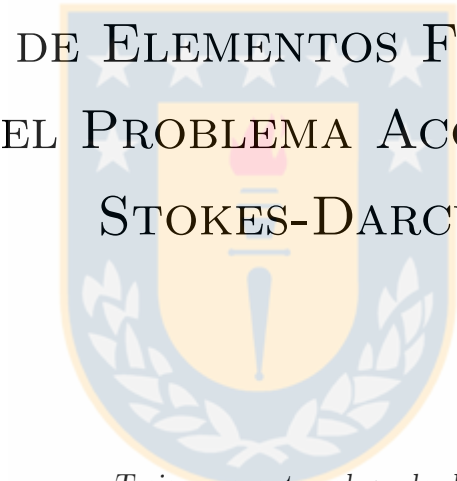


UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
CONCEPCIÓN-CHILE

MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS
PARA EL PROBLEMA ACOPLADO DE
STOKES-DARCY



*Tesis para optar al grado de
Doctor en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática*

RICARDO ELVIS OYARZÚA VARGAS

DICIEMBRE 2010
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

RESUMEN

El objetivo principal de esta tesis es aproximar un problema de acoplamiento de fluido con medio poroso utilizando Métodos de Elementos Finitos Mixtos. El modelo acoplado está determinado por las ecuaciones de Stokes y Darcy, respectivamente, y las condiciones de interfase correspondientes están dadas por conservación de masa, balance de fuerzas normales y la ley de Beavers-Joseph-Saffman.

Primero se desarrolla un análisis a priori de una formulación primal en el fluido y mixta en el medio poroso, y se demuestra que cualquier par de espacios de elementos finitos estables para Stokes y Darcy implican la estabilidad del esquema de Galerkin correspondiente. Lo anterior extiende resultados previos que demuestran existencia y unicidad de un esquema de Galerkin definido por elementos de Bernardi-Raugel y de Raviart-Thomas de bajo orden.

Posteriormente, se realiza un análisis a priori y a posteriori de una formulación variacional mixta en ambos dominios, del problema acoplado de Stokes-Darcy. Las incógnitas principales consideradas son el pseudo-esfuerzo y la velocidad en el fluido, junto con la velocidad y la presión en el medio poroso. Además, las condiciones de transmisión se convierten en esenciales, lo cual induce la introducción de los valores de la presión del medio poroso y de la velocidad del fluido en la interfase como incógnitas adicionales que cumplen el rol de multiplicadores de Lagrange. Se demuestra existencia y unicidad a nivel continuo, y a nivel discreto se introducen condiciones suficientes para que el esquema de Galerkin asociado sea estable. En particular se pueden utilizar elementos de Raviart-Thomas de bajo orden y elementos constantes a trozo para las velocidades y presiones en ambos dominios, junto con elementos continuos lineales a trozo para los multiplicadores de Lagrange. Además, se obtiene un estimador de error a posteriori, confiable y eficiente para el problema acoplado.

Finalmente, se generalizan los resultados anteriores y se estudia un acoplamiento de un fluido viscoso incompresible con un medio poroso matemáticamente determinado por una ley no lineal. El modelo acoplado no lineal está definido por la ecuación de Stokes y un sistema de Darcy no lineal. En este último la permeabilidad está representada por un operador no lineal, fuertemente monótono y Lipschitz continuo. Se introduce un esquema mixto en ambos dominios y se demuestra existencia y unicidad de solución a nivel continuo y discreto, con su estimación a priori correspondiente. Además se obtiene un estimador de error a posteriori eficiente y confiable para el problema acoplado no lineal.

Para todas las situaciones descritas anteriormente se presentan ensayos numéricos que confirman los resultados teóricos obtenidos.