UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

ESTRATEGIAS COGNITIVAS EN LA COMPARACIÓN DE FRACCIONES. UN ESTUDIO EXPERIMENTAL CON ESTUDIANTES EXPERTOS EN MATEMÁTICAS.

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

Tesista: Monserrat Salomé Branje Talcao

Profesora guía: Dra. Mabel Urrutia.

Profesor co-guía: Dr. David Gómez

Concepción, 2017

UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE CURRICULUM E INSTRUCCIÓN

ESTRATEGIAS COGNITIVAS EN LA COMPARACIÓN DE FRACCIONES. UN ESTUDIO EXPERIMENTAL CON ESTUDIANTES EXPERTOS EN MATEMÁTICAS.

SEMINARIO PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

Tesista: Monserrat Salomé Branje Talcao

Profesora guía: Dra. Mabel Urrutia

Profesor co-guía: Dr. David Gómez

Concepción, 2017

Este trabajo fue apoyado por los proyectos Fondecyt Regular 1160188: Sesgos cognitivos y estrategias que subyacen a la matemática escolar. El caso de la comparación de fracciones, a cargo del Dr. David Gómez de la Universidad de 0´Higgins y el Centro de Estudios de Educación avanzada (CIAE), Universidad de Chile en colaboración con la Dra. Mabel Urrutia de la Universidad de Concepción y por el proyecto PIA/Basal FB0003

“Nada puedes enseñar a un ser humano,

salvo a encontrarse por sí mismo”

(Galileo Galilei, físico y astrónomo)

RESUMEN

La presente investigación pretende obtener datos empíricos sobre las estrategias de procesamiento cognitivo que subyacen a la tarea de comparación de fracciones en estudiantes de matemática y conocer la influencia de la memoria de trabajo durante el procesamiento de fracciones. Para lo cual se aplicó un cuestionario a 50 estudiantes de matemática de la Universidad de Concepción, en el cual se evaluó su desempeño en los distintos tipos de ítems, resultados que permiten inferir las estrategias y sesgos cognitivas que subyacen su desempeño.

Éste fue un estudio experimental con un diseño 3 x 2, en el cual se consideró las variables nivel de congruencia de las fracciones (congruente/incongruente/neutro) y componentes comunes (presencia/ausencia) de las fracciones. Además, se midieron dos variables independientes más: el gap fraccional y la fuerza de la congruencia sólo para las fracciones sin componentes comunes. Se midió el tiempo de reacción y la tasa de aciertos en la tarea de comparación de fracciones.

El cuestionario contó con 180 ítems y la tarea consistió en seleccionar la fracción mayor entre las dos fracciones de cada ítem, con la intención de un procesamiento más intuitivo que analítico, de acuerdo a un tiempo límite de respuesta de 10 segundos para cada par de fracciones, después de los cuales se pasaba al siguiente ítem. La muestra se dividió en 3 grupos de acuerdo a análisis de clustering, mostrando un comportamiento distinto entre ellos.

Los resultados obtenidos indicaron mayor tiempo de reacción y menor tasa de aciertos ante las fracciones sin componentes comunes en comparación con las fracciones con componentes comunes. La variable gap fraccional parece influir en los resultados del grupo 1 de la muestra. Así también la fuerza de la congruencia influyó en los resultados, especialmente las fracciones con congruencia fuerte. Se encontraron diferencias entre los tres grupos clasificados de la muestra. Los resultados se interpretan de acuerdo al tipo de estrategia utilizada, destacándose la utilización de estrategias de procesamiento componencial y holístico de acuerdo a las características de las fracciones a procesar. Así, los datos empíricos sobre los tiempos de respuesta de los estudiantes sugieren evidencia a

favor de un sesgo proveniente de los números naturales, el cual, sin embargo, parece ser corregido y superado en la mayoría de las ocasiones para completar con éxito la tarea.

Palabras clave: Fracciones, estrategias cognitivas, gap fraccional, fuerza de la congruencia, memoria de trabajo

ABSTRACT

The current investigation pretends to gather empirical data about the cognitive processing strategies that underlie the comparing fractions task on Mathematic students and to know the influence of work memory during fractions processing. For that purpose, a questionnaire was applied to 50 students of Mathematic of Universidad de Concepción, which evaluated their performance through different type of items in order to infer the strategies and cognitive distortions behind it.

It was an experimental study with a 3 x 2 design, which considered two variables of fractions: fractions congruency (levels: consistent/inconsistent/neutral) and common components (levels: present/absent). In addition, two independent variables were measured: fractional gap and level of congruency only for the fractions without common components. The reaction time and success rate in the comparing fractions task were measured.

The questionnaire comprised 180 items and the task consisted of selecting the highest fraction among the two of each item, to obtain a more intuitive than analytic processing, subjected to a time limit of 10 seconds per pair of fractions, after which they continued to the next item. The sample was divided into 3 groups according to the clustering analysis, showing each of them different behaviors.

The data obtained showed a higher reaction time and lower success rate when facing fractions without common components than fractions with common components. The fractional gap and congruency level seemed to influence the results of the majority of the sample (Group 1). Differences were found among the three sample groups. The results are interpreted according to the type of strategy used: primarily the use of componential and holistic processing strategies, according to the characteristics of the fractions to be processed. Thus, the empirical data of the answering time of the students suggest a distortion in favor of natural numbers, which, however, seems to be corrected and surpassed in the majority of the situations in order to complete successfully the task.

Keywords: fractions, cognitive strategies, fractional gap, congruency level, work memory

ÍNDICE

INDICE DE TABLAS

I. TABLAS

II. GRÁFICOS

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la humanidad ha estado ligado a la necesidad de solucionar problemas, de ahí que el tema de las fracciones surge cuando al ser humano se le presenta el dilema de medir longitudes, áreas, volúmenes, pesos y otras clases de medidas de la vida cotidiana. Se observa la necesidad de encontrar otra forma de representación para el reparto, los números naturales ya no son suficientes, puesto que aparecen cantidades más pequeñas que la unidad o más grandes. Es ahí donde se originan la fracción.

Registros históricos encontrados en tablillas antiguas evidencian que los primeros en iniciar el proceso de fraccionamiento a la unidad fueron los babilonios y egipcios. Los babilonios decidieron optar por un sistema uniforme de medidas, ya que de ello dependían sus actividades comerciales, los egipcios, por su parte, desarrollaron las fracciones en un contexto de medida y reparto. Una de las situaciones que más se puede apreciar es el reparto de tierras, puesto que por esta época se le daba tributo al faraón, oportunidad en que los egipcios hallaran la forma de distribuir equitativamente sus producciones.

Los griegos utilizaban las fracciones de la misma forma que lo hacían los romanos: marcando el numerador con una tilde y el denominador con dos, más tarde se reconocieron fracciones equivalentes y usaron todo tipo de fracciones, este proceso lo consiguieron por medio de la proporción. En occidente, los musulmanes fueron los que introdujeron a España el sistema de numeración indo-arábigo, constituyéndose en uno de los avances para la comprensión de la fracción.

Los árabes, por su parte, representaban las fracciones de forma similar a la de los egipcios, a partir de la suma de fracciones unitarias (con numerador igual a 1). Más adelante, en el siglo XII, Leonardo de Pisa introdujo el "número quebrado" (en latín frāctus, fractĭo - ōnis), además, hace uso de la raya horizontal para separar el numerador del denominador, dando origen a la notación actual de fracción:

$$\frac{a}{b} \qquad ; a\ es\ numerador\ y\ b\ denominador$$

El entendimiento de fracciones es crucial en los primeros años, puesto que su comprensión requiere de un entendimiento más avanzado sobre la naturaleza de un número, además, se ha considerado un gran predictor para el logro matemático del estudiante en la posteridad (Bailey, Howard, Nugent y Geary, 2012; Both y Newton, 2012; Siegler et al, 2012). Esto ha llevado a varias disciplinas a utilizar el concepto de fracción para estudiar diversas cuestiones relacionadas con la fracción como concepto matemático y a su enseñanza-aprendizaje durante la escolarización. Pese a que el origen de las fracciones se encuentra en la aritmética (rama de la matemática que estudia los números y las operaciones con ellos), el desarrollo de la matemática abstracta ha ido ampliando los campos de utilización del concepto de fracción, en álgebra por ejemplo, donde se utilizan las fracciones para encontrar el valor de una incógnita; o en cálculo, que se utilizan como razón de cambio (derivadas). Así también, en física se utiliza frecuentemente la fracción en su concepción de razón (relación entre dos magnitudes) para definir conceptos como velocidad media, o más intrincado aún, para que a través de los procedimientos de proporcionalidad[1], interceda en la definición de una importante ley como la de gravitación universal, formulada por Isaac Newton. Por otro lado, en áreas menos relacionadas con las matemáticas, se utiliza también el concepto de fracción, éste es el caso de las ciencias naturales como química, en el que la fracción tiene un importante rol, puesto que permite expresar un gran descubrimiento: que las moléculas son configuraciones ordenadas de átomos, su ordenación puede ser representada por medio de fracciones, por ejemplo la molécula de dióxido de carbono (CO2) tiene 2 átomos de oxígeno y uno de carbono, es decir $\frac{2}{3}$ de oxigeno y $\frac{1}{3}$ de carbono. Así también, en la música se utilizan las fracciones para definir las notas a partir de una unidad: la redonda, por ejemplo, la blanca es $\frac{1}{2}$, la negra es $\frac{1}{4}$, una corchea es $\frac{1}{8}$, etc., donde es imprescindible comprender la cantidad de "tiempos" que cada una de las fracciones significa para poder leer o interpretar una tablatura musical.

El interés por la utilización de las fracciones trasciende las disciplinas del currículo para llegar a otras ciencias como la psicología cognitiva del desarrollo y las neurociencias, cuya preocupación se centra en descubrir los procesos que conducen al desarrollo del concepto de fracción y su implicancia en contextos de aprendizaje y comportamiento. En particular, la neurociencia estudia la estructura y el funcionamiento del cerebro, incluyendo a muchas otras ciencias para un estudio transdisciplinar del sistema nervioso. Abarca niveles de desarrollo desde el puramente molecular hasta el específicamente conductual y cognitivo, implicando a ciencias como neuroanatomía, neuroquímica, neurofisiología, biopsicología, psicofisiología, neurociencia cognitiva, entre otros. Sin embargo, para su estudio también utiliza aportes de otras ciencias relacionadas como: ecología, paleontología, física, sociología, ontología, informática, etc. Hoy en día la neurociencia tiene un carácter interdisciplinario, incluyendo procedimientos y temáticas de varias ciencias como la biología desde sus inicios, así como la psicología, la física, la medicina y las técnicas derivadas de ella. Es así como el uso de técnicas avanzadas de imagenología cerebral o electrofisiología han hecho grandes avances para poder investigar, cada vez con mayor precisión, las estructuras cerebrales involucradas en el procesamiento de la información y cómo, en interacción con el medio ambiente, influyen en la conducta humana.

El enfoque metodológico de la neurociencia es investigar las estructuras cerebrales involucradas, y las conexiones neuronales activadas, a partir de técnicas de laboratorio clásicas neuropsicológicas que van desde pruebas cognitivas a pruebas diseñadas de forma particular para medir variables relevantes en determinados estudios. En sus inicios, y aún hoy, se estudian individuos con ciertos déficit para procesar información, patologías cerebrales como la acalculia o discalculia del desarrollo, que llevan a un pobre desempeño

[1] El término aquí utilizado se refiere a la proporcionalidad inversa y la proporcionalidad directa que están involucradas en la definición de la ley de gravitación que establece: "toda partícula material del universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa" (Newton, 1686)

en determinadas tareas y cuyo estudio ha ayudado a descubrir muchas de las estructuras cerebrales involucradas en la cognición matemática, aportes que han conducido a extrapolar los descubrimientos y aplicarlos a otras áreas del comportamiento humano.

Las técnicas experimentales se utilizan para la investigación de los procesos cognitivos implicados en el procesamiento matemático, son procedimientos y tareas experimentales para las etapas de la recolección de datos, que incluye la presentación del estímulo y el registro de respuestas. La teoría en que se basan las técnicas experimentales reconocen que el acceso a los productos de la mente, procesos y representaciones es limitado, puesto que no es posible conocer de forma consciente los procesos intermedios, que dan paso al resultado o respuesta. Estos, sin embargo, pueden ser evidenciados a través de tareas experimentales que sirven de criterio para decidir si el proceso ha ocurrido o no, y en qué momento exacto lo ha hecho (Irrarázabal y Molinari, 2005).

Usualmente, se utilizan dos tipos de técnicas experimentales, diferenciadas por el tipo de medición y el momento en que se mide, por una parte, las técnicas off line estudian el resultado del procesamiento, por lo que la medición se lleva a cabo un tiempo después de ocurrido el proceso y haber obtenido la respuesta. Se basan en la memoria y pueden ser de recuerdo libre, donde se pide el recuerdo de un estímulo inmediatamente después, o luego de una tarea distractora. Otro tipo de prueba off line es la de reconocimiento, en la que después de la presentación de estímulos el sujeto debe reconocerlos entre una variedad de ítems. Una de las desventajas es que la tarea experimental puede no evidenciar procesos de codificación sino que procesos de recuperación.

Por otra parte, las técnicas experimentales on line son las más populares en la actualidad gracias a su aporte a la investigación de los procesos mientras se llevan a cabo, son cronometradas y se aplican asumiendo que los mayores tiempos de respuesta son reflejo de una mayor carga de procesamiento en la memoria de trabajo, la que depende del acceso a las representaciones necesarias para el procesamiento, del nivel de activación de dichas representaciones y de las demandas de la memoria de trabajo. Las pruebas de tiempo de respuesta son un tipo de pruebas on line que permite obtener la cantidad de tiempo que se demora el sujeto en producir una respuesta a un determinado estímulo de una tarea experimental. La interpretación de los tiempos de respuesta se basa en dos supuestos: *el supuesto de inmediatez*, en el que las personas tratan de procesar cada parte del estímulo lo más pronto posible, sin esperar a que se termine de recibir; *el supuesto ojo-mente* dice relación con que la mente procesa el estímulo inmediatamente después de haberlo percibido. Una de las críticas fundamentales a esta técnica es que solo registran cambios en la carga de procesamiento sin que pueda especificarse el origen de estos cambios, por ejemplo, movimientos faciales o de las extremidades. No obstante lo anterior, por medio de metodología on-line se pueden inferir los procesos mentales que subyacen al desempeño en una tarea como es la comparación de fracciones.

En esta investigación, se medirá el tiempo de reacción en tareas de comparación de fracciones en alumnos de educación superior que están terminando sus estudios en el área matemática para evaluar su desempeño en la comparación de fracciones y así estimar la contribución del gap fraccional, la congruencia y la presencia o ausencia de componentes comunes en la comparación de fracciones. De este modo, inferir las posibles estrategias cognitivas que subyacen al desarrollo de la tarea en estudiantes de matemáticas.

Para lograr este objetivo, esta tesis se divide en 4 partes: presentación del problema, donde se justifica el problema y se explican las hipótesis que se pondrán a prueba; marco teórico, que da sustento a la investigación; metodología, donde se explican las características de la muestra y el diseño del experimento; resultados, donde se darán cuenta los principales efectos encontrados a nivel estadístico; discusión de los resultados y conclusiones de la investigación.

.

CAPÍTULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La educación matemática actual chilena es evaluada constantemente por organismos nacionales e internacionales, cuyos resultados dan cuenta de un déficit educativo en matemática, concluyendo, por ejemplo, que el 40% de los estudiantes no ha logrado los objetivos mínimos propuestos por el Currículo (Ministerio de Educación, SIMCE, 2014), más aún, organizaciones internacionales han posicionado a Chile como uno de los países en donde una gran proporción de sus estudiantes cercanos al final de la educación obligatoria, casi la mitad, no alcanza las competencias mínimas requeridas para una participación plena en la sociedad (Ministerio de Educación, PISA, 2015). El desarrollo de competencias es un aspecto clave en el programa educativo actual, apuntando a habilidades de razonamiento matemático, de comunicación, de resolución de problemas, entre otros (Programa de Educación, Ministerio de Educación, 2014).

Por su parte, las fracciones presentan un cambio radical para los estudiantes durante la escolarización, ya que se ven enfrentados a otro tipo de magnitudes y al hecho que la mayoría de las propiedades que siempre utilizaron para operar las magnitudes que conocían, ya no sirven para las fracciones. Tal cambio parece influir profundamente en los alumnos, dificultando una comprensión conceptual del tema, es decir, el acceso a su magnitud; incluso en países donde se obtiene un conocimiento conceptual razonablemente bueno, las fracciones constituyen un tema difícil. Una muestra de ello es que en una prueba, a nivel nacional, solo el 50% de estudiantes estadounidenses de 8vo año pudieron realizar un ordenamiento correcto de 3 fracciones (Consejo Nacional de Profesores en Matemática, 2007). Particularmente en Chile, la unidad que mide el contenido de fracciones presenta puntajes especialmente bajos, 427 puntos de un total de 1000, cifra que se encuentra por debajo de la media en la prueba TIMSS y bajo la media de los conocimientos matemáticos, situándose en 459 puntos (Ministerio de Educación, TIMSS, 2014).

Sumado a lo anterior, la diversidad de representaciones que tienen las fracciones llevan a los estudiantes a utilizar una serie de estrategias de procesamiento, las cuales pueden ser especialmente útiles para desarrollar un aspecto esencial de la competencia matemática: la capacidad de un pensamiento flexible, utilizando para ello una variedad de conceptos y procedimientos básicos que le permitirán resolver problemas eficientemente. Al respecto, se han evidenciado diversas equivocaciones por parte de los alumnos en el tratamiento de estos números, tanto en la utilización indebida de propiedades de números enteros para procesar fracciones, como errores derivados de la mala implementación de estrategias cognitivas de procesamiento (Gómez, Jiménez, Bobadilla, Reyes, & Dartnell, 2014; Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J. y Verschaffel, L. (2013); Vamvakoussi y Verschaffel, 2012). Por lo tanto, revelar las condiciones de aplicación y las posibles malas interpretaciones de conceptos y procedimientos que la enseñanza de las fracciones ha provocado en el aula puede ser de gran ayuda para conocer acerca de cómo los estudiantes aprender y con ello, mejorar las prácticas docentes.

Preguntas de investigación

1. ¿Las fracciones con componentes comunes se procesan más fácilmente a nivel cognitivo que las fracciones sin componentes comunes?
2. ¿El nivel de congruencia ejercerá una función importante en tareas de comparación de fracciones?
3. ¿Cuáles son las estrategias cognitivas que subyacen el procesamiento de fracciones en estudiantes de matemática?
4. ¿Cómo influye la memoria de trabajo en el desempeño de los estudiantes durante la comparación de fracciones?

Hipótesis de Investigación

1. Los efectos de congruencia para fracciones con un componente común se procesarán más rápido que las fracciones sin componentes comunes en estudiantes de matemáticas de educación superior.
2. Se obtendrá mayor tasa de aciertos en las fracciones congruentes en comparación con las incongruentes y las neutras en estudiantes de matemáticas de educación superior.
3. El gap fraccional y la fortaleza de la congruencia influirán en los tiempos de reacción y la tasa de aciertos de las fracciones sin componentes comunes.
4. La memoria de trabajo influye positivamente en el procesamiento matemático de la tarea de comparación de fracciones cuando existen diferencias individuales en el span de memoria.

Objetivos de la investigación

1. Objetivo general

- Evaluar la contribución del gap fraccional, la congruencia y la presencia o ausencia de componentes comunes en la comparación de fracciones en estudiantes de matemáticas

2. Objetivos específicos

- Determinar la influencia del gap fraccional en el desempeño en la comparación de fracciones, tanto en tiempo de respuesta como en porcentaje de aciertos.
- Determinar la influencia de la congruencia de fracciones en la comparación de fracciones, tanto en tiempo de respuesta como en porcentaje de aciertos.
- Determinar la influencia de la presencia o ausencia de componentes comunes en la comparación de fracciones, tanto en tiempo como en porcentaje de aciertos.
- Inferir las estrategias cognitivas subyacentes en el desempeño en la comparación de fracciones de expertos matemáticos.
- Establecer la relación de la memoria de trabajo en el desempeño en la comparación de fracciones de expertos matemáticos.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

I. Aporte de la neurociencia al proceso de enseñanza y aprendizaje

La educación es un tema que genera gran interés para muchas ciencias como la antropología, sociología, filosofía, psicología, entre otras que se preocupan de dar respuestas y de descubrir cuestiones de gran interés para los educadores como las relacionadas con la adquisición de conocimiento y comportamientos. Un conjunto de ciencias que se está encargando de proporcionar nueva información sobre los procesos mentales que dirigen la conducta son las neurociencias, cuya tarea central es intentar explicar cómo actúan las células nerviosas individuales en el encéfalo para producir la conducta y cómo, a su vez, estas células están influidas por el medio ambiente, incluyendo la conducta de otros individuos (Kandel, E., J. Schwartz y Jessell, TH., 1997).

La neurociencia está cobrando mayor relevancia en el estudio del comportamiento humano, debido, en gran parte, al desarrollo de nuevas técnicas metodológicas que pueden descifrar las bases neurales del procesamiento de información de forma cada vez más precisa. Dentro de las disciplinas científicas que conforman las neurociencias y que colaboran en su tarea, se encuentra la neurociencia cognitiva, un campo científico reciente que surge de la convergencia de dos disciplinas, inicialmente alejadas: la psicología cognitiva, que estudia las funciones mentales superiores como el aprendizaje y la memoria, y la neurociencia, que estudia el sistema nervioso que las sustenta. De esta forma, la neurociencia cognitiva se encarga de investigar las estructuras y procesos neurológicos implicados en la adquisición del conocimiento sobre el mundo a través de la cognición.

La neurociencia cognitiva es una de las áreas, junto a la neurociencia social, que más investigadores adeptos posee, sin embargo, la contribución real que puede hacer la neurociencia a la educación, y al aprendizaje en particular, es aún muy discutida. Por una parte, existen autores como Schumacher (2007), para quien la neurociencia no puede proporcionar un conocimiento específico sobre aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje, como lo es la planificación pedagógica. Otros, añaden que la neurociencia cognitiva aplicada a la educación, neuro-educación, tiene ciertas limitaciones relacionadas con diferencias metodológicas entre los dos grandes bloques científicos que la conforman, esto es, neurociencias y la ciencias de la educación. Las primeras estudian al ser humano, sacándolo del contexto real para introducirlo individualmente en un ambiente controlado, y no en un ambiente dialógico y grupal, como el que se da en el proceso de enseñanza y aprendizaje (PEA). La educación, en cambio, exige una relación dialógica entre profesor y alumno, que también debería existir en la neuro-educación una relación bidireccional, así lo sugiere Pallarés (2015, p. 138), quien señala: “si desde la pedagogía se apuesta cada vez más por la bidireccionalidad entre estudiante y profesor, de las metodologías educativas, la neurociencia debería ir por la misma línea, apostando por el diálogo como la base de la transmisión de conocimientos”. Además, el mismo autor sugiere que una limitación de la neuroeducación es la que suponen las técnicas tecnológicas y el ambiente de medición artificial (“ambiente controlado”) en que se realiza la investigación, promoviendo que exista una diferencia entre lo que las pedagogías quieren estudiar y lo que la neurociencia puede.

Por otra parte, existen muchos investigadores que no consideran esta relación tan difícil de llevar, esto es, la aplicación de las neurociencias cognitivas a la educación, afirmando que las ciencias de la educación han comenzado a incorporar hace ya un tiempo los hallazgos de ciencias cognitivas, puesto que se ha encontrado repetidamente que las apreciaciones sobre el tratamiento de la información y los procesos mentales propios de la cognición tienen una aplicación directa en disciplinas propiamente educativas como el diseño curricular, la didáctica y la evaluación del aprendizaje. (Álvarez Méndez, 2001; Stufflebeam, 2001; Castillo Arredondo, 2005; Román Pérez y Diez López, 1988; Coll, 1995; Pozo, 1996). De hecho, ya en 1994, el trabajo de los esposos Caine y Caine expresa con toda claridad la necesidad de un conocimiento actualizado de lo que ocurre durante el aprendizaje en el cerebro, plasmando esta idea en su libro: “Haciendo conexiones: la enseñanza y el cerebro humano”, cuya relevancia impulsó a la asociación de Supervisión y Desarrollo del Currículo a requerir elaborar una segunda edición destinada a todos los educadores de ese año. Actualmente, la neuro-educación ha posibilitado un mayor estudio de otras áreas relativas al aprendizaje, como la relación entre el sueño y la cognición, la experiencia directa con el medio, la importancia del ejercicio físico y los tiempos de aprendizaje, y sobre todo, la relación entre emoción y cognición en el PEA. Caine y Crowell (1999) realizaron una síntesis de los aportes de investigaciones sobre el cerebro en algunos principios de aprendizaje, por ejemplo, que el inconsciente juega un rol importante en la comprensión y adquisición de significados, ya que gran parte de ellos son consecuencia de un procesamiento inconsciente; también se ha descubierto, gracias a evidencias encontradas en individuos de “cerebro dividido”, que el cerebro puede reducir la información de manera fragmentada, pero a la vez también puede percibir y trabajar con la información como un todo, consecuencia de su organización. Finalmente, como para enfatizar la necesidad de un puente entre las aguas metodológicas que aún mantienen separadas a la neurociencia y la educación, Pallarés (2015) propone algunas ventajas que puede tener la relación entre ambas: investigación sobre trastornos de aprendizaje como discalculia del desarrollo y acalculia, la relación cognitivo-emocional en los procesos de aprendizaje, el conocimiento del desarrollo neural y cómo la temporalidad se relaciona con procesos sinápticos de adquisición de conocimientos y habilidades.

Pese a que existen versiones opuestas acerca del beneficio que las neurociencias cognitivas puedan tener en la educación, no se pueden negar las contribuciones que han hecho acerca de los sustratos neurales del procesamiento de información y del comportamiento del ser humano, así como de las estructuras neurológicas implicadas en procesos como hablar, correr, razonar, calcular, comparar, etc. Sin embargo, debido a que los estudios iniciales sobre el cerebro humano y las estructuras involucradas en ciertos procesos fueron realizados sobre personas con cerebro dividido, se han instaurado en la población muchos malentendidos o errores acerca del funcionamiento cerebral, como la creencia acerca de que los seres humanos utilizan sólo el 10% de su capacidad, desmentida gracias a las nuevas técnicas de fRMI; otro neuro mito es la idea de que las neuronas no se pueden regenerar, la que actualmente es totalmente refutada, debido al descubrimiento de la plasticidad neuronal (Carlson, 1996), característica distintiva del cerebro que permite que se remodelen, re-arreglen y reordenen las conexiones entre las partes de forma continua; otro error común en las aulas es creer que nuestro cerebro se divide en dos hemisferios que actúan por separado cuando llevamos a cabo actividades creativas o de razonamiento, generándose la idea de que, por ejemplo, los artistas utilizan su cerebro derecho y los matemáticos el cerebro izquierdo. Actualmente, el desarrollo tecnológico ha supuesto avances en los métodos de estudio, desarrollando técnicas menos invasivas para corroborar todos estos supuestos y desmentir errores.

Métodos de estudio

El desarrollo de la informática y los medios digitales, además del interés por investigar y tratar de dar respuesta acerca de cómo la genética y los factores ambientales interactúan en el curso de conformación del cerebro, la mente y el comportamiento, ha contribuido a desarrollar técnicas metodológicas extraídas de disciplinas relacionadas menos invasivas e indoloras, pudiendo actualmente estudiar a sujetos sanos durante la ejecución de determinadas tareas, utilizando métodos como estudios de comportamiento, técnicas de neuro-imagen, de genética molecular, modelos computacionales, registro de células únicas, ensayos químicos, entre otros.

Las técnicas de neuro-imagen han ganado popularidad en estos últimos años, debido a la precisión con que pueden estudiar las conexiones neurales y las estructuras cerebrales que se activan durante la ejecución de determinadas tareas. Por ejemplo, las más utilizadas son: la *resonancia magnética funcional (fRMI)*, procedimiento que, utilizando la tecnología de resonancia magnética, mide la actividad cerebral detectando cambios en el flujo sanguíneo. Gracias a esta técnica se pueden marcar los cambios en la activación cortical que le siguen a una tarea de aprendizaje e incluso comparar estos cambios entre jóvenes y adultos, así se ha descubierto, por ejemplo, que el lóbulo parietal (figura 1) es el área que presenta mayor activación durante el procesamiento del cálculo, aunque también se activan sectores del lóbulo frontal y regiones del cerebelo y ganglios basales. En particular, el surco intraparietal en ambos hemisferios (figura 1) se presenta como el sustrato neural del sentido numérico, clave en los aspectos simbólicos y no simbólicos del procesamiento numérico. Algunos autores como Dehaene, S., Spelke, E., Pine, P. Stanescu, R. y Tsivkin, S (1999) especifican más aún, afirmando que el segmento horizontal del surco intraparietal (SHIPS) es la estructura que sustenta la representación de la magnitud numérica, cuya activación se incrementa con la demanda de manipulación mental de las cantidades.

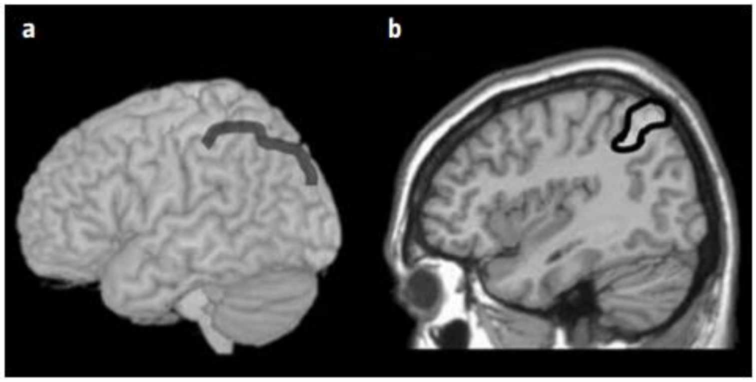


Figura 1: Localización del surco intraparietal izquierdo visto desde una perspectiva lateral del encéfalo (a) y en un corte sagital (b) (Serra-Grabulosa, Adan, Pérez-Pamies, Lachica y Membrives, p.46, 2010)

Otras técnicas frecuentemente utilizadas por la neurociencia es la *tomografía de emisión de positrones (PET)*, que se utiliza para observar los procesos metabólicos en el cuerpo, y la *electroencefalografía (EEG*) que explora el sistema nervioso central y con la cual se obtiene el registro de la actividad eléctrica cerebral en tiempo real. Munataka, Casey y Diamond (2004) sostienen que combinar la resonancia magnética funcional con el electroencefalograma permite tener ventajas, puesto que se pueden obtener precisiones sobre la resolución espacial y la resolución temporal vinculados a cambios cognitivos en un momento dado. De esta forma, se ha evidenciado que el procesamiento numérico se traslada paulatinamente desde el lóbulo frontal al lóbulo parietal, sugiriendo una especialización progresiva del lóbulo parietal una vez que la asociación entre símbolos y magnitudes se automatiza (Serra-Grabulosa et al., 2010). Así, en los niños, el procesamiento numérico requiere más memoria de trabajo y, por tanto, hay una mayor activación de las regiones frontales relacionadas con la atención, sin embargo, en los jóvenes y adultos, la asociación ya hecha entre símbolo y magnitud, los lleva a activar el surco intraparietal para un procesamiento del símbolo. Más aún, la activación de esta estructura aumenta y se expande a otras regiones en función de la demanda de determinadas tareas, un ejemplo es la activación del giro angular que parece relacionarse con el procesamiento verbal, o la región inferior frontal izquierda que se relaciona con la memoria de trabajo y el procesamiento lingüístico. A medida que la tarea es más compleja, hay una mayor activación del surco intraparietal y menos de otras regiones, de esta forma, durante la tarea de sustracción o comparación de magnitudes se activa más el SHIPS que el leer magnitudes o realizar una multiplicación (Serra-Grabulosa, 2013).

Pese a que las técnicas de neuro-imagen son bastante útiles y eficaces para especificar las áreas involucradas, existen limitaciones, debido al coste de su aplicación, por lo que se han desarrollado otros métodos basados en el comportamiento del individuo, que tienen por objeto entender la conducta, todo tipo de acciones y habilidades, y cómo ésta es influida por el medio ambiente, situaciones físicas o sociales que pueden ser modificadas por una conducta. Las técnicas comportamentales son muy utilizadas en la psicología cognitiva para explicar a través de modelos cognitivos, sustentados en estudios experimentales, la conducta de un individuo al realizar alguna tarea. Los métodos de estudio conductuales fueron impulsados por el conductismo y se basan en la premisa de que la conducta es un reflejo de los pensamientos, en el sentido que bajo ciertas condiciones y realizando determinadas tareas, las respuestas del sujeto se pueden analizar para inferir su forma de procesar ese tipo de información, como se espera en esta investigación al utilizar métodos comportamentales para inferir las estrategias cognitivas que utilizan los estudiantes expertos en matemáticas (Irrarázabal y Molinari, 2005).

ii. Fracciones

La fracción como concepto matemático tiene su inicio en el sistema de trueque y repartición característico de las civilizaciones babilónicas y egipcias, quienes compartieron sus resultados con matemáticos griegos que implementaron el método deductivo para ampliar el estudio de la fracción y construir postulados que siguen vigentes hasta el día de hoy. Para comenzar a tratar el concepto de fracción y posteriormente los postulados que ampliarán su comprensión, es necesario establecer el carácter multidimensional de la fracción.

La mayoría de las personas tienen una idea intuitiva de lo que representan ciertas fracciones como ½ y pueden interpretarla correctamente, pero en general, el tratamiento de fracciones más elaboradas como 7/6 y 4/9 conlleva mayor dificultad. La complejidad de su comprensión recae en su variabilidad de interpretaciones. Así, un problema básico lo constituye la naturaleza del número, cuya magnitud es la medida de un objeto conforme a una escala determinada (unidad de medida). En física, las magnitudes son propiedades de los cuerpos que se pueden medir a través de un instrumento con unidades de medida como los kilógramos o metros. En matemática, las magnitudes son propiedades de objetos abstractos, por ejemplo de los números enteros. Un número es un símbolo al que se le asocia una cierta magnitud que depende de la unidad de medida que se esté utilizando (ElleWood, 1896). Por ejemplo, si se mide el largo de una sala de clase con ayuda de un trozo de tela, se puede decir que la sala mide 23 trozos de tela, ahora, si se le quiere dar una unidad de medida a la tela se puede obtener otra cantidad, que depende nuevamente de esta unidad (por ejemplo, que el trozo de tela mide 2m significa que la sala mide 2m*23=64m, siendo el metro la nueva unidad de medida). Ahora bien, cuando la medición de un objeto no conlleva un múltiplo entero de veces, la unidad de medida se desprende el concepto de fracción**,** ya que la unidad debe ser fraccionada o partida para expresar la medida del objeto en cuestión. Siguiendo con el ejemplo anterior, se puede intentar medir una mesa con dicho trozo de tela, llegando a una magnitud de un trozo de tela y medio, de este modo, la mitad de tela correspondería al fraccionamiento de la unidad (de la tela). Por lo tanto, una fracción $\frac{a}{b}$ representa la magnitud de un objeto cuya extensión no necesariamente abarca un número entero de veces la unidad de medida, sino que es preciso dividirla para poder representar su magnitud.

La complejidad del razonamiento que el concepto demanda y la multiplicidad de interpretaciones que posee, provocan que la comprensión del concepto de fracción requiera de un largo proceso para alcanzarla completamente. Gallardo, J., González, j. y Quispe, W. (2007). afírma que el hecho de que la fracción manifieste distintos significados se reporta desde investigaciones sistemáticas. Se vuelve, por tanto, de suma importancia el entendimiento de sus múltiples interpretaciones para poder comprender a cabalidad lo que es una fracción. A continuación, se repasan sus interpretaciones más importantes:

- **Relación parte-todo:** Se presenta cuando un todo (continuo o discreto) se divide en partes congruentes (equivalentes). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total (que puede estar formado por varios "todos"). El todo recibe el nombre de la unidad de medida y la fracción es siempre "fracción de un objeto". Cabe destacar que aquí la fracción es la parte (del todo) en sí misma y no es la relación entre dos partes.
- **La fracción como cociente**: En esta interpretación se asocia la fracción a la operación de dividir un número natural por otro ($a: b = \frac{a}{b}$). Dividir una cantidad en un número de partes dadas. Se diferencia de la anterior, ya que es diferente para un niño dividir una unidad en cinco partes y tomar 3 (3/5) del hecho de dividir tres unidades en 5 partes, aunque el resultado sea el mismo.
- **La fracción como razón**: Se da en las situaciones en que las fracciones son usadas como un símbolo comparativo entre dos cantidades de una magnitud. Como ocurre en las otras interpretaciones, en esta utilización no existe de forma natural una unidad, el todo, generando la situación de comparación bidireccional. Dentro de la utilización de fracción como razón se dan la probabilidad y los porcentajes, que esencialmente constituyen comparaciones.
- **La fracción como operador:** Bajo esta interpretación, las fracciones se ven como "algo" que actúa sobre una situación o estado y la modifica. Se concibe como una sucesión de multiplicaciones o divisiones.
- **La fracción como medida:** Esta interpretación tiene que ver con la idea planteada más arriba sobre la fracción como representante de una magnitud que resulta de una medición no exacta. Está caracterizado por la elección de una unidad arbitraria y sus subdivisiones (la unidad debe poder ser fraccionada), significando la tarea de medir, la asignación de un número a una "región" (en el sentido general) (Llinares y Sánchez, 2009, p.61)

La sola definición de lo que es una fracción, sin embargo, no le da un verdadero sentido al concepto a no ser que el sujeto se enfrente a problemas o situaciones que lo susciten (Vergnaud, 1982). Las situaciones problemáticas incluyen procesos en que el estudiante manipula el concepto a través de sus características para poder solucionar el problema que se presenta, por lo que para finalidades de evaluación o investigación del concepto de fracción se recurre a tareas matemáticas que se pueden considerar "micro-problemas", ya que para dar una respuesta se debe primero analizar el concepto de fracción y conocer sus características para posteriormente tomar una decisión. Algunas de las tareas más conocidas, debido a su frecuencia en la enseñanza-aprendizaje del contenido, así como por su aporte en las investigaciones neuro-científicas, son las tareas de equivalencia y de comparación de fracciones.

Por un lado, la tarea de equivalencia de fracciones tiene que ver con la característica de que dos fracciones, pese a tener numeradores y denominadores diferentes entre sí, pueden representar la misma cantidad, ya que una fracción es múltiplo de otra. En otras palabras, multiplicando (o dividiendo) numerador y denominador por un mismo número se puede obtener una fracción equivalente (una fracción, por tanto, tiene infinitas representaciones numéricas). El proceso de multiplicar y dividir fracciones es llamado amplificación y simplificación de fracciones, correspondientemente. Un ejemplo de fracciones equivalentes pueden ser $\frac{24}{12}, \frac{6}{3}, \frac{4}{2}, \ldots$ todas equivalentes entre sí y a la fracción irreductible $\frac{1}{2}$, se dice irreductible puesto que no se puede simplificar por ninguna cifra, es decir, sus elementos son primos relativos. Esta tarea tiene que ver directamente con la concepción en matemática avanzada, estructuras matemáticas, sobre la fracción como una relación de equivalencia, donde cada clase de equivalencia corresponde a un número racional y sus infinitas representaciones equivalentes.

Por otro lado, la comparación de fracciones es la tarea predilecta para objetivos investigativos, debido a que su solución requiere de asociar la magnitud correcta en fracciones y establecer un orden entre ellas, además, las variables como la distancia entre elementos constitutivos o el valor de los números que componen las fracciones son más simples de manipular para establecer conclusiones concisas. La tarea matemática de comparación consiste en establecer la magnitud correcta de las fracciones para establecer un orden entre ellas y poder decidir la mayor o menor, según lo requerido. La equivalencia de fracciones también puede ser evaluada a través de esta tarea, ya que la comparación puede realizarse entre fracciones de igual magnitud, pero diferente representación numérica, es decir, equivalentes.

Otras tareas relacionadas con fracciones como la adición y multiplicación son menos utilizadas en estudios con fines de medición, sin embargo, hay muchos estudios de intervención que utilizan actividades relacionadas con operaciones algebraicas en estudiantes de enseñanza básica para evaluar la posibilidad de un mejor aprendizaje de los conceptos, utilizando métodos de enseñanza que involucren una mayor cantidad de interpretaciones y situaciones didácticas para el alumno.

La didáctica de las fracciones

Cada autor interpreta la didáctica de la matemática a su manera, según sus experiencias y creencias, por lo que existen variadas definiciones de la misma, para Brousseau (Kieran, 1998, p.596) la didáctica es la ciencia que se preocupa de la producción y comunicación del conocimiento. Por otra parte, para Freudenthal (1991, p. 45) la didáctica es la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje relevantes para tal materia, por lo que incluso un alumno metacognitivamente activo es didacta cuando organiza su aprendizaje. La rama de didáctica de la matemática ha sido muy estudiada desde la revolución posterior a la matemática moderna, hace 4 décadas aproximadamente, presentándose, por tanto, variadas visiones de cómo se deberían abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Las perspectivas pueden agruparse de forma general en dos posturas claramente diferenciables: por un lado, están los idealistas que se inclinan hacia la potenciación de la comprensión por medio de una visión más amplia de la matemática, y por otro, el práctico que busca reestablecer las técnicas básicas en pro de la eficiencia y economía en el aprendizaje. Pese a estas dos posturas tan diferenciables, las décadas de estudio han ido transformando la visión que se tiene en la actualidad acerca de la didáctica de la matemática.

El constante escrutinio al que se sometía la educación matemática desde perspectivas antropológicas, sociales, psicológicas, neurocientíficas, etc., así como la necesidad de adaptación de los aspectos de la enseñanza matemática a los requerimiento de la sociedad, ha ido originando líneas de trabajo cuyas tendencias derivan de forma natural en principios relacionados con la metodología del PEA y con los contenidos que es necesario que se traten en la enseñanza de la matemática. Las tendencias actuales proponen un proceso de inculturación de la matemática, que se refiere a la necesidad de desarrollar los conceptos por exploración de la realidad que los suscitó y/o profundizando en las formas de proceder de la rama. La inculturación está basada en que la matemática es una ciencia que participa mucho más del carácter empírico, sobre todo en su invención, por lo que es necesario que su inmersión en ella se realice considerando la experiencia y la manipulación de los objetos de los que surge. La formalización rigurosa de las experiencias iniciales es un estado posterior. De Guzmán (1991) afirma que actualmente, el principio de inculturación se enmarca eficientemente en la metodología de la resolución de problemas, la que pretende transmitir de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas, puesto que la enseñanza a través de este principio enfatiza en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y considera los contenidos matemáticos como campo de operaciones privilegiados para conseguir estrategias de pensamiento eficaces.

La transición por la que se atraviesa hoy en día en la didáctica de la matemática, no sólo afecta las formas de enseñarla, sino que las críticas también involucran a los contenidos que deberían tratarse en la educación primaria y secundaria, ya que si se priman los procesos de pensamiento y la utilidad del aprendizaje, temas como factorización de polinomios, que obedece a la estructura del álgebra, no deberían ser examinados con tanto detenimiento en la escuela. Particularmente, las fracciones también han generado controversia en los últimos años, debido a la profundidad y énfasis que se le da en el currículo, tanto en su concepto como en su operación, provocando diversas reacciones como las de Freudenthal (1973), quien afirmó que “las fracciones complicadas y las operaciones con ellas son invenciones del maestro que solo pueden entenderse a un nivel superior” o Van Hiele, que sugirió un procedimiento alternativo para trabajar proporciones sin necesitar fracciones. Aunque también hay otros autores como Joy y Cable (1981), que afirman que su permanencia se apoya en que las operaciones de multiplicación y división de decimales solo podrían entenderse correctamente si se saben las operaciones con fracciones, y Kieren (1975) que considera a las fracciones como un fundamento para las relaciones algebraicas posteriores y cree que la comprensión de los números racionales es básica para el desarrollo y control de las ideas matemáticas. Al respecto Llinares y Sánchez (2009, p.46) afirman que "Al utilizar estos números los niños deben ser conscientes de la equivalencia de fracciones, manejar una operación compleja, más axiomática que intuitiva, considerar que la relación entre suma y producto no se presenta de forma natural y trabajar la fracción inversa, por lo que los problemas de tipo algebraico que se presentan son evidentes".

Newton y Siegler (2012), entre otros, enfatizan la importancia que tienen las fracciones para un aprendizaje de la matemática, ya que no sólo requiere de un conocimiento más avanzado de los números, sino que también predice el logro matemático futuro del estudiante al ser consideradas parte de un concepto mayor, el de número racional, muy importante por los procesos que lleva consigo su comprensión y por la utilidad que brinda tanto en la cotidianidad como en la adquisición de otros conceptos matemáticos. La relevancia de las fracciones se ha incrementado en el último tiempo gracias a los estudios en psicología, educación matemática y neurociencia, que indican que los conocimientos acerca de las fracciones parecen ser saboteados inconscientemente por los conocimientos acerca de los números naturales, al respecto se han generado teorías que intentan integrar dentro del mismo marco metodológico a las fracciones y los números naturales. Por una parte, las teorías de cambio conceptual (Vosniadou**,** 1994) sugieren modificar la concepción de la fracción como parte-todo (contando partes de un todo dividido congruentemente) a otra interpretación que enfatice más su característica de magnitud, como puede ser el interpretarla como punto de una recta, ya que de esta forma se ahorraría la confusión de contar con números naturales para construir la fracción. Por otro lado, las teorías integrativas del desarrollo numérico consideran las diferencias y dificultades en la adquisición del concepto de fracción y cómo los números naturales pueden interferir en ellas, además, sugieren que el desarrollo de la comprensión de número racional involucra tanto una expansión gradual desde los números naturales, cuya magnitud es comprendida (de pequeño a grande), como un cambio conceptual que va desde un entendimiento inicial de los números en términos de sus características de números naturales, a un posterior entendimiento de números racionales en términos de una sola característica definitoria, su magnitud (Torbeynus, J., Schneider, M., Xin, Z. y Siegler, R., 2015).

Las consecuencias del desarrollo exponencial de la didáctica de la matemática, y de los campos que se interesan en su estudio, ha provocado variadas modificaciones en las reformas educativas de muchos países, incluyendo Colombia, Francia, Estados Unidos y Chile. El currículo actual chileno responde a la última reforma educacional correspondiente al 2014 que busca promover que los estudiantes le den significado a los contenidos sin caer en la mecanización, que establezcan conexiones entre los conceptos y las habilidades matemáticas, que promuevan el uso de estrategias de resolución de problemas y, además, busca que el estudiante pueda transitar desde un objeto concreto a una representación simbólica del mismo. En general, el currículo chileno sugiere al docente que para la enseñanza de la matemática tome en cuenta los siguientes factores:

- experiencia previa
- aprender haciendo
- centrar el aprendizaje en el estudiante
- usar material concreto
- recurrir frecuentemente a metáforas
- cuidar una progresión en la complejidad
- conectar la matemática con otras materias para no fragmentar el conocimiento
- repasar ideas básicas y ejercitar
- retroalimentar
- las tareas deben propender a la comunicación y aprendizaje colaborativo
- y utilizar las tecnologías de la información y la comunicación

En las orientaciones pedagógicas se enfatiza que las estrategias mentales y de cálculo de la operatoria (como dividir números de 3 o más dígitos) necesitan periodos de exploración, comprensión y ejercitación prolongados antes del uso de la calculadora, siendo solo adecuado para cursos superiores.

El currículo chileno utiliza ejes temáticos para agrupar objetivos de aprendizaje de acuerdo a la rama de la matemática que se pretenda estudiar en cada año escolar, estos objetivos reflejan lo que se espera que los alumnos aprendan y, para efectos de planificación, se agrupan en unidades didácticas que secuencian los objetivos a lo largo del año, estas son las unidades que los alumnos conocen al comienzo de su tratamiento en el aula. En enseñanza básica, se distinguen 4 unidades para cada año escolar: números, álgebra, geometría y datos y azar. La distribución esperada es de dos unidades por semestre escolar, no necesariamente con los mismos tiempos por unidad. Específicamente, la tercera unidad de cuarto año básico de enseñanza media, la unidad introductoria de fracciones: números, sugiere una cantidad de 57 horas pedagógicas (45 minutos cada hora). Sin embargo, esta unidad no está completamente enfocada al tema "fracciones", puesto que también se espera que los estudiantes aprendan la resolución de ecuaciones de un paso, transformaciones isométricas de figuras 2D y construcción de ángulos con transportador y compás (Programa de estudio cuarto año de enseñanza básica, Ministerio de Educación, 2014). Las horas necesarias para tratar cada uno de los objetivos de aprendizajes de la unidad son establecidas de acuerdo a la planificación que establezca la unidad educativa, o del docente que dicte la clase.

El currículo nacional Chileno (2014) sugiere la introducción a las fracciones a través de la metodología "parte de un todo", sintetizada en la siguiente definición de fracción:

"Las fracciones son números que permiten representar las partes en que se divide un entero. Las fracciones están compuesta por un numerador: que es la cantidad de partes que nos interesan; y denominador: cantidad de partes iguales en que fue dividido un entero"

(Texto para el estudiante, cuarto año básico, 2012, p.42).

Los aprendizajes esperados, referentes a fracciones, para cada año escolar que las trata, se tabulan a continuación (Programas de estudio, Ministerio de Educación, 2014):

Tabla 1: Organización proceso de enseñanza de Fracciones Programa de Estudio

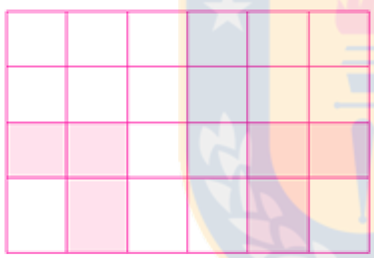
Año de enseñanza	**Aspectos del contenido de fracción**	**Objetivo de aprendizaje**
Cuarto año básico	Definición de fracción: relación parte-todo y lugar en recta graduada. Operaciones aritméticas: adición y sustracción. Representación de fracciones propias.	1. Demostrar que comprende las fracciones con denominadores 100, 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2. 2. Resolver adiciones y sustracciones de fracciones con igual denominador de manera concreta y pictórica, en el contexto de la resolución de problemas. 3. Identificar, escribir y representar fracciones propias y los números mixtos hasta el 5, de manera concreta, pictórica y simbólica, en el contexto de la resolución de problemas.
Quinto año básico	Fracciones propias: equivalencia, comparación y operaciones aritméticas. Fracciones impropias: representación en recta graduada y asociación a su representación mixta (limitado a fracciones comunes). Relación con representación decimal.	1. Demostrar que comprende las fracciones propias (concreto, pictórico y simbólico[2]) 2. Demostrar que comprende las fracciones impropias de uso común de denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 y los números mixtos asociados. 3. Resolver adiciones y sustracciones con fracciones propias con denominadores menores o iguales a 12. 4. Determinar el decimal que corresponde a fracciones con denominador 2, 4, 5 y 10.[3]

[2] Este aspecto incluye que el alumno comprende específicamente la representación y procesamiento de fracciones propias de manera concreta, pictórica y simbólica.

[3] Nota: Posteriormente se comienza a trabajar con la representación, comparación y operación de decimales, para luego concluir la unidad didáctica con problemas de resolución de problemas, aplicando adición y sustracción de fracciones propias y números decimales.

Sexto año básico	Interpretación de la fracción como razón y porcentaje. Asociación fracción impropia y numero mixto (de toda fracción)	1. Demostrar que comprenden el concepto de razón de manera concreta, pictórica y simbólica, en forma manual y/o usando software educativo. 2. Demostrar que comprenden el concepto de porcentaje de manera concreta, pictórica y simbólica, en forma manual y/o usando software educativo. 3. Demostrar que comprenden las fracciones y números mixtos.
Séptimo año básico	Operaciones aritméticas: multiplicación y división.	1. Explicar la multiplicación y la división de fracciones positivas: 2. Resolver problemas que involucren la multiplicación y la división de fracciones y de decimales positivos de manera concreta, pictórica y simbólica (de forma manual y/o con software educativo).
Octavo año básico	Números racionales. En este eje, los estudiantes trabajan la comprensión de nuevos números y las operaciones entre ellos. Progresan desde los números enteros hasta los números reales. En este camino, comprenden cómo los distintos tipos de números y sus reglas respecto de las operaciones básicas, permiten modelar situaciones cotidianas más amplias (Programa de estudio octavo año básico, ministerio de educación).	1. Utilizar las operaciones de multiplicación y división con los números racionales en el contexto de la resolución de problemas.

La secuencia didáctica que presenta el currículo chileno para la enseñanza-aprendizaje del concepto de fracción abarca desde los números naturales hasta los números racionales con ayuda de la relación parte-todo y de la interpretación de la fracción como un lugar en la recta graduada. En el aula suele tratarse como si cada segmento que representa una unidad de la recta graduada, se dividiera en la cantidad de partes que representa el denominador, el "todo" de la relación parte-todo, para luego avanzar por dicho segmento hasta alcanzar el número de partes que dicta el numerador. Al iniciar el trabajo en cuarto año de enseñanza básica, se trabaja la adición y la sustracción de fracciones con igual denominador, apoyándose en la relación parte-todo, se cuentan las partes achuradas de un total de partes congruentes en que se divide el todo. En la figura 2 se muestra el extracto de una actividad sugerida por el Ministerio de Educación para el descubrimiento del algoritmo. Actividades posteriores sugieren la práctica del algoritmo por medio de ejercicios como los presentados en la figura 3. La adición y sustracción de fracciones de distinto denominador se realiza a partir de la amplificación (o simplificación) de una o ambas hasta encontrar un denominador común, cabe señalar que no se sugiere la utilización de ningún algoritmo como el de mínimo común múltiple para estas tareas, dejando su utilización a manos del docente a cargo.



b ¿Qué fracción representan las dos partes coloreadas juntas?

FIGURA 2

5

Suman las siguientes fracciones.

a $\frac{1}{8} + \frac{5}{8} =$

b $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} =$

c $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} =$

d $\frac{1}{12} + \frac{7}{12} =$

FIGURA 3

Por su parte, las otras operaciones aritméticas de multiplicación y división de fracciones son trabajadas mediante la representación pictórica de las fracciones a operar, en cuadrículas de las mismas longitudes (no necesariamente misma cantidad de divisiones), y como la intersección de ambas cuadrículas (ver figura 4).

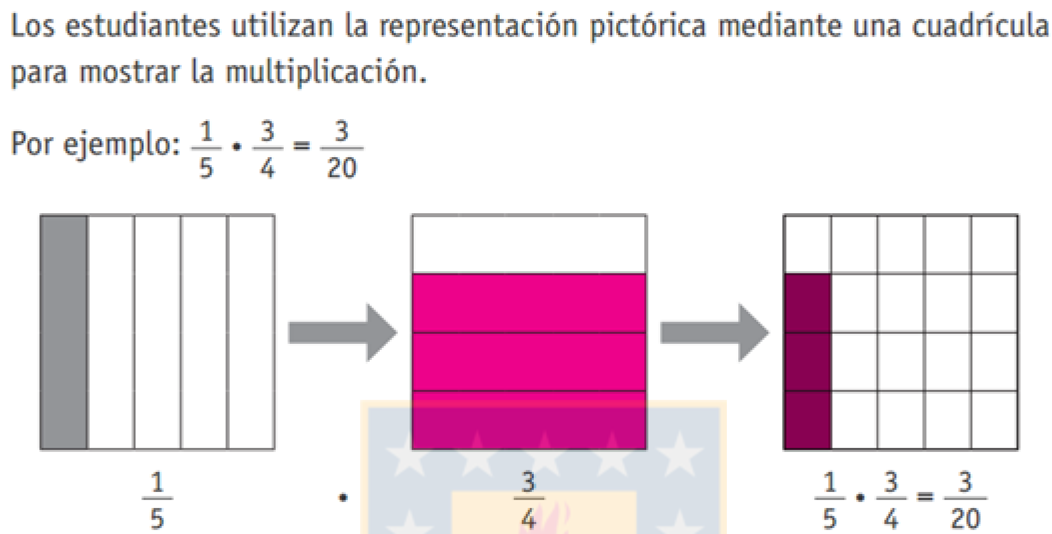


FIGURA 4

El trabajo correspondiente a la tarea de equivalencia de fracciones se realiza, al igual que las de adición y sustracción, a partir de la relación parte-todo y la cuadrícula rectangular. Además, se sugiere en el programa del Ministerio de Educación que la representación de una misma fracción se realice en otros contextos aparte del de la cuadrícula, como en la representación a partir de la división de un círculo, de un cuadrado y de un segmento de línea recta, poniendo énfasis en la que corresponde al segmento de línea. La comparación de fracciones, por su parte, es trabajada transversal a cada contenido y posterior al tratamiento de cada tipo de fracción (propia, impropia, número mixto y número decimal) como una forma de profundizar en la adquisición de la fracción como magnitud.

Las dimensiones de las fracciones, como la interpretación de razón y de porcentaje se desarrollan en ese orden, explicándolas, en el primer caso como "partes de un todo" (Programa de estudio, quinto año de enseñanza básica, Ministerio de Educación, 2014, p. 60.) y luego, al conocimiento que ya se posee acerca de las fracciones para su tratamiento por medio de la resolución de problemas. En el caso de la fracción como porcentaje, el Ministerio de Educación sugiere utilizar la razón para expresar las partes de una cuadrícula que está dividida en 100 y posteriormente relacionarla con fracciones y decimales. Estos aspectos de la fracción son considerados especialmente importantes, debido a la gran cantidad de problemas cotidianos que pueden utilizarse para desarrollar habilidades de razonamiento y adquisición de estrategias cognitivas.

Una mirada neurocognitiva al entendimiento de fracciones

El conocimiento acerca de las fracciones es crítico para el desarrollo de competencias matemáticas (Nacional Mathematic Advisory Panel, 2008; Siegler, Fazio, Bailey y Zhoe, 2013), sin embargo, se ha evidenciado que niños y adultos, incluyendo expertos matemáticos, presentan dificultades para comprender las fracciones (Lipkus, Samsa, y Rimer, 2001; Nacional Mathematic Advisory Panel, 208; Newton, 2008; Post, Harel, Behr, y Lesh, 1991; Reyna y Brainerd, 2008; Siegler, Givvin, y Thompson, 2010).

Se han identificado, por investigaciones en matemática y en la psicología cognitiva, que una de las dificultades más comunes es la incomprensión de la magnitud de una fracción expresada de forma simbólica (Bonnato, Fabbri, Umilta, y Zorzy, 2007; Kallai y Tzelgov, 2009, 2012; Stafylidou y Vosniadou, 2004). Por ejemplo, Mack (1990) encontró que los estudiantes de sexto grado generalmente afirman que 1/8 es más grande que 1/6, asimismo, a una muestra de alumnos de octavo grado se les preguntó si la suma entre 12/13 y 7/8 está más cerca de 1, 2, 19 o 21 y la mayoría eligió 19 y 20 en lugar de 2 (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, y Reys, 1981). Además de esto, se evidenciaron errores en el reconocimiento de las fracciones, al poseer propiedades distintas a la de los números naturales (Siegler et al., 2013, Vamvakoussi y Vosniadou, 2011). Este problema no sólo se evidencia en la sala de clase, pues fuera de ella, la mala comprensión de la magnitud de una fracción puede llevar a consecuencias como el sobrepeso, si las personas interpretan mal las publicidades, así, por ejemplo, un reporte de consumidores de comida rápida asegura que ellos compraban la hamburguesa de 1/3 en vez de la de ¼, ya que creían que la de 1/3 era más pequeña que la de ¼, aun cuando preferían más el sabor de la hamburguesa de 1/3 (Taubman, 2007, pp. 62-63).

Cada uno de estos malentendidos puede acarrear serios impedimentos en ciertos procesos cognitivos como pueden ser adquirir un sentido de magnitud de la fracción, así como la adquisición de una comprensión acabada de cómo funciona la aritmética en fracciones. La evidencia repetitiva de errores en el reconocimiento de la magnitud de una fracción y en el procesamiento del cálculo de fracciones (Carpenter et al., 1981, Siegler et al. 2013 y Vamvakoussi y Vosniadou, 2011), ha llevado a varios autores (Bonnato et al., 2007; Dehane, 1997/2011; Feigenson, Dehane y Spelke, 2004; Gallistel y Gelman, 1992; Geary D., Hoard M., Byrd-Craven J., Nugent L., Numtee C., 2007; Gelman y William, 1998) a afirmar que la estructura cognitiva de los seres humanos no está preparada para procesar fracciones de la misma manera que lo está para procesar número enteros, lo que explicaría en parte por qué los niños aprenden con mediana sencillez las propiedades y operaciones que involucran a los números enteros (Dehane y Cohen, 2007; Feigenson et al., 2004; Piazza, 2010). Uno de los sistemas propuestos como responsables de esta supuesta facilidad es el "sistema de aproximación numérica" (SAN), que se sitúa en el surco intraparietal del cerebro (ver figura 1), estructura encargada de la representación numérica, y que dota a los humanos, y también a otras especies, de la capacidad de representar el número aproximado de elementos discretos en un conjunto, pero no para apoyar la representación, conceptualización y conocimiento de la magnitud de una fracción (Brandon y Roitman, 2003; Dehanene, Dehaene-Lambertz y Cohen, 1998; Piazza, 2010; Geary et al., 2007).

En contraste, hay autores que sugieren que, por un lado, los métodos de enseñanza que fallan en construir el entendimiento de la magnitud de una fracción, conllevan a los errores mencionados anteriormente (Siegler et al., 2011, 2013; Lewis, Mathews y Hubbard, 2015). Por otro lado, sugieren que en la estructura cognitiva humana hay herramientas ideales para apoyar el entendimiento de fracciones, como herramientas neuro-cognitivas de inicio (Piazza, 2010), que pueden ser utilizadas para comprender los conceptos claves de fracciones, tales como su magnitud. Al respecto, Lewis et al., (2015) sugiere que el procesamiento de relaciones no simbólicas puede ser un aspecto neurocognitivo crítico para entender la fracción como una magnitud y desarrolla un marco de trabajo neurocientífico educativo para un sistema de procesamiento de relaciones (SPR), similar al SAN, que puede proveer bases para el entendimiento de fracciones no simbólicas.

Se cree que el SPR es un conjunto de arquitecturas neurocognitivas que apoyan la representación y procesamiento de relaciones no simbólicas a través de imágenes o verbalizaciones. Dicho supuesto proviene de estudios en los cuales se ha probado la sensibilidad a este tipo de magnitudes en primates (Valletin y Nieder, 2008), bebés antes de hablar (McCrink y Wynn, 2007), niños de enseñanza básica (Boyer, Levine y Huttenlucher, 2008; Duffy, Huttenlocher, y Levine, 2005; Meert, Gregoire, Seron y Noel, 2013; Sophian, 2000; Spinillo y Bryant, 1999), adultos con desarrollo normal (Hollands y Dyre, 2000; Meert, Gregoire, Seron, y Noel, 2011; Stevens y Galanter, 1957) e individuos con vocabulario numérico y habilidades aritméticas formales limitadas (McCrink, Spelke, Dehaene y Pica, 2013). También se han realizado estudios, utilizando técnicas de neuroimagen, que revelan que los primates poseen una red fronto-parietal que es sensible a las magnitudes de relaciones no simbólicas (Van Essen, 2005; Van Essen, Drury, Dickson, Harwell, Hanlon & Anderson, 2001), así también estudios con fRMI muestran evidencia indirecta sobre una afinación neuronal hacia relaciones no simbólicas específicas cuando son presentadas repetidamente (Jacob y Nieder 2009). Estas evidencias demuestran que, aunque no se enseñan las fracciones hasta cuarto año básico, existe una capacidad innata para comprender, de cierta forma, las relaciones no simbólicas.

Los resultados obtenidos por estos estudios han llevado a Lewis et al. (2015) a elaborar un modelo sobre la forma en que el SPR influye en el aprendizaje de fracciones. Se desprenden 3 puntos claves del modelo como los siguientes:

a) Que las diferencias individuales en el funcionamiento de los circuitos de relaciones no simbólicas deberían predecir diferencias individuales en la competencia al trabajar con fracciones simbólicas;

b) El modelo sugiere que la fuerza y certeza de los vínculos simbólico-no simbólico que los estudiantes generan, son consecuencia de la experiencia/educación, y que la calidad de estos puede ser susceptible a intervenciones específicas. Una de las razones de la dificultad para generar vínculos entre las representaciones simbólicas y no simbólicas de la magnitud de una fracción, es que la mayoría de los métodos de enseñanza ponen énfasis en actividades como dividir la unidad y contabilizar las partes, que se basan en esquemas de números naturales y pueden activar representaciones incompatibles del SAN como los efectos de congruencia.

c) El modelo sugiere que, a nivel neuronal en adultos, los circuitos de SPR pueden estar involucrados tanto en las relaciones no simbólicas como en fracciones simbólicas (Lewis et al., 2015). Estos autores proponen entonces, que la habilidad de representar la magnitud de relaciones/fracciones, y que es conferida por el SPR, puede apoyar en la comprensión de las fracciones como una magnitud relativa.

Como se puede apreciar, las fracciones son elementos matemáticos complejos con características y propiedades cuya representación simbólica no se ve de forma cotidiana durante los años de maduración de la persona, por lo que necesitan ser construidos cuidando de desarrollarlos en función de las estructuras cognitivas del cerebro y sus capacidades innatas, con el fin de lograr un entendimiento completo, tanto en su representación como en su procesamiento.

Modelos de procesamiento numérico

El procesamiento numérico y del cálculo tiene que ver con la forma en que las personas representan las magnitudes y trabajan con ellas para crear nuevas o dar respuestas a problemas que las involucren. Cualquiera sea el objetivo del tratamiento numérico, actualmente se sabe que su procesamiento es innato al ser humano y se desarrolla en base al sentido numérico, capacidad básica que tiene que ver con la cuantificación de elementos en un conjunto. Esta capacidad ha sido estudiada como la base sobre la que se construye una capacidad numérica más compleja, dependiente de la escolarización.

El descubrimiento del sentido numérico ha despertado el interés de psicólogos y neurocientificos por explicar cómo la información numérica es procesada, desarrollando modelos cognitivos que explican el procesamiento numérico. El modelo de Sfard (1991) apoya la naturaleza dual de los constructos matemáticos, teórica y práctica, señalando que la habilidad de un estudiante para desarrollar conceptos matemáticos se da como un progreso gradual que lo lleva a concretizar objetos cuya estructura puede brindar un crecimiento conceptual enfocado en las propiedades de los objetos. Sfard (1991) distingue 3 etapas jerárquicas que corresponden a los 3 grados de conceptualización: en la etapa de *interiorización*, el estudiante se va acostumbrando a los procesos con objetos matemáticos de menor nivel, desarrollando de forma gradual competencias para realizar dichos procesos e interiorizarlos, es decir, pensar en ellos sin la necesidad de llevarlos a cabo; en la segunda etapa, de *condensación*, el estudiante es capaz de pensar en grandes secuencias de procesos condensado en un todo, sin la necesidad de entrar en detalles para recordar cómo manipularlos. Esta capacidad permite trabajar con formas alternativas de representación del concepto, combinar procesos y hacer comparaciones y generalizaciones; en la tercera y última etapa, de *reificación* el alumno puede concebir el objeto como un todo completamente desarrollado y entrenado, entendiendo el constructo por la categoría conceptual a la que pertenece y sus propiedades principales, sin necesidad de depender del proceso. Esta etapa marca el cambio cualitativo desde un pensamiento operativo a un pensamiento estructural.

De entre los modelos neuropsicológicos destacan 2, por una parte, en el modelo cognitivo de McCloskey (1992) (ver figura 5) se propone una organización modular cuyos componentes pueden ser selectivamente alterados, debido a una lesión cerebral. Se divide en 3 sistemas que interactúan para producir el procesamiento: el sistema de *procesamiento numérico* que se subdivide en dos: uno de entrada y otro de salida o producción, que procesan en módulos separados los códigos arábigos y verbales, en sus formas oral y escrita; el *sistema de representación semántica* que se encarga de codificar la información de magnitudes e intermedia, tanto en la traducción de un código de entrada a otro de salida como en la resolución de operaciones aritméticas; el tercer sistema es el de *cálculo* que está formado por dos subsistemas: el de cálculo mental y el de cálculo escrito, que incluyen herramientas básicas para su labor (comprensión de signos, de algoritmos básicos, acceso a hechos aritméticos). McCloskey (1992) propone que el procesamiento numérico se produce a través de una representación abstracta originada por la percepción del estímulo, para luego producir una expresión verbal o aritmética: la respuesta.

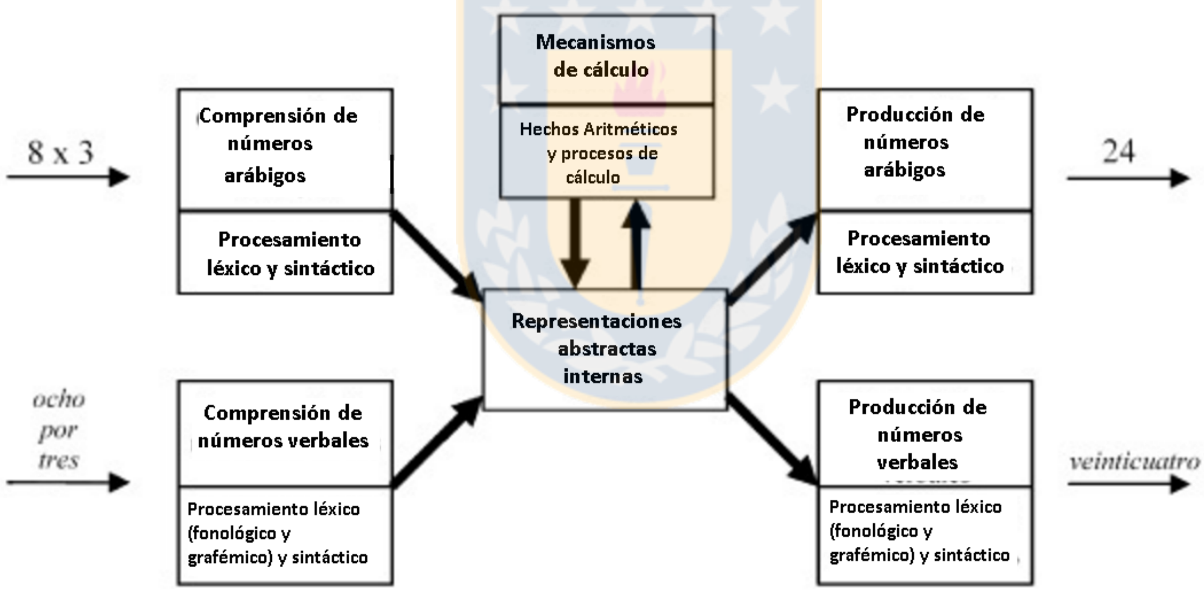


Figura 5: Modelo cognitivo de McClosckey (Damas, 2009, p. 29)

Por otra parte, el modelo de triple código desarrollado por Dehane y Cohen (1992) es un modelo cognitivo neuro funcional muy utilizado como base para investigaciones, pues aborda el sustrato neural de sus componentes. El modelo se basa en la afirmación de que en las culturas en que se han desarrollado notaciones simbólicas, como el sistema decimal o el cálculo infinitesimal, se generan cambios en la representación biológica original de los niños, adolescentes o adultos, la cual evoluciona para adquirir la capacidad especializada en la que se puede acceder a los tres tipos de representación de forma directa, dependiente del estímulo. Dehane y Cohen (1992) postulan algunas hipótesis acerca de dónde se encuentran estos tipos de representación, qué codifican y cómo se coordina su actividad en las diferentes tareas. Las 3 hipótesis funcionales propuestas son:

1. La información numérica se puede manipular en tres códigos: *representación analógica* de las cantidades, que explica las magnitudes a través de una línea numérica localizada en la región intraparietal de ambos hemisferios; *verbal auditivo*, que representa las cantidades con palabras, las estructuras involucradas en este tipo de representación se encuentran en las áreas perisilvianas izquierdas; y el *visual arábigo*, que representa la forma arábiga, por lo que implica procesos de identificación visual y cuyo sustrato neural se especula está en los sectores ventrales occipito-temporal de ambos hemisferios.
2. La segunda hipótesis dice que la información se puede traducir de un código a otro mediante *rutas asemánticas*, es decir, que dependiendo de la tarea se pasa de manera automática de un código a otro (Dehane y Cohen, 1992).
3. La elección de un código u otro depende del tipo de operación mental o cálculo a realizar.

Según este modelo la información numérica puede ser representada y operada en cualquiera de los 3 códigos, dependiente del requerimiento de la tarea. En cada sistema representacional se llevan a cabo funciones del procesamiento, el sistema verbal auditivo procesa las operaciones aritméticas relativamente simples, las relacionadas con el lenguaje, como las tablas de multiplicar, mientras que las tareas que requieren más carga cognitiva, como la estimación de magnitudes y representación visual, implican a los sistemas visual arábigo y analógico. Este último parece estar más implicado en procesamiento cuantitativo, pero no en las modalidades de entrada o salida del estímulo (Serra Grabulosa, 2013). La segunda y tercera hipótesis, además, suponen el traspaso inmediato de un código a otro según la tarea, por lo que estos sistemas están interactuando de forma constante (figura 6).

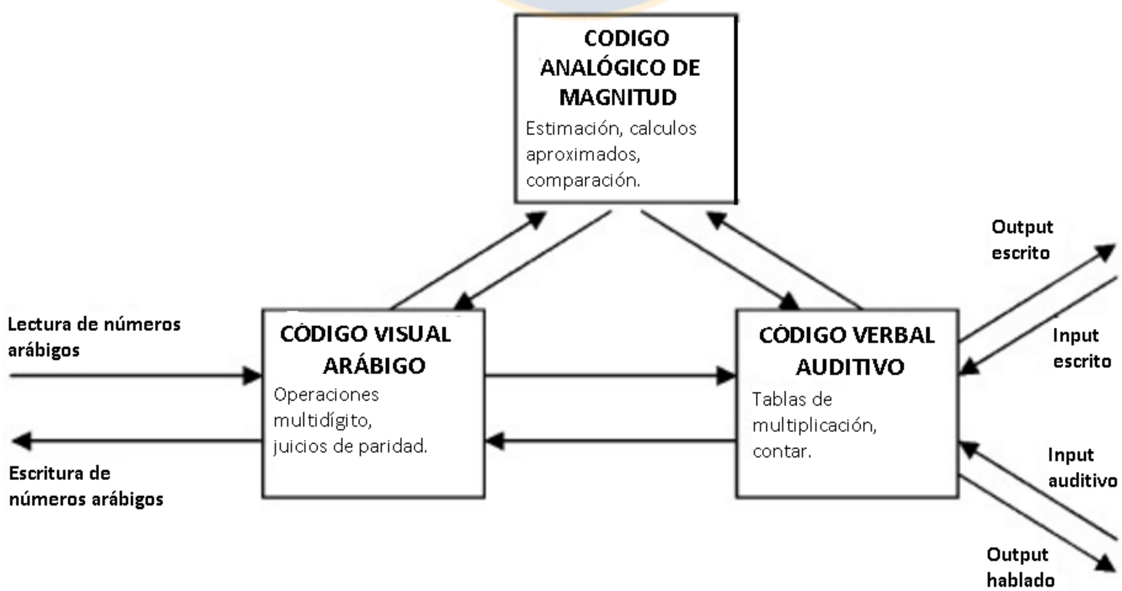


Figura 6: Modelo de triple código, (Damas, 2009, p. 30)

iii. Metacognición: Estrategias de procesamiento de fracciones.

Los aportes de la neurociencia y de la psicología cognitiva han ayudado a comprender un poco más acerca de la forma en que el cerebro aprende, evidenciando que la condiciones cognitivas previas de cada individuo están dadas genéticamente solo como una potencialidad y que la experiencia es la que la desarrolla en interacción con el ambiente. Se ha comprobado que a lo largo de toda la vida, el individuo busca estímulos relevantes que ayuden a reforzar información en el cerebro o generar nuevas conexiones a través de la plasticidad cerebral (Goswami, 2004 y Rimmele, 2005). Después de la pubertad, sin embargo, se producen importantes cambios: la mielina se incrementa en la corteza frontal (Blakemore y Frith 2005) y se recortan los excedentes de sinapsis, configurándose en redes eficientes y ordenadas. Los hallazgos sobre el desarrollo de la corteza frontal han llevado a investigadores a afirmar que el desempeño en tareas de función ejecutiva, como la metacognición y la memoria, mejoran linealmente con la edad y siguen desarrollándose luego de la niñez. (Yakovlev y Lecours, 1967 en Blakemore y Frith, 2005).

Específicamente, las técnicas de neuroimagen evidencian que las bases neurales de la metacognición se encuentran en las áreas frontales y prefrontales de nuestro cerebro, las que, además de ser importantes para el buen funcionamiento metacognitivo, involucran conductas específicamente humanas como la elaboración del pensamiento y el mantenimiento de funciones relacionadas a la inteligencia superior y comportamiento humano. La metacognición es una función que se refiere al conocimiento y auto-regulación del propio sistema cognitivo y su funcionamiento (Flavell en Fuentes, 2003; Panaourura y Philippou, 2003), dirigidos a un desempeño eficiente y eficaz en la vida. Uno de sus componentes esenciales es el conocimiento metacognitivo, el que crece lenta y gradualmente a través de años de experiencia en el dominio de la actividad cognitiva, incluye conocimiento sobre sí mismo, sobre la tarea y sobre las estrategias que pueden utilizarse. Gracias a este componente se actúa a partir de lo que ya se conoce, que proviene de experiencias pasadas y del aprendizaje.

Asimismo, existen tres tipos de conocimientos esenciales para la metacognición, por una parte, el *conocimiento declarativo* que tiene que ver con el conocimiento de hechos, esto es, que las fracciones son magnitudes representadas por dos números enteros ("saber qué"); por otra parte, el *procedimental* se refiere al conocimiento de algoritmos o reglas que se deben aplicar a una tarea, por ejemplo, en una tarea de comparación de fracciones, conocer que cuando los denominadores son iguales, basta con comparar los numeradores ("saber cómo"); y finalmente, el *condicional*, que es el encargado de saber cuándo y por qué ocupar una u otra estrategia cognitiva, adaptando los planes a una tarea determinada, lo que constituye la base para una reflexión metacognitiva. En este caso, un conocimiento condicional es saber que cuando los denominadores son iguales, la fracción mayor posee el mayor numerador, mientras que si los numeradores son iguales, la fracción mayor es la que posee menor denominador ("saber cuándo y por qué").

El conocimiento procedimental engloba el conocimiento de estrategias cognitivas, que son formas de organizar las acciones, usando las propias capacidades intelectuales en función de las demandas de la tarea para guiar los procesos de pensamiento hacia la solución de un problema (Ríos, 1999, p. 140). Se diferencian de las estrategias metacognitivas, puesto que las cognitivas se utilizan para progresar en el conocimiento y las metacognitivas para supervisar esos progresos y regularlos**.** Entonces, la metacognición se refiere a la consciencia y control de las destrezas cognitivas, es decir, a la utilización eficiente de recursos mentales traducidos en estrategias cognitivas.

Ríos (1990) asigna tres momentos en el proceso de metacognición:

- *Planificar*: la planificación del aprendizaje involucra anticipar las consecuencias de las acciones, comprender y definir el problema, precisar reglas y condiciones y definir un plan de acción.

- *Supervisión*: En esta etapa, el alumno determina la efectividad de las estrategias de solución, descubre los errores y reorienta las acciones.

- *Evaluar:* En esta etapa es donde se establece la correspondencia entre objetivos propuestos y resultados alcanzados, se decide sobre la mejor solución y se aprecia la validez y pertinencia de las estrategias aplicadas.

Sumado a los 3 procesos mencionados, la metacognición comprende 4 variables que influyen durante todo el proceso metacognitivo: *la persona, la tarea, el contexto y las estrategias (cognitivas y metacognitivas).* Cada una de estas variables influyen en la toma de decisiones de la persona cuando se enfrenta a una situación, así por ejemplo, en una tarea de comparación de fracciones sin componentes comunes, la persona debe pensar en una secuencia conductual para resolver la tarea, planificar las posibles estrategias a utilizar para ello: multiplicar cruzado o comparar la magnitud de las fracciones a un valor fijo (benchmarking), además, se consideran las condiciones para llevarlas a cabo, comparando las características del contexto. Luego de aplicar la estrategia, se supervisa tanto el procedimiento como la pertinencia y eficacia de la estrategia utilizada, en caso de error se corrige el resultado, eligiendo otra estrategia o modificando el procedimiento. Si las estrategias aplicadas no dieron buenos resultados se debe volver a la etapa de planificación para pensar o recordar más estrategias que puedan ser de utilidad, sin embargo, cuando la persona ya ha atravesado por una situación y es metacognitivamente activa, puede tener cierto conocimiento sobre la efectividad de una u otra estrategia, lo que lo llevará a ahorrar tiempo y resolver la situación sin demasiado esfuerzo.

La metacognición es una herramienta mental que se desarrolla con el tiempo y con la calidad de las experiencias de una persona, está totalmente impregnada en acciones de monitoreo y auto reflexión que permiten al estudiante desarrollar percepciones acerca de la naturaleza de las experiencias subjetivas, de los objetos del mundo físico y de las realidades objetivas del pensamiento, conocimiento base a partir del cual el individuo valora y aprecia el mundo (Schutz y DeCuir, 2002). Esta base constituye la experiencia que lo ayudará a tomar decisiones acerca de su comportamiento estratégico, eligiendo una u otra estrategia para lograr su objetivo o cumplir la tarea. La metacognición provee a las personas de procesos de pensamientos eficaces para desenvolverse en la cambiante sociedad actual, que deja obsoletos los contenidos más rápidamente de los que se utilizan, función que se ha visto explotada en las ciencias educativas y en los currículos actuales, en los que la transmisión de procesos de pensamiento eficaces se considera uno de los recursos más valiosos para el estudiante moderno.

La capacidad metacognitiva se pretende desarrollar de forma transversal al currículo, es decir, que su desarrollo debe incluirse en todas las actividades de cada una de las asignaturas del mismo como lenguaje, historia, matemática, cuya evaluación no trata de medir cuánto dice o hace un estudiante en relación a la metacognición, sino con proporcionarle ayuda para que tome conciencia sobre las estrategias que utiliza durante la ejecución de una tarea, atendiendo a las distintas alternativas que se vayan presentando. Investigaciones en metacognición en el área de matemática han señalado el enfoque de resolución de problemas, que propone un modelo de enseñanza basado en la solución a problemas como vía de aprendizaje, como uno de los indicados para el desarrollo de estrategias metacognitivas en los estudiantes, la razón parecen ser las etapas o pasos que requiere este enfoque y que va, desde el planteamiento y definición de una problema, hasta la verificación de los resultados. Más aún, Shoenfeld (1985) señala que, además de la serie de pasos a seguir para resolver un problema (comprender el enunciado, planificar, ejecutar y evaluar los resultados), se debería incluir a los recursos (conocimientos previos de todo tipo), el control (monitoreo y evaluación del proceso de resolución) y el sistema de creencias (del estudiante, profesor y de la sociedad). Las características que sustentan este enfoque metodológico en la didáctica de la matemática ayudan a desarrollar la metacognición a medida que el alumno se va apropiando de las formas de resolución y las etapas, viendo su utilidad y aplicándolo a otros ámbitos de su vida.

Independiente del problema y el contenido, algo importante que deben realizar los estudiantes durante la resolución de un problema es la instrucción explícita y el monitoreo de los procesos cognitivos utilizados y necesarios para resolver la tarea (Teong, 2003). La adquisición de estos procesos ayudará a tomar consciencia al alumno sobre sus propios procesos de aprendizaje, las estrategias que posee y las que puede utilizar. La calidad de los aportes de la neurociencia en las ciencias educativas ha llevado a investigadores a estudiar los fenómenos metacognitivos presentes en los estudiantes, con el fin de, entre otras cosas, observar la ejecución de estrategias tanto cognitivas como metacognitivas y su posible mala implementación durante el procesamiento de información. En particular, ha colaborado con evidencias empíricas sobre el procesamiento de fracciones en determinadas tareas matemáticas, los errores conceptuales y procedimentales que se dan al realizar tareas de, por ejemplo, equivalencia y comparación de fracciones. Tareas que, gracias a estudios como los de Beher y Lesh. (1992) y Ni (2002), dan cuenta de su relevancia para evaluar la comprensión que tiene el alumno sobre la fracción como una entidad (magnitud), posibilitando acceder a las representaciones mentales que las personas construyen cuando se enfrentan a una fracción, es decir, a las estrategias que utilizan para procesar fracciones.

Específicamente, la tarea de comparación de fracciones se señala como relevante al estudiar las dificultades de los alumnos para entender ideas tales como que la magnitud de una fracción depende de la relación entre sus términos (Moss, 2005; Ni y Zhou, 2005; Smith, C., Solomon, G., y Carey, S., 2005). En lugar de esta interpretación, los alumnos tienden a interpretar el símbolo $\frac{a}{b}$ como dos números naturales independientes, separados por una barra (Stafylidou y Vosniadou, 2004), lo que los lleva a concluir que una fracción incrementa su valor cuando el numerador, el denominador o ambos aumentan. Este tipo de representación tiene que ver con una *estrategia de procesamiento componencial* (Meert, G., Grégoire, J., y Noël, M. P., 2009).). Sin embargo, los estudios también hacen referencia a una *estrategia de procesamiento holístico* (Schneider y Siegler, 2010), en el sentido que las personas acceden a la magnitud de la fracción como un todo, demostrando un entendimiento de la fracción como una relación entre sus componentes.

Los estudios aludidos han sido llevado a cabo en niños, jóvenes, adultos y adultos expertos matemáticos, los que han evidenciado cómo la representación componencial de una fracción aparece de forma sistemática en el procesamiento de fracciones por parte de alumnos en las primeras etapas de su formación, quienes a veces sólo identifican las magnitudes de las componentes con aquellas de la fracción (Gómez, Jiménez, Bobadilla, Reyes y Dartnell, 2014; Stafylidoy y Vosniadou, 2004). Aunque este tipo de representación también ha sido evidenciada en adultos (Schneider y Siegler, 2010; Sprute y Temple, 2011; DeWolf y Vosniadou, 2011; Vamvakoussi y Verschaffel, 2012), ellos parecen transitar por esta representación de forma intuitiva para luego corregir el razonamiento y representar la fracción de forma holística (Obersteiner et al., 2013, Meert et al., 2010).

Las tareas de comparación de fracciones pueden producir frecuentes errores en los estudiantes que están aprendiendo fracciones, los que derivan de estrategias ineficientes o inexistentes, causadas a su vez, por una carencia en la conceptualización o por una generalización de otras estrategias. La reflexión sobre estas diferencias ha llevado a un intento por delimitar las estrategias erróneas o ineficaces utilizadas ante estímulos como la comparación de dos fracciones.

Dimensiones del estímulo

En el análisis de algunos estudios sobre números racionales o fracciones en particular (National Assesment of Educational Progress, 1980; Mack, 1990, Obersteiner et al., 2013), se han observado errores sistemáticos en el desempeño de los estudiantes, como considerar que 1/3 es menor a ¼ porque 4 es mayor que 3 o que la suma de 2 fracciones se lleva a cabo sumando los numeradores y denominadores por separado. Estos errores han llevado a investigadores a conceptualizar los tipos de estrategias que utilizan los estudiantes para realizar diversas tareas, así como los fenómenos que pueden llegar a ocurrir, debido a la mala interpretación de otros objetos matemáticos o propiedades de dichos objetos.

- <u>Sesgo de los números naturales</u>

Se ha repasado ampliamente las dificultades que se presentan al tratar de dominar los números racionales y en particular las fracciones. Se ha encontrado, por ejemplo, que los estudiantes cometen errores sistemáticos cuando se requiere de un razonamiento que no coincide con sus conocimientos y experiencias previas (Moss, 2005; Ni y Show, 2005; Smith et al., 2005; Vamvakoussi y Vosniadou, 2010), pero lidian correctamente con ellas si son compatibles con los números naturales (Nunes y Bryant, 2008; Stafylidou y Vosniadou, 2004). Sin embargo, se ha documentado que, aunque estas estrategias sirvan en ciertas tareas matemáticas básicas como sumar dos fracciones con igual denominador, se vuelve un obstáculo cuando se quiere obtener un mayor entendimiento del concepto de número racional (Mamede, Nunes, y Bryan, 2005; Moss, 2005) y puede sesgarlos, convirtiéndose en la causa de un mal desempeño.

Ni y Zhou (2015) presentaron una revisión de un conjunto de errores cuyo origen común está en la aplicación de los conceptos, procedimientos e intuiciones del dominio de los números naturales a las fracciones, estos investigadores lo llamaron “sesgo de los números enteros” (SNE) o sesgo de los números naturales (Vamvakoussi, Van Dooren y Verschafel, 2012; Obersteiner. et al., 2013).

Pese a que no hay consenso acerca del origen del sesgo de los números naturales, Ni y Zhou (2005) presentaron tres posibles hipótesis, las dos primeras relacionadas con predisposiciones psicológicas básicas y la tercera relacionada con prácticas pedagógicas deficientes. La última idea hace referencia a la metodología “parte de un todo” con el que se enseñan actualmente las fracciones y que está basada en los esquemas de los números naturales: contar las partes en que se divide el todo y luego contar el conjunto de partes que interesa (Programas de estudio, ministerio de educación, 2014). También se ha sugerido que, como antes de introducir los números racionales los estudiantes han construido un conocimiento profundo del número, el que está íntimamente ligado a sus conocimientos formales e informales sobre los números naturales, se apoyan sobre esta idea para saber cómo debería “comportarse” un número (Gelman, 2000; Smith et al., 2005; Vamvakoussi y Vosniadou, 2010).

Para estudiar este fenómeno durante la comparación de fracciones, se les pregunta a los participantes por la fracción mayor, o menor, de dos mostradas. Como cualquier fracción simbólica es representada por dos números naturales, si su procesamiento se basa sólo en el valor de los dos componentes, en vez de en el valor de la fracción como un todo, se puede llegar a respuestas correctas en ciertos casos como $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$, porque 4 es mayor que 3, y a respuestas incorrectas en otros como $\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$, porque 4 es mayor que 3. Esta noción es llamada *congruencia*, y los pares de fracciones son denominados ítems congruentes e incongruentes, respectivamente (Ischebeck, Schocke y Delazer, 2009). Estudios más recientes con perspectivas tanto educacionales como psicológicas han detallado esta noción de congruencia, añadiendo el tipo de ítem neutro que corresponde a ítems donde una fracción tiene el denominador más grande y la otra el numerador más grande (Obersteiner, et al., 2013; Van den Brande, 2014; Van Eeckhoudt, 2013).

En la actualidad, se han realizado varios estudios que buscan descubrir más acerca del sesgo de los números naturales y la congruencia y, por tanto, han demostrado que este sesgo va más allá de una simple falta de entendimiento de los conceptos, reflejando la forma en que la mente humana concibe los números. Un estudio realizado en estudiantes de segundo ciclo básico (5to a 7mo de enseñanza básica) evidencia la presencia del sesgo en las respuestas, e incluso se evidencia que el 29,3% de la muestra responde exclusivamente basado en la información dada en los números enteros (Gómez et al., 2014). Otros estudios relacionados, parecen evidenciar que este fenómeno disminuye con la edad, pero que, incluso para adultos expertos en matemática, es imposible sobreponerse (Obersteiner et al., 2013).

- <u>Gap fraccional</u>

El SNE es uno de los principales factores en el desempeño de comparación de fracciones, pero recientemente Gómez et al. (2014) y Obersteiner et al., (2013) abrieron la discusión hacia otra estrategia denominada "razonamiento por gap" (Clarcke y Roche, 2009; Faulkenberry y Pierce, 2011; Meert et al., 2010). La palabra gap viene del inglés y significa brecha o espacio entre dos objetos (concretos o abstractos) (Diccionario Linguee, 2017), es un concepto muy ligado a la interpretación de fracciones y se refiere al número de partes que le falta a la fracción para completar el todo (Gómez et al., 2014). Así entonces el gap de una fracción a/b (a, b en N) se puede calcular, sustrayendo el numerador al denominador, es decir, realizando el cálculo b-a.

El razonamiento por gap hace referencia a una estrategia inválida que usualmente se utiliza para distinguir la fracción mayor en ítems sin componentes comunes (numeradores y denominadores distintos en las dos fracciones) (Obersteiner et al., 2013), establece que mientras menor es el gap, mayor es la fracción. Este tipo de razonamiento se evidencia en las respuestas de niños de 6to año básico cuando argumentan que 5/6 y 7/8 son equivalentes "porque a ambas les falta un trozo para llegar al entero" (Clarke y Roche, 2009). Gómez et al. (2014) postulan que los niños recurren a esta estrategia durante los ítems sin componentes comunes y, pese a ser una estrategia inválida, ya que puede llevar al error, hay muchos ítems que sí pueden arrojar una respuesta correcta, aplicando este razonamiento. Lamentablemente, los estudiantes no reconocen las estrategias eficientes para cada tipo de ítem y cometen errores como los descritos anteriormente

Actualmente, se conoce que no es solo la incorrecta aplicación de una estrategia o de un algoritmo lo que causa un desempeño deficiente en tareas matemáticas, sino que estudios sobre el procesamiento numérico, que han sido llevados a cabo en pacientes con problemas en el cálculo numérico, han evidenciado que el desempeño en tareas matemáticas es consecuencia de un déficit en el funcionamiento de las estructuras cognitivas responsables del cálculo numérico (Serra-Grabulosa, 2013). Por una parte, la discalculia del desarrollo es un trastorno del aprendizaje que afecta las zonas parietales, especialmente el surco intraparietal y las zonas adyacentes (Serra-Grabulosa, 2013). Del 3% al 6% de la población padece discalculia, la que se define por dificultades en el manejo numérico, en el cálculo y en el razonamiento lógico matemático, lo que se traduciría en dificultades para asimilar datos numéricos y aritméticos, realizar procedimientos de cálculo y crear estrategias para la solución de problemas (López, 2012; Serra-Grabulosa, 2010). Particularmente, se sugiere que tienen dificultades con la representación espacial de los números en la línea numérica mental en la que se representarían (de acuerdo a Dehane, 2010), lo que les impediría un desarrollo normal de los conceptos numéricos durante la etapa escolar (Ashkenazi & Henik, 2010). Más aún, una hipótesis para definir la discalculia es que algunos niños, pese a que pueden tener una representación aproximada y no simbólica de la cantidad, muchas veces pueden no vincularla con la representación exacta o simbólica de la cantidad (Wilson & Dehane, 2010). Se ha encontrado además, que en individuos con discalculia se activan regiones frontales y parietales durante una tarea de comparación de números, a diferencia de individuos sanos en los que sólo se activa el surco intraparietal, sugiriendo que para compensar los posibles déficit de funcionamiento, resultante de las alteraciones en las zonas parietales, los individuos con discalculia activan otras zonas cerebrales para apoyar en la tarea (Serra-Grabulosa, 2013)

La acalculia, por otra parte, es la pérdida de la habilidad para realizar tareas numéricas y de cálculo como consecuencia directa o indirecta de una lesión cerebral, que se caracteriza por la incapacidad de comprender las magnitudes, debido a un déficit en la ejecución de operaciones, esto es de las funciones ejecutivas. (Ardilla y Rosselli, 2002). De ahí la importancia de estudiar el rol que cumple la memoria, sobre todo su control ejecutivo en el razonamiento matemático.

iv. **Memoria**

La memoria es una función ejecutiva que permite retener y recordar información del pasado (Diccionario de la lengua española, 2017), evocar sensaciones, realizar acciones anteriormente aprendidas o activar las rutinas adecuadas para resolver un problema. La memoria es esencial en el aprendizaje y la más importante de las funciones ejecutivas, ya que sin ella no se pueden realizar acciones básicas como caminar, escribir y, a nivel más específico, dificultades en la resolución de problemas. Las redes neuronales que permiten al cerebro utilizar los procesos de codificación, almacenamiento y recuperación de información en determinadas estructuras cognitivas son creadas por conexiones sinápticas entre neuronas (Bajo T., Fernández, A., Ruiz, M. y Gómez-Ariza, C.J., 2016).

Las estructuras neurales que están involucradas directamente con la memoria y que favorecen su funcionamiento son 3: el hipocampo, involucrado en la creación de nuevos recuerdos, pero no así en su preservación; la corteza pre frontal, relacionada con la retención de las memorias transitorias y los procesos atencionales; y algunas áreas corticales situadas en la parte posterior de la cabeza, como el lóbulo occipital y temporal, estas regiones parecen contener a los distintos tipos de memoria de forma correspondiente con sus funciones, así, por ejemplo, los recuerdos visuales son almacenados en las regiones responsables del procesamiento visual (lóbulo occipital) (Anderson, 2008).

Procesos de la memoria

La variedad de funciones que realiza la memoria requiere de operaciones básicas y comunes a todos los sistemas, una de ellas es la *codificación* y registro de la información, su objetivo es representar información rica en contenidos, persistente en el tiempo y de fácil recuperación. La investigación psicológica y neurocognitiva evidencia que la memoria puede ser controlada con mecanismos que faciliten la codificación, sesiones cortas (15 a 20 min), espaciadas, con variabilidad en los tipos de codificación y con procesos de elaboración, por ejemplo, inciden en la permanencia del recuerdo, debido a la significancia que adquiere la información para la persona (Bajo et al., 2016). La codificación es un proceso flexible que puede adaptarse a las necesidades de procesamiento de la información. El procesamiento, es una variable de la codificación inicial que ayuda a la retención (Anderson, 2008), técnicas de neuroimagen evidencian que las regiones que se activan con el procesamiento en la codificación inicial son las mismas que las regiones activadas durante la recuperación de la información posteriormente (Nyberg, 2002).

Por su parte, el *almacenamiento* se refiere a crear un registro permanente de la información codificada, la *consolidación* es el proceso de transferencia de la información a la memoria a largo plazo, se desarrolla en el tiempo y se divide en dos tipos: *la consolidación sináptica* que lleva días o semanas y produce cambios en las conexiones neuronales; y la *consolidación sistémica*, que puede tomar meses o años y produce cambios en áreas cerebrales que sustentan los recuerdos (Dudai, 2004). Un mecanismo que ayuda a consolidar la información en la memoria, a través del aprendizaje, es la potenciación a largo plazo. Además, la disponibilidad de un periodo de sueño en las horas inmediatamente posteriores facilita la retención. Cabe destacar que la estabilidad de los recuerdos es relativa, ya que los recuerdos episódicos, aún ya almacenados, pueden modificarse por mecanismos de re consolidación o por factores psicológicos y ambientales (Bajo et al., 2016 y Anderson, 2008).

Finalmente, la *recuperación* es el proceso en que se recuerda o recupera la información almacenada: hechos, circunstancias y variedad de actividades mentales, consientes o no. La recuperación comienza con el procesamiento de información, externa o interna, relacionada con la huella objetivo, componente del estímulo que sirve de pista de asociación con la información requerida de la memoria a largo plazo (Baje et al., 2016). Las recuperaciones pueden ser de 2 tipos: la *implícita*, que se produce de forma inconsciente y cuyas claves o pistas de activación pueden ser *perceptivas* o *semánticas*, según dependen de las características físicas de los objetos o sus significados. La recuperación *explícita*, por su parte, se da cuando se intenta recordar de forma consciente y directamente de la memoria a largo plazo. Hay también dos tipos de memoria explícita: uno de *familiaridad*, que es rápido y casi automático, se utiliza para saber sobre algo o alguien sin entrar en detalles específicos, y los de *recuerdo*, que son más lentos y controlados, y sirven para recuperar detalles específicos de la información. La recuperación de información también está influenciada por otros factores como el contexto de codificación, contexto espaciotemporal, emocional, cognitivo y fisiológico (Bajo et al., 2016 y Morgado, 2005).

Tipos de memoria: MCP y MLP

Las investigaciones sobre memoria han sugerido variedad de modelos estructurales, Atkinson y Schiffrin (1968) propusieron uno ampliamente aceptado que distingue entre 3 tipos de memoria según su capacidad y permanencia (Díaz, 2009). Las dos primeras son memorias a corto plazo (MCP), cuya característica fisiológica distintiva es que no hay cambios estructurales a nivel de la sinapsis, sino que una facilitación en la transmisión del impulso nervioso; y otro sistema de memoria de largo plazo (MLP) en donde la información produce cambios estructurales (López-Ibor, Ortiz, Alcócer, (1999). Dentro de la MCP se encierran dos sistemas: una es la memoria *sensorial* que actúa automáticamente y constituye la fase inicial del proceso atencional y el otro sistema de memoria se refiere a la memoria de trabajo. La memoria sensorial registra las sensaciones percibidas sin asociarlas necesariamente a un sentido o contexto determinado, y las guarda por un breve periodo de tiempo (milisegundos) hasta que procesos posteriores seleccionan lo relevante de ellas. Los estudios se enfocan en dos tipos de memoria sensorial: la *auditiva o memoria ecoica*, y la *memoria icónica o visual* (Bajo et al., 2016).

La memoria de trabajo, por su parte, es la más importante, ya que es la que focaliza la atención y desde la que entra y sale información. La memoria de trabajo tiene un carácter más activo y de control, es la encargada de recuperar la información almacenada en la MLP para poder comunicarse, reflexionar y calcular. La memoria de trabajo es un sistema limitado, tanto por la duración de los recuerdos como por la capacidad de elementos que pueden ser recordados al mismo tiempo (Bajo et al., 2016 y Logatt, 2011). De este modo, la información se mantiene por un periodo corto de tiempo en la consciencia (minutos) y es fácil de recuperar, pero, luego de servir a su propósito, se descarta la información almacenada por una nueva. Por otro lado, se pueden recordar o mantener en la memoria una cantidad determinada de ítems, unidades con significados como números, palabras, objetos, etc. Esta cantidad baja en un promedio de 3 ítems cuando las unidades necesitan ser además operadas de alguna forma (Logatt, 2011).

Existen varios modelos teóricos sobre la memoria de trabajo, el modelo revisado del original de Baddeley (Baddeley, 2007) tiene un gran apoyo empírico y respaldo en el ámbito de las neurociencias. El objetivo del modelo es describir cómo almacenamos y manipulamos la información temporalmente para realizar tareas complejas de razonamiento, tiene una estructura de cuatro componentes, capaces de explicar muchos aspectos de la cognición humana:

1. El *control ejecutivo central* o administrador central, es el que supervisa la distribución de los recursos atencionales en una tarea cognitiva, recupera información y coordina las actividades de los otros componentes. Este componente orienta la atención hacia lo que se quiere aprender o resolver. Los siguientes dos componentes actúan como sistemas esclavos del control ejecutivo.
2. El *bucle fonológico* o lazo articulatorio permite almacenar y operar información fonológica de forma temporal, por ejemplo, cuando se sostiene una conversación. Además, se encarga de transformar el lenguaje presentado de forma visual a su forma fonológica, procesando así toda la información verbal.
3. La *agenda visuoespacial* es la encargada de almacenar de forma temporal y operar la información visual, espacial y kinestésica.
4. El *búfer episódico* es el que conecta la memoria de corto plazo, integrando la información de los dos anteriores componentes, con todas las memorias de largo plazo. Es el componente encargado de recuperar la información que se necesita de los recuerdos almacenados en las otras memorias. Suele ser incluido dentro del ejecutivo central.

El modelo propone que cada componente de la memoria de trabajo tiene una capacidad limitada y también, que los componentes son relativamente independientes entre sí (Baddeley, 2000). El funcionamiento de la memoria de trabajo puede verse representado en el diagrama que se muestra en la figura 7.

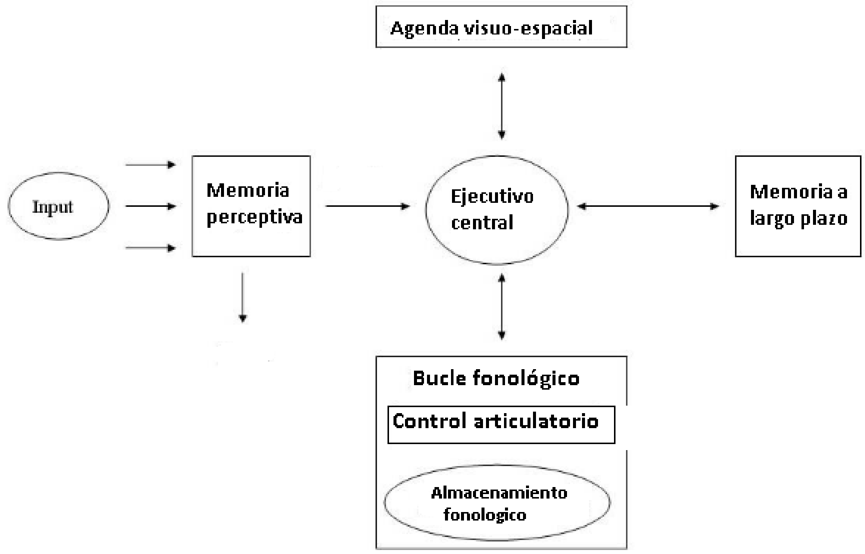


Figura 7: Diagrama funcionamiento memoria de trabajo, Baddeley y Hitch, 1974.

El tercer tipo de memoria es la *memoria a largo plazo*, el almacén de recuerdos y conocimientos que cada persona posee y que puede durar días, meses o años. La memoria a largo plazo comprende dos tipos de memorias: las *declarativas* y *no declarativas*, definidas según criterios como los tipos de representación y de información que trata, su forma de funcionar o el tipo de experiencia que produce. La memoria declarativa se distingue por un acceso consciente a hechos y eventos. Su sustrato neural se encuentra en el lóbulo temporal medial que incluye la región hipocampal y adyacentes, y cuando los recuerdos son remotos y consolidados se activan áreas del córtex asociativo. Hay 3 tipos de memoria declarativa: la *memoria semántica*, que se activa al memorizar nuevos conocimientos. Todos los recuerdos acumulados, incluidos los relativos a uno mismo, se deben a este tipo de memoria, recordar estos conocimientos no implica recordar los contextos en que se adquirieron. La *memoria episódica* es otro tipo de memoria en la que se recuerdan hechos específicos de la propia vida, incluyendo referencias temporales y contextuales, dado que todo momento episódico viene asociado un instante y un lugar. El tercer tipo de memoria es la *autobiográfica* y permite construir un sentimiento de identidad, es una amalgama de representaciones con contenidos episódicos, semánticos y de uno mismo (emocional y procedimental) (Carrillo-Mora, 2010, Díaz, 2009, Bajo et al, 2016).

Las memorias no declarativas son de acceso implícito o no consciente, sirve para almacenar información acerca de procedimientos o estrategias que permitan interactuar con el ambiente exitosa y eficazmente, pero cuya actuación ocurre de manera inconsciente o automática, haciendo muy difícil la verbalización de sus contenidos, por ejemplo, andar en bicicleta (Solís y López-Hernández, 2009). Se divide en *memoria procedimental*, que almacena los conocimientos sobre las propias habilidades motoras o cognitivas, por lo que este sistema es el que permite el aprendizaje de métodos de resolución de tareas cognitivas como por ejemplo, ecuaciones matemáticas. Y *memoria perceptiva*, que es automática y tiene relación con la información que se adquiere y evoca a través de los sentidos, dentro de ella está la parte motora, que se encarga de la representación de todo tipo de acciones motoras, desde los movimientos más sencillos a las prácticas más complejas, necesarias para percibir objetos y reconocer el lenguaje (hablado y escrito) (Diaz, 2009, Carrillo-Mora, 2010, Bajo et al., 2016).

El olvido

Es importante mencionar el olvido como un mecanismo de autorregulación de la memoria para no sobrecargarla con los recuerdos innecesarios y perjudiciales para la salud mental. Se ha sugerido sistemáticamente que el olvido es adaptativo, puesto que mantener la memoria tiene su precio, tanto uno físico al almacenarla, como uno funcional al inhibir recuerdos que no son pertinentes en la resolución de problemas (Bajo et al., 2016).

Hay olvidos a corto y largo plazo, en el sentido que algunos estímulos se pierden en la etapa de procesamiento correspondiente a la memoria a corto plazo y otros en la memoria a largo plazo. Existen, además, olvidos de carácter incidental o por represión, así como olvido intencional o por supresión. El olvido incidental, bajo la hipótesis de las claves de recuperación, es causa de una pobre codificación, ya que el éxito de recuperar la información depende mucho de la presencia de claves que nos guíen el acceso a la huella objetivo, si no hay claves o no se prestó atención a ellas, se producirá el olvido. También se puede explicar a través del concepto de *interferencia*, que se refiere a la presencia de elementos competidores que disminuyen o bloquean la recuperación de un recuerdo particular. Un principio relacionado a este concepto es el de *sobrecarga de la clave*, que sucede cuando una clave de asociación a la información está asociada a muchas otras representaciones, causando interferencia en su recuperación. Otro fenómeno relacionado a la interferencia, es el *efecto abanico (fan effect)*, que tiene que ver con el fracaso al recuperar información de un concepto cuando se conocen demasiados detalles de él. Además, el propio funcionamiento del cerebro puede jugar en contra cuando la capacidad para controlar el efecto de interferencia se ve afectada por la inhibición de la información de forma selectiva (con claves en común), que puede modificar su estabilidad y permanencia en la MLP. Así también, existe otra hipótesis sobre la causa del olvido, la *hipótesis del decaimiento*, que plantea que los recuerdos simplemente se debilitan como función del paso del tiempo, lo que hace cada vez más difícil recuperarlos. (Anderson, 2008 y Bajo et al., 2016).

Por otra parte, el olvido puede también ser intencional, por un intento consciente de olvidar, esto sucede cuando se suprimen recuerdos porque trae emociones negativas o porque la información ya no tiene vigencia y debe actualizarse para una toma de decisiones. De aquí que la capacidad de olvidar intencionadamente es considerada una función de control y autorregulación. Investigaciones recientes (Bjork, 1998; Sahakan y Kelly, 2002) apuntan a que el olvido puede inducirse si se da la orden, paradigma del olvido dirigido, como consecuencia de un cambio contextual interno en respuesta a la orden Además, se propone que la supresión intencional de la recuperación de una información que tiene efectos de olvido, implica mecanismos neurocognitivos similares a los que requiere la inhibición de respuestas motoras (Bajo et al., 2016).

Por último, pese a que las investigaciones sugieren distintas hipótesis sobre las causas del olvido y las distinciones entre ellas, es necesario destacar que cada factor mencionado contribuye al proceso global de olvido.

Memoria matemática

Como apunta Ruiz-Vargas (1991) en su libro Psicología de la memoria, la memoria a corto plazo juega un rol fundamental en la ejecución de tareas cognitivas complejas y relevantes como la comprensión verbal y el razonamiento matemático. Particularmente, DeStefano y LeFevre (2004) afirman que la memoria de trabajo tiene un lugar central en la cognición matemática. La memoria de trabajo es el espacio mental en el cual las personas manipulan u operan sobre aspectos de su conocimiento durante el aprendizaje matemático o el desarrollo de problemas. Específicamente, se utiliza la memoria de trabajo para resolver problemas matemáticos cuando el individuo está tratando de interpretar un contenido matemático, usando los conocimientos almacenados en la memoria a largo plazo, para retener y vincular ideas matemáticas y sintetizarlas en un nuevo conocimiento matemático en los procesos de aprendizaje. Los procesos ligados a la memoria de trabajo y aplicados al procesamiento de información matemática están ligados a la retención temporal de información matemática, ya sea en la agenda viso-espacial o en el bucle fonológico; la manipulación de ideas relevantes para formar nuevos conocimientos, utilizando la actividad cognitiva apropiada a través del ejecutivo central y la recuperación de los aspectos del conocimiento existentes de la persona (en la memoria a largo plazo). Estos conceptos se utilizan como base para interpretar la información de la enseñanza y para construir nuevos conocimientos. Se puede ver una implicación de todos los componentes de la memoria de trabajo, sin embargo, investigaciones en procesamiento matemático sugieren que algunos de ellos están más presentes que otros según el tipo de tarea a realizar. Por ejemplo, los procesos del ejecutivo central y la agenda viso-espacial son más utilizados cuando se están aprendiendo nuevos conceptos o seleccionando una estrategia de procesamiento (Faulkenberry, 2010), mientras que el bucle fonológico es más usado luego de haber aprendido una habilidad. Además, la memoria de trabajo ha sido vinculada a otros procesos importantes dentro del aprendizaje de la matemática como la habilidad de los estudiantes para enfocar su atención al aprendizaje (Munro, 2011, Orrantia, 2011 y Gluck, Mercado y Myers, 2008).

La mayoría de las investigaciones se centran en la memoria aplicada al cálculo aritmético, enfatizando la importancia de la memoria a corto plazo para codificar la información numérica contenida en el estímulo, retener los dígitos que se quieren operar y recuperar información referente a hechos aritméticos (como las tablas de multiplicar) o procedimientos. El procesamiento aritmético comienza con la codificación de la información, sin embargo, es necesario operar la información para dar con un resultado, dicha operación tiene que ver con la estrategia de procesamiento que se utilice, la que a su vez está sujeta a varios factores (Orrantia, 2001). Siegler et al. (1989) sugieren que la experiencia y la disponibilidad de hechos numéricos guardados son importantes para la elección de una estrategia de cálculo apropiada, lo que también depende de la probabilidad de producir una respuesta adecuada (gracias a la experiencia), de la duración de los procesos implicados en la estrategia y de los recursos cognitivos que consuma.

Con respecto al procesamiento de fracciones, investigaciones plantean una reducción de la asertividad, la velocidad y la automaticidad para acceder a representaciones de la magnitud de una fracción (Barraza, Gómez, Oyarzun, Dartnell, 2014; Obersteiner et al., 2013), debido posiblemente a que ésta deriva de la relación entre dos valores enteros, lo que reflejaría una mayor carga de recursos cognitivos en la memoria de trabajo (Hurst y Cordes, 2017). Además, técnicas de neuroimagen han evidenciado la aparición de diferentes redes neuronales funcionales activas durante el desarrollo de una tarea de comparación de fracciones que serían dependientes del tipo de estrategia cognitiva, utilizada para el procesamiento de fracciones, los pares de fracciones utilizados en dicho experimento varían entre ausencia y presencia de componentes comunes, característica consistente y coherente con los tipos de estrategias utilizadas en la investigación. (Barraza, et al., 2014; Fazio, DeWolf y Siegler, 2015).

En un estudio de Flaukenberry (2010) se evaluó los efectos de la carga cognitiva de la memoria de trabajo al formar representaciones basadas en la magnitud en ambas estrategias de fracción, holística y basada en componentes. Los resultados dan cuenta de un posible papel del bucle fonológico al ejecutar operaciones (cómputos), basados en los componentes de las fracciones y la participación de la agenda viso espacial al seleccionar las estrategias, pero no necesariamente durante la ejecución de las mismas. Sumado a esto, se ha evidenciado que la asertividad en pruebas de comparación de fracciones carga tanto al bucle fonológico como a la agenda viso espacial, aunque no se encontraron efectos de estos en el tiempo de respuesta (Falukenberry y Kelsey, 2011).

i. Diseño

La investigación es de tipo cuantitativa experimental factorial de 2 (fracciones con presencia/ausencia de componentes comunes) x 3 (fracciones congruentes/incongruentes/neutras).

El diseño factorial 2x3 divide los ítems del cuestionario en 6 grupos de ítems de acuerdo a las combinaciones posibles entre las variables independientes "componentes comunes" y "congruencia", sin embargo, la definición de uno de los grupos no es posible en la práctica, puesto que dentro del nivel "con componentes comunes" sólo pueden haber ítems congruentes (con igual denominador) o incongruentes (con igual denominador), no neutros (con el numerador de una de ellas más grande que el numerador de la segunda fracción, y el denominador de la segunda fracción más grande que el numerador de otro). Por lo que para el experimento se considerarán 5 grupos de ítems (ver tabla 2):

1. Congruentes con componentes comunes.
2. Incongruentes con componentes comunes.
3. Congruentes sin componentes comunes.
4. Neutros sin componentes comunes.
5. Incongruentes sin componentes comunes.

	Congruente	**Incongruente**	**Neutro**
Con un componente común	$\frac{4}{9} < \frac{7}{9}$	$\frac{2}{7} < \frac{2}{5}$	-
Sin componentes comunes	$\frac{1}{3} < \frac{5}{7}$	$\frac{4}{9} < \frac{2}{3}$	$\frac{1}{4} < \frac{2}{3}$

Tabla 2: Ejemplos de ítems en cada grupo de ítems del experimento.

El diseño experimental incluye también la evaluación de otras dos variables independientes: el gap fraccional y la fuerza de la congruencia. Por una parte, el gap fraccional se evaluará mediante la manipulación de las características de los ítems del grupo congruente sin componentes comunes, dando lugar a 3 tipos de ítem en este grupo:- Gap favorable si la fracción mayor tiene el menor gap fraccional (tabla 3)

- Gap neutro si el gap fraccional de ambas fracciones es igual.

- Gap difícil si el gap fraccional de la fracción mayor es mayor que el gap fraccional de la fracción menor.

	Gap Favorable	Gap Neutro	Gap Difícil
Ítem de comparación de fracciones	$\frac{10}{16} < \frac{19}{24}$	$\frac{11}{16} < \frac{19}{24}$	$\frac{12}{16} < \frac{19}{24}$
Relación entre gaps	$6 > 5$	$5 = 5$	$4 < 5$

Tabla 3: Ejemplos de ítems con gap favorable, neutro y difícil.

Por otra parte, la fuerza de la congruencia es manipulada dentro del grupo de ítems congruentes sin componentes comunes y del grupo de ítems incongruentes sin componentes comunes, dando lugar a 4 tipos de ítems dentro de cada grupo (tabla 4)

- Fuertemente congruente (fuerte=si), son ítems congruentes en los que la fracción mayor tiene el numerador y el denominador más grandes que el numerador y el denominador de la fracción menor.

- Fuertemente incongruentes (fuerte=si), son ítems incongruentes en los que la fracción menor tiene el numerador y el denominador más grandes que el numerador y el denominador de la fracción mayor.

Ítems fuertemente incongruentes		Ítems fuertemente congruentes	
$\frac{56}{97} < \frac{37}{50}$	$\frac{55}{98} < \frac{31}{43}$	$\frac{3}{9} < \frac{12}{17}$	$\frac{2}{5} < \frac{11}{18}$

Tabla 4: Ejemplos de ítems fuertemente congruentes y fuertemente incongruentes

ii. Definición de variables

- Variables Independientes (VI):

Componentes Comunes (si/no)

Definición conceptual: Los ítems tienen componentes comunes cuando el numerador o el denominador de las fracciones es el mismo número. Los ítems no tienen componentes comunes cuando todos los componentes de las fracciones son distintos entre sí.

Definición operacional: Resultados obtenidos en ítems con y sin componentes comunes.

Congruencia (congruente/incongruente/neutro)

Definición conceptual: Efecto de procesamiento de fracciones en el que se procesan los componentes de la fracción en vez de procesar su magnitud.

Definición operacional: Resultados obtenidos en ítems congruentes, incongruentes y neutros.

Ítems de fracciones

Ítem congruente con componente común (cc_cong)

Definición Conceptual: es un par de fracciones que comparten el mismo denominador (Van Eeckhoudt, 2013).

Definición Operacional (cc_cong): Resultados obtenidos en los ítems congruentes con un componente común en el experimento de fracciones.

Ítem incongruente con componente común

Definición Conceptual: es un par de fracciones que comparten el mismo numerador (Van Eeckhoudt, 2013).

Definición Operacional (cc_inco): Resultados obtenidos en los ítems incongruentes con un componente común en el experimento de fracciones.

Ítem congruente sin componente común

Definición Conceptual: es un par de fracciones donde la fracción de mayor magnitud posee el numerador y el denominador más grandes (Van den Brande, 2014).

Definición Operacional (ncc_cong): Resultados obtenidos en los ítems congruentes sin componente común del experimento de fracciones.

Ítem incongruente sin componente común

Definición Conceptual: es un par de fracciones donde la fracción mayor posee el numerador y el denominador más pequeños (Van den Brande, 2014).

Definición Operacional (ncc_inco): Resultados obtenidos en los ítems incongruentes sin componentes comunes del experimento de fracciones.

Ítem neutro sin componente común

Definición Conceptual: se refiere a un par de fracciones en el que una de ellas posee el mayor numerador mientras la otra tiene el mayor denominador; bajo la definición de congruencia puede ser congruente o incongruente (Van den Brande, 2014).

Definición Operacional (ncc_neut): Resultados en los ítems neutros del experimento de fracciones

Ítem de gap fraccional

Definición Conceptual: Es un ítem conformado por un par de fracciones que inducen a utilizar estrategias relacionadas con el gap fraccional para determinar cuál de ellas es mayor. El gap fraccional se refiere la diferencia positiva entre los componentes de cada fracción, es decir, entre numerador y denominador (el gap fraccional de $\frac{a}{b}$ $es\ |b-a|$) (Clarke y Roche, 2009; Pearn y Stephens, 2004).

Definición Operacional (gap: difícil, favorable, neutro): Resultados obtenidos en los ítems congruentes sin componentes comunes, en el que se manipula el gap fraccional, en el experimento de fracciones.

<u>Ítems fuertemente congruentes</u>

Definición conceptual: Se refiere a ítems en donde la fracción mayor tiene el numerador y el denominador más grandes que el numerador y denominador de la otra fracción. Se manipula dentro de los ítems congruentes sin componentes comunes.

Definición operacional: Resultados obtenidos en los ítems fuertemente congruentes sin componentes comunes del experimento de fracciones.

<u>Ítems fuertemente incongruentes</u>

Definición conceptual: Par de fracciones en la que la fracción mayor tiene el numerador y el denominador más pequeños que el numerador y denominador de la otra fracción. Se manipula dentro de los ítems incongruentes sin componentes comunes del experimento de fracciones.

Definición operacional: Resultados obtenidos en los ítems fuertemente incongruentes sin componentes comunes.

- Variables Dependientes (VD):

<u>Tasa de aciertos</u>

Definición conceptual: cantidad de respuestas correctas entregadas en los ítems del experimento de fracciones.

Definición operacional: El estudiante selecciona la fracción mayor en un tiempo menor o igual a 10 segundos.

<u>Tiempo de respuesta</u>:

Definición conceptual: tiempo que cada participante se demora en entregar una respuesta en cada ítem.

Definición operacional: cantidad de tiempo que se demora el estudiante en elegir la fracción que considera mayor, se mide en milisegundos.

- Variable de control

<u>Memoria de trabajo</u>

Definición Conceptual: La memoria de trabajo es un mecanismo cognitivo responsable del almacenamiento temporal de información y su procesamiento (Baddeley, 2003).

Definición Operacional: Puntaje obtenido en la prueba de memoria de trabajo verbal: WAIS digit span. Se asignó un 1 a las respuestas correctas y un 0 a las incorrectas para luego sumar el puntaje total obtenido por los participantes en cada una de las 3 sub-pruebas que componen el digit span.

iii. Participantes

En esta investigación se evaluaron a 50 estudiantes de educación superior sanos, hombres y mujeres de entre 18 y 25 años de edad. Los participantes eran estudiantes de pregrado de matemática de las facultades de ingeniería, educación o matemática, que estaban cursando sus últimos años de formación curricular en la Universidad de Concepción.

Todos los participantes firmaron un consentimiento informado antes de participar en la sesión experimental y al finalizar recibieron una compensación monetaria por su tiempo (anexo 1).

iv. Procedimiento

Los participantes fueron contactados vía correo electrónico, obtenido de la base de datos para alumnos de la Universidad de Concepción, o de forma presencial (en aula). Los participantes que cumplían con requisito de edad, año curricular y carrera, realizaron el experimento en el laboratorio de Psicolingüística de la Facultad de Humanidades y Arte, que contaba con dos salas con aislación acústica y sin estímulos distractores. Los estudiantes estaban sentados en una silla cómoda frente al monitor de una laptop, se les informó verbalmente acerca de las instrucciones generales del experimento y se les presentó un programa de registro de tiempo de reacción de comparación de fracciones, donde se explicaban las instrucciones de la tarea.

Se aplicó un experimento de fracciones con dos alternativas de respuesta y un tiempo límite de 10s para cada ítem. Los participantes vieron un par de fracciones, una fracción en la parte izquierda y otra en la derecha de la pantalla y debieron seleccionar cuál es la mayor, presionando la tecla correspondiente del teclado (q o p) (Ver figura 8). Además, como variable de control, se midió la capacidad de memoria de trabajo a través de WAIS digital span **(Anexo 2).**

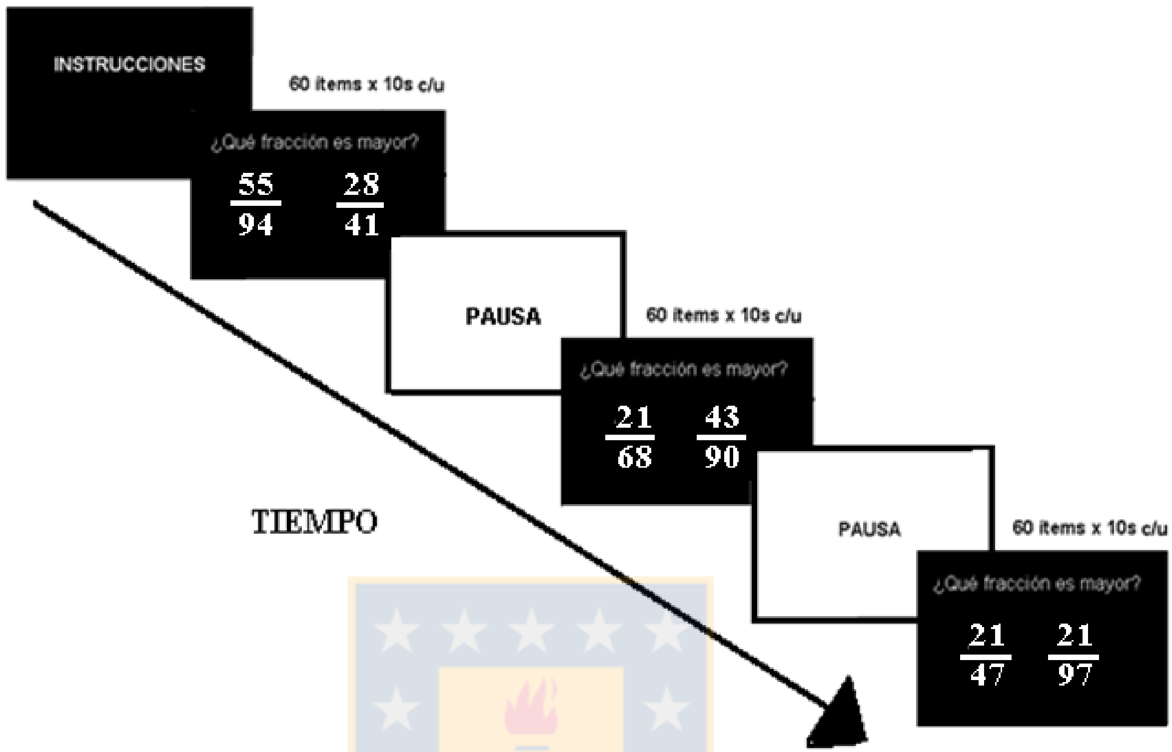


Figura 8: Muestra experimento de fracciones

El cuestionario consistía en un conjunto de pares de fracciones con denominadores entre 30 y 100, y a numeradores de tamaño intermedio 5 o más, con un máximo de 5 unidades menor que el denominador, lo anterior porque las fracciones cuyo gap es muy pequeño puede inducir estrategias *ad hoc* (Obersteiner et al., 2013). Se incluyeron pares de fracciones que variaran en las dimensiones de congruencia (congruente/neutro/incongruente) y presencia/ausencia de componentes comunes, además se incluyeron ítems fuertemente congruentes e incongruentes, así como ítems donde el gap fraccional provocaba la respuesta correcta/incorrecta (favorable/difícil) o no es informativo (neutro).En total, el cuestionario constaba de 180 ítems. Se controló, además, que entre los distintos tipos de ítem, los pares de fracciones tengan una distancia numérica igual o menor a 0,3 unidades.

La sesión experimental tuvo una duración de 45 minutos aproximadamente.

<u>v. Procedimiento de recolección de datos</u>

Para la medición conductual se utilizó el software OpenSesame, donde se registró el tiempo de reacción (RT) en la comparación de fracciones, que utiliza la técnica experimental on-line.

Para la evaluación de la memoria de trabajo se tomó la prueba de WAIS oral, donde se les leyó a cada participante distintas secuencias de dígitos a un intervalo de 1 segundo aproximadamente, inmediatamente después, los estudiantes debían repetir la secuencia dicha en distinto orden (de acuerdo a la tarea en cuestión).

vi. Instrumento

Para evaluar la memoria de trabajo se utilizó una de las pruebas que componen el cuestionario Verbal WM: WAIS: Wechsler Adults Intelligence Scale digit span. La Escala Wechsler de Inteligencia para Adultos (WAIS) es una prueba de administración individual que permite evaluar la inteligencia de forma inclusiva, para lo cual desarrolló pruebas agrupadas en 4 conjuntos, de acuerdo a lo que evalúan, indicando: la velocidad de procesamiento, comprensión verbal, razonamiento perceptivo y memoria de trabajo (WM) (Wechsler, 2012).

El Índice de Memoria de Trabajo (MT) contiene tareas de Dígitos (D), que consiste en repetir una serie de dígitos presentados oralmente, en el mismo orden en que aparecen, en orden inverso y en orden creciente (3 partes). La tarea Aritmética (A) que consiste en resolver mentalmente problemas aritméticos y dar la respuesta dentro de un tiempo determinado y, finalmente, la tarea Letras y números (LN), que consiste en presentar oralmente una serie de números y de letras mezclados. Después se deben repetir los números en orden ascendente y las letras en orden alfabético **(ver anexo 2).**

- Validación de los instrumentos

Validación del WAIS: Wechsler Adults Intelligence Scale en población adulta chilena **(**Rosas, Tenorio, Pizarro, Cumsille, Bosch, Arancibia, Carmona-Halty, Pérez, Pino, Vizcarra y Zapata, 2014)

Consistencia interna: En una muestra intencionada de 887 participantes chilenos se obtuvo un nivel adecuado (Alfa de Cronbach = 0,941).

Validez de contenido: La prueba, WAIS-IV evalúa múltiples dimensiones de la cognición, como manipulación de información visual, organización de información, velocidad del procesamiento de información, entre otras. Esto ha sido verificado y discutido por el panel de expertos que generó el instrumento y análisis posteriores (Coalson y Raiford, 2008; Lichtenberger y Kaufman, 2009).

Validez de constructo: Se obtuvo una fuerte correlación entre Aritmética y Retención de Dígitos (r = 0,626) y también entre el índice de memoria de trabajo y Retención de Dígitos (r = 0,908).

Validez convergente: Se obtuvo un buen nivel de confiabilidad mediante la prueba Evaluación de Inteligencia Fluida (FIX). Los resultados indican que el FIX en su forma A alcanza una correlación con el CIT de WAIS-IV de 0,79 ($p < 0{,}001$) y en su forma B, de 0,82 ($p < 0{,}001$) (Rosas, Tenorio, Pizarro, Cumsille, Bosch, Arancibia, Carmona-Halty, Pérez-Salas, Pino, Vizcarra y Zapata-Sepulveda, 2014).

vii. Análisis de datos

Los participantes que omitieron muchos ítems y que obtuvieron una tasa de asertividad considerablemente menor a sus pares (3 desviaciones estándar) fueron descartados del análisis. Para los demás, se calcularon tasas de acierto y tiempos de respuesta promedio por cada tipo de ítem, por variable y en la prueba total. Las variables fueron analizadas de acuerdo a su naturaleza: la tasa de acierto será analizada mediante regresiones logísticas y el tiempo de respuesta a través de regresiones lineales**,** ambas con efectos mixtos, considerando las dimensiones del estímulo como efectos fijos, y los participantes y los ítems como factores aleatorios. El análisis se llevó a cabo mediante el programa estadístico gratuito R y en Microsoft Excel. Con el porcentaje de respuesta correcta en los 5 tipos de ítems se aplicó un algoritmo de agrupación a través del *k-means* (Jain, 2010) para agrupar a los participantes en k grupos, se probaron los valores para k desde 2 hasta 5 y se encontró que el 3 representa la mejor agrupación, de acuerdo al porcentaje de varianza explicada por esa cantidad de grupos (64,7% de las variaciones).

Para el análisis de las pruebas de memoria de Dígito y Letras y Números, se codificaron las respuestas, según la cantidad de secuencias dichas correctamente en cada ítem, luego se suma el total de puntos en cada prueba por participante: la prueba de Dígitos contiene 3 partes con 16 puntos en total cada una (1 punto por secuencia correcta); la prueba de letras y números tiene 3 puntos por ítem, es decir, 34 puntos. Para la prueba de Aritmética se codificó con 1 o 0 si es verdadero o falso, respectivamente, para luego sumar el total de punto por participante. El análisis de esta variable de control tiene que ver con un análisis de correlación de Pearson con los puntajes obtenidos en el cuestionario de fracciones.

CAPITULO 4: RESULTADOS

Se registraron en total 50 participantes. Se eliminó a un participante que obtuvo un puntaje menor a 3 desviaciones estándar de la media, además se descartó a otro participante que omitió el 13% de los ítems y se descartaron los ítems omitidos que suman 174 en total. La muestra total considerada para el análisis fue de 48 participantes. El análisis general entrega un porcentaje promedio de asertividad de los estudiantes en la prueba total, que es igual a 88,8% (SD=7,3%) (Me=91%), además, el tiempo de respuesta promedio en desarrollar correctamente la prueba (descartando los ítems contestados incorrectamente) es de: 4,1 segundos aproximadamente (4106,4 milisegundos).

ANALISIS GENERAL POR PARTICIPANTES[4]

1. TIEMPOS DE RESPUESTA.

De acuerdo al diseño experimental factorial de 2 componentes comunes (con componentes comunes/sin componentes comunes) x 3 niveles de congruencia (congruente/neutro/incongruente), se realizó un Anova multifactorial de medidas repetidas, donde se encontró un efecto de interacción Chi^2 (1) = 21,919; valor $p < 0.001$ El gráfico 1 muestra la interacción encontrada:

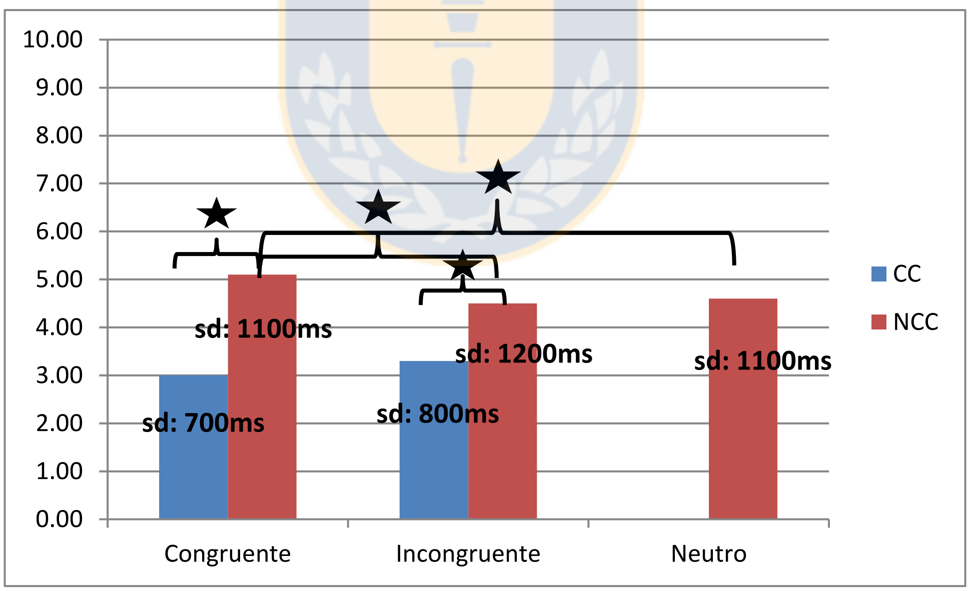


Gráfico 1: Efectos de interacción de los componentes comunes con la congruencia

[4] En los gráficos, las estrellas simbolizan diferencias estadísticamente significativas entre los grupos de ítems que une la llave correspondiente. Diferencias significativas fueron encontradas a través de pruebas t de Student.

Para explorar la interacción que muestra el gráfico 1, se realizaron análisis con la prueba t para observar las diferencias entre pares de variables, donde se considerará el valor crítico de dos colas con el fin de obtener una dirección (mayor/menor) de la diferencia estadística entre los promedio de tiempo de respuesta. Los resultados de dicho análisis se muestran en el gráfico 1, el que informa, primero, que los ítems congruentes e incongruentes presentan diferencias significativas entre los tiempos de respuesta, dependiendo de la presencia o ausencia de componentes comunes en el ítem, es decir, que los participantes respondieron a los ítems congruentes con componentes comunes en un tiempo significativamente menor al tiempo que obtuvieron al responder los ítems congruentes sin componentes comunes ($t(47)=13,83$ y $p < 0.001$.). La comparación de medias en los ítems incongruentes da cuenta también una diferencia significativa entre componentes comunes, donde los ítems incongruentes sin componentes comunes también obtienen mayor tiempo de respuesta ($t(47)=10,58$ y $p < 0.001$)

Ahora bien, si comparamos las variables entre componentes comunes a través de la variable congruencia, se tiene que en el caso de la variable con componentes comunes el tiempo de respuesta en los ítems con componentes comunes no presenta una diferencia significativa entre los niveles de la congruencia (congruente/incongruente), de acuerdo a los resultados obtenidos con la prueba t de Student: $t(47) = -1,7$, $p > 0,05$ para la diferencia de medias. Por el contrario, los resultados del tiempo de respuesta obtenido por los participantes en los ítems sin componentes comunes informan que el tiempo de respuesta en ítems congruentes sin componentes comunes es estadísticamente mayor al tiempo de respuesta obtenido en los ítems incongruentes sin componentes comunes $t(47) = 4,46$, $p < 0.001$.

Por último, los ítems congruentes sin componentes comunes se respondieron en un tiempo estadísticamente mayor al utilizado para responder a los ítems neutros sin componentes comunes, $t(47)=6,11$; $p < 0,001$. Mientras que el tiempo promedio de respuesta de los participantes en los ítems incongruentes sin componentes comunes, no parece ser estadísticamente distinto al obtenido al responder a los ítems neutros sin componentes comunes ($t(47)=1,5$ y $p > 0,1$).

Además, se encontró un efecto principal de la variable componentes comunes (Chi^2 (1) = 312,851 valor $p < 0.001$), lo que implica que los participantes tuvieron un tiempo de respuesta promedio en los ítems con componentes comunes (*M*= 3,1s; *SD*= 0,7s) estadísticamente mayor al tiempo de respuesta que obtuvieron en los ítems sin componentes comunes (*M* = 4,6s; *SD* = 1s), independiente del grado de congruencia. Se encontró también un efecto principal de congruencia (Chi^2 (2) = 31,573 y valor $p < 0.001$) lo que significa que los estudiantes de matemática obtuvieron tiempos de respuesta estadísticamente distintos entre los niveles de la congruencia (congruente/incongruente/neutro), para explorar las diferencias entre pares de niveles de congruencia se aplicó un test de Tukey el cual proporciona el valor p de las diferencias estadísticas entre cada par de niveles, los resultados obtenidos se muestran sintetizados en la tabla 5.

Tabla 5: Efectos principales de la congruencia sobre tiempos de respuesta.

<table>
<tr><th>DIMENSIONES</th><th>NIVELES</th><th>MEDIA (SD)</th><th>PRUEBA DE TUKEY</th></tr>
<tr><td rowspan="3">CONGRUENCIA</td><td>CONGRUENTE</td><td>3821ms (805ms)</td><td rowspan="3">Valor p de diferencia entre niveles:
<table>
<tr><th></th><th>Congruente</th><th>Incongruente</th></tr>
<tr><td>Inco.</td><td>p > 0.05</td><td>--</td></tr>
<tr><td>Neutro</td><td>p < 0.01</td><td>p < 0.01</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>INCONGRUENTE</td><td>3896ms (882ms)</td></tr>
<tr><td>NEUTROS</td><td>4448ms (1046ms)</td></tr>
</table>

La tabla 5 muestra que la variable neutra funciona como línea base, pues obtuvo los tiempos más largos de respuesta con diferencias significativas en relación con la variable congruente y, a su vez, con la variable incongruente. No se obtuvo diferencias significativas entre las variables congruentes e incongruentes.

La investigación también considera los efectos de la variables gap fraccional y fuerza de la congruencia, cuya manipulación se realiza dentro de las combinaciones entre las variables congruencia y componentes comunes, específicamente:

- Gap fraccional se mide en el grupo de ítems congruentes sin componentes comunes.
- Fuerza de la congruencia se evalúa en el grupo de ítems congruentes e incongruentes sin componentes comunes.

Dado que la manipulación del gap fraccional se da en conjunto con la fuerza de la congruencia dentro de los ítems congruentes sin componentes comunes, se aplicó una Anova multifactorial de medidas repetidas para establecer la influencia de ambas variables en el tiempo de respuesta de los estudiantes en dicha dimensión (ncc_cong). Los resultados indican que no hay un efecto de interacción entre ambas variables sobre los tiempos de respuesta de los estudiantes Chi^2 (2) = 1,62; valor p > 0,05. Tampoco se observan efectos principales de la variable fuerza de la congruencia Chi^2 (1) = 0,09; valor p > 0,05, ni de la variable gap fraccional Chi^2 (2) = 4,77; valor p > 0,05 en los tiempos de respuesta. Lo anterior significa que los estudiantes de matemática parecen utilizar el mismo esfuerzo cognitivo para procesar las fracciones con distinto tipo de gap fraccional, de la misma forma, no realizan un esfuerzo cognitivo mayor para procesar ítems fuertemente congruentes, que para procesar ítems con congruencia normal (no fuerte).

La evaluación de los efectos de la fuerza de la congruencia en los tiempos de respuesta que obtuvieron los participantes en los ítems congruentes e incongruentes sin componentes comunes se realizó en conjunto con la congruencia a través de un Anova multifactorial de medidas repetidas, que indica que no hay efectos de interacción entre la congruencia y la fuerza de la congruencia, Chi^2 (1) = 0,28; valor p = 0,59. Además, tampoco se encontraron efectos principales de la fuerza de la congruencia sobre los tiempos de respuesta de los participantes Chi^2 (1) = 0,89; valor p = 0,35. Lo anterior implica que los estudiantes de la muestra no requieren de mayor carga de procesamiento para responder a ítems con congruencia fuerte que para responder a ítems con congruencia normal, independiente de si son congruentes o incongruentes. Los resultados estadísticos de ambas variables se muestran en la tabla 6.

Tabla 6: Estadísticos descriptivos de las variables fuerza de la congruencia y gap fraccional.

DIMENSIONES	**NIVELES**	**MEDIA (SD)**
GAP FRACCIONAL (ncc_cong)*	FAVORABLE	4862ms (1132ms)
	NEUTRO	5084ms (1297ms)
	DIFICIL	5192ms (1370ms)
FUERZA DE LA CONGRUENCIA (Ncc_cong y ncc_inco)*	FUERTE	4750ms (1266ms)
	NO FUERTE	4694ms (1044ms)

Memoria y tiempos de respuesta.

La prueba de memoria consistió en 3 pruebas de memoria: la primera es la prueba de Dígitos compuesta de 3 sub-pruebas: Dígito p.1, Dígito p.2, Dígito p.3; la segunda es la prueba de *Hechos Aritméticos* y la tercera es la de *Letras y Números.* Dado que el propósito no es medir la capacidad de memoria de trabajo, sino controlar su influencia en los tiempos de respuesta de los participantes, se realizó un análisis de correlación con Excel entre el tiempo de respuesta y los puntajes obtenidos por cada participante en cada una de las pruebas de memoria. Los resultados no arrojan una correlación significativa entre ambas variables, presentando puntuaciones homogéneas en cada dimensión. La tabla 7 presenta los resultados de las correlaciones entre cada categoría.

Tabla 7: Correlaciones memoria y tiempo de respuesta.

Ítem/Memoria	*DIGITOS, p 1*	*DIGITOS, p 2*	*DIGITOS, p 3*	*HECHOS ARITMETICOS*	*NUMEROS Y LETRAS*
CONGRUENTE	-0,065328624	0,016956566	0,09749658	-0,200544353	0,040885201
INCONGRUENTE	-0,062416588	0,096688899	0,203839734	-0,170394676	0,082011604
NEUTRO	0,006826614	0,142777654	0,106406514	-0,133730441	0,145143799
CC	-0,114607629	-0,068655281	0,096187603	-0,284613967	0,050066284
NCC	0,010241717	0,181280908	0,171643788	-0,079127134	0,116928217
GAP FAVORABLE	-0,034354328	0,10022634	0,141125554	-0,124030344	0,081711135
GAP NEUTRO	-0,007088159	0,166489806	0,107399994	-0,11154239	0,070191867
GAP DIFÍCIL	-0,181707622	0,094856436	0,024097985	-0,190442111	0,037492408
NO FUERTE	0,025091155	0,205022387	0,196440556	-0,057139963	0,145125129
FUERTE	0,001059567	0,173573769	0,197667515	-0,032700935	0,05610965

2. TASA DE ACIERTOS

Se realizó un Anova multifactorial de medidas repetidas, donde se encontró un efecto de interacción entre las variables componentes comunes y congruencia $Chi^2\,(1) = 13.287$ valor $p < 0.001$. En el gráfico 2 se muestran los datos encontrados:

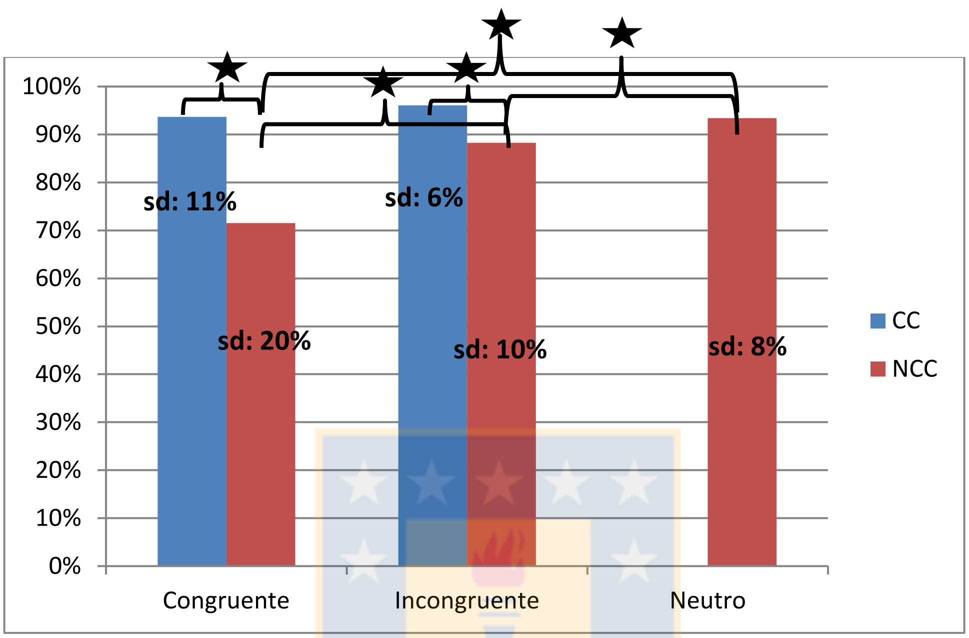


Gráfico 2: Efecto de interacción de variable componentes comunes y congruencia en tasa de aciertos

Para profundizar en el efecto de interacción de las variables componentes comunes y congruencia se utilizan pruebas t de Student sobre las tasas de aciertos de los estudiantes en cada combinación del diseño factorial de 2x3 y se consideran para este análisis los valores críticos de dos colas para conocer la naturaleza de las diferencias entre tasas de aciertos (mayor/menor). En los resultados se encontró que las tasas de aciertos en el desempeño de los estudiantes en los niveles de la congruencia (congruente/incongruente) difieren respecto a si tienen o no componentes comunes, es decir, que los estudiantes de matemática obtuvieron tasas de aciertos estadísticamente mayores en los ítems congruentes con componentes comunes que en los ítems congruentes sin componentes comunes ($t(47)=8,1$ y $p < 0,001$), de la misma forma que obtuvieron mejores puntajes en los ítems incongruentes con componentes comunes que en aquellos incongruentes sin componentes comunes ($t(47)=-5,4$ y $p < 0,001$).

Además, al igual que en los resultados de tiempos de respuesta, la tasa de aciertos de los ítems congruentes con componentes comunes no presenta diferencia estadística con la tasa de aciertos de los ítems incongruentes con componentes comunes ($t(47)=-1,7$ y $p > 0,05$). Aunque también se encontró que cuando los ítems no presentan componentes comunes las tasas de aciertos entre los niveles de la congruencia son estadísticamente significativas, específicamente los ítems congruentes sin componentes comunes tuvieron tasas de asertividad menores que los ítems incongruentes ($t(47)=4,7$ y $p < 0,001$) y los ítems neutros sin componentes comunes ($t(47)= -7,1$ y $p < 0,001$). A su vez, la tasa de aciertos en los ítems neutros es estadísticamente mayor a la tasa de aciertos de los ítems incongruentes ($t(47)=3,68$ y $p < 0,001$). Lo anterior implica que el efecto de la congruencia en las tasas de aciertos se expresa en los ítems sin componentes comunes, aunque en dirección contraria a la encontrada por otras investigaciones como la de DeWolf y Vosniadou (2011), puesto que los ítems congruentes son los menos puntuados, mientras que los ítems neutros son los que tienen estadísticamente mejor puntuación que sus pares sin componentes comunes.

Los resultados del Anova multifactorial también arrojaron un efecto principal de componentes comunes (Chi^2 (1) = 266,203; valor $p < 0.001$), lo que implica que los participantes tuvieron una tasa de aciertos en los ítems con componentes comunes (*M*= 95%; *SD*= 7,6%s) estadísticamente mayor al tiempo de respuesta que obtuvieron en los ítems sin componentes comunes (*M = 85%*; *SD = 8%*). También se encontró un efecto principal de congruencia (Chi^2 (2) = 268,374y valor $p < 0.001$), lo que significa que los estudiantes de matemática obtuvieron tiempos de respuesta estadísticamente distintos entre los niveles de la congruencia (congruente/incongruente/neutro), para explorar las diferencias entre pares de niveles de congruencia se aplicará un test de Tukey el cual proporciona el valor p de las diferencias estadísticas entre cada par de niveles, los resultados obtenidos se muestran sintetizados en la tabla 8.

Tabla 8: Efectos principales de la variable congruencia en la tasa de aciertos

<table>
<tr><th>DIMENSIONES</th><th>NIVELES</th><th>MEDIA (SD)</th><th>PRUEBA DE TUKEY</th></tr>
<tr><td rowspan="3">CONGRUENCIA</td><td>CONGRUENTE</td><td>83% (13%)</td><td rowspan="3">Valor p de diferencia entre niveles:<table><tr><th></th><th>Congruente</th><th>Incongruente</th></tr><tr><td>Inco.</td><td>p < 0,001</td><td>--</td></tr><tr><td>Neutro</td><td>p< 0,001</td><td>p > 0,5</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>INCONGRUENTE</td><td>92% (7%)</td></tr>
<tr><td>NEUTROS</td><td>93% (8%)</td></tr>
</table>

Como se observa en la tabla 8, los menores porcentajes de aciertos se presentan en los ítems congruentes, los que difieren significativamente de los ítems incongruentes o neutros.

Se aplicó un anova multifactorial de medidas repetidas para establecer la influencia de las variables gap fraccional y fuerza de la congruencia en las tasas de aciertos de los ítems congruentes sin componentes comunes, los resultados indican que no hay un efecto de interacción entre ambas variables sobre las tasas de aciertos de los estudiantes de matemática, de acuerdo a los valores Chi^2 (2) = 0,3; valor $p > 0,5$.

Sin embargo, se observan efectos principales de la variable fuerza de la congruencia (Chi^2 (1) = 6,9; valor $p < 0,05$), lo que implicaría que los participantes obtienen menores aciertos al responder ítems fuertemente congruentes sin componentes comunes (*ME*= 67%*;* *SD*= 21%), que cuando responden ítems con congruencia normal sin componentes comunes (no fuerte) (*ME*=75%*; SD*= 22%). También se encontraron efectos principales de la variable gap fraccional sobre la tasa de asertividad de los participantes (Chi^2 (2) = 6,3; valor $p < 0,05$), para explorar este efecto se realiza una prueba de Tukey, la cual entrega el valor p de significancia estadística entre cada par de niveles del gap fraccional. Los resultados obtenidos de este análisis se muestran en la tabla 9.

Tabla 9: Efectos principales de la variable gap fraccional.

<table>
<tr><th>DIMENSIONES</th><th>NIVELES</th><th>MEDIA (SD)</th><th>PRUEBA DE TUKEY</th></tr>
<tr><td rowspan="3">GAP FRACCIONAL
(ncc_cong)*</td><td>FAVORABLE</td><td>77% (20%)</td><td rowspan="3">Valor p de diferencia entre niveles:<table><tr><th></th><th>Favorable</th><th>Difícil</th></tr><tr><td>Difícil</td><td>p < 0,05</td><td>--</td></tr><tr><td>Neutro</td><td>P > 0,05</td><td>p < 0,05</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>NEUTRO</td><td>71% (24%)</td></tr>
<tr><td>DIFICIL</td><td>66% (26)%</td></tr>
</table>

Como se observa en la tabla 9, los menores porcentajes de aciertos se presentan en los ítems con gap fraccional difícil, los que se diferencias significativamente de los ítems con gap favorable y de los ítems con gap neutro. No se observa una diferencia significativa entre los ítems con gap favorable y gap neutro.

La evaluación de los efectos de la fuerza de la congruencia en los tiempos de respuesta que obtuvieron los participantes en los ítems congruentes e incongruentes sin componentes comunes se realizó en conjunto con la variable congruencia a través de un Anova multifactorial de medidas repetidas, el que indica que no hay efectos de interacción entre la congruencia y la fuerza de la congruencia, Chi^2 (1) = 3,4; valor $p > 0,05$. Sin embargo, se encontraron efectos principales de la fuerza de la congruencia Chi^2 (1) = 15,7; valor $p < 0,01$, lo que implica que los estudiantes obtuvieron menor cantidad de aciertos al responder ítems con congruencia fuerte (*ME= 78%; SD*= 11%) que al responder los ítems con congruencia normal cuando no tienen componentes comunes (no fuerte) (*ME*= 83%*; SD*= *1*2%).

Memoria y tasa de aciertos.

Al igual que con los resultados de los tiempos de respuesta, se realizaron análisis de correlación entre las diferentes pruebas de memoria y la tasa de aciertos con los puntajes obtenidos por cada participante en cada una de las pruebas de memoria. Los resultados no arrojan una correlación significativa entre ambas variables, presentando puntuaciones homogéneas en cada dimensión. La tabla 10 presenta los resultados de las correlaciones entre cada categoría.

Tabla 10: Correlaciones memoria y tasa de acierto.

Ítem/Memoria	*DÍGITOS, p 1*	*DÍGITOS, p2*	*DÍGITOS, p 3*	*HECHOS ARITMÉTICOS*	*LETRAS Y NÚMEROS*
CONGRUENTE	0,123549077	0,217660161	0,125575275	0,415972335	-0,108605539
INCONGRUENTE	0,112302843	0,079279379	-0,137798918	0,23140436	-0,144914406
NEUTRO	0,013281165	0,08711907	-0,105467809	0,168366991	-0,148598728
CC	0,134729373	0,148606321	0,002057655	0,31475974	-0,085461514
NCC	0,082712562	0,156483039	-0,03810774	0,333297261	-0,187941784
GAP FAV	0,040656255	0,134847945	0,039082109	0,332705867	-0,105548343
GAP NEUT	0,156089742	0,217557256	0,216695054	0,392513297	-0,084416932
GAP DIF	0,162260417	0,343438152	0,114166004	0,251079478	0,03448759
NO FUERTE	0,092550222	0,168521837	-0,010213115	0,363278577	-0,215512668
FUERTE	0,127053713	0,173494734	0,023503913	0,385185778	-0,140538209

ANÁLISIS DE AGRUPACIÓN

De acuerdo al diseño experimental factorial de 2 componentes comunes (con componentes comunes/sin componentes comunes) x 3 nivel de congruencia (congruente/neutro/incongruente), se calcularon los porcentajes de respuestas correctas por cada uno de los 5 grupos de ítems y se utilizaron estos datos para realizar un algoritmo de agrupación a través de “k-means clustering”, el que arrojó como mejor solución k=3, obteniendo de esta forma 3 grupos de estudiantes, cuyos desempeños en la prueba son distintos entre sí. La tabla 11 presenta los resultados obtenidos por el algoritmo de agrupación de acuerdo al desempeño de los estudiantes en cada tipo de ítem.

Tabla 11: Agrupación con k-mean clustering de acuerdo al desempeño por tipo de ítem.

Grupo	**n**	**cc_cong**	**cc_inco**	**ncc_cong**	**ncc_inco**	**ncc_neut**
1	31	97%	97%	84%	88%	95%
2	12	96%	98%	47%	96%	96%
3	5	65%	85%	52%	72%	76%

A continuación, se realizará un análisis individual del tiempo de respuesta por cada grupo y posteriormente un análisis de la tasa de aciertos por grupo.

1. TIEMPOS DE RESPUESTA

- <u>Grupo 1</u>

Al aplicar una Anova multifactorial de medidas repetidas para el modelo factorial de 2x3 se encontró un efecto de interacción entre las variables componentes comunes y congruencia sobre los tiempos de respuesta de los participantes de este grupo Chi^2 (1) = 19.642; valor $p < 0,01$.

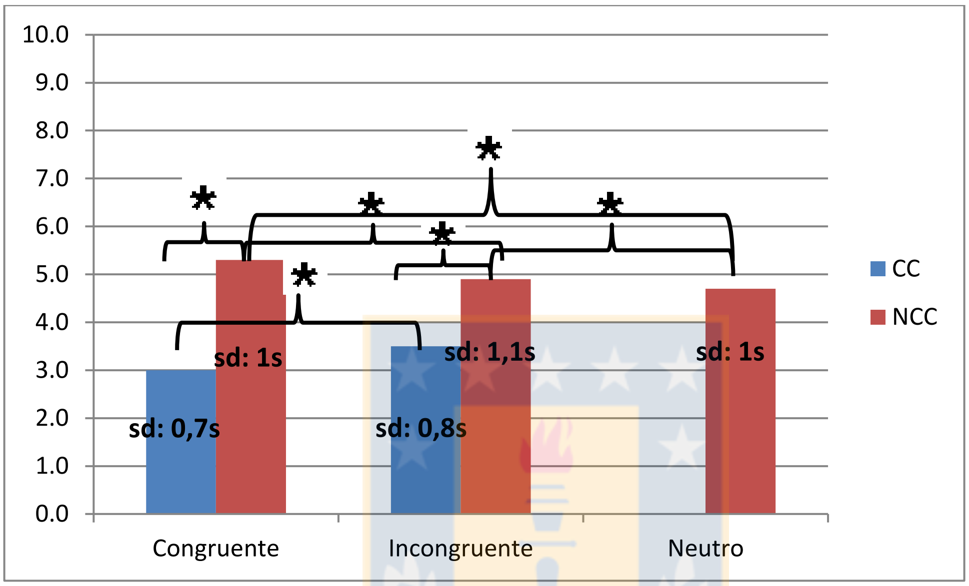


Gráfico 3: Efectos de interacción de la variable componentes comunes y congruencia en los tiempos de respuesta.

Los resultados obtenidos al profundizar en el efecto de la interacción de las variables componentes comunes y congruencia se muestran en el gráfico 3 y establecen que el tiempo de respuesta, obtenido por los participantes del grupo 1 en los ítems congruentes con componentes comunes es estadísticamente menor al tiempo de respuesta obtenido en los ítems congruentes sin componentes comunes (t(31) =-15,6; p <0,001); y que a su vez, los ítems incongruentes con componentes comunes se respondieron en un tiempo estadísticamente menor al tiempo que obtuvieron al contestar los ítems incongruentes sin componentes comunes (t(31)= 8,9; p <0,001).

También se encontró que los tiempos de respuesta obtenidos por el grupo 1 entre niveles de congruencia son estadísticamente diferentes en ausencia de componentes comunes. La interacción muestra que el tiempo de respuesta obtenido al responder a los ítems congruentes sin componentes comunes es estadísticamente mayor al tiempo obtenido en contestar ítems incongruentes sin componentes comunes (t(31) =3,7; p <0,001), además que el tiempo obtenido en los ítems congruentes es estadísticamente mayor al tiempo obtenido en los ítems neutros sin componentes comunes (t(31) =6,8; p <0,001). Asimismo, el tiempo de respuesta obtenido en los ítems incongruentes sin componentes comunes es estadísticamente mayor al tiempo de respuesta obtenido en los ítems neutros sin componentes comunes ($t(31) = 2,1$; $p < 0,05$).

Al comparar las variables con componentes comunes, se tiene que los participantes obtuvieron menores tiempos de respuesta en los ítems congruentes que en los ítems incongruentes ($t(31) = 5,17$; $p < 0,001$).

En el Anova multifactorial también se encontraron efectos principales de la variable componentes comunes: $Chi^2\,(1) = 291.403$; valor $p < 0,01$, lo que implica que el tiempo de respuesta de los ítems con componentes comunes (*Me= 3,2s; SD= 0,8s*) es estadísticamente menor al tiempo de respuesta de los ítems sin componentes comunes (*Me= 4,9s; SD= 1,1s*), además, se encontraron efectos principales de la variable congruencia $Chi^2\,(2) = 33.851$; valor $p < 0,01$, es decir, que hay diferencias significativas entre los niveles de la congruencia, para identificar dichas diferencias se realizó un test de Tukey que entrega los valores p de significancia estadística para cada combinación de niveles de la variable congruencia. Los resultados del test de Tukey se muestran en la tabla 12.

Tabla 12: Efectos principales de la variable congruencia.

<table>
<tr><th></th><th>NIVELES</th><th>MEDIA (SD)</th><th>SIGNIFICANCIA ESTADÍSTICA</th></tr>
<tr><td rowspan="3">CONGRUENCIA</td><td>CONGRUENTE</td><td>4102ms (700ms)</td><td rowspan="3">Valor p de diferencia entre niveles:<table><tr><th></th><th>Congruente</th><th>Incongruente</th></tr><tr><td>Inco.</td><td>p > 0,05</td><td>--</td></tr><tr><td>Neutro</td><td>p< 0,05</td><td>p < 0,05</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>INCONGRUENTE</td><td>4127ms (800ms)</td></tr>
<tr><td>NEUTRO</td><td>4,607ms (900ms)</td></tr>
</table>

Como se observa en la tabla 12, los menores tiempos de respuesta se presentan en los ítems congruentes e incongruentes, los que se diferencian estadísticamente con el tiempo de respuesta obtenido en ítems neutros. No se presentan diferencias significativas entre los tiempos de respuesta obtenidos en ítems congruentes e incongruentes.

La aplicación de una Anova multifactorial de medidas repetidas para evaluar la influencia de las variables gap fraccional y fuerza de la congruencia sobre los tiempos de respuesta obtenidos en los ítems congruentes sin componentes comunes señala un efecto de interacción entre ambas variables sobre los tiempos de respuesta de los estudiantes del grupo 1, valores $Chi^2\,(2) = 7.98$; valor $p < 0,05$. El gráfico 4 presenta los resultados de la interacción.

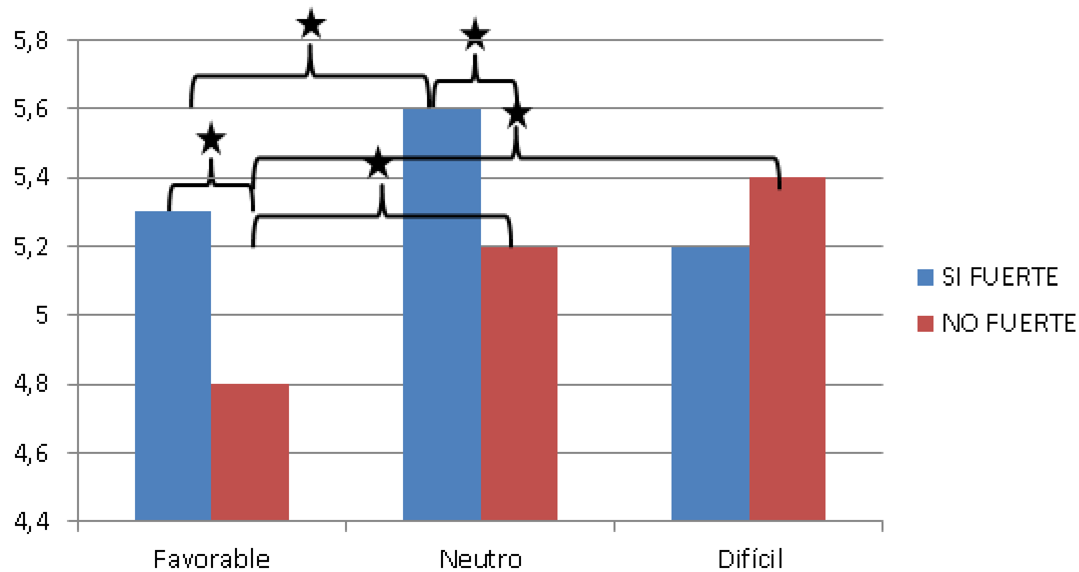


Gráfico 4: Efectos de interacción entre variables fuerza de la congruencia y gap fraccional.

En el gráfico 4 se pueden observar los resultados obtenidos acerca de la interacción entre los distintos niveles de la variable fuerza de la congruencia y gap fraccional, en el que se muestra, por una parte, que cuando los ítems tienen gap favorable, hay una diferencia significativa en los tiempos de respuesta de aquellos ítems fuertemente congruentes y aquellos con congruencia normal (no fuerte) ($t(30)=2,33$; $p < 0,05$). Por otro lado, ~~en la dirección contraria~~, se encuentra que el tiempo de respuesta obtenido en los ítems con gap neutro y fuertemente congruentes es estadísticamente mayor al tiempo de respuesta obtenido en los ítems con gap neutro con congruencia normal ($t(30)=2,99$; $p < 0,05$). Sin embargo, no se encuentran diferencias significativas entre el tiempos de respuesta obtenido en los ítems con gap difícil de acuerdo a la fuerza de la congruencia, de manera que el tiempo obtenido en los ítems con gap difícil y congruencia fuerte no presenta diferencias significativas con el tiempo de respuesta obtenido en los ítems con gap difícil y congruencia normal ($t(30)=1$; $p > 0,05$).

De estos resultados, se infiere que los estudiantes realizaron un mayor esfuerzo cognitivo al procesar las fracciones con gap favorable y gap neutro cuando son fuertemente congruentes, que al procesar fracciones con gap favorable y neutro cuando su congruencia es normal, aunque cuando el gap es difícil no importa el tipo de fuerza que tenga el ítem, el esfuerzo cognitivo que emplea el estudiante de matemática no parece ser distinto.

Se encontró también que el tiempo de respuesta obtenido en los ítems que tienen gap favorable y congruencia normal (no fuerte) es estadísticamente menor al tiempo de respuesta obtenido en los ítems que tienen gap difícil y congruencia normal ($t(30)=2,38$; $p < 0,05$). Por otra parte, el tiempo de respuesta obtenido en los ítems que tienen gap favorable y congruencia normal (no fuerte) es menor que el obtenido en la variable neutro y congruencia normal (no fuerte) ($t(30)=2,24$; $p < 0,05$). Sin embargo, los tiempos de respuesta entre los ítems con gap difícil y congruencia normal no presentan diferencias significativas con los tiempos de respuesta obtenidos al contestar a los ítems con gap neutro y congruencia normal ($t(30) = 1,1$; $p > 0,05$).

También se observan efectos principales de la variable gap fraccional ($Chi^2 (2) = 7,7$; valor $p < 0,05$) en los tiempos de respuesta obtenidos por los participantes en la dimensión de ítems congruentes sin componentes comunes, lo que significa que hay diferencias significativas entre los niveles del gap fraccional, para averiguar entre qué niveles están esas diferencias se realiza un test de Tukey, los datos obtenidos se encuentran en la tabla 13. Por otra parte, la variable fuerza de la congruencia no presenta efectos principales sobre los tiempos de respuesta de los participantes del grupo 1 ($Chi^2 (1) = 1,3$; valor $p > 0,05$).

Tabla 13: Efectos principales del gap fraccional en los tiempos de respuesta, grupo 1.

<table>
<tr><th></th><th>NIVELES</th><th>MEDIA (SD)</th><th>PRUEBA DE TUKEY</th></tr>
<tr><td rowspan="3">GAP FRACCIONAL</td><td>FAVORABLE</td><td>5095ms (1149ms)</td><td rowspan="3">Valor p de diferencia entre niveles:
<table><tr><th></th><th>Favorable</th><th>DIficil</th></tr><tr><td>Difícil.</td><td>p > 0,05</td><td>--</td></tr><tr><td>Neutro</td><td>P < 0,05</td><td>p > 0,05</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>NEUTRO</td><td>5400ms (1000ms)</td></tr>
<tr><td>DIFÍCIL</td><td>5281ms (1200ms)</td></tr>
</table>

La tabla 13 muestra que los participantes del grupo 1 se demoran un tiempo significativamente menor en contestar a los ítems con gap favorable que al contestar ítems con gap neutro, sin embargo, parecen requerir del mismo esfuerzo cognitivo para responder a los ítems con gap difícil y gap neutro, puesto que los tiempos de respuesta en los ítems con gap neutro no presentan diferencias significativas con los ítems con gap difícil.

- <u>Grupo 2</u>

Al aplicar una Anova multifactorial de medidas repetidas para el modelo factorial de 2x3 se encontró un efecto de interacción entre las variables componentes comunes y congruencia sobre los tiempos de respuesta de los participantes de este grupo Chi^2 (1) = 95,341; valor p < 0,01.

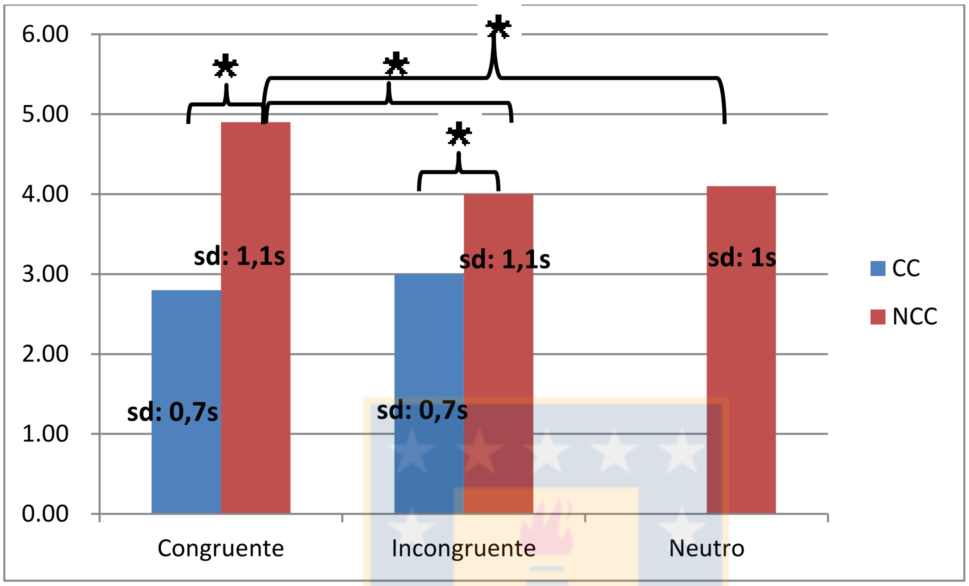


Gráfico 5: Efectos de interacción de la variable componentes comunes y congruencia en los tiempos de respuesta de los participantes del grupo 2.

Los resultados obtenidos al explorar el efecto de la interacción de las variables componentes comunes y congruencia a través de sucesivas pruebas t de Student informan diferencias significativas entre los tiempos de respuesta obtenidos en los niveles de congruencia (congruente/incongruente), de acuerdo a la presencia o ausencia de componentes comunes, ya que las pruebas t de Student informan que el tiempo de respuesta en los ítems congruentes sin componentes comunes es significativamente mayor al tiempo de respuesta obtenido en los ítems congruentes con componentes comunes (t(11) =7,3; p < 0,001); mientras que el tiempo de respuesta obtenido en los ítems incongruentes sin componentes comunes es estadísticamente mayor al tiempo de los ítems incongruentes con componentes comunes. (t(11) =4,6; p < 0,001). Lo que significa que los estudiantes de este grupo requieren más esfuerzo cognitivo en ítems sin componentes comunes que en ítems con componentes comunes.

Por otra parte, el tiempo de respuesta entre los ítems congruentes sin componentes comunes es estadísticamente mayor al tiempo de respuesta obtenido en los ítems incongruentes sin componentes comunes (t(11) =3,53; p < 0,01). Al igual que la diferencia entre los tiempos de respuesta obtenidos en los ítems congruentes sin componentes comunes es estadísticamente mayor a los tiempos de respuesta obtenidos en los ítems neutros sin componentes comunes ((t(11) =5,11; p < 0,01). Lo anterior implicaría que los estudiantes de matemática del grupo 2 realizan mayores esfuerzos cognitivos al procesar fracciones congruentes sin componentes comunes, que al procesar fracciones incongruentes o neutras sin componentes comunes.

Respecto a los ítems con componentes comunes, el análisis no arrojó una diferencia significativa entre los tiempos de respuesta obtenidos entre ítems congruentes e incongruentes ($t(47)=1,26$; $p > 0.05$).

En el Anova multifactorial también se encontraron efectos principales de la variable componentes comunes Chi^2 (1) = 95,34; valor $p < 0,01$, lo que implica que el tiempo de respuesta de los ítems con componentes comunes (*Me= 2,9s; SD= 0,7s*) es estadísticamente menor al tiempo de respuesta de los ítems sin componentes comunes (*Me= 4,3s; SD= 1,1s*), además, se encontraron efectos principales de la variable congruencia Chi^2 (2) = 14,1; valor $p < 0,01$, es decir, que hay diferencias significativas en los tiempos de respuesta obtenidos entre los distintos niveles de la congruencia. Para identificar dichas diferencias se realizó un test de Tukey que entrega los valores p de significancia estadística para cada combinación de niveles de la variable congruencia. Los resultados del test de Tukey se muestran en la tabla 14.

Tabla 14: Efectos principales de la variable congruencia

<table>
<tr><th></th><th>NIVELES</th><th>MEDIA (SD)</th><th colspan="3">PRUEBA DE TUKEY</th></tr>
<tr><td rowspan="3">CONGRUENCIA</td><td>CONGRUENTE</td><td>3781ms (1421ms)</td><td colspan="3" rowspan="3">Valor p de diferencia entre niveles:
<table><tr><th></th><th>Congruente</th><th>Incongruente</th></tr><tr><td>Inco.</td><td>p < 0,05</td><td>--</td></tr><tr><td>Neutro</td><td>P > 0,05</td><td>p < 0,05</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>INCONGRUENTE</td><td>3512s (1126ms)</td></tr>
<tr><td>NEUTRO</td><td>4100ms (987ms)</td></tr>
</table>

En la tabla 14 se puede observar que los tiempos de respuesta empleado en resolver los ítems incongruentes son significativamente menores a los tiempos obtenidos en los ítems congruentes y en los ítems neutros. Sin embargo, el tiempo de respuesta de los ítems congruentes no presenta diferencias significativas con el tiempo obtenido en los ítems neutros. Lo anterior implica que el grupo 1 requiere de un esfuerzo cognitivo menor para procesar ítems incongruentes en comparación con los congruentes y neutros.

La aplicación de la Anova multifactorial para evaluar la influencia del gap fraccional y la fuerza de la congruencia en las respuestas de los participantes del grupo dos en los ítems congruentes sin componentes comunes no arroja significancia para el efecto de interacción de las variables: Chi^2 (2) = 2; valor $p > 0,05$. De la misma forma, no se reportan efectos principales de la variable gap fraccional (Chi^2 (1) = 1,05; valor $p > 0,05$), ni de la variable fuerza de la congruencia (Chi^2 (1) = 0,3; valor $p > 0,05$). Lo que significa que el esfuerzo cognitivo de los estudiantes del grupo 2 no fue mayor al contestar cada uno de los niveles del gap, incluso al interactuar con la fuerza de la congruencia.

La evaluación de los efectos de la fuerza de la congruencia en los tiempos de respuesta que obtuvieron los participantes en los ítems congruentes e incongruentes sin componentes comunes se realizó en conjunto con la congruencia a través de un Anova multifactorial de medidas repetidas, el que indica que no hay efectos de interacción de la congruencia y la fuerza de la congruencia, Chi^2 (1) = 0,11; valor p > 0,05. Además, tampoco se encontraron efectos principales de la fuerza de la congruencia sobre los tiempos de respuesta de los participantes Chi^2 (1) = 0,27; valor p > 0,05**.** Es decir, que, en este grupo, el esfuerzo cognitivo utilizado para contestar ítems fuertemente congruentes no es mayor al utilizado para contestar aquellos ítems con congruencia normal.

- <u>Grupo 3</u>

Al aplicar una anova multifactorial de medidas repetidas para el modelo factorial de 2x3 no se encontró un efecto de interacción entre las variables componentes comunes y congruencia sobre los tiempos de respuesta de los participantes de este grupo: Chi^2 (1) = 0,35; valor p > 0,05. De la misma forma, no se reportan efectos principales de la variable componentes comunes: Chi^2 (1) = 1,7; valor p > 0,05; ni de la variable congruencia: Chi^2 (2) = 1,6; valor p > 0,05.

La evaluación de la variable gap fraccional se realiza en conjunto con la variable fuerza de la congruencia en los ítems congruentes sin componentes comunes, los resultados de la anova multifactorial indican que no hay efectos de interacción entre ambas en los tiempos de respuesta obtenidos por el grupo 3 (Chi^2 (2) = 1,9 valor p > 0,05.). Tampoco hay efectos principales de las variables en juego, obteniendo Chi^2 (1) = 0,5; valor p > 0,05 para la variable fuerza de congruencia y Chi^2 (2) = 1,5; valor p > 0,05 para la variable gap fraccional.

En los ítems congruentes e incongruentes sin componentes comunes se analiza la fuerza de la congruencia en conjunto con la variable congruencia, el anova multifactorial aplicado a dichas variables indica que no influyen en los tiempos de respuesta de los participantes del grupo 3, ya que los efectos de la interacción encontrado son Chi^2 (1) = 0,4; valor p > 0,05. Así también, no se encontró un efecto principal de la fuerza de la congruencia sobre los tiempos de respuesta obtenidos por los participantes de este grupo en los ítems congruentes e incongruentes sin componentes comunes (Chi^2 (1) = 0,6; valor p > 0,05.)

Lo anterior implica que los tiempos de respuesta obtenidos por los participantes de este grupo no pueden ser explicados por ninguna de las variables que se miden en el experimento.

2. TASA DE ACIERTOS

- Grupo 1

De acuerdo al experimento factorial de 2 componentes comunes x 3 de congruencia se realizó un anova multifactorial de medidas repetidas, donde no se encontró un efecto de interacción sobre las tasas de aciertos de los participantes de este grupo: Chi^2 (1) = 2,6; p >0,05. Sin embargo, se encontraron efectos principales de la variable componentes comunes (Chi^2 (1) = 89,67; p <0,05), lo que significaría que los participantes de este grupo tuvieron mayores aciertos en los ítems con componentes comunes (Me=97%; SD=3%) que en los ítems sin componentes comunes (Me=89% ; SD=4%).

Además, se encontró un efecto principal de la variable congruencia (Chi^2 (2) = 61,6; p <0,05), esto quiere decir que hay diferencias estadísticamente significativas entre las tasas de aciertos de los niveles de la variable congruencia. Para explorar estas diferencias se aplicó una prueba de Tukey que entrega valores p de significancia para la diferencia de porcentajes de respuestas correctas entre cada nivel, los resultados se muestran en la tabla 15.

Tabla 15: efectos principales de la variable congruencia

<table>
<tr><th></th><th>NIVELES</th><th>MEDIA (SD)</th><th>PRUEBA DE TUKEY</th></tr>
<tr><td rowspan="3">CONGRUENCIA</td><td>CONGRUENTE</td><td>91% (5%)</td><td rowspan="3">Valor p de diferencia entre niveles:
<table><tr><th></th><th>Congruente</th><th>Incongruente</th></tr><tr><td>Inco.</td><td>p > 0,05</td><td>--</td></tr><tr><td>Neutro</td><td>P < 0,05</td><td>p > 0,05</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>INCONGRUENTE</td><td>93% (5%)</td></tr>
<tr><td>NEUTRO</td><td>95% (6%)</td></tr>
</table>

La tabla 15 muestra que los porcentajes de aciertos en los ítems neutros son significativamente mayores a las tasas de aciertos obtenidas en los ítems congruentes. Sin embargo, no existen diferencias significativas al comparar con la tasa de aciertos de los ítems incongruentes. Así como tampoco hay diferencias significativas entre ítems congruentes e incongruentes sin componentes comunes.

La evaluación de la influencia de la variable gap fraccional se realiza en conjunto con la fuerza de la congruencia en los ítems congruentes sin componentes comunes. Los resultados de la Anova multifactorial informan que no hay un efecto de interacción sobre las tasas de aciertos obtenidos por el grupo uno (Chi^2 (2) = 4,7; p > 0,05). Tampoco hay efectos principales de la variable gap fraccional en los porcentajes de respuestas correctas obtenidos por los participantes, Chi^2 (2) = 0,2; p > 0,05. Sin embargo, se encontraron efectos principales de la variable congruencia fuerte en las tasas de aciertos de los participantes en los ítems congruentes sin componentes comunes (Chi^2 (2) = 14,8; p < 0,001), de modo que la muestra obtuvo menos aciertos en los ítems fuertemente congruentes sin componentes comunes (Me= 80%; SD=12%) que en los ítems con congruencia normal sin componentes comunes (Me= 89%; SD=10%).

Dado que la variable fuerza de la congruencia se manipula en los ítems congruentes e incongruentes sin componentes comunes, se aplicó una Anova multifactorial, incluyendo a la variable congruencia, donde se encontró efectos de interacción de ambas variables sobre las tasas de aciertos obtenidas en los ítems congruentes e incongruentes sin componentes comunes (Chi^2 (1) = 4,2; p < 0,05), los resultados de dicha interacción se muestran en el grafico 6.

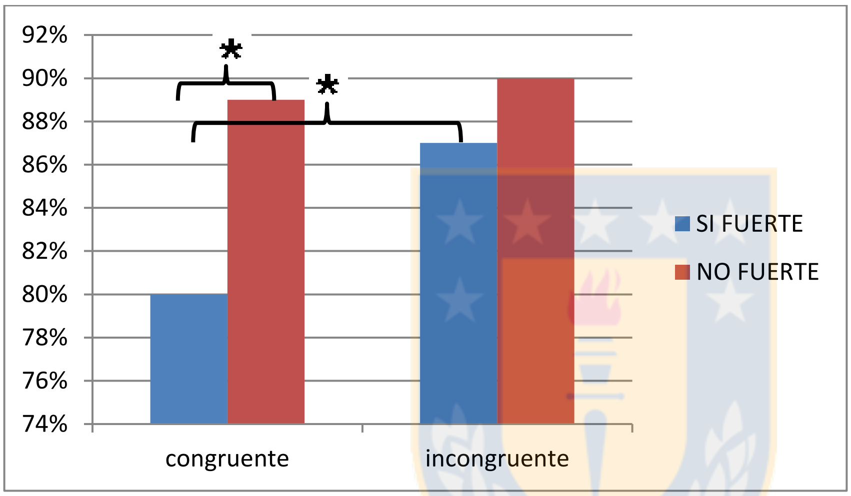


Gráfico 6: Efectos de interacción en la tasa de aciertos

El gráfico anterior profundiza en las interacciones que se producen entre la variable congruencia y fuerza de la congruencia en los ítems congruentes e incongruentes sin componentes comunes, dichos resultados fueron encontrados utilizando prueba t de Student para muestras pareadas y evidencian que la tasa de aciertos en los ítems fuertemente congruentes es estadísticamente menor a la tasa de aciertos de los ítems fuertemente incongruentes (t(30)=2,11); p< 0,05), lo que significa que los estudiantes respondieron más asertivamente los ítems incongruentes que los ítems congruentes cuando ambos tienen congruencia fuerte.

Además, se encontraron diferencias significativas entre los niveles de la fuerza de la congruencia cuando los ítems son congruentes (t(30)=3,46; p< 0,05), lo que significa, que la tasa de aciertos de los participantes en los ítems fuertemente congruentes es estadísticamente menor a la tasa de aciertos de los ítems congruentes (congruencia simple).

También se encontraron efectos principales de la variable fuerza de la congruencia Chi^2 (1) = 16,2; p < 0,05, indicando que los ítems fuertemente congruentes (Me=83%; SD=7%) fueron respondidos menos acertadamente que los ítems con congruencia normal (Me=89%; SD=7%)

- <u>Grupo 2</u>

De acuerdo al experimento factorial de 2 componentes comunes x 3 de congruencia se realizó un Anova multifactorial de medidas repetidas, donde se encontró un efecto de interacción sobre las tasas de aciertos de los participantes de este grupo: Chi^2 (1) = 20,8; p <0,05. El análisis de la interacción entre las variables se presenta en el gráfico 7

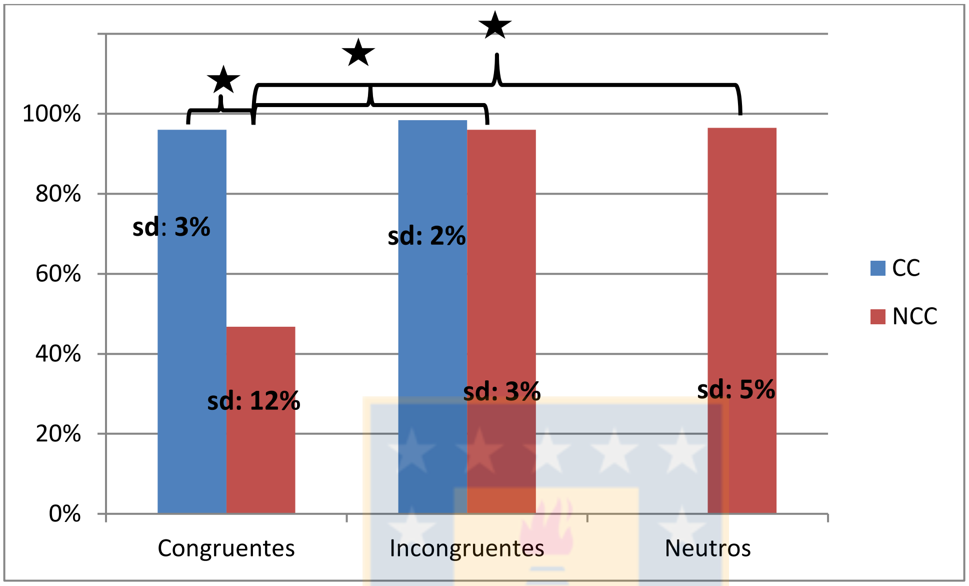


Grafico 7: Efectos de interacción de variables componentes comunes y congruencia

Los resultados que se muestran en el grafico 8 se obtuvieron mediante la aplicación de pruebas t de Student e informan que la tasa de aciertos entre los ítems congruentes sin componentes comunes es estadísticamente menor a la que se obtuvo en los ítems incongruentes sin componentes comunes (t(11)=11,2; p< 0,001) y en los ítems neutros sin componentes comunes (t(11)=11,9; p< 0,001). Lo anterior implica que los participantes del grupo 2 respondieron más acertadamente a los ítems incongruentes y neutros sin componentes comunes, que a los ítems congruentes sin componentes comunes.

Además, los participantes tuvieron porcentajes de aciertos estadísticamente mayores en los ítems congruentes con componentes comunes, que en aquellos congruentes sin componentes comunes (t(11)=13,1; p< 0,001)), sin embargo, la tasa de aciertos de los participantes en los ítems incongruentes con componentes comunes no presenta una diferencia estadística con la tasa de aciertos en los ítems incongruentes sin componentes comunes (t(11)=1,9; p > 0,05).

Los resultados también indican efectos principales de la variable componentes comunes Chi^2 (1) = 154,1; p <0,001, lo que significa que los ítems con componentes comunes (Me= 97%; SD=2%) se respondieron con más aciertos que los ítems sin componentes comunes (Me= 80%; SD=3%). Se encontraron también efectos principales de la variable congruencia (Chi^2 (2) = 153,9; p <0,001), lo que implica que las tasas de aciertos de los participantes en cada nivel de la congruencia es estadísticamente distinta.

Para encontrar los pares de niveles que se diferencian estadísticamente se realiza un test de Tukey que entrega valores p de significancia estadística para cada una de los pares de niveles, los resultados se muestran en la tabla 16.

Tabla 16: Efectos principales de la variable congruencia

<table>
<tr><th></th><th>NIVELES</th><th>MEDIA (SD)</th><th>PRUEBA DE TUKEY</th></tr>
<tr><td rowspan="3">CONGRUENCIA</td><td>CONGRUENTE</td><td>72% (6%)</td><td rowspan="3">Valor p de diferencia entre niveles:<table><tr><th></th><th>Congruente</th><th>Incongruente</th></tr><tr><td>Inco.</td><td>p < 0,05</td><td>--</td></tr><tr><td>Neutro</td><td>P < 0,05</td><td>p > 0,05</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>INCONGRUENTE</td><td>97% (2%)</td></tr>
<tr><td>NEUTRO</td><td>96% (5%)</td></tr>
</table>

La tabla 16 muestra que la tasa de aciertos obtenida en los ítems congruentes es estadísticamente menor a las tasas de aciertos obtenidas en los ítems incongruentes y neutros. Pero, la tasa de aciertos de los ítems incongruentes no presenta diferencias significativas en relación con la tasa obtenida en los ítems neutros.

Para evaluar los efectos del gap fraccional se aplicó una anova multifactorial de medidas repetidas en los ítems congruentes sin componentes comunes, incluyendo a la variable fuerza de la congruencia, cuyos resultados no muestran efectos de interacción de las variables en las tasas de aciertos de los participantes del grupo 2 (Chi^2 (2) = 1,4; p >0,05). Además, no se encontraron efectos principales de la variable fuerza dela congruencia (Chi^2 (1) = 0,2; p > 0,05). Pese a esto, se encontraron efectos principales de la variable gap fraccional (Chi^2 (2) = 15,9; p <0,001), lo que implica que las tasas de aciertos entre los distintos niveles del gap fraccional son estadísticamente distintos. Para saber cuáles son los niveles que se diferencian, se realizó un test de Tukey cuyos resultados se muestran en la tabla 17.

Tabla 17: efectos principales del gap fraccional

<table>
<tr><th></th><th>Niveles</th><th>Media (desviación estandar)</th><th>Resultado prueba de Tukey</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Gap fraccional</td><td>Favorable</td><td>63% (20%)</td><td rowspan="3">Valor p de diferencia entre niveles:<table><tr><th></th><th>Favorable</th><th>Difícil</th></tr><tr><td>Difícil.</td><td>p < 0,05</td><td>--</td></tr><tr><td>Neutro</td><td>P < 0,05</td><td>p > 0,05</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Neutro</td><td>42% (13%)</td></tr>
<tr><td>Difícil</td><td>36% (26%)</td></tr>
</table>

Como se observa en la tabla 17, los menores porcentajes de aciertos se presentan en los ítems los ítems con gap difícil y neutro, cuyos porcentajes son estadísticamente menores a los obtenidos en los ítems con gap favorable. Se observa también, que la tasa de aciertos de los ítems con gap difícil no presenta una diferencia significativa con la de los ítems con gap neutro.

Respecto a la variable fuerza de la congruencia, se aplicó un anova multifactorial en conjunto con la variable congruencia, cuyos resultados arrojaron que no hay un efecto de interacción entre ambas variables (Chi^2 (1) = 0,34; p > 0,05), pero sí un efecto principal de la variable fuerza de la congruencia (Chi^2 (1) = 4,7; p <0,05), lo que significa que la tasa de aciertos de los ítems con congruencia fuerte (Me=70%; SD=6%) se diferencian estadísticamente de la tasa de aciertos obtenida en los ítems con congruencia normal (Me= 75%; SD=6%).

- <u>Grupo 3:</u>

Al aplicar una Anova multifactorial de acuerdo al modelo factorial de 2 componentes comunes x 3 niveles de congruencia, no se encontraron efectos de interacción en las tasas de aciertos de los participantes del grupo 3 (Chi^2 (1) = 0,47; p > 0,05). Aunque se encontraron efectos principales de la variable componentes comunes (Chi^2 (1) = 6,5; p < 0,05), lo que significa que los participantes del grupo tres contestaron más acertadamente los ítems con componentes comunes (Me=75%; SD=7%) que aquellos sin componentes comunes (Me=67%; SD=6%).

También se encontraron efectos principales para la variable congruencia (Chi^2 (2) = 39,9; p < 0,001), lo que significa que los participantes del grupo 3 tuvieron diferencias estadísticas en los porcentajes de aciertos en cada nivel de la congruencia, para explorar dónde están esas diferencias se realiza un test de Tukey, cuyos resultados se muestran en la tabla 18,

Tabla 18: Efectos principales de la variable congruencia en las tasas de aciertos

<table>
<tr><th></th><th>NIVELES</th><th>MEDIA (SD)</th><th>RESULTADOS TEST DE TUKEY</th></tr>
<tr><td rowspan="3">CONGRUENCIA</td><td>CONGRUENTE</td><td>59% (15%)</td><td rowspan="3">Valor p de diferencia entre niveles:
<table><tr><th></th><th>Congruente</th><th>Incongruente</th></tr><tr><td>Inco.</td><td>p < 0,05</td><td>--</td></tr><tr><td>Neutro</td><td>P > 0,05</td><td>p > 0,05</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>INCONGRUENTE</td><td>78% (8%)</td></tr>
<tr><td>NEUTRO</td><td>76% (9%)</td></tr>
</table>

En la tabla 18 se observa que los participantes del grupo 3 en la variable congruente obtienen porcentajes de aciertos estadísticamente menores a los obtenidos en los ítems incongruentes, mientras que no se encuentran diferencias con la tasa de aciertos de los ítems neutros. Tampoco se encuentran diferencias significativas entre las tasas de aciertos de los ítems incongruentes y neutros.

El análisis de varianza multifactorial de medidas repetidas para evaluar la influencia del gap fraccional se realizó en conjunto con la fuerza de la congruencia, los resultados indican que no hay efectos de interacción entre las variables (Chi^2 (2) = 2; p > 0,05), así como tampoco hay efectos principales ni de la variable fuerza de la congruencia (Chi^2 (1) = 1,2; p > 0,05), ni de la variable gap fraccional (Chi^2 (2) = 2,6; p > 0,05).

Respecto a la variable fuerza de la congruencia, su influencia en las tasas de aciertos de los estudiantes del tercer grupo, se midió junto con la variable congruencia. El resultado arrojado por la Anova multifactorial informa que no hay efectos de interacción entre las variables fuerza de la congruencia y congruencia (Chi^2 (1) = 0,01; p > 0,05). Así como tampoco se encuentran efectos principales de la variable fuerza de la congruencia (Chi^2 (1) = 0,05; $p > 0,05$), lo que implica que los estudiantes de matemática de este grupo respondieron a los ítems con congruencia fuerte y congruencia simple (no fuerte) de forma homogénea.

CAPÍTULO 5: DISCUSION

1. Estrategias Cognitivas

Las evidencias en investigaciones sobre el procesamiento de fracciones en adultos, como las de Obersteiner et al. (2013) y la de Vamvakoussi et al. (2012) establecieron las bases para aplicar un experimento de comparación de fracciones a diversas poblaciones, en particular, a estudiantes de los últimos años de carreras especializadas en matemática como Pedagogía en Matemática y Computación e Ingeniería Civil de la Universidad de Concepción, con el objetivo de descubrir las estrategias cognitivas subyacentes al procesamiento de fracciones y estimar, a partir de ello, las estrategias metacognitivas que influyen en el desempeño de los expertos. Para lograr este objetivo, se aplicó un experimento de pares de fracciones, clasificadas según la congruencia (congruente, incongruente y neutra) y la presencia/ausencia de componentes comunes.

Investigaciones de Van Hoof et al. (2013) y Meert et al. (2010) predicen la aparición de dos tipos de procesamiento durante una tarea de comparación de fracciones: una representación componencial y una representación holística de la fracción; sin embargo, estos son dos extremos de un continuum, en que se genera una transición entre estos tipos de procesamiento, por tanto, el uso de uno u otro modelo va a depender del estado de madurez cognitiva de la persona. Los resultados obtenidos en el presente estudio con estudiantes de matemática arrojan evidencia a favor de esta hipótesis, puesto que se encontraron efectos de interacción entre las variables componentes comunes y congruencia. Los análisis sobre esta interacción informan que el tiempo en que se demoran en procesar fracciones congruentes o incongruentes con componentes comunes es significativamente menor al que se demoran en contestar aquellas congruentes o incongruentes sin componentes comunes, lo que confirmaría la primera hipótesis de la investigación.

De acuerdo a la teoría discutida en el marco teórico, el mayor tiempo de respuesta utilizado para responder a los ítems sin componentes comunes indica un mayor esfuerzo cognitivo del estudiante para procesar el ítem e intentar acceder a la magnitud de la fracción, es decir, reflejaría una estrategia de procesamiento holístico para responder a los ítems sin componentes comunes, mientras que el menor esfuerzo cognitivo mostrado en los ítems con componentes comunes, debido al menor tiempo de respuesta, se ha asociado a que las estrategias componenciales para resolver los ítems con componentes comunes son más rápidas e intuitivas, debido a que se comparan números enteros.

Respecto a la variable congruencia sin componentes comunes, sólo se registra que los ítems congruentes tardan más tiempo de procesamiento cognitivo en comparación con los ítems incongruentes y neutros, indicando que para los estudiantes de matemática el resolver dichos ítems es igualmente complejo. Los ítems neutros representan la línea base del experimento, aunque, dichos ítems tienen el mismo tipo de gap que los ítems incongruentes: gap favorable, por lo que el esfuerzo cognitivo similar entre estos grupos puede estar asociado a la utilización de estrategias relacionadas con el gap fraccional que, al ser favorables (distinto a los congruentes que pueden ser de distinta naturaleza), generan menos complejidad para estimar la magnitud de la fracción. Al respecto, investigadores como Meert et al (2010) han comentado cómo las magnitudes de los componentes pueden influenciar el acceso a la estimación de la magnitud de la fracción en juego.

Pese a lo anterior, en la dimensión de ítems congruentes sin componentes comunes no se encontraron efectos de interacción ni principales de las variables fuerza de la congruencia y gap fraccional sobre el tiempo de respuesta de la muestra, lo que sugiere que los estudiantes no realizan un procesamiento cognitivo más complejo con un tipo de ítem que con otro, por ejemplo, entre ítems con gap difícil y congruencia fuerte e ítems con gap favorable y congruencia normal. Lo anterior podría indicar la utilización de una misma estrategia cognitiva de procesamiento para resolver los ítems de la dimensión congruencia sin componentes comunes, estrategia que parece ser distinta a la utilizada en ítems incongruentes y neutros, pero que no realiza un esfuerzo cognitivo mayor para resolver los distintos tipos de ítems incluidos en la dimensión de ítems congruentes sin componentes comunes.

Lo anterior puede representar dos posturas contradictorias, puesto que pareciera ser que debido al gap fraccional hay mayores tiempos de respuesta en los ítems congruentes que en los incongruentes y neutros sin componentes comunes, pero el gap fraccional y la fuerza de la congruencia no parecen ser explicativos de ese mayor tiempo de respuesta. Sin embargo, cabe la posibilidad de que los resultados generales de la muestra estén sesgados por los puntajes de cada uno de los tres grupos, clasificados según el análisis de agrupación, quienes presentan diferentes estrategias, de acuerdo a las variables estudiadas, esto es, efectos de la variable fuerza de la congruencia para el grupo 1, mientras que el comportamiento del segundo grupo parece estar sesgado por el gap fraccional y el tercero, que muestra un comportamiento azaroso entre los distintos tipos de ítem como, se verá más adelante.

Respecto a la hipótesis número 2 sobre la influencia de la congruencia en las tasas de aciertos de los estudiantes de matemática, los resultados informan que, pese a que se encontraron efectos de interacción y principales de la variable congruencia, los efectos de ésta sobre los porcentajes de respuestas correctas están en dirección contraria a las investigaciones en las que se obtiene que los ítems congruentes son contestados más acertadamente que los ítems incongruentes (DeWolf y Vosniadou, 2011). En cambio, en el presente estudio se encontró que el efecto de congruencia sobre las tasas de aciertos de los participantes es estadísticamente significativa sólo cuando los ítems no tienen componentes comunes, habiendo más aciertos en los ítems incongruentes y en los ítems neutros sin componentes comunes que en los ítems congruentes sin componentes.

De lo anterior, se puede inferir que los ítems congruentes sin componentes comunes son los ítems que presentan mayor complejidad para los estudiantes de matemática, tanto por el mayor esfuerzo cognitivo que se requiere para resolverlos, como por la diferencia estadística que presentan sus tasas de aciertos en comparación con los demás ítems, en especial con los ítems incongruentes y neutros sin componentes comunes, cuyos porcentajes de aciertos son estadísticamente mayores al obtenido en los ítems congruentes cuando carecen de componentes comunes. Se añade además, que los ítems neutros sin componentes comunes parecen ser los ítems que menos complejidad presentan para los participantes, puesto que es una de las dimensiones en los que menores tiempos de respuesta se obtuvo, en promedio 0.1 segundos más que los ítems incongruentes (diferencia no significativa) y 0,5 segundos más que los congruentes (diferencia significativa); pero además, los ítems neutros son los que presentan tasas de aciertos significativamente mayores que sus pares sin componentes comunes. Para los ítems con componentes comunes en tanto, las tasas de aciertos entre los niveles de congruencia no presentan diferencias significativas, al igual que en sus tiempos de respuesta promedio, por lo que su nivel de complejidad es el mismo para los estudiantes de matemática.

Los resultados relacionados con la variable gap fraccional revelan que su influencia en el desempeño de los estudiantes de matemática sólo se muestra en las tasas de aciertos, donde los ítems con gap favorable y gap neutro son respondidos más acertadamente que los ítems con gap difícil (tabla 5), tal evidencia podría reflejar un uso indebido de ciertas estrategias de procesamiento en los ítems con gap difícil, como la estrategia de razonamiento por gap **(**Clarke y Roche, 2009; Faulkenberry y Pierce, 2011; Meert et al., 2010), que conduce a resultados correctos en ítems con gap favorable, pero a resultados incorrectos en ítems con gap difícil. Investigadores como Obersteiner et al. (2013) proponen que la estrategia de razonamiento por gap podría explicar el desempeño de adultos en la tarea de comparación de fracciones. Sin embargo, la idea que estudiantes especializados en matemática posean errores conceptuales acerca de la fracción que los conduzca a utilizar estrategias de razonamiento sin sustento teórico, como el razonamiento por gap, no parece posible, por lo que las evidencias indicarían un sesgo a favor del procesamiento del gap.

Al igual que el gap fraccional, la fuerza de la congruencia no tiene efectos significativos sobre los tiempos de respuesta de los estudiantes de matemática, señalando un esfuerzo cognitivo similar, tanto para procesar fracciones fuertemente congruentes como fracciones con congruencia simple o normal. Sin embargo, los resultados informan de un efecto principal de esta variable sobre las tasas de aciertos en los ítems congruentes e incongruentes sin componentes comunes, en los que los ítems con congruencia fuerte son respondidos con menos aciertos que los ítems con congruencia normal, independiente del nivel de congruencia al que pertenezcan (congruente/incongruente). Esto sugiere, por tanto, que los estudiantes de matemática no han superado completamente el sesgo hacia los números enteros, haciendo mejores estimaciones mientras más pequeños y cercanos estén las magnitudes de los componentes de la fracción, es decir, obteniendo mejores resultados en los ítems con congruencia normal.

Ahora bien, al analizar el desempeño de los estudiantes de matemática, de acuerdo a su rendimiento en cada tipo de ítem a través del análisis de agrupación, se encontraron dos grupos claramente diferenciados, considerando el tipo de respuestas proporcionadas en los ítems donde se manipula el gap fraccional y la fuerza de la congruencia. Dichas respuestas reflejan la utilización de al menos dos estrategias de procesamiento claramente diferenciables. En el primer grupo, compuesto de 31 estudiantes, pareciera que los estudiantes utilizan una estrategia denominada razonamiento residual (Meert et al., 2010) en la cual se utiliza la magnitud del gap fraccional para establecer de forma aproximada la magnitud de cada fracción. Se sugiere la utilización de esta estrategia, ya que el tiempo de respuesta para procesar las fracciones con gap difícil es estadísticamente mayor al tiempo utilizado para procesar las fracciones con gap favorable, más aún, el que dichas diferencias sólo se den en el nivel de congruencia simple (no fuerte), en el que los componentes de las fracciones no son tan diferentes entre sí, refleja un sesgo hacia la magnitud de los componentes de la fracción, que, de acuerdo a investigadores como DeWolf y Vosniadou (2014), influiría en el procesamiento de su magnitud.

Por otra parte, se encuentra que no hay diferencias entre las tasas de aciertos del grupo 1 de acuerdo a la naturaleza del gap, pero sí de la fuerza de la congruencia, lo que significa que efectivamente los estudiantes se apoyan en el gap de la fracción cuando procesan fracciones, sin embargo, el éxito en el acceso a la magnitud no está determinado por ello, sino por la magnitud de los componentes del ítem**.** De hecho, la estrategia de razonamiento residual permite la representación aproximada de la magnitud de una fracción, aproximación que se complejiza cuando se tratan fracciones que tienen componentes muy diferentes entre sí, como es el caso de las fracciones fuertemente congruentes, y con gap difícil, pudiendo provocar errores de decisión cuando se establecen comparaciones entre dos fracciones con distancias pequeñas entre ellas, como es el caso de los pares de fracciones presentes en el experimento.

Un segundo grupo, diferenciado a través del análisis de agrupación compuesto por 12 estudiantes de la muestra, parece estar fuertemente sesgado por la naturaleza del gap de una fracción, puesto que, aunque la variable gap fraccional no afecta los tiempos de respuesta de los participantes de este grupo en la dimensión de ítems congruentes sin componentes comunes, las tasas de aciertos sí son afectadas por la variable, causando más respuestas correctas en los ítems con gap favorable, que en aquellos con gap difícil y neutro, pese a que las tasas de acierto en estos últimos niveles del gap no presentan mayores diferencias. Además, las tasas de aciertos de los participantes de este grupo muestran excelentes resultados (mayores a un 96%) al resolver los ítems de todas las dimensiones, en las que el gap fraccional es siempre favorable por definición del ítem, excepto en aquella donde la naturaleza del gap fraccional varía. Tal comportamiento parece indicar que este grupo utiliza una estrategia de razonamiento por gap, la que establece que a mayor gap fraccional menor es la fracción y que utiliza, erróneamente, los mismos procesos cognitivos para comparar cualquier fracción, a saber: contar la diferencia entre los componentes de cada fracción, comparar dichas diferencias y establecer que la menor diferencia corresponde a la mayor fracción. La utilización de esta estrategia, por tanto, conducirá a errores en los ítems con gap difícil, pero no se reflejará en el esfuerzo cognitivo que se realiza, lo que calza con los resultados arrojados del análisis del grupo 2.

El tercer grupo de 5 participantes, encontrados en el análisis de agrupación, no presenta un comportamiento bien definido, ya que los tiempos de respuesta obtenidos por sus integrantes no pueden ser explicados por ninguna de las variables medidas en el experimento, ni siquiera la variable componentes comunes, la que de acuerdo a los resultados del análisis de las tasas de aciertos puede explicar su desempeño, puesto que presentan más aciertos cuando los ítems tienen componentes comunes que cuando no los tienen. Además, parece ser que el grupo 3 tiene tasas de aciertos estadísticamente menores en los ítems congruentes que en los incongruentes

Finalmente, considerando los resultados obtenidos en este estudio sobre el procesamiento cognitivo de los estudiantes de matemática y las variables que lo afecta, se puede inferir que aún existe un sesgo hacia los números naturales. Al respecto, una posible explicación es provista a través de una teoría llamada de doble proceso (Epstein, 1994; Evans & Over, 1996; Kahneman, 2000; Sloman, 1996; Stanovich, 1999) que predice el razonamiento que pareciera subyacer el desempeño de los especialistas en el procesamiento de fracciones. La teoría de doble proceso plantea que el ser humano puede responder a estímulos a través de dos razonamientos, por una parte, puede darse un proceso automático e intuitivo, que depende netamente de las creencias y conocimientos arraigados, como por ejemplo, el entendimiento natural e intuitivo acerca del número entero, y por otra, un razonamiento más lento y controlado, que requiere un esfuerzo cognitivo mayor y que no siempre es posible llevar a cabo, incluso cuando se ha logrado una adquisición conceptual del objeto (la fracción). El conocimiento primitivo acerca de los números puede irrumpir en el desarrollo de un problema, originando errores sistemáticos en el desempeño (Sloman, 1996).

2. Estrategias metacognitivas.

Investigaciones similares a la presentada, realizadas a poblaciones de niños, adultos y adultos especialistas (Gómez et al. (2014); Obersteiner et al., (2013) y Vamvakoussi et al. (2012) sugieren que el desempeño en el procesamiento de fracciones va mejorando con la edad, en cuanto que los niños informan de una baja tasa de asertividad general y un gran sesgo hacia las estrategias basadas en números enteros (Gómez et al. (2014). Los adultos, parecen no sesgarse demasiado por la congruencia, arrojando mejores resultados en los ítems incongruentes que en los congruentes, posiblemente debido a que un pobre conocimiento sobre las fracciones les advierte que la fracción no es como un número natural, por lo que si se dejan llevar por sus propiedades puede conducirlos a error (Vamvakoussi et al., 2012**).** El presente estudio, por su parte, refleja un mayor dominio de estrategias para comparar fracciones en comparación con las investigaciones anteriores, ya que presentan buenos resultados en la mayoría de las dimensiones, lo que implicaría una selección cuidadosa de estrategias de procesamiento para brindar una respuesta correcta. Estos se puede apreciar al observar cómo los tiempos de respuesta de los estudiantes de matemáticas aumentan a medida que la dificultad en el procesamiento de los ítems demanda estrategias más elaboradas, por ejemplo, en la categoría de ítems congruentes sin componentes comunes se puede utilizar la estrategia de razonamiento por gap sólo para algunas fracciones, mientras que para otras es necesario estrategias más complejas. Una de ellas es cuando se procesan 3 magnitudes para acceder a la magnitud de una fracción, que de acuerdo a los resultados discutidos, pareciera ser la que utiliza la mayoría de la muestra (31 estudiantes del grupo 1) al enfrentarse a los ítems sin componentes comunes.

Finalmente, el estudio de Obersteiner et al. (2013) sobre profesionales especialistas en matemática informa de tiempos de respuesta menores a los resultados obtenidos por estudiantes de matemática en el presente estudio, y mejores tasas de asertividad en los ítems sin componentes comunes, aunque pareciera ser que el desempeño de los especialistas también es afectado por un sesgo hacia los números enteros, debido a las diferencias en tiempos de respuesta que se encuentran entre los niveles de la congruencia (congruente/incongruente/neutro), donde se observan menores tiempos en ítems incongruentes cuando estos no tienen componentes comunes, mientras que obtienen tiempos más altos cuando procesan ítems incongruentes con componentes comunes. Pese a lo anterior, las tasas de aciertos de los expertos, en comparación con los estudiantes de matemática, son significativas especialmente cuando se trata de contestar correctamente ítems congruentes sin componentes comunes.

Al contrastar la calidad de los resultados de los estudios en función de los distintos niveles de maduración y especialización de las poblaciones estudiadas, se puede observar cómo a través de la escolarización y el desarrollo cognitivo del individuo es posible entregar respuestas correctas, aun cuando pareciera ser que el sesgo hacia los números naturales no puede ser superado del todo, cuestión que se ve reflejada en los mayores tiempos de respuesta de los participantes en ítems sin componentes comunes, en los que se activaría primero un razonamiento intuitivo y luego uno más analítico, tal y como lo plantea la teoría de doble proceso. La activación del razonamiento analítico, por tanto, parece ser más eficiente y sistemática mientras mayor es la formación matemática del individuo, de forma que los ítems sin componentes comunes, que parecen suscitar la utilización de estrategias de procesamiento holístico, son contestadas correctamente independiente del nivel de congruencia que represente.

De lo anterior, se sugiere que la metacognición es un factor clave para el buen desempeño en el procesamiento de fracciones, ya que, por una parte, las funciones ejecutivas mejoran linealmente con la edad (Yakovlev y Lecours, 1967 en Blakemore y Frith, 2005), evidencia que se relaciona con las características de la muestra, puesto que los participantes eran estudiantes de matemática o ingeniería de los últimos años de estudio. Por otra parte, dichas investigaciones parecen dar cuenta de la utilización de procesos cada vez más eficientes, de forma que los niños utilizan estrategias componenciales, debido posiblemente a la falta de conocimientos declarativos sobre la fracción (saber qué). Los adultos, por su parte, parecieran tener más conocimientos declarativos de la fracción, aunque carecen de mayores conocimientos procedimentales y condicionales (saber cómo; cuándo y por qué), resultado que también puede incluir a algunos de los estudiantes de la muestra, como aquellos del grupo 2, que parecen apoyarse fuertemente en un razonamiento erróneo (por gap) para contestar a los ítems. Sin embargo, otro grupo de estudiantes en este estudio, y los especialistas en el estudio de Obersteiner et al. (2013), parecen demostrar un conocimiento declarativo, procedimental y condicional casi perfecto, puesto que se evidencia un ajuste de las estrategias cognitivas de procesamiento en función de las características de la tarea, además de una aparente superación del SNE, lo que le permitiría corregir la respuesta errónea intuitiva y elegir una estrategia que le permita contestar al problema (ítem) correctamente de acuerdo a las características propias y del contexto. Esto implicaría una regulación de los propios procesos cognitivos para la superación exitosa de un problema, es decir, la utilización de estrategias metacognitivas.

Por tanto, parece ser que en expertos matemáticos la superación del sesgo de los números naturales se posibilita gracias a la experiencia con objetos matemáticos tan complejos como la fracción y al desarrollo de estrategias metacognitivas que le permiten evidenciar casi de forma intuitiva (debido a las restricciones de tiempo del experimento) un razonamiento erróneo, permitiéndole corregirlo y elegir una estrategia ad hoc al problema. Se estima que el estudiante utiliza la intuición para corregir su estrategia, puesto que el tiempo de respuesta que tienen para comparar cada ítem no le permitiría una demostración formal del error (que sería realizar las divisiones para comparar los números decimales que representa cada fracción). Al respecto, pueden haber dos posibles razones por las que los estudiantes intuyen el error: una de ellas tiene relación con su desarrollo metacognitivo, puesto que el conocimiento sobre sí mismo y las experiencias previas con fracciones, que es a partir de lo que el individuo aprecia el mundo y responde a él (Schutz y DeCuir, 2002), generaría la percepción intuitiva de un error de pensamiento. Otra posible explicación, la plantea Lewis et al. (2016), quien sugiere que la habilidad de representar la magnitud de relaciones no simbólicas, y que es conferida por un sistema de procesamiento especializado en relaciones, puede apoyar la comprensión de las fracciones como una magnitud relativa, lo que implicaría que la especialización de los expertos en matemática (sobrecargada de relaciones abstractas simbólicas y no simbólicas) les confiere la capacidad de intuir cuándo una representación mental de la magnitud de una fracción no es la correcta, puesto que pueden representarla más fácilmente.

Se desprende, por tanto, que la metacognición es el proceso clave para un mejor desempeño en el procesamiento de fracciones, ya que, independiente de si una persona conoce un sinfín de estrategias para resolver un problema, si no conoce sus propias características cognitivas y no sabe cómo o cuándo utilizar cada estrategia, no logrará un desempeño exitoso. Para lograr un desarrollo metacognitivo es necesaria una reflexión constante acerca de los procesos que se están llevando a cabo durante la resolución de tareas y en cualquier actividad en general.

3. Proceso de enseñanza y aprendizaje.

El proceso de enseñanza y aprendizaje (PEA) se lleva a cabo en un contexto multivariado, es decir, donde influyen muchas variables, una de ellas es la individualidad del estudiante, de sus características cognitivas y contextuales. La diversidad de experiencias que han acumulado durante sus vidas hace que tomen distintas decisiones de acuerdo a ello, la utilización de una u otra estrategia de procesamiento es una de esas decisiones, las cuales pueden ser muy variadas y ser utilizadas en distintos problemas, incluso por los mismos individuos en situaciones diferentes (Siegler, 1996). Así lo informa Gómez et al. (2016) en un estudio sobre niños de segundo ciclo básico, en el que se detectaron diversas estrategias de procesamiento durante una tarea de comparación de fracciones, estrategias que como se dijo, están en función de la propia diversidad de los estudiantes. El proceso de aprendizaje, por tanto, necesita de una metodología centrada en esta característica particular, puesto que cada ser humano es distinto y, en consecuencia, aprende distinto, utilizando la información de distinta manera.

Pese a lo anterior, no se trata de enseñar de forma individual a los estudiantes, uno por uno, sino que se trata de enseñar procesos de pensamiento eficaces que puedan ser moldeados y utilizados por los estudiantes de acuerdo a sus propias características y las del contexto para resolver distintos problemas, tanto educacionales como personales. Sin embargo, el desarrollo metacognitivo es un proceso largo, se da con el tiempo y con la práctica, su consecución puede ser alcanzada a través del desarrollo de estrategias cognitivas, aunque cuidando de que el individuo experimente cuándo sirven y cuándo no, que cometa errores que le permitirán más adelante recordar (porque el aprendizaje fue significativo para él) cuándo son pertinentes. Dichos procesos de pensamiento están descritos en el programa de estudio como habilidades que los alumnos deben aprender de forma transversal a cada contenido y dicen relación directamente con la metodología de resolución de problemas e inculturación de la matemática.

En consecuencia, el docente cumple un rol relevante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, por tanto, se necesitan docentes preparados para ese papel, es decir, para orientar a los alumnos en el descubrimiento de los conceptos matemáticos de forma que le den significado, no que enseñen simples algoritmos (y a veces no tan simples) para utilizar cuando comparan fracciones. Una estrategia común que enseñan los docentes en clases es, comparar numerador/denominador o multiplicar cruzado, las que ciertamente funcionan, pero cuyo funcionamiento depende de las características del problema y del propio individuo, es decir, de la utilización de procesos de pensamiento adecuados. De lo contrario, los estudiantes no podrán discriminar el momento apropiado para usarlas, o incluso peor, no podrán recordarlas, debido a que su aprendizaje fue realizado inapropiadamente, ya sea sacando las estrategias del contexto donde se originan y/o de todo contexto, como la multiplicación cruzada, una adquisición memorística y descontextualizada sin la explicación conceptual que está detrás de esa operación. Estas prácticas son claramente contraproducente, debido a que el aprendizaje debe ser contextualizado al conocimiento previo del alumno para que éste pueda integrar el contenido en sus estructuras cognitivas previas.

Al respecto, un estudio de intervención para desarrollar la comprensión de fracciones en estudiantes de 4to y 5to año básico (Gabriel, Coché, Szucs, Carette, Rey y Content, 2012) evidenció una mejora en el conocimiento conceptual de la fracción en el grupo experimental con10 semanas de intervención, en comparación con el grupo control, el que no mostró mejoría en dicho conocimiento, aunque sí en el área procedimental, sugiriendo que los docentes enseñan el contenido de fracciones a partir de procedimientos mecánicos y que los estudiantes aún tienen pobres representaciones de la magnitud de una fracción. Más aún, las mallas curriculares de pedagogía en matemática de muchas universidades realizan sus asignaturas con estudiantes de otras carreras, como ingeniería o licenciatura en matemática, en cuyas clases se emplea un nivel de abstracción importante y en las que se omite la enseñanza pedagógica del contenido, necesaria para que guíe al docente en su profesión y le entregue las herramientas necesarias para que durante la práctica, pueda concretizar los contenidos y darles un significado pertinente al nivel de los alumnos, de forma que integren el concepto a sus conocimiento previos.

Las investigaciones acerca del SNE han revelado cómo los conocimientos previos de los alumnos pueden sabotear los nuevos aprendizajes y el desempeño del individuo, lo que no solo reflejaría la forma en que la mente concibe los números, sino que también puede reflejar un déficit educativo en los alumnos, incluso en los alumnos de matemática más experimentados, donde se ha evidenciado un sesgo de los números naturales. La complejidad del concepto de fracción suscita diversas teorías que proponen cambios metodológicos acerca de su enseñanza, Vosniadou y Verschaffel (2004), en su teoría de cambio conceptual, sugieren que para un mejor aprendizaje del concepto de fracción se modifique su interpretación como “parte de un todo” y se trabaje en las aulas, enfatizando en su característica de magnitud. Aunque la poca experiencia que tienen los alumnos con la concepción de magnitud los podría conducir igualmente a realizar analogías erróneas con las magnitudes que ya conocen (los números enteros), puesto que un aprendizaje significativo requiere de una integración de la nueva información con la ya existente. La teoría integrativa del desarrollo numérico, por su parte, reconoce que la comprensión de la magnitud de número entero puede ser positivo para el posterior entendimiento de la magnitud de una fracción, aunque también plantea la necesidad de un cambio conceptual, en el sentido de que se entienda al número natural a través de sus características, enfatizando en la comprensión de la magnitud que representan, para posteriormente extender la noción de magnitud e incluir a los números racionales.

Sin embargo, con el programa de estudio actual, realizar un cambio conceptual, cualquiera que se plantee, es poco factible, debido a que la secuencia de aprendizajes sugerida por el Ministerio de Educación, y en el que se basa la mayoría de los docentes para hacer sus planificaciones, considera contenidos no relacionados con las fracciones dentro de la misma unidad que pueden interferir en su enseñanza-aprendizaje, de forma que 3 objetivos de aprendizaje son destinados al entendimiento del concepto de fracción (como representante de la parte de un todo o de una recta graduada), a su operación aritmética y a conocer las fracciones propias, mientras que hay 4 objetivos destinados a resolver ecuaciones e inecuaciones con número enteros (a través de algunas propiedades de los números enteros, que también comparte con las fracciones).

Además de estos contenidos, se tratan, ~~además~~, temas relacionados con la geometría, como la comprensión de la simetría, la traslación, rotación y reflexión (sin conferirle sus características isométricas), y la construcción de ángulos con transportador y compás. Estos contenidos dificultarían de forma importante los cambios metodológicos que plantean las teorías mencionadas, ya que las fracciones también representan magnitudes y, por ende, su comprensión requiere práctica y tiempo, así que enfrentarse a contenidos tan diversos y que involucran tan profundamente a los números naturales, como las ecuaciones e inecuaciones que se ven en ese nivel y que se enseñan a través de la resolución de problemas con números naturales, podrían a la larga conducir a confusión entre las características de un tipo de magnitud y otra.

El cambio conceptual entre un contenido u otro no podría realizarse de forma sistemática y en la profundidad que se necesita, debido a la preponderancia de los números enteros que los niños representan, usan y practican desde su infancia. Incluso si no se considera un cambio conceptual como el que sugieren, y sólo se considera la secuencia de aprendizajes sugerida por el Ministerio de Educación, se ve poco posible que los alumnos puedan comprender a cabalidad el concepto de fracción en un tiempo tan acotado, puesto que la consolidación de la información en la memoria requiere de un tiempo prudente. Incluso, la unidad introductoria de fracciones no sólo introduce el concepto de fracción, sino que sus propiedades, las operaciones con ellas y las fracciones propias, lo que puede generar efectos de interferencia, como por ejemplo, la sobrecarga de información como la utilización de una misma clave para asociar diversos conocimientos ola utilización de los números enteros para definir muchos conceptos, causando confusiones y olvidos de lo aprendido.

El programa de estudio actual indica una serie de habilidades a desarrollar durante el proceso de enseñanza aprendizaje, entre ellas, la metacognición, la que ayudará a supervisar y regular los procesos de pensamiento utilizados para resolver un problema. Para desarrollar la metacognición se necesita un tiempo considerable para lograr la plasticidad cerebral, sobre todo ante un contenido que rompe el esquema cognitivo preponderante de los números naturales. Además, se necesitan actividades didácticas que puedan ser utilizadas en la práctica pedagógica para que el estudiante intente resolver un problema relacionado a fracciones para evitar que la enseñanza de las fracciones se realice de forma mecanizada. Por último, es necesario enseñarle al alumno una cantidad de algoritmos, “estrategias cognitivas”, junto a un listado de tareas, entre problemas y ejercicios, para que practiquen el algoritmo y así puedan aplicar las estrategias cognitivas, evitando la adquisición de estrategias netamente memorísticas sin una reflexión sobre los procesos cognitivos implicados y cuyos algoritmos suelen ser olvidados luego de la evaluación. La metacognición, en definitiva, pareciera no desarrollarse a cabalidad en el procesamiento de fracciones durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, situación que desencadenaría efectos como los evidenciados por distintos estudios, incluyendo el presente sobre estudiantes de matemática

CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES

1. En línea con otras investigaciones, se encuentra que la variable componentes comunes es la que mayor influencia tiene en los resultados de la prueba en general, generando procesos cognitivos más complejos cuando los ítems carecen de componentes comunes. Se evidencia, además, una diferencia significativa con los ítems sin componentes comunes en las tasas de aciertos, lo que sin embargo, parece estar asociado a la manipulación de otras variables presentes en el estudio.
2. Particularmente, se confirma la primera hipótesis de investigación en tanto la muestra de estudiantes de matemática procesan más rápidamente los ítems congruentes cuando tienen componentes comunes, en comparación con los ítems sin componentes comunes, así como el porcentaje de aciertos fue mayor en la condición con componentes comunes.
3. La segunda hipótesis se confirmó, de acuerdo a los resultados obtenidos, puesto que hubo diferencias significativas entre fracciones congruentes en comparación con fracciones incongruentes y neutras.
4. Los resultados relacionados con la variable gap fraccional revelan que su influencia en el desempeño de los estudiantes de matemática sólo se muestra en las tasas de aciertos, donde los ítems con gap favorable y gap neutro son respondidos más acertadamente que los ítems con gap difícil. Pese a esto, los tiempos de respuesta obtenidos por un grupo de 31 participantes reflejan un sesgo a favor del gap en cuanto obtienen mayores tiempos de respuesta contestando ítems con gap difícil que con gap favorable, lo que no ocurre con sus tasas de aciertos que se mantienen constantes independiente de la naturaleza del gap fraccional, revelando estrategias cognitivas pertinentes a cada tipo de ítem. Por otro lado, un grupo de 12 estudiantes parece ser afectado por el gap fraccional sólo en sus aciertos, indicando la utilización de estrategias de procesamiento erróneas sesgadas por el gap fraccional.
5. Respecto a la fuerza de la congruencia se encontró que el tiempo de respuesta de la mayoría de los participantes está afectado por esta variable, siendo los ítems fuertemente congruentes los que **mayores** esfuerzos cognitivos parecen generar, obteniendo tiempos **mayores** de respuesta en estos ítems. Así también, la fuerza de la congruencia parece ser un predictor crucial del éxito de los alumnos en la tarea, revelando un sesgo hacia la magnitud de los componentes de la fracción, es decir, hacia los números enteros.
6. Se puede concluir de lo anterior que el gap fraccional y la fuerza de la congruencia parecen ser los mejores predictores del porcentaje de acierto de los estudiantes del grupo 1 en los ítems congruentes sin componentes comunes, debido posiblemente a la utilización de una estrategia denominada razonamiento residual que permite establecer la magnitud de una fracción a través del

procesamiento de sus componentes y la relación entre ellos, acción que se dificultaría debido a las magnitudes de los componentes de las fracciones con congruencia fuerte.

7. El análisis de correlación de las pruebas de memoria con la asertividad y los tiempos de respuesta de los alumnos no informan de correlaciones significativas, lo que implicaría que no hay asociación entre la capacidad de memoria y el desempeño en la prueba de fracciones.
8. Se concluye finalmente que los estudiantes utilizan estrategias de procesamiento componencial y holística según las características del ítem, aunque parece ser que las estrategias de procesamiento holístico están basadas en procesamientos componenciales. Así, las estrategias componenciales consistirían en la comparación de numerador/denominador, según si la fracción tiene el denominador/numerador comunes y la estrategia de razonamiento por gap, que considera las magnitudes de los componentes de la fracción. Las estrategias de procesamiento holístico, por su parte, tal como fueron descritas, se refieren a aquellas en que se accede a la magnitud de la fracción a través del procesamiento de cada componente y de la relación entre ellos, como la estrategia de pensamiento residual.
9. De los resultados obtenidos se propone que el proceso de enseñanza y aprendizaje de fracciones enfatice la característica de magnitud de la fracción, introduciendo cada tipo de número como resultado de mediciones, así por ejemplo los números enteros positivos se generan de mediciones positivas y las fracciones, que son magnitudes que se generan por la necesidad de fraccionar la unidad de medida (dividirla) para establecer la medición precisa del objeto en cuestión, cuya expresión representa una relación entre las magnitudes en juego que sería la unidad de medida y la cantidad de veces que es necesario fraccionarla para medir la extensión del objeto en cuestión. En resumen, se sugiere la implementación de actividades didácticas que no estén tan relacionadas con la contabilización sino con la estimación (proveniente de su intuición) de magnitudes de objetos no finitos, como entre conjuntos de muchos puntos en el cual sea imposible contar la cantidad exacta de puntos en cada uno, o actividades apoyadas en segmentos de línea (sin estar graduada) para estimar sus magnitudes relativas.

Proyecciones

Las estrategias de procesamiento que se infirieron del desempeño de los estudiantes de matemática en la tarea de comparación de fracciones en esta investigación fueron específicamente 3: comparación de numerador/denominador, razonamiento por gap y razonamiento residual. Sin embargo, hacen falta nuevos estudios con un enfoque cualitativo para conocer si efectivamente son éstas las estrategias que están enseñando en el aula los profesores. Mediante entrevistas se podría averiguar acerca del método de resolución de la comparación, esto es, qué estrategia utilizaron los profesores con el fin de corregir, fortalecer y/o ampliar las conclusiones que puedan derivarse acerca de las dificultades y estrategias de procesamiento que utilizan los estudiantes.

Por otra parte, sería interesante conocer qué estrategias utilizan estudiantes universitarios no expertos en matemáticas, de forma que pueda evidenciarse de manera más directa lo que la educación primaria y secundaria actual realmente brinda a los estudiantes, en el procesamiento de fracciones. Así, la replicación sobre una población adulta puede dar más luces acerca de si existen algoritmos que los adultos conserven, producto de la educación básica y media, y en qué medida los errores en la comparación de fracciones podrían dar cuenta de las estrategias cognitivas subyacentes en el procesamiento cognitivo de fracciones.

Los resultados obtenidos en la presente investigación, complementados con datos cualitativos podrían contribuir a la construcción de metodologías de enseñanza o de secuencias didácticas para la enseñanza de las fracciones. Así, por ejemplo, utilizar los resultados sobre las dificultades en el procesamiento de fracciones puede contribuir a aislar cada dificultad y analizarla para construir una secuencia didáctica que permita que dichas dificultades no se vuelvan a dar en las próximas generaciones. O también, se pueden utilizar los resultados acerca de las estrategias cognitivas de procesamiento del presente estudio para generar actividades que promuevan el uso de las estrategias que son favorables y que puedan perdurar en el tiempo. Una habilidad cognitiva transversal a todas las asignaturas es la metacognición, que han desarrollado con éxito los estudiantes expertos en matemáticas, pero que no son habilidades que no se desarrollan de manera explícita y continuada en el currículo actual chileno,

Por último, respecto a la educación docente, se puede realizar una investigación que analice los programas de estudio de algunos ramos de pedagogía que involucren a las fracciones, o cuyo objetivo sea el tratamiento de los conjuntos numéricos, con el fin de observar cómo se enseñan y comparar estos resultados con investigaciones como la propia, que provee de datos empíricos sobre los procesos que están adquiriendo los estudiantes acerca de los números racionales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agencia de la calidad de la educación (2014). Entrega de resultados de aprendizaje 2014: Simce e indicadores de desarrollo personal y social. Recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl

Agencia de la calidad de la educación (2015). PISA 2015, Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes OCDE. Recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl

Agencia de la calidad de la educación (2015). Resultados TIMSS Chile, Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias Recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl

Alonso, F., Zamora, E. y Alonso, J. L. (septiembre 2007). Tomografía por emisión de positrones: los nuevos paradigmas. En O. Sparza (Gerencia ejecutiva), XXV Congreso Nacional de Educación Química. Memoria llevada a cabo en el congreso Sociedad Química de México en Jalisco, México.

Alson, A., Bauml, K. T. (2012). Retrieval-Induced Forgetting in Old and Very Old Age. *Psychology and Aging, vol. 27*(4), 1027-1032.

Ansari, D. y Coch, D. (2006). Bridges over troubled waters: education and cognitive neuroscience. *Trends in Cognitive Sciences, 10*, 146-151.

Ansari, D., Coch, D. y De Smedt, B. (2011). Connecting Education and Cognitive Neuroscience: Where will the journey take us? *Educational Philosophy and Theory, 43* (1), 37-42.

Ansari, D., Grabner, R., De Smedt, B.(2012). Neuroeducation: a critical overview of an emerging field. *Neuroethics, 5* (2), 105-117.

Anderson, J (2008). Adquisición de recuerdos. En J. Anderson (Ed.), *Aprendizaje y Memoria* (pp.199-325**). Ciudad: Editorial**

Ardilla, A., Rosselili, M. (2002). Acalculia and Discalculia. *Neuropsychology Review, 12*(4), 179-231

Bajo T., Fernández, A., Ruiz, M. y Gómez-Ariza, C.J. (2016). Memoria: estructura y funciones. En M. T. Bajo, Fuentes, L. J., Lupiáñez, Juan., Rueda, R. (Alianza Editorial), *Mente y Cerebro: de la psicología experimental a la neurociencia cognitiva* (pp. 205-236). España: Alianza Editorial

Barraza, P., Gómez, D. M., Oyarzun, F., Dartnell, P. (2014). Long-distance neural synchrony correlates with processing strategies to compare fractions. *Neuroscience Letters 567*, 40-44

Baddeley, A. D. (1986). Working memory. *Oxford: Oxford University Press, 225*, 255-259.

Baddeley, A. D. (2000). The episodic buffer: A new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences, 4, (11),* 417-423.

Baddeley, A. D., & Hitch, G. (1974). Working memory. In G.H. Bower (Ed.), The Psychology of Learning and Motivation: Advances in research and theory, New York: Academic Press, *8*, 47–89.

Ballesteros, S. (1999). Memoria humana: Investigación y teoría. *Psicothema*, *11*(4), 705-723

Beltran, J. (2002). Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje. Madrid: Síntesis. Recuperado de: http://204.153.24.32/materias/PDCA/idca/materiales/idca_05.doc

Brousseau, G. (1986) *Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques* (Fundamentos y métodos de la didáctica de las Matemáticas). *Rescherches en Didactique de Mathématiques*,*7*(2), 33-115

Bonnato, M., Fabbri, S., Umilta, C., Zorzi, M. (2007). The Mental Representation of Numerical Fractions: Real or Integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 33(6),* 1410–1419

Campanario, J. M. (2000) El desarrollo de la metacognición en el aprendizaje de las ciencias: estrategias para el profesor y actividades orientadas al alumno. *Enseñanza de las ciencias*, *18,* 369-380

Chadwick, C. B. (1981). Enfoques curriculares: el académico. *Revista de Educación, 9.*

Chamarro, A., Panelo, E., Fornieles, A. Oberst, U., Vallerand, R. J., Fernandez-Castro, J. (2015). Psychometric properties of the spanish versión of the Passion Scale. Psicothema, volume 27 (4), 402-409.

Chamarro, A., Oberst, U., Vallerand, R. (2015). Psychometric properties of the Spanish version of the Passion Scale. *Psicothema, vol. 27(4), 402-409*

Chevallard, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Rescherches en Didactique de Mathématiques, 19*(2), 221-266

Clarke, D. M., Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies Mathematics*, *72*, 127-138.

Damas, J. (2009). ¿Qué código subyace a las Multiplicaciones? Evidencias de una tarea de magnitud con priming enmascarado. Recuperado de http://www.escritosdepsicologia.es.

De la Barrera, M. L. y Donolo, D. (2009) Neurociencias y su importancia en contextos de aprendizaje. *Revista Digital Universitaria*, *10*(4), 1067-6079

De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 43*, p. 19-58.

Dehaene, S., Spelke, E., Pine, P. Stanescu, R. y Tsivkin, S. (1999). Sources of Mathematical Thinking: Behavioral and Brain-Imaging Evidence. *Science, 284.* Recuperado de http://www.sciencemag.org

DeWolf, M. y Vosniadou, E. (2011). The Whole Number Bias in Fraction Magnitude Comparisons with Adults. *Expanding the Space of Cognitive Science.* Recuperado de http://csjarchive.cogsci.rpi.edu/

DeWolf, M. y Vosniadou, E. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction 37*, 39-49

Diaz, J. L. (2009). Persona, mente y memoria. *Salud Mental, 32,* 513-526

Dudai, Y. (2004). The neurobiology of consolidations, or, how stable is the engram? *Annual Review Psychologist, 55,* 51-86

ElleWood, J. K. (1896). Numbers and Fractions. *The American Mathematical Monthly. 3*(11), 263-265. Published by: Mathematical Association of America

Faulkenberry, T. J. (2010). The roles of phonological and visuo-spatial working memory in simple fraction strategies (Doctoral dissertation). Recuperado de ProQuest Dissertations and Theses database. (AAT 3405811).}

Faulkenberry, T., Kelsey, A., (2011). Working memory and strategic performance in fraction comparison. Paper presentado en la conferencia de Texas A&M University-Commerce, USA.

Fazio, L. K y Siegler, R. S. (2010). Enseñanza de las fracciones. *Series prácticas educativas, 22, 1-28.*

Fazio, L. K., DeWolfe, M. E., y Siegler, R. S. (2015). Strategy use and strategy choice in fraction magnitude comparison. *Journal of Experimental Psychology Learning Memory and Cognition. (in press)* DOI: 10.1037/xlm0000153

Gabriel, F., Fréderic, C., Szucs, D., Carrette, V., Rey, B. y Content, A. (2012) Developing Children's Understanding of Fractions: An Intervention Study. *Journal Compilation © 2009 International Mind, Brain, and Education Society and Wiley Periodicals, Inc. 6*(3), 137-146

Gallardo, J., Gonzalez, j. y Quispe, W. (2007). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración: Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa,11(3), 355-382.

García Cruz, J. A. (s.f) *Matemáticas en Secundaria.* La didáctica de las Matemáticas: una visión general.

Gómez, D. y Dartnell, P. (2016). Clustering analysis as a window into children's strategies for comparing fractions. *CIAE: centro de investigación avanzada en educación, 0.*

Gómez, D.; Jiménez, A.; Bobadilla, R.; Reyes, C. y Dartnell, P. (2014) Exploring fraction comparison in school children. *CIAE: centro de investigación avanzada en educación, 10.*

Gluck, M. A., Mercado, E. y Myers, C.E. (2009). *Aprendizaje y Memoria: Del cerebro al comportamiento.* México: McGrawHill.

Hurst, M., y Cordes, S. (2017). Working Memory Strategies During Rational Number Magnitude Processing. *Journal of Educational Psychology*. Advance online publication.

Iñiguez, D. (2013). Evaluación de los módulos de codificación numérica en niños con trastorno de cálculo (Tesis Doctoral). Universidad de Guadalajara, Guadalajara.

Irrarazabal, N., Molinari, C. (2005). Técnicas experimentales en la investigación de la comprensión del lenguaje. *Revista Latinoamericana de Psicología, 37*(3), 581-594

Izarda, V., Sannb, C., Spelkea, E. y Strerib, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of science of the United States of America, 10*6(25), 10382–10385.

Jacubovich, S. (2006). Modelos actuales de procesamiento del número y el cálculo. *Revista Argentina de Neuropsicología, 7,* 21-31

Jensen, E. (2004) El cerebro que aprende. En E. Jensen (Ed.) *Cerebro y aprendizaje: Competencias e implicaciones educativas (p. 22-34).* Madrid: NARCEA S.A. DE EDICIONES

Kandel, E., J. Schwartz y Jessell, TH. (1997). *Neurociencia y conducta.* Madrid: Prentice Hall

Lewis, M. R, Mathews, P. G. y Hubbard, E. M. (2015) Neurocognitive Architectures and the Nonsymbolic Foundations of Fractions Understanding. En D. Berch, D. Geary y K. Mann(Ed.) *Development of Mathematical Cognition, Volume 2: Neural Substrates and Genetic Influences* (141-164).Wisconsin, Estados Unidos: Academic Press.

Llinares, S. y Sánchez, M. (1988). *Fracciones: la relación parte-todo.* Sevilla, España: Síntesis.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review, 38,* 201-221

López-Ibor, Juan José; Ortiz Alonso, Tomás; López-Ibor Alcócer, María Inés (1999). Memoria y su psicopatología. *Lecciones de psicología médica, p. 303.*

Macizo, P., Colomé, A., García-Orza, J., & Herrera, A. (2016). Cognición numérica. En M. Bajo, L. Fuentes, J. Lupiañez y C. Rueda (Ed.) *Mente y cerebro: De la Psicología Experimental a la Neurociencia Cognitiva* (pp. 351-379). Madrid: Alianza Editorial.

Maldonado, A., Cándido, A., Perales, J. C., Garcia-Retamero, R., Megías, A., Okan, Y. y Catena, A. (2016). Aprendizaje y Neurociencia cognitiva. En M. Bajo, L. Fuentes, J. Lupiañez y C. Rueda (Ed.), *Mente y cerebro: De la Psicología Experimental a la Neurociencia Cognitiva* (pp. 263-298). Madrid: Alianza Editorial.

McLeod, S. (2008). Simply Psychology. Manchester, UK: Simply Psychology. Disponible en: http://www.simplypsychology.org/working%20memory.html.

Meert, G., Grégoire, J., & Noël, M. P. (2009). Rational numbers: Componential versus holistic representation of fractions in a magnitude comparison task. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 62*(8), 1598-1616.

Mera Mendes, D. y Peña, P. (2011) Efectos de la aplicación de estrategias metacognitivas en el rendimiento de los estudiantes de 5to grado al realizar operaciones con números racionales. *Revista de Investigación, 35* (73), 311-330

Morgado, I. (2005). Psicobiología del aprendizaje y la memoria. *Cuadernos de información y comunicación, 10,* 221-225

Munro, J. (2011). The role of working memory in mathematics learning and numeracy. Paper presentado en “Memory and Learning: What Works?”, Sydney, Australia.

Munakata, Y., Casey, B. y Diamond, A. 2004 Developmental cognitive neuroscience: progress and potencial. *Trends in Cognitive Sciences*. *8*(3), 122-128.

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J. y Verschaffel, L. (2013) The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction. 28*, 64-72

Orrantia, J. (2001) Memoria y dificultades en el aprendizaje del cálculo. En A. Sanchez, M.S., Beato (Ed.), *Psicologia de la memoria. Ambitos aplicados* (p. 67-86). España: Alianza Editorial.

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía, 23*(71), 158-180

Osses, S. y Jaramillo, S. (2008). Metacognición: un camino para aprender a aprender. *Estudios Pedagógicos, 34* (1), 187-197.

Pallarés, D. (2015). Hacia una conceptualización dialógica de la neuroeducación. *Participación Educativa, 4*(7), 133-142

Pantziara, M., Philippou, G. (2012) Levels of students “conception” of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 79,* 61-83

Paradiso, J. C., (2001) Memoria, esquemas cognoscitivos y comprensión. En A. Sanchez, M.S., Beato (Ed.), *Psicologia de la memoria. Ambitos aplicados* (p. 47-65). España: Alianza Editorial.

Ramos-Argüelles, F., Morales, G., Egozcue, S., Pabón, R. M. y Alonso, M. T. (2009). Técnicas básicas de electroencefalografía: principios y aplicaciones clínicas. *Anales del sistema sanitario de Navarra*, *32*(3), 69-82.

Rigo Lemini, M., Páez, D. A. et Gómez, B. (2010) Prácticas metacognitivas que el profesor de nivel básico promueve en sus clases ordinarias de matemáticas: un marco interpretativo. *Enseñanza de las ciencias, 28*, 405-416

Rinck P. (2007) Magnetic Resonance in Medicine. The Basic Textbook of the European Magnetic Resonance Forum 10th. Electronic version 10, published 1 January 2017. Recuperado de http://www.magnetic-resonance.org

Riviere, A. (1991), Origenes históricos de la psicología cognitiva: paradigma simbólico y procesamiento de la información. *Anuario de Psicología, 51*, 129-155

Roldan, F. (2013). Métodos de investigación comportamental en biopsicología. Disponible en: https://prezi.com/sretd3h4yo6y/metodos-de-investigacion-comportamental-en-biopsicologia.

Saavedra, M. A. (2001). Aprendizaje Basado en el Cerebro. *Revista de Psicologia de la Universidad de Chile, volumen 10* (1), 141-150.

Salas, R. (2003) ¿la educación necesita realmente de la neurociencia?. *Estudios pedagógicos*, *29*, 155-171. doi: 10.4067/S0718-07052003000100011.

Serra-Grabulosa, J. M., Adan, A., Pérez-Pàmies, M., Lachica, J. et Membrives, S. (2010*)* Bases neurales del procesamiento numérico y del cálculo. *Revista Neurol. 50*, 39-46

Serra-Grabulosa, J. M. (2013*) Representación numérica.* En Redolar D. (ed.), *Neurociencia cognitiva* (p. 517-534). Madrid: Editorial médica Panamericana

Siegler, R: , Fazio, L., Bailey, D: y Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. Trends in Cognitive Sciences, 17(1), 13-19.

Siegler RS, Duncan GJ, Davis-Kean PE, Duckworth K, Claessens A, Engel M, Susperreguy MI, y Chen M. (2012) Early predictors of high school mathematics achievement. Psychol. Sci. 23, 691–697

Silva, M. N., Marques, M. M., Teixeira, P. J., (2014). Testing theory in practice: The example of self-determination theory-based interventions. *The European Health Psychologist*, *16*(5), 171-180.

Simonsen, E. (2016). Neuromitos, las falsas creencias científicas que han llegado a las aulas. Santiago de Chile: Universidad de Chile. Recuperado de http://www.uchile.cl

Solis, H., López-Hernandez, E. (2009), Neuroanatomía funcional de la memoria. *Arch Neurocien*, *14*(3), 176-187.

Sloman, S. A. (1996). The Empirical Case for Two Systems of Reasoning. *Psychological Bulletin*, *119*(1), 3-22.

Torbeynus, J., Schneider, M., Xin, Z. y Siegler, R. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction 37*, 5-13

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. et Verschaffel, L. (2012) Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *Journal of Mathematical Behavior, 31*, 344-355.

Van Dooren, W., Lehtinen, E. y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction xxx*, 1-4. doi: 10.1016/j.learninstruc.2015.01.001

Vamvakoussi, X. (2015). The development of rational number knowledge: Old topic, new insights. *Learning and Instruction,* 1-6.

ANEXOS

Anexo 1:

Universidad de Concepción

Facultad de Educación

CONSENTIMIENTO INFORMADO

Nombre del proyecto en español	Sesgos cognitivos y estrategias que subyacen a la matemática escolar: El caso de la comparación de fracciones
Nombre original del proyecto	Cognitive biases and strategies underlying school mathematics: The case of fraction comparison
Investigador responsable	David Maximiliano Gómez
RUT	13.992.120-8
Teléfono	(+56 2) 2977 0913
Correo electrónico	dgomez@ciae.uchile.cl
Proyecto financiado por	Programa Fondecyt Regular, proyecto 1160188 CONICYT

Te invitamos a participar en el proyecto de investigación Sesgos cognitivos y estrategias que subyacen a la matemática escolar: El caso de la comparación de fracciones, el cual tiene por objetivo descubrir cómo razonamos las personas cuando pensamos matemáticamente, específicamente en el trabajo con fracciones.

Los estudios que conforman esta investigación incluirán un número aproximado de 500 participantes. Para esto estamos convocando a estudiantes de educación superior de diversas instituciones, que declaren tener un buen estado de salud físico y mental.

Si aceptas ser parte de este estudio, tu participación consistirá en responder una serie de cuestionarios matemáticos. Algunos cuestionarios serán orales y otros presentados por computador. La duración total de la serie se estima entre 30 y 45 minutos.

La participación en este estudio no conlleva costos ni riesgos para ti, ni tampoco te traerá beneficios personales. Sin embargo, tus respuestas nos ayudarán a aumentar nuestro conocimiento sobre cómo la mente humana trabaja matemáticamente, y para diseñar mejores estrategias de enseñanza de las matemáticas.

Como agradecimiento por tu participación, recibirás (si así lo deseas) un pago de $4.000.- en efectivo para compensarte por tu tiempo y por la locomoción. Para poder recibir este dinero, necesitaremos que rellenes un recibo simple con tu nombre, RUT y firma.

Toda la información relativa a tu participación en este estudio será conservada en forma estrictamente confidencial, a cargo del investigador responsable. Esta información podría ser compartida con otros investigadores o agencias supervisoras de la investigación. Toda publicación o comunicación científica de los resultados de la investigación será completamente anónima.

Tu participación en este proyecto es totalmente voluntaria, y te puedes retirar en cualquier momento si así lo deseas. Para retirarte, basta que lo digas al investigador a cargo.

<u>Para cuidar tus derechos como participante, recibirás una copia exacta y firmada de este documento.</u> Si requieres cualquier otra información sobre tu participación, puedes comunicarte con el investigador responsable Dr. David Maximiliano Gómez, en el teléfono y correo electrónico arriba indicado, o en su oficina en el Centro de Investigación Avanzada en Educación (CIAE), Universidad de Chile, en Periodista José Carrasco Tapia 75, comuna de Santiago.

En caso de duda sobre tus derechos, debes comunicarte con el Presidente del Comité de Ética de Investigación en Seres Humanos, Dr. Manuel Oyarzun (teléfono 2978 9536, correo electrónico comiteceish@med.uchile.cl), cuya oficina se encuentra ubicada a un costado de la Biblioteca Central de la Facultad de Medicina, Universidad de Chile, en Avenida Independencia 1027, comuna de Independencia.

Declaración:

Después de haber recibido y comprendido la información de este documento y de haber podido aclarar todas mis dudas, otorgo mi consentimiento para participar en el estudio *Sesgos cognitivos y estrategias que subyacen a la matemática escolar: El caso de la comparación de fracciones.*

Nombre y RUT del participante Firma Fecha

Nombre y RUT del investigador a cargo Firma Fecha

Anexo 2

Memoria de Trabajo, Prueba Verbal WM: WAIS

Prueba 1: Retención de dígitos

Tarea: En cada intento, lea la secuencia de dígitos a una velocidad aproximada de uno por segundo. Anote la secuencia que dice el participante en la columna adecuada, y márquela como correcta o no comparándola con la respuesta provista. Lea la secuencia con calma y claridad, porque no se puede releer secuencias.

Criterio de detención: cuando el participante obtiene "No" en los dos intentos de un mismo ítem. Parte 1: Directo El participante debe repetir la secuencia en el mismo orden en que le fue dicha.

Ítem	Intento	Respuesta	¿Ok?
1	9-7		Si No
	6-3		Si No
2	5-8-2		Si No
	6-9-4		Si No
3	7-2-8-6		Si No
	6-4-3-9		Si No
4	4-2-7-3-1		Si No
	7-5-8-3-6		Si No
5	3-9-2-4-8-7		Si No
	6-1-9-4-7-3		Si No
6	4-1-7-9-3-8-6		Si No
	6-9-1-7-4-2-8		Si No
7	3-8-2-9-6-1-7-4		Si No
	5-8-1-3-2-6-4-7		Si No
8	2-7-5-8-6-3-1-9-4		Si No
	7-1-3-9-4-2-5-6-8		Si No

Parte 2: Inverso El participante debe repetir la secuencia en el orden inverso al que le fue dicha. Sólo en el ítem de práctica se le da retroalimentación al participante (después de que haya respondido cada intento).

Ítem	Intento	Respuesta correcta	Respuesta	¿Ok?
Pr.	7-1 3-4	1-7 4-3		
1	3-1 2-4	1-3 4-2		Si No Si No
2	4-6 5-7	6-4 7-5		Si No Si No
3	6-2-9 4-7-5	9-2-6 5-7-4		Si No Si No
4	8-2-7-9 4-9-6-8	9-7-2-8 8-6-9-4		Si No Si No
5	6-5-8-4-3 1-5-4-8-6	3-4-8-5-6 6-8-4-5-1		Si No Si No
6	5-3-7-4-1-8 7-2-4-8-5-6	8-1-4-7-3-5 6-5-8-4-2-7		Si No Si No
7	8-1-4-9-3-6-2 4-7-3-9-6-2-8	2-6-3-9-4-1-8 8-2-6-9-3-7-4		Si No Si No
8	9-4-3-7-6-2-1-8 7-2-8-1-5-6-4-3	8-1-2-6-7-3-4-9 3-4-6-5-1-8-2-7		Si No Si No

Parte 3: Secuenciación El participante debe repetir la secuencia que le fue dicha, ordenando los números de menor a mayor. Sólo en el ítem de práctica se le da retroalimentación al participante (después de que haya respondido cada intento).

Ítem	Intento	Respuesta Correcta	Respuesta	¿Ok?
Pr.	2-3-1 5-2-2	1-2-3 2-2-5		
1	1-2 4-2	1-2 2-4		Si No Si No
2	3-1-6 0-9-4	1-3-6 0-4-9		Si No Si No
3	9-7-9-2 4-8-7-1	2-7-8-9 1-4-7-8		Si No Si No
4	2-6-9-1-7 3-8-3-5-8	1-2-6-7-9 3-3-5-8-8		Si No Si No
5	2-1-7-4-3-6 6-2-5-2-3-4	1-2-3-4-6-7 2-2-3-4-5-6		Si No Si No
6	7-5-7-6-8-6-2 4-8-2-5-4-3-5	2-5-6-6-7-7-8 2-3-4-4-5-5-8		Si No Si No
7	5-8-7-2-7-5-4-5 9-4-9-7-3-0-8-4	2-4-5-5-5-7-7-8 0-3-4-4-7-8-9-9		Si No Si No
8	5-0-1-1-3-2-1-0-5 2-7-1-4-8-4-2-9-6	0-0-1-1-1-2-3-5-5 1-2-2-4-4-6-7-8-9		Si No Si No

Prueba 2: Aritmética mental

Tarea: Lea cada ítem con calma y cuidado, y luego comience a tomar el tiempo. El participante dispone de máximo 30 segundos para responder cada ítem. Si el participante lo solicita, puede releer cada ítem a lo más una vez. Cuando el participante responda, anote el tiempo requerido para responder y su respuesta. Marque si la respuesta es correcta o no, comparándola con la provista [considere respuestas equivalentes como correctas, por ejemplo, si la respuesta correcta es "30 minutos" entonces "media hora" también vale como correcta].

Criterio de detención: cuando el participante obtiene tres "No" consecutivos.

Ítem	Pregunta	Respuesta correcta	Tiempo	Respuesta	¿Ok?
1	Pedro tiene cuatro frazadas. Si compra cuatro más, ¿cuántas frazadas tiene ahora?	8			Si No
2	Mario tiene 9 lápices. Si le da cuatro a Juana, ¿cuántos lápices le quedan a Mario?	5			Si No
3	Álvaro tiene 4 hijos y 20 juguetes. Si cada niño recibe el mismo número de juguetes, ¿cuántos recibe cada uno de ellos?	5			Si No
4	Juan tiene 28 libros. Si vende la mitad de ellos a un local de libros usados y regala otros 9, ¿cuántos libros le quedan?	5			Si No
5	Susana tiene 35 años y Roberto tiene 18 años. ¿Cuántos años es mayor Susana que Roberto?	17			Si No
6	Hay 25 paquetes de chicle en una caja. ¿Cuántos paquetes hay en 8 cajas? 200	200			Si No
7	Pablo tiene 51 boletos. Si regala 8 boletos a cada uno de sus 6 amigos, ¿cuántos boletos le quedan?	3			Si No
8	Jorge regala 4 cartas a cada uno de sus 8 tíos. Si le quedan sólo 6 cartas,	38			Si No

	¿cuántas tenía al principio?				
9	Andrea corre 22 minutos al día de lunes a viernes. Los sábados corre 30 minutos. ¿Cuántos minutos corre en total?	140			Si No
10	Benjamín vendió dos tercios del número de mapas que vendió Camila. Si Benjamín vendió 400 mapas, ¿cuántos vendió Camila?	600			Si No
11	Si Diego prepara 2 pasteles en 31 minutos, ¿cuánto tiempo le toma preparar 12 pasteles?	186			Si No
12	Cristián pesa el doble que Ricardo. Si Cristián pesa 99 kilos, ¿cuánto pesa Ricardo?	49 ½			Si No
13	Javier trabajó 188 horas en 4 semanas. Si todas las semanas trabajó la misma cantidad de tiempo, ¿cuántas horas trabajó en cada una de ellas?	47			Si No
14	Pamela da, normalmente, 60 vueltas a la pista en su caballo. Si hoy disminuyó la cantidad de vueltas en un 15%, ¿cuántas vueltas dio?	51			Si No
15	Carmen hace una fila detrás de 160 personas. Deja pasar a 20 personas antes que ella. Si 6 personas llegan al primer lugar de la fila cada minuto, ¿cuánto tiempo falta para que Carmen llegue al primer lugar?	30			Si No
16	Si 8 máquinas pueden terminar un trabajo en 6 días, ¿cuántos días se necesitan para terminar el trabajo en medio día?	96			Si No
17	Una oficina de correos entrega 20.000 cartas en octubre. En noviembre, la cantidad de cartas entregadas aumenta	23.100			Si No

	un 10% y en diciembre aumenta otro 5%. ¿Cuántas cartas se entregaron en diciembre luego de ambos aumentos?				

Prueba 3: Secuenciación de Números y Letras Tarea: En cada intento, lea la secuencia de números y letras a una velocidad aproximada de uno por segundo. Anote la secuencia que dice el participante en la columna adecuada, y márquela como correcta o no comparándola con la respuesta provista. Lea la secuencia con calma y claridad, porque no se puede releer secuencias. El participante debe repetir la secuencia escuchada, pero ordenando primero los números de menor a mayor y luego las letras en orden alfabético.

Criterio de detención: cuando el participante obtiene “No” en los tres intentos de un mismo ítem. Si el participante responde la secuencia alternativa en lugar de la correcta, se debe considerar igualmente como correcta. En los ítemes Ej.1 y Ej.2, solamente lea la secuencia y su respuesta correcta. No espere que el participante responda. En los ítemes Pr.1 y Pr.2, después que el participante responda debe darle retroalimentación. En los ítemes 1 y 2, si el participante responde con las letras primero, dígale “Recuerde que primero debe decir los números y luego las letras”.

Ítem	Intento	Respuesta correcta	Alternativa	Respuesta	¿Ok?
Ej.1	1-C	1-C			
Pr.1	A-4	4-A			
1	2-P D-1 4-C	2-P 1-D 4-C			Si No Si No Si No
2	E-5 3-A C-1	5-E 3-A 1-C			Si No Si No Si No
Ej.2	2-P-1	1-2-P			
Pr.2	D-5-A 2-P-4	5-A-D 2-4-P			
3	5-C-A F-E-1 3-2-A	5-A-C 1-E-F 2-3-A	A-C-5 E-F-1 A-2-3		Si No Si No Si No
4	1-G-7 H-9-4 3-Q-7	1-7-G 4-9-H 3-7-Q	G-1-7 H-4-9 Q-3-7		Si No Si No Si No

5	Z-8-N M-6-U P-2-N	8-N-Z 6-M-U 2-N-P	N-Z-8 M-U-6 N-P-2		Si No Si No Si No
6	P-1-J-5 7-X-4-G S-9-T-6	1-5-J-P 4-7-G-X 6-9-S-T	J-P-1-5 G-X-4-7 S-T-6-9		Si No Si No Si No
7	8-E-6-F-1 K-4-C-2-S 5-Q-3-H-6	1-6-8-E-F 2-4-C-K-S 3-5-6-H-Q	E-F-1-6-8 C-K-S-2-4 H-Q-3-5-6		Si No Si No Si No
8	M-4-P-7-R-2 6-N-9-J-2-S U-6-H-5-F-3	2-4-7-M-P-R 2-6-9-J-N-S 3-5-6-F-H-U	M-P-R-2-4-7 J-N-S-2-6-9 F-H-U-3-5-6		Si No Si No Si No
9	R-7-T-4-I-8-F 9-X-2-J-3-N-7 M-1-Q-8-R-4-D	4-7-8-F-I-R-T 2-3-7-9-J-N-X 1-4-8-D-M-Q-R	F-I-R-T-4-7-8 J-N-X-2-3-7-9 D-M-Q-R-1-4-8		Si No Si No Si No
10	6-P-7-S-2-N-9-A U-1-R-9-X-4-K-3 7-M-2-T-6-F-9-A	2-6-7-9-A-N-P-S 1-3-4-9-K-R-U-X 2-6-7-9-A-F-M-T	A-N-P-S-2-6-7-9 K-R-U-X-1-3-4-9 A-F-M-T-2-6-7-9		Si No Si No Si No