherente a las capacidades de dicho grupo. En particular en este seminario se realizó una planificación estandarizada (anexo 1) en base a siete clases (catorce horas pedagógicas) y una clase (dos horas), dedicada a la evaluación sumativa.

3.1 DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO EN AULA

En este punto se pretende guiar al lector sobre como estructurar cada clase presentada en la planificación, además de entregar una idea de material y/o evaluaciones para concretarlas de manera efectiva.

3.1.1 PRIMERA CLASE

La iniciación a la construcción del concepto de derivada se va a trabajar de manera intuitiva primeramente para luego pasar a la formalización; se considera oportuno observar un video a partir del cual el alumno pueda realizar un acercamiento.

Para desarrollar la construcción formal del concepto de derivada y a partir de la observación del video cuyos comentarios del grupo curso, apoyados por el profesor, tendrán que llevar a un acercamiento, el cual será consolidado a partir del uso de una guía de aprendizaje (anexo 2).

Para concluir con la clase se recomienda retroalimentar la guía de aprendizaje (o guiarla) para finalizar el trabajo generando en conjunto con los alumnos la definición de derivada mediante el límite.

3.1.2 SEGUNDA CLASE

Se comienza la clase recordando la procedencia de la palabra “polinomio” en una discusión guiada con los alumnos para luego aplicar la definición de derivada generada anteriormente (clase 1). Luego de analizar un par de expresiones se debe llegar a la conclusión “la derivada se puede modelar para funciones polinómicas”.

Posteriormente mediante el uso de una guía de estudio (Anexo 3) se conceptualiza el concepto de punto crítico para calcular los vértices (crestas) en estas funciones, cabe destacar que durante el trabajo de la guía debe haber breves intervenciones para guiar el desarrollo de la actividad y lograr el resultado esperado.

Para concluir con la clase se recomienda retroalimentar la guía y revisar los resultados con los alumnos para asegurar un progreso nivelado entre ellos.

3.1.3 TERCERA CLASE

Para el inicio del trabajo con fracciones algebraicas se recuerdan las propiedades de la fracción dando hincapié en los valores que puede o no tomar el denominador. Se debe recordar también las fracciones que poseen indeterminaciones, dándole un mayor énfasis a los radicales ya que serán el tema por tratar durante la clase siguiente.

Para el desarrollo de la clase se entrega el modelo de derivada para cociente de funciones y se trabajan algunos ejemplos en conjunto con los alumnos en los cuales puedan visualizar la forma correcta de aplicar el modelo.

Para concluir con la clase, se hace entrega de una breve guía de aplicación (Anexo 4) en la cual el alumno debe aplicar el modelo anteriormente entregado, cerrando con la revisión de esta actividad.

3.1.4 CUARTA CLASE

Para el inicio del trabajo con expresiones radicales, se deben recordar las distintas partes que componen una raíz, para luego recalcar que las funciones con índice par no pueden tener radical negativo.

Para el desarrollo de la clase se presenta a lo menos una expresión donde el sub-radical de una raíz de índice par tome valores negativos, de esta manera se muestra un ejemplo claro de la indeterminación en estas funciones $(f(x) = \sqrt{x})$. Se recomienda hacer hincapié en la revisión del intervalo solución, para que asocien el dominio de la derivada y el dominio de la función. Posteriormente se entrega el modelo de derivada para funciones radicales y se trabajan algunos ejemplos en conjunto con los alumnos en los cuales puedan visualizar la forma correcta de aplicar el modelo necesario.

Para concluir con la clase, se hace entrega de una breve guía de aplicación (Anexo 5) en la cual el alumno debe aplicar el modelo anteriormente entregado, cerrando con la revisión de esta actividad.

3.1.5 QUINTA CLASE

Para iniciar el trabajo de algebra de derivadas, se entrega una guía de inducción (Anexo 6) en la cual el alumno observa el desarrollo de los modelos mediante ejercicios resueltos para que genere sus propias conjeturas de desarrollo.

Durante el desarrollo, los alumnos exponen su conjetura para que se genere una discusión guiada.

Para el cierre se indica cuál fue el procedimiento para generar las reglas de derivación entregando el modelo formal.

3.1.6 SEXTA CLASE

En el inicio de la clase se recuerdan los cuatro modelos de algebra de derivadas trabajados la clase anterior.

Durante el desarrollo los alumnos nombran las funciones que se trabajarán (polinómicas, fraccionarias y radicales), indicando los procedimientos para derivarlas. Se realizarán ejemplos en conjunto con los alumnos mediante una clase interactiva. En la segunda parte se recordará el concepto de composición de funciones cautelando que se respete el dominio de la función compuesta. Se trabaja también una breve guía de ejercicios (Anexo 7)

Durante el cierre de la clase se introduce el concepto de regla de la cadena

3.1.7 SÉPTIMA CLASE

El foco de esta clase será que el alumno logre identificar cual es el aspecto de una función compuesta y a su vez identificar que funciones se están componiendo para luego aplicar Regla de la Cadena (anexo 8).

Para el inicio de la clase se propone un ejemplo de función compuesta en el cual el alumno mediante un análisis logre identificar que funciones se están componiendo.

Para el desarrollo, una vez que logren identificar que funciones contiene la composición se derivará la función mediante Regla de la Cadena a modo de ejemplo, para posteriormente aplicar una breve guía de ejercicios.

Para el cierre de esta clase se realiza un breve feedback de todos los modelos de derivación vistos en la unidad, a modo de preparar la evaluación sumativa

3.1.8 OCTAVA CLASE

Está enfocada en desarrollar la evaluación final de la unidad mediante una evaluación escrita (anexo 9) que está enfocada en su primera parte en verificar si los alumnos comprendieron conceptualmente los términos o si al menos tienen una noción sobre estos. Su segunda parte tiene como finalidad evaluar el uso de la derivada. Su tercera y última parte tiene como finalidad evaluar el modelo de regla de la cadena.

Mediante el trabajo realizado durante las ocho clases, se pretender que el alumno obtenga las competencias suficientes para abordar este contenido en sus estudios posteriores.

CAPITULO IV: REFLEXIONES

En este capítulo se recordarán todos los aspectos que estuvieron presentes durante el trabajo. Evidentemente está el trabajo de la revisión bibliográfica en la cual se dispuso el enfoque de los autores citados, además de abordar la situación problema de diferentes maneras. Una dificultad precedente de esto fue la constitución del marco teórico ya que algunos autores tienen posturas diametralmente opuestas, dificultando la elección de estos para el enfoque buscado. Por otra parte, durante la confección de la propuesta de trabajo, surgieron problemáticas en las cuales se necesitaba el apoyo de autores que no habían sido trabajado dentro del marco teórico, por lo cual hubo que replantear este mismo. Así también otro gran problema que surge viene de no tener la certeza de a qué grupo se le va a aplicar esta propuesta, ya que, para un aprendizaje efectivo, el docente debe conocer el grupo con el cual está trabajando. En consecuencia, al tratar de estandarizar este proceso surge la necesidad de nivelar al grupo de trabajo, debido a esto para poder trabajar de manera efectiva se trató de entregar en cada clase una guía para orientar al docente según los cánones que componen este trabajo, además de aportar una reflexión para cada una de las clases presentadas. Por otra parte, el material para cada clase es dispuesto a modo de idea, para que el docente pueda secuenciar con trabajo el aula y fuera de esta las competencias necesarias. Finalmente cabe destacar que este trabajo se centra fundamentalmente en la construcción conceptual sin olvidar que avanzando más allá de lo propuesto se deben desarrollar las habilidades que están relacionadas con las situaciones problema, dejando a criterio al docente que trabaje con esta propuesta y su disponibilidad de tiempo trabajar en profundidad el uso de las situaciones.

<u>Clase 1:</u> Debido a la complejidad del concepto de derivada, se recomienda realizar una aproximación intuitiva con una metodología más activa, en donde el alumno encuentre dentro del procedimiento aspectos que domina y sobre esos, incluir elementos nuevos. (Engler, A. 2005)

Clase 2: La primera función que se trabaja es la polinómica ya que será una herramienta necesaria al minuto de estudiar derivada en fracciones algebraicas.

El material con el que se trabajará consta de dos partes, en la primera deben calcular la derivada del polinomio con el método trabajado durante la clase, esto para que más adelante lo puedan ocupar para derivar composición de funciones mediante Regla de la Cadena.

Clase 3: Se deben trabajar las propiedades de los polinomios para focalizar las indeterminaciones sólo cuando el denominador toma el valor cero. La clase estará dividida en dos partes, la primera, con un enfoque en la indeterminación de una fracción algebraica, iniciando un acercamiento a las funciones radicales. En la segunda parte se debe entregar un modelo de derivada para que sea aplicado en una breve guía de aplicación.

Clase 4: Llevar ejemplos que la derivada tenga distinto dominio que la función inicial, un ejemplo claro de esto es el descrito en el desarrollo de la clase $(f(x) = \sqrt{x})$, en el cual el dominio de la función es $[0, +\infty[$ y el dominio de la derivada es abierto en 0 ($]0, +\infty[$).

Clase 5: se trabaja una guía de aprendizaje, para que el alumno sea el encargado de inducir el modelamiento de algebra de derivadas.

Clase 6: En esta clase es muy importante guiar a los alumnos en lo relativo a algebra de derivadas ya que en este punto es donde se espera haya mayor confusión.

Clase 7: Se sugiere comenzar la clase con un ejemplo de función compuesta que mezcle a lo menos dos funciones que se hayan visto a lo largo de la unidad para que el alumno logre identificar cuáles son las que componen esta función. Se recomienda además a modo de cierre de unidad realizar un repaso o feedback de todos los modelos trabajados anteriormente.

BIBLIOGRAFÍA

-Artigue, M. (1995) *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* París, Francia.

-Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008) *Content knowledge for teaching*. Michigan, EE. UU.

-Brousseau, G. (1997) *La Teoría de las situaciones didácticas.* Montreal, Canadá.

-Chevallard, Y. (1997) *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos aires, Argentina.

-Collette, J. (1979) *Historia de la matemática Vol. 1 y 2*. Madrid, España

-Comisión Nacional De Investigación Científica y Tecnológica, (2012) TIC's para la educación en Chile. Providencia, Santiago.

-Engler, A. (2005) *Una propuesta Didáctica para la enseñanza de límite*. Santa Fe, Argentina.

-Fernández Plaza, J. (2010) *Unidad didáctica: Límite y Continuidad de funciones*. Granada, España.

-Gómez, P. (2005) *El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas secundaria*. Málaga, España.

-Johnson Mardones, D. (2010) *Identidad y formación docente de los profesores principiantes*. Santiago, Chile.

-MINEDUC:(1990) *Ley orgánica constitucional de enseñanza*. Recuperado de

https://www.leychile.cl/Navegar?idNorma=30330

:(2008) *Marco para la buena enseñanza.* Santiago, Chile

:(2009) *Mapas de Progreso del Aprendizaje.* Santiago, Chile.

:(2009) *Establece la ley general de educación.*

Recuperado de https://www.leychile.cl/Navegar?idNorma=1006043

:(2016) *Habilidad de modelamiento matemático*. Santiago, Chile

:(2016) *Habilidad de resolver problemas*. Santiago, Chile.

:(2016) *Crea el sistema de desarrollo profesional docente y modifica otras normas.* Recuperado de https://www.leychile.cl/Navegar?idNorma=1087343

:(2016) *Desarrollo de habilidades: Aprender a pensar matemáticamente 7° y 8° año de Educación Básica.* Santiago, Chile.

:(2017) *Programa de Integración Escolar.* Santiago, Chile.

-Ministerio de Educación Pública (1980) *Autoriza entrega de la administración de determinados establecimientos de educación técnico profesional a las instituciones o a las personas jurídicas que indica* recuperado de https://www.leychile.cl/Navegar?idNorma=70774

-Rey Pastor, J. (1985) *Historia de la matemática Vol. 1 y 2*. Barcelona, España

-Zill, D. (2015) *Matemáticas 1: Calculo diferencial*. California, EE. UU.

ANEXOS

ANEXO 1: Planificación Apaisada

Unidad Educativa:

Eje: Algebra

Unidad de Aprendizaje: Derivada.

Objetivo de Aprendizaje (General): Identifican y aplican el concepto de Derivada en funciones polinomiales, fraccionarias y radicales.

Tiempo: 16 horas pedagógicas.

Curso: 4° Medio

Conceptos previos:

- Funciones, Dominio recorrido y restricciones, función compuesta, indeterminación de funciones.
- Productos notables.
- Limite y Continuidad.

Objetivos de Aprendizaje	**Contenido**	**Actividad**	**Materiales**	**Evaluación (Materiales)**
-Adquirir el concepto de Derivada -Analizar el concepto de Derivada -Interpretar el concepto de Derivada	Derivada de expresiones algebraicas.	-Identifican cuando es posible aplicar una derivada. -Comprenden las situaciones cuando una derivada no es aplicable. -Conocen la definición operacional de Derivada. -Trabajan guía de aprendizaje	-Recurso interactivo: Video Derivada -Proyector -Notebook -Guía de aprendizaje	Evaluación Oral

-Analizar el concepto de derivada en funciones polinómicas -Aplicar el concepto de derivada en funciones polinómicas	Derivada de funciones polinómicas.	-Identifican el valor de la Derivada en las funciones polinómicas. -Comprenden que siempre existe la derivada para funciones polinómicas, dado que su dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ y es una función suave -Desarrollan Guía de ejercicios.	-Guía de ejercicios -Data -Notebook	Guía de ejercicios
- Analizar el concepto de derivada en funciones fraccionarias -Aplicar el concepto de derivada en funciones fraccionarias.	Derivada de funciones fraccionarias.	-Identifican el valor de la derivada en funciones fraccionarias. -Identifican elementos de indeterminación para funciones fraccionarias. -Identifican cuando no es posible aplicar la derivada. -Comprenden que existen indeterminación para las funciones fraccionarias, dado que su dominio no siempre es el conjunto $\mathbb{R}$. -Desarrollan Guía de ejercicios.	-Guía de ejercicios -Data -Notebook	Guía de ejercicios

- Analizar el concepto de derivada en funciones radicales. -Aplicar el concepto de derivada en funciones radicales	Derivada de funciones radicales.	-Identifican el valor de la derivada en las funciones radicales. -Identifican intervalos de indeterminación para funciones radicales. -Identifican cuando no puede ser aplicada la derivada. -Comprenden que existen indeterminaciones para las funciones radicales, dado que su dominio no siempre es $\mathbb{R}$. -Desarrollan Guía de ejercicios.	- Guía de ejercicios -Data -Notebook	Guía de ejercicios Evaluación de proceso.
- Conocer el concepto de algebra de derivada. -analizar el concepto de algebra de derivada. -interpretar el concepto de	Algebra de derivadas	-Acercamiento del concepto algebra de derivadas mediante guía de aprendizaje. -Conocen el concepto de algebra de derivada mediante una clase interactiva.	-Guía de aprendizaje -Data -Notebook -Geogebra	Evaluación oral

algebra de derivada.				
-Aplicar el concepto de algebra de derivadas para funciones -Conocer el concepto de regla de la cadena para funciones	Algebra de derivadas Regla de la cadena	-Aplican el concepto de algebra de derivadas mediante una Guía de ejercicios. -Conoce el concepto de regla de la cadena para funciones mediante ejemplos dados	- Guía de ejercicios	Evaluación oral
-Analizar el concepto de regla de la cadena para funciones -Interpretar el concepto de regla de la cadena para funciones -Aplicar el concepto de regla de la cadena para funciones	Regla de la cadena	-Analizan una función que puede ser derivada mediante regla de la cadena. -Interpretan dicha solución como una composición de funciones. -Aplican el concepto de regla de la cadena mediante una guía de ejercicios	-Guía de ejercicios -Data -Notebook	Evaluación sumativa

Anexo 2: Guía de aprendizaje

Preconceptos

En matemática, el límite es un concepto que describe la tendencia de una sucesión o una función, a medida que los parámetros de esa sucesión o función se acercan a determinado valor. En cálculo infinitesimal (especialmente en análisis real y matemático) este concepto se utiliza para definir los conceptos fundamentales de convergencia, continuidad, derivación, integración, entre otros. Si bien, el concepto de límite parece intuitivamente relacionado con el concepto de distancia, en realidad se relaciona con proximidad.

Para fórmulas, el límite se utiliza usualmente de forma abreviada mediante $\lim$ como en $\lim(a_n) = a$, o se representa mediante la flecha ($\rightarrow$) como en $a_n \rightarrow a$.

En análisis real para funciones de una variable, se puede hacer una definición de límite similar a la de límite de una sucesión, en la cual, los valores que toma la función dentro de un intervalo se van aproximando a un punto fijado c, independientemente de que éste pertenezca al dominio de la función.

Informalmente, se dice que el límite de la función $f(x)$ es L cuando x tiende a c, y se escribe:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Si se puede encontrar para cada ocasión un x suficientemente cerca de c tal que el valor de $f(x)$ sea tan próximo a L como se desee.

Generando la derivada de una función intuitivamente.

La derivada de una función es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente. La derivada de una función es un concepto local, es decir, se calcula como el límite de la rapidez de cambio media de la función en un cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente se toma cada vez más pequeño. Por ello se habla del valor de la derivada de una cierta función en un punto dado. En términos físicos, representa la cuantía del cambio que se produce sobre una magnitud.

Un ejemplo habitual aparece al estudiar el movimiento: si una función representa la posición de un objeto con respecto al tiempo, su derivada es la velocidad de dicho objeto.

Un crucero que realice un viaje transatlántico de 4500 km en entre las 6:00 y las 20:00, viaja a una velocidad media de 150 km/h. Sin embargo, puede estar viajando a velocidades mayores o menores en distintos tramos de la ruta. En particular, si entre las 15:00 y las 15:30 recorre 200 km, su velocidad media en ese tramo es de 100km/h. Para conocer su velocidad instantánea a las 15:20, por ejemplo, es necesario calcular la velocidad media en intervalos de tiempo cada vez menores alrededor de esta hora: entre las 15:15 y las 15:25, entre las 15:19 y las 15:21, etc.

El valor de la derivada de una función en un punto puede interpretarse geométricamente, ya que se corresponde con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. La recta tangente es a su vez la gráfica de la mejor aproximación lineal de la función alrededor de dicho punto. La noción de derivada puede generalizarse para el caso de funciones de más de una variable con la derivada parcial y el diferencial.

La derivada de una función f en un punto x se denota como $f'(x)$. La función cuyo valor en cada punto x es esta derivada es la llamada función derivada de f, denotada por f'. El proceso de encontrar la derivada de una función se denomina diferenciación, y es una de las herramientas principales en el área de las matemáticas conocida como cálculo infinitesimal.

Del trabajo anterior es posible hacer un acercamiento algebraico para formalizar el concepto.

Construcción del concepto de derivada

Ejercicios: calcule la pendiente entre los puntos, $(x, f(x))$ para:

a) $f(x) = 2x - 3, \quad x_1 = 0, x_2 = 6$

$x_1 = 2, x_2 = 4$

$x_1 = 2{,}5, x_2 = 3{,}5$

$x_1 = 2{,}9, x_2 = 3{,}1$

b) $f(x) = 3x^2 - 1, \quad x_1 = 0, x_2 = 6$

$x_1 = 2, x_2 = 4$

$x_1 = 2{,}5, x_2 = 3{,}5$

$x_1 = 2{,}9, x_2 = 3{,}1$

Comentarios del profesor, al momento de revisar el trabajo de los ejercicios anteriores.

Si $f(x) = 2x - 3$, el límite quedaría $\lim_{x \to x_0} \frac{(2x-3)-(2x_0-3)}{x-x_0}$ que al desarrollarlo queda 2, finalmente podemos decir que la pendiente para cualquier valor que tome la variable independiente será 2.

Para $f(x) = 3x^2 - 1$ es similar $\lim_{x \to x_0} \frac{(3x^2-1)-(3x_0^2-1)}{x-x_0}$ mediante el desarrollo con álgebra de límites podemos llegar a la conclusión que la pendiente para cualquier valor que tome la variable independiente será $6x$, según el ejercicio se evalúa en la vecindad del 3, luego la pendiente en ese punto sería 18.

Generalización:

Lo anteriormente trabajado se puede generalizar a una aproximación infinitesimal mediante el límite.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Para finalizar comentamos que para el nivel al que será entregado este material, sólo se trabajará con modelamiento de derivada y no únicamente con el método del límite.

Anexo 3: **Guía de ejercicios**

Derivada de funciones polinómicas

I. Calcule las siguientes derivadas polinómicas utilizando el método trabajo en clases.

$a) f(x) = x^2 + x - 5$

$b) f(x) = 4x^2 + 4x - 3$

$c) f(x) = -2x^2 + x + 2$

$d) f(x) = 7x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 6x - 1$

II. Cuando en una función la pendiente toma el valor de cero, se dice que tiene un punto de inflexión, para las funciones polinómicas dichos puntos son las crestas o picos, en particular para las expresiones cuadráticas, el punto de inflexión es exactamente el mismo que el vértice.
Para las siguientes expresiones calcule el vértice mediante el método ya conocido y mediante el método de la derivada.

Ejemplo: $f(x) = x^2 - 4x + 8$

$f'(x) = 2x - 4$ $f'(x) = 0 \leftrightarrow 2x - 4 = 0$ $f'(x) = 0 \leftrightarrow x = 2$ Luego $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 8$ $f(2) = 4$ Finalmente, el vértice estaría en $(2{,}4)$.	Sea $a = 1, b = -4, c = 8$ El vértice quedaría en $\left(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})\right)$ Reemplazando: $\left(-\frac{-4}{2}, \left(-\frac{-4}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{-4}{2}\right) + 8\right)$ Finalmente, el vértice sería: $(2{,}4)$

$a) f(x) = x^2 + 2x - 5 \quad b) f(x) = 3x^2 + x - 3 \quad c) f(x) = -x^2 + x +$

Anexo 4: **Guía de ejercicios**

Derivada de funciones fraccionarias

I. Calcule las siguientes derivadas de funciones fraccionarias utilizando el método trabajo en clases.

$a)\ f(x) = \dfrac{1}{x-8}$

$b)\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-4}$

$c)\ f(x) = \dfrac{x^2-5}{x+3}$

$d)\ f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+6}$

Anexo 5: **Guía de ejercicios**

Derivada de funciones radicales

I. Calcule las siguientes derivadas de funciones radicales utilizando el método trabajo en clases.

$a)\ f(x) = \sqrt{x+1}$

$b)\ f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

$c)\ f(x) = \sqrt[n]{5-x}$

$d)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

ANEXO 6: ***Guía de inducción***

Algebra de derivadas

Durante el transcurso de la unidad hemos visto distintos tipos de modelos de derivada, estos son:

La función polinómica: $[ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \dots]' = nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} \dots$

La función radical: $\left[\sqrt{ax+b}\,\right]' = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ax+b}}\right)$

La función fraccionaria: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Teniendo en consideración lo anterior, ¿Qué ocurre si se nos presenta la siguiente situación?

1. $$[8 \cdot (x^2 + 3x - 2)]' = 8 \cdot 2x + 8 \cdot 3 - 8 \cdot 0$$

¿Podrías explicar que procedimiento se utilizó para llegar a esta igualdad?

____

____

2. $$\left[x^2 + x + \sqrt{2x+1}\right]' = 2x + 1 + \frac{2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)$$

¿Podrías explicar que procedimiento se utilizó para llegar a esta igualdad?

____

____

3. $$\left[(x^3 + 3x) \cdot \left(\sqrt{6x+1}\right)\right]' = (3x^2 + 3) \cdot \left(\sqrt{6x+1}\right) + (x^3 + 3x) \cdot \frac{6}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{6x+1}}\right)$$

¿Podrías explicar que procedimiento se utilizó para llegar a esta igualdad?

____

____

Para el profesor: luego del análisis y posterior explicación de los alumnos, se sugiere realizar una discusión guiada para que en conjunto se logren generar los modelos para el algebra de derivada. Luego de eso se sugiere formalizar con terminología general y de ser posible demostrar los modelos.

Anexo 7: **Guía de ejercicios**

Algebra de derivadas

I. Calcule las siguientes expresiones utilizando algebra de derivadas.

$a)\ f(x) = x^2 + 3x^3 + \sqrt{x+1}$

$b)\ f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1}$

$c)\ f(x) = 5 \cdot (x^4 + 4x)$

$d)\ f(x) = (x^6 + 2) \cdot \sqrt{3x-1}$

$e)\ f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 2x + 1} \cdot (x+1)^4$

Anexo 8: **Guía de ejercicios**

Regla de la cadena para derivada

I. Calcule las siguientes derivadas utilizando regla de la cadena.

$a)\ f(x) = (x^2 + 3x)^4$

$b)\ f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+6}}$

$c)\ f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}$

$d)\ f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x+1}}$

Anexo 9: Evaluación Sumativa

"Derivada"

Nombre: ________________________________ Curso:______

Fecha:_______________

Instrucciones: Lea cuidadosa y comprensivamente las preguntas y luego conteste con lápiz grafito.

Tiempo: 90 minutos

I. Explique con sus palabras (3pts c/u):

¿Qué es la derivada? Ejemplifique

____

____

____

¿Cuándo una función es derivable?

____

____

____

¿Qué es la regla de la cadena?

____

____

____

II. Identifique el/los tipo(s) de función(es) y luego calcule su derivada (12pts)

$a)\ \ f(x) = x^5 + 6x^2 - 4x$

$b)\ f(x) = \dfrac{x+7}{2x-1}$

$c)\ f(x) = x^2 \cdot \left(\sqrt{x-2}\right)$

III. Aplique regla de la cadena para calcular las siguientes derivadas. (8pts)

$a)\ f(x) = (x^4 - 4x + 1)^3$

$b)\ f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+4}}$

IV. Resuelva el siguiente problema con enunciado. (6pts)

En un evento aeronáutico una avioneta realiza un vuelo que en cierto momento describe una parábola de función $f(x) = x^2 + 3x + 100$. Calcule el punto más bajo del trayecto descrito.