UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Gravedad Brans-Dicke a partir de la Gravedad Topológica

Por: Addy Lorena Rosa de Lima Salazar Barrera

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción para optar al grado académico de Magíster en Ciencias con Mención en Física

Marzo 2021
Concepción, Chile

Profesor Guía: Dr. Patricio Salgado Arias
Comisión: Dr. Fernando Izaurieta
Dr. Luis Roa

Dedicada a mi hijo Maximiliano Alonso y a Pita

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mis agradecimientos a mi esposo, quien me ha impulsado a terminar mi Tesis, me ha brindado apoyo, amor y me ha entregado la confianza y seguridad necesaria para cumplir. Ha sido mi inspiración junto a nuestro hijo.

También quiero agradecer a mis padres, quienes han sido mi pilar, y hermano por su incondicional apoyo durante mi formación académica, y brindarme la posibilidad de realizarme en mi profesión.

Quiero agradecer de sobremanera a mi Director de Tesis, Dr. Patricio Salgado Arias, por su gran paciencia, tiempo, contribución y dedicación, no sólo con mi Tesis, si no a lo largo de toda mi formación académica, y por su gran apoyo y enseñanza.

Mis agradecimientos al Director de Magíster Gustavo Lima, a los profesores Carlos Saavedra, Juan Crisóstomo, Igor Kondrashuk, Jaime Araneda, Hernán Astudillo, Aldo Delgado, Fernando Izaurieta, por su apoyo y confianza. Y agradecerle a todos los docentes que han sido partícipes de mi formación académica tanto de pregrado como de Magíster.

Deseo además expresar mis agradecimientos a todo el personal del departamento de Física de la Universidad de Concepción, en especial a Soledad, por su excelente disposición.

Y por último quisiera agradecer a mi gran amigo José Benjamin Ojeda, a Cristián Cortés y a Octavio Fierro por su apoyo, ayuda y amistad.

Resumen

Sabemos que la teoría General de la Relatividad es utilizada para describir la gravedad, una de las fuerzas fundamentales de la naturaleza. Sin embargo, pese a todos sus notables éxitos, dicha teoría se resiste a la cuantización, razón que hace muy interesante explorar otras teorías que describen la gravedad.
En particular, esta tesis está enfocada en estudiar teorías tipo Brans-Dicke en cuatro dimensiones, de manera que dichos resultados sean fácilmente verificables mediante observaciones astronómicas.
El trabajo consiste en un modelo que sugiere un mecanismo con el cual la teoría de la gravedad de Brans-Dicke puede emerger de la acción de la gravedad topológica. Para ello, tanto el álgebra de Lie como el tensor simétrico invariante que definen el Lagrangeano gravitacional topológico son construidos mediante un procedimiento de S-expansión del álgebra de Lie con un semigrupo abeliano S apropiado.
En el capítulo 2 se estudiará brevemente la Relatividad General de Einstein y la teoría de Gravedad Brans-Dicke.
En el capítulo 3 y 4 se estudiará y analizará la Gravedad Topológica de Chamseddine, la cual consiste en una teoría de gravedad en dimensiones pares, y la Gravedad de Chern-Simons consistente en una teoría en dimensiones impares.
En el capítulo 5 está basado en estudiar y analizar el trabajo principal de esta tesis, es decir, se estudiará la Gravedad Brans-Dicke a partir de la gravedad topológica.
En el capítulo 6 se estudia la Gravedad Topológica y el Álgebra $\mathcal{B}_5$
El capítulo 7 y 8 se definen y analizan de los términos de gauge Wess-Zumino-Witten, los cuales son estructuras en dimensiones pares conectadas con las teorías Chern-Simons.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Se sabe de mucho tiempo que en Relatividad General el espaciotiempo es un objeto dinámico que tiene grados de libertad indepentientes, y es gobernado por las ecuaciones de Campo de Einstein. Esto significa que en Relatividad General, la geometría es determinada de manera dinámica. Es por eso que la construcción de una teoría de gauge de la gravedad requiere una acción que no considere un fondo de espacio-tiempo fijo. Una acción que cumple con estos requisitos fue propuesta por Chamseddine en los años 1989 y 1990.

Chamseddine construyó acciones para la gravedad topológica en todas las dimensiones, y en las referencias [1] y [6] se mostró que las teorías en dimensiones impares están basadas en formas de Chern-Simons con los grupos de gauge $ISO(2N,1)$, $SO(2N+1,1)$ o $SO(2N,2)$ dependiendo del signo de la constante cosmológica. El uso de formas de Chern-Simons fue primordial para tener una acción invariante de gauge sin restricciones.

Las teorías en dimensiones pares usan un multiplete escalar en conjunto con los campos de gauge en la representación fundamental del grupo de gauge. Para espacios de dimensiones pares no hay candidato geométrico natural como la forma de Chern-Simons. El producto cuña de los campos de fuerza puede servir como la 2n-forma en el espacio-tiempo 2n-dimensional. Para formar una 2n-forma invariante, el n-producto del campo de fuerza no es suficiente, pero requerirá la introducción de un campo escalar ϕ^a en la representación fundamental.

Si las teorías de gravedad topológica proporcionaran el marco de referencia de gauge apropiado para la interacción gravitacional, entonces estas teorías deben satisfacer el principio de correspondencia, en particular, deben estar relacionados

con la Relatividad General o la teoría de Brans-Dicke.
El propósito de esta tesis es mostrar que la teoría de Brans-Dicke surge a medida nos acercamos al límite $l \to 0$ de la teoría de la gravedad topológica invariante bajo el conocido álgebra de Lorentz AdS ($AdS\mathcal{L}_4$)([21], [22]). En este caso l es una constante de acoplamiento de escala-a de longitud, la cual caracteriza distintos régimenes dentro de la teoría. El álgebra de Lorentz por otro lado, es construido del álgbra AdS y un semigrupo particular S mediante el procedimiento de S-expansión introducido en [14] y [12]. El contenido de campo inducido por el grupo de Lorentz AdS incluye el vielbein e^a, la conexión de spin ω^{ab} y los campos bosónicos extra k^{ab}, ϕ^{ab}, h^{ab} y ϕ^a.

Capítulo 2

Relatividad General y Teoría de Brans-Dicke

2.1. Teoría General de la Relatividad

La Teoría de la Relatividad General, es la teoría geométrica de la gravitación publicada por Albert Einstein en 1915 y es la descripción actual de la gravitación en la física moderna. La Teoría General de la Relatividad generaliza la relatividad especial y refina la ley de la gravitación universal de Newton, que proporciona una descripción unificada de la gravedad como una propiedad geométrica del espacio y el tiempo.

Las leyes de Newton son suficientes para describir la interacción gravitacional de nuestro planeta debido a que el campo gravitacional es débil, pero los problemas surgen cuando tratamos de describir fenómenos donde el campo gravitacional es intenso.

Tenemos que en el contexto de la mecánica newtoniana, la fuerza gravitacional que experimenta una partícula de masa m en un potencial gravitacional ϕ, está dada por

$$\vec{F}(\vec{x}) = -m\vec{\nabla}\phi(\vec{x}). \tag{2.1.1}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \tag{2.1.2}$$

donde se relaciona el potencial gravitacional ϕ con la densidad de materia y G es la constante de gravitación universal.
En (2.1.1) y (2.1.2) se observa que el tiempo no aparece, lo que significa que cualquier interacción que se propague se realiza en forma instantánea con velocidad infinita. Esto presenta un problema, ya que se contradice con la Relatividad Especial.
La intuición básica de Einstein fue postular que en un punto concreto no se puede distinguir experimentalmente entre un sistema de referencia uniformemente acelerado y un campo gravitatorio uniforme. La teoría general de la relatividad permitió también reformular el campo de la cosmología. Einstein expresó el propósito de la teoría de la relatividad general para aplicar plenamente el programa de Ernst Mach de la relativización de todos los efectos de inercia. Este punto de contacto real de la influencia de Ernst Mach fue claramente identificado en 1918, cuando Einstein distingue lo que él bautizó como el principio de Mach(los efectos inerciales se derivan de la interacción de los cuerpos) del principio de la relatividad general, que se interpreta ahora como el principio de covariancia general.
Los principios fundamentales introducidos en la Teoría General de la Relatividad son:

- *Principio de equivalencia:* establece que no hay experimentos locales que permiten distinguir entre caída libre en un campo gravitacional y un movimiento uniforme en el espacio. Es decir, describe la aceleración y la gravedad como aspectos distintos de la misma realidad. Este principio se basa en la relación entre masa inercial(resistencia a la aceleración) y masa gravitacional(peso de un cuerpo en un campo gravitacional), cantidades que experimentalmente tienen un mismo valor a pesar de tener significados diferentes.

- *Principio de covariancia:* establece que las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores, es decir, todos los observadores son equivalente.

La teoría de la relatividad general propone que la propia geometría del espacio-tiempo se ve afectada por la presencia de materia, de lo cual resulta una teoría relativista del campo gravitatorio. De hecho la teoría de la relatividad general predice que el espacio-tiempo no será plano en presencia de materia y que la curvatura del espacio-tiempo será percibida como un campo gravitatorio.

Para describir matemáticamente la geometría del espacio-tiempo, se utiliza la *métrica* o *tensor métrico* $g_{\mu\nu}$, y usamos un sistema de cuatro coordenadas x^μ para especificar la distancia ds^2 entre dos puntos infinitesimalmente cercanos

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{2.1.3}$$

Este tensor es de suma importancia, ya que a partir de él se pueden construir todas las propiedades importantes definidas sobre la variedad.

El Tensor Energía-Momentum Habiendo formulado la versión relativista y geométrica de los efectos de la gravedad aún queda la pregunta de la fuente de la gravedad. En la gravedad Newtoniana la fuente es la masa, pero en la relatividad especial la masa se convierte en una parte de una cantidad más general denominada *Tensor Energía-Momentum*. Dicho tensor se puede obtener a partir de un principio variacional desde la acción

$$S_m = \int d^4x \mathcal{L}_m = \int d^4x \sqrt{-g} L_m \tag{2.1.4}$$

donde $g = det(g_{\mu\nu}) < 0$ es el determinante del tensor métrico y $d^4x\sqrt{-g}$ es el elemento invariante de cuadri-volumen en la variedad considerada.
Variando la acción respecto de la métrica, obtenemos el tensor energía-momentum:

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}}. \tag{2.1.5}$$

Ecuaciones de Campo de Einstein La ecuación que describe el movimiento de una partícula libre se denomina *ecuación geodésica*:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\alpha^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{x^\lambda}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \tag{2.1.6}$$

donde la conexión afín $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$ es conocida como conexión o símbolo de

Christoffel, y se escribe como

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_{\alpha} g_{\lambda\beta} + \partial_{\beta} g_{\lambda\alpha} - \partial_{\lambda} g_{\alpha\beta}). \tag{2.1.7}$$

En la formulación original de la Relatividad General, Einstein consideró que la métrica del espacio-tiempo debería ser el único campo dinámicamente independiente y la conexión afín debería ser una función de la métrica, sin embargo es importante notar que es necesario suponer el tensor de torsión $T^{\mu}_{\alpha\beta} \equiv \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$ como nulo en toda la variedad para que estas propiedades no sean independientes. Las ecuaciones invariantes que Einstein buscaba deberían tener la forma

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \tag{2.1.8}$$

donde $G_{\mu\nu}$, conocido como *tensor de Einstein*, correspondería a un tensor simétrico de rango dos para ser consistentes con la definición del tensor energía-momentum $T_{\mu\nu}$ y debería estar compuesto de segundas derivadas del tensor métrico y κ^2 es una constante de normalización. El *tensor de Riemann* es el único tensor que se puede construir a partir de la métrica, sus primeras y segundas derivadas y que además es lineal en las segundas derivadas, el cual viene dado por

$$R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} \equiv \partial_{\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\kappa\beta} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\beta} \Gamma^{\alpha}_{\kappa\nu}. \tag{2.1.9}$$

A partir de este tensor, se puede definir el *tensor de Ricci* y el *escalar de curvatura de Ricci* como:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \\ R &\equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

respectivamente. De las *identidades de Bianchi*, se tiene que el tensor de Einstein resulta ser:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{2.1.11}$$

Finalmente, se tiene que la *Ecuación de Einstein* se escribe como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \qquad (2.1.12)$$

En 1915 el matemático David Hilbert propuso una acción a partir de la cual se obtienen las ecuaciones de la gravitación variando la acción respecto de la métrica, conocida como *acción de Einstein-Hilbert*:

$$S = \int R\sqrt{-g} d^4x. \qquad (2.1.13)$$

La variación de la acción nos conduce a las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0, \qquad (2.1.14)$$

donde se considera que las propiedades métrica y afín no son independientes.

2.2. Teoría de Brans-Dicke

El problema de comprender las constantes en física, ha intrigado durante mucho tiempo. De hecho se puede considerar que la reducción en el número de constantes físicas arbitrarias es una medida del progreso total en la física. El aspecto intrigante de las constantes físicas es especialmente evidente en el caso de la constante de Newton, $G = 6{,}67 \times 10^{-8} dyne - cm/g^2$, que es extraordinariamente pequeña. Para entender esto de una forma que sea independiente de las unidades de medidas, notemos que la atracción gravitacional entre dos electrones en reposo es menor que la repulsión electrostática por un factor de 4×10^{42}. En un intento para entender el tamaño de G entre otras cosas, Brans y Dicke (1961) desarrollaron una teoría en la cual G es reemplazada por un nuevo campo escalar que debería ser determinado por la distribución de energía-masa en el universo. Esto es de acuerdo con las ideas de Mach, quien postulaba que el contenido de materia del universo debía de alguna forma determinar las propiedades inerciales, y por lo tanto gravitacionales, de los cuerpos individuales.

Veamos ahora una motivación para introducir el campo escalar en la teoría de Brans-Dicke a través de nada mas que una simple relación numérica. Como es sabido el "tamaño" característico del universo es alrededor de $R = 10^{10}$ años luz, y su densidad promedio es aproximadamente $10^{-31} g/cm^3$, con una incerteza de varios ordenes de magnitud. Esto nos lleva a la siguiente relación numérica

$$\frac{G}{c^2}\frac{M}{R} \sim 1 \tag{2.2.1}$$

donde M es la masa total del universo. Esto puede ser expresado también como

$$\frac{1}{G} \sim \frac{M}{c^2 R} \tag{2.2.2}$$

La forma de esta relación sugiere que $1/G$ podría estar igualado con un campo escalar φ el cual podría estar determinado por una ecuación tipo Poisson, donde la fuente sería el contenido de materia del universo, esto es

$$\nabla^2 \varphi \sim \frac{\rho}{c^2} \tag{2.2.3}$$

Claramente $\varphi \sim M/Rc^2$ es una solución para esta ecuación.

A continuación se presentará la obtención de las ecuaciones de movimiento para la teoría de Brans-Dicke.

Consideremos el lagrangeano de Einstein-Cartan:

$$\mathcal{L}_{grav} = \frac{1}{32\pi G} R^{ab} \wedge V^c \wedge V^d \wedge \varepsilon_{abcd}. \tag{2.2.4}$$

De acuerdo con Brans-Dicke, podemos escribir $32\pi G = e^{2\phi}$, de modo que la acción de Brans-Dicke es dada por:

$$S_{BD} = \int_{M_4} e^{-2\phi} R^{ab} \wedge V^c \wedge V^d \wedge \varepsilon_{abcd}. \tag{2.2.5}$$

Variando la acción con respecto de V^a y ϕ, encontramos:

$$2e^{-2\phi}R^{ab}\wedge V^{c}\varepsilon_{abcd}=0, \tag{2.2.6}$$

$$-2e^{-2\phi}R^{ab}\wedge V^{c}\wedge V^{d}\varepsilon_{abcd}=0. \tag{2.2.7}$$

La variación de la acción con respecto a la conexión de spin ω^{ab}, conduce a:

$$0=\int_{M_4}(de^{-2\phi}\wedge V^{c}\wedge V^{d}+2e^{-2\phi}R^{c}\wedge V^{d})\varepsilon_{abcd}\delta\omega^{ab} \tag{2.2.8}$$

de donde obtenemos:

$$R^{c}\wedge V^{d}\varepsilon_{abcd}=d\phi\wedge V^{c}\wedge V^{d}\varepsilon_{abcd}. \tag{2.2.9}$$

De aquí podemos ver que existe una torsión distinta de cero: $R^{a}=d\phi\wedge V^{a}$, puesto que la conexión de spin es no Riemanniana, y que de (2.2.9) se tiene que

$$R^{a}=d\phi\wedge V^{a}. \tag{2.2.10}$$

Haciendo

$$\omega^{ab}=\mathring{\omega}^{ab}+h^{ab} \tag{2.2.11}$$

donde $\mathring{\omega}^{ab}$ satisface $R^{a}(\mathring{\omega})=0$, o sea, es la parte Riemanniana de ω^{ab}, tenemos que la ecuación (2.2.10) queda como:

$$-h^{ab}\wedge V_{b}=d\phi\wedge V^{a}. \tag{2.2.12}$$

Expandiendo h^{ab} y $d\phi$ a lo largo de la base del vielbein, se obtiene:

$$h_{c}^{ab}=\delta_{c}^{a}\partial^{b}\phi-\delta_{c}^{b}\partial^{a}\phi, \tag{2.2.13}$$

o como 1-forma

$$h^{ab} = 2V^{[a}\partial^{b]}\phi. \tag{2.2.14}$$

En particular, de (2.2.13) tenemos

$$h_c^{ac} = -3\partial^a\phi. \tag{2.2.15}$$

Procedemos ahora a encontrar la ecuación de Einstein y la ecuación ϕ en el formalismo de segundo orden, reemplazando ω^{ab} en (2.2.6) y (2.2.7). Tenemos

$$R^{\cdot a}_{\cdot b}(\omega) - \frac{1}{2}\delta^a_b R^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}(\omega). \tag{2.2.16}$$

Usando (2.2.11), tenemos

$$\begin{aligned} R^{ab}(\mathring{\omega}+h) &= d(\mathring{\omega}^{ab}+h^{ab}) - (\mathring{\omega}^a_c + h^a_c)\wedge(\mathring{\omega}^{cb}+h^{cb}) \\ &= d\mathring{\omega}^{ab} - \mathring{\omega}^a_c\wedge\mathring{\omega}^{cb} + dh^{ab} - \mathring{\omega}^{ac}\wedge h^b_c - h^{ac}\wedge\mathring{\omega}^b_c - h^a_c\wedge h^{cb} \\ &= R^{ab}(\mathring{\omega}) + \mathfrak{D}(\mathring{\omega})h^{ab} - h^a_c\wedge h^{cb} \\ &\equiv \mathring{R}^{ab} + H^{ab} \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

donde $\mathring{R}^{ab} \equiv R^{ab}(\mathring{\omega})$ es la 2-forma curvatura en términos de la conexión Riemanniana $\mathring{\omega}^{ab}$, y donde

$$H^{ab} = \mathfrak{D}(\mathring{\omega})h^{ab} - h^a_c\wedge h^{cb}. \tag{2.2.18}$$

La ecuación (2.2.16) queda entonces de la forma

$$\mathring{R}^{a\cdot}_{b\cdot} - \frac{1}{2}\delta^a_b\mathring{R}^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} + H^{a\cdot}_{b\cdot} - \frac{1}{2}\delta^a_b H^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} = 0, \tag{2.2.19}$$

donde $H^a_b \equiv H^{a\cdot}_{b\cdot}$ es dado por:

$$
\begin{aligned}
H^a_b &= \frac{1}{2}\{-3\mathring{\mathfrak{D}}_b(\partial^a\phi) + 2\mathring{\mathfrak{D}}_c(\delta_b^{[c}\partial^{a]}\phi) + 6\delta_b^{[a}\partial^{c]}\phi + 4\delta_c^{[a}\partial^{\ell]}\phi\delta_b^{[\ell}\partial^{c]}\phi\} \\
&= -\mathring{\mathfrak{D}}_b\partial^a\phi - \frac{1}{2}\delta^a_b\mathring{\mathfrak{D}}_c\partial^c\phi + \delta^a_b\partial^c\phi\partial_c\phi - \partial^a\phi\partial_b\phi.
\end{aligned}
\tag{2.2.20}
$$

Contrayendo a,b, se obtiene $H^{\cdot}_{\cdot} \equiv H$:

$$
H = -3(\mathring{\mathfrak{D}}_m\partial^m\phi - \partial^m\phi\partial_m\phi). \tag{2.2.21}
$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.2.20) y (2.2.21) en (2.2.19), se obtienen las ecuaciones del movimiento para la teoría de B-D en el formalismo de segundo orden:

$$
\mathring{R}^a_b - \frac{1}{2}\delta^a_b\mathring{R} = \mathring{\mathfrak{D}}_b\partial^a\phi - \delta^a_b\mathring{\mathfrak{D}}_m\partial^m\phi + 3(\partial^a\phi\partial_b\phi - \frac{1}{2}\delta^a_b\partial^m\phi\partial_m\phi). \tag{2.2.22}
$$

Si hacemos $f = e^{-2\phi}$ y escribimos la ecuación (2.2.22) en formalismo de tensores usando la relación $V^b_\mu\mathring{\mathfrak{D}}_b = \nabla_\mu$, válido para $\mathring{\omega}$, se tiene:

$$
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2f}\{g_{\mu\nu}\nabla\partial f - \nabla_\mu\partial_\nu f\} + \frac{3}{4}\frac{1}{f^2}\{\partial_\mu f\partial_\nu f - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\alpha f\partial_\alpha f\}. \tag{2.2.23}
$$

Finalmente, calculamos la ecuación ϕ (2.2.7), expandiendo R^{ab} en la base del vielbein:

$$
\begin{aligned}
&R^{ab}_{mn}V^m \wedge V^n \wedge V^c \wedge V^d\varepsilon_{abcd} = 0 \\
&R^{ab}_{mn}\varepsilon^{mncd}\varepsilon_{abcd} = -4R^{ab}_{mn}\delta^{mn}_{ab} = 0 \\
&R^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}(\omega) = 0
\end{aligned}
\tag{2.2.24}
$$

Usando (2.2.17), se tiene

$$
\mathring{R} + H = 0. \tag{2.2.25}
$$

Reemplazando (2.2.21),

$$\mathring{\mathfrak{D}}_m\partial^m\phi - \partial^m\phi\partial_m\phi - \frac{\mathring{R}}{3} = 0. \tag{2.2.26}$$

Haciendo el cambio de variables $F = e^{-\phi}$, con lo que la ecuación (2.2.26) queda como:

$$(\mathring{\mathfrak{D}}_m\partial^m + \frac{\mathring{R}}{3})F = 0 \tag{2.2.27}$$

la cual es la ecuación estándar invariante conformal de la ecuación de movimiento de un campo escalar sin masa F. Las ecuaciones (2.2.26) o (2.2.27) también se pueden obtener de las ecuaciones (2.2.22) y (2.2.23) como consecuencia de la contracción de las identidades de Bianchi:

$$\mathfrak{D}_a(R^{a\cdot}_{b\cdot} - \frac{1}{2}\delta^a_b R^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}) = 0. \tag{2.2.28}$$

Capítulo 3

Gravedad Topológica de Chamssedine

Teorías de gravedad Topológicas son construidas en espacio-tiempos de dimensiones impares 2n+1, usando (2n+1)-formas de Chern-Simons con los grupos de gauge ISO(1,2n), SO(1,2n+1) o SO(2,2n). En dimensiones pares la presencia de un campo escalar en la representación fundamental del grupo de gauge es requerido, a parte del campo de gauge. Es aún un problema abierto el unir la gravedad con otras interacciones fundamentales. Para ello, hay dos direcciones principales estudiándose para solucionar dicho problema. Uno de ellos viene de teoría de campos, donde la meta es encontrar una teoría unificada con simetrías de gauge que incorpore gravedad. La formulación de Chamseddine consiste en un método para unir gravedad con otras interacciones fundamentales, en el contexto de modelos de supergravedad.

Sabemos que la acción de Einstein-Hilbert puede ser derivada en el formalismo de primer orden usando el vielbein y las conexiones de spin. Alternativamente, puede ser obtenida ajustando y restringiendo el grupo de Poincaré o su generalización de Sitter. Esta acción no corresponde a la acción de una teoría de gauge estándar y las propiedades no renormalizables son análogas a aquellas en la teoría métrica. El uso de formas de Chern-Simons es escencial en una acción invariante de gauge sin restricciones. Estas formas solo existen en dimensiones impares. La métrica en la variedad espacio-tiempo no es usada, y las acciones construidas son topológicas. El grupo de gauge escogido debe el grupo de Poincaré, los grupos de Sitter o anti-de-Sitter denotados por ISO(1,2n), SO(1,2n+1) o SO(2,2n) en 2n+1-dimensiones. A continuación se muestran los casos de Sitter y anti-de-Sitter. Es importante usar la (n+1) forma invariante

$$\langle J_{A_1B_1}J_{A_2B_2}...J_{A_{n+1}B_{n+1}}\rangle = \epsilon_{A_1B_1...A_{n+1}B_{n+1}}, \tag{3.0.1}$$

donde J_{AB} es el generador del grupo y $A, B = 0, 1, ..., 2n+1$. La acción es

$$S_{2n+1} = k\int_{M_{2n+1}} \omega_{2n+1}, \tag{3.0.2}$$

donde ω_{2n+1} es la (2n+1)-forma

$$\omega_{2n+1} = (n+1)\int_0^1 \delta t\langle A(tdA + t^2A^2)^n\rangle, \tag{3.0.3}$$

donde $A = A^{AB}J_{AB}$ es la 1-forma evaluada en el algebra de Lie. Bajo una transformación de gauge, el campo de gauge A transforma como

$$A^g = g^{-1}Ag + g^{-1}dg \tag{3.0.4}$$

y la forma de Chern-Simons transforma como:

$$\omega^g_{2n+1} = \omega_{2n+1} + d\alpha_{2n} + (-1)^n\frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!}\langle(g^{-1}dg)^{2n+1}\rangle. \tag{3.0.5}$$

Aqui, α_{2n} es una 2n-forma la cual es una función de A y $g^{-1}dg$, y la integral $\langle(g^{-1}dg)^{2n+1}\rangle$ es proporcional al número de vueltas. Para los grupos ISO(1,2n), SO(1,2n), la homotopía $\prod_{2n+1}$ de dichos grupos es proporcional a la torsión, y el número de vueltas, el cual es insensible respecto a la torsión, desvanece. Para entender esto mejor, considere el caso en cinco dimensiones donde los grupos relevantes son SO(2,4) o SO(1,5). La integral $(g^{-1}dg)^5$ está relacionada con los quintos grupos de cohomología $H^5(M_5, \pi_5(SO(2,4)))$ o $H^5(M_5, \pi_5(SO(1,5)))$. Los grupos homotópicos fueron desarrollados por Hilton:

$$\pi_5(SO(1,5)) = \pi_5(SO(5)) = Z_2,$$
$$\pi_5(SO(2,4)) = \pi_5(SO(4)) = Z_2 + Z_2, \tag{3.0.6}$$

conocidos como torsión. Sin embargo, debido a que la cohomología de una variedad se desarrolla mediante la teoría de Rahm usando coeficientes reales, estos no son sensibles a la torsión y la integral de $(g^{-1}dg)^5$ desvanece. Esto explica por qué la constante de acoplamiento K no está cuantizada, lo que hace mas aceptable la teoría para describir gravedad. Así, para variedades sin borde ∂M_{2n+1} es cero y la acción S_{2n+1} es invariante de gauge. Para variedades con borde para obtener la invariancia de gauge se requiere que A o $g^{-1}dg$ desvanezca en el límite $partial M_{2n+1}$. Por simplicidad, se asume que la variedad M_{2n+1} no tiene borde. En analogía con el caso tri-dimensional, la conección con la gravedad a través de la identificación

$$A^{ab} = \omega^{ab}, \quad A^{a,2n+1} = e^a, \quad a = 0, 1, ..., 2n \tag{3.0.7}$$

Aqui, podemos ver que la acción (3.0.2) puede ser escrita tal que e^a aparezca sin derivadas y que la conección ω^{ab} entre solo a través de la fuerza de campo del subgrupo SO(1,2n). Esto se debe a la naturaleza especial de la forma de Chern-Simons. Para variedades M_{2n+1} sin límites, la acción (3.0.2) toma la forma:

$$S_{2n+1} = k \int_{M_{2n+1}} \epsilon_{a_1,...,a_{2n+1}} \sum_{l=0}^{n} \frac{\lambda^l}{2l+1} \times R^{a_1 a_2} \wedge ... \wedge R^{a_{2n-2l-1},a_{2n-2l}} \wedge e^{a_{2n-2l+1}} \wedge ... \wedge e^{a_{2n+1}}, \tag{3.0.8}$$

donde

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{para SO(2,2n)} \\ -1 & \text{para SO(1,2n+1)} \\ 0 & \text{para ISO(1,2n)} \end{cases} \tag{3.0.9}$$

y

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^{ac}\omega_c^b. \tag{3.0.10}$$

Notar que en el caso ISO(1,2n), solo se mantiene el primer término

$$\epsilon_{a_1 \dots a_{2n+1}} R^{a_1 a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_{2n-1}, a_{2n}} \wedge e^{a_{2n+1}}. \tag{3.0.11}$$

El término de Einstein solo está presente en los casos de Sitter. En particular, la acción S_5 en cinco dimensiones es:

$$S_5 = k \int_{M_5} \epsilon_{a_1 \dots a_5} (e^{a_1} R^{a_2 a_3} R^{a_4 a_5} + \frac{2}{3} \lambda e^{a_1} e^{a_2} e^{a_3} R^{a_4 a_5} + \frac{1}{5} \lambda^2 e^{a_1} \dots e^{a_5}). \tag{3.0.12}$$

El primer término es una generalización de la forma de Gauss-Bonnet, el segundo término es la acción de Einstein en cinco dimensiones, mientras que el tercer término es una constante cosmológica.
La acción general S_{2n+1} es la suma de las densidades de Euler. Tal suma ha sido considerada anteriormente como una generalización de la acción de Einstein. La diferencia importante aquí es que la acción entera es arreglada por invariancia de gauge. Este término fue visto anteriormente en el límite de baja energía de la teoría de cuerdas.
La ecuación clásica para A^{AB} está dada por:

$$\epsilon_{A_1 B_1 \dots A_{n+1} B_{n+1}} F^{A_1 B_2} \wedge \dots \wedge F^{A_{n+1} B_{n+1}}. \tag{3.0.13}$$

Descomponiendo esta ecuación de acuerdo con (3.0.7), se tiene como resultado dos ecuaciones:

$$\epsilon_{a_1 \dots a_{2n+1}} (R^{a_1 a_2} + \lambda e^{a_1} e^{a_2}) \dots (R^{a_{2n-1}, a_{2n}} + \lambda e^{a_{2n-1}} e^{a_{2n}}) = 0, \tag{3.0.14}$$

$$\epsilon_{a_1 \dots a_{2n+1}} T^{a_1} (R^{a_2 a_3} + \lambda e^{a_2} e^{a_3}) \dots (R^{a_{2n-2}, a_{2n-1}} + \lambda e^{a_{2n-2}} e^{a_{2n-1}}) = 0, \tag{3.0.15}$$

donde T^a es la torsión dada por:

$$T^a = de^a + \omega^a_b e^b. \tag{3.0.16}$$

Si permitimos que solo $T^a = 0$, la ecuación (3.0.15) será satisfacida. Si nos restringimos al espacio de e^a_μ, se tiene que ω^{ab}_μ estará completamente determinada en términos de e^a_μ

$$\omega^{ab}_\mu = \frac{1}{2}(\Omega_{\mu\nu\rho} - \Omega_{\nu\rho\mu} + \Omega_{\rho\mu\nu})e^{\nu a}e^{\rho b}, \tag{3.0.17}$$

donde

$$\Omega_{\mu\nu\rho} = (\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu)e_{a\rho}. \tag{3.0.18}$$

Con ω^{ab}_μ dada por la ecuación (3.0.17), la fuerza de campo $R^{ab}_{\mu\nu}$ se relaciona con el tensor de Riemann de la métrica $g_{\mu\nu} = e^a_\mu e_{\nu a}$:

$$e^\sigma_a e_{\rho b} R^{ab}_{\mu\nu}(\omega(e)) = R^\sigma_{\rho\mu\nu}(g). \tag{3.0.19}$$

La ecuación (3.0.14) se vuelve una generalización de la ecuación de Einstein. Se ha construido entonces una teoría de gravedad en dimensiones impares, la cual es explicitamente invariante de gauge y es una generalización de la teoría de Einstein. Expandiendo alrededor de una solución clásica distinta de cero (e^a_0, ω^{ab}_0),

$$e^a = e^a_0 + \bar{e}^a, \quad \omega^{ab} = \omega^{ab}_0 \bar{\omega}^{ab}, \tag{3.0.20}$$

donde $\bar{e}^{ab}$ y $\bar{\omega}^{ab}$ son fluctuaciones cuánticas, una parte cuadrática es generada. Esto es similar a la situación de gravedad de Einstein donde se expande la métrica $g_{\mu\nu}$ alrededor de la métrica background. Los propagadores pueden ser leidos de la parte cuadrática de la acción y el análisis perturbativo puede ser realizado como en una teoría de gauge estándar.

En el caso de las dimensiones pares, no hay candidato geométrico natural como la forma de Chern-Simons. El producto cuña de n de las fuerzas de campo pueden

hacer la 2n-forma requerida en un espacio-tiempo 2n-dimensonal. El grupo natural de gauge es ISO(1,2n-1), SO(1,2n) o SO(2,2n-1). Con los últimos dos, el tensor $\epsilon_{A_1...A_{2n+1}}$ de grupo puede ser definido. El caso ISO(1,2n-1) puede ser recuperado por la contracción de grupo. Para formar una 2n-forma de grupo invariante se requiere, además del n-producto de fuerzas de campo, un campo escalar ϕ^A en la representación fundamental.
La acción 2n-dimensional es entonces:

$$S_{2n} = k \int_{M_{2n}} \epsilon_{A_1...A_{2n+1}} \phi^{A_1} F^{A_2 A_3} ... F^{A_{2n}, A_{2n+1}}, \quad A = 0, 1, ..., 2n, \tag{3.0.21}$$

donde

$$F^{AB} = dA^{AB} + A^{AC} A^B_C. \tag{3.0.22}$$

Esto también puede ser logrado reduciendo la acción del caso (2n+1)-dimensional a 2n dimensiones. Esto debe contener además de la gravedad 2n-dimensional, un campo escalar y un campo vectorial.
Un ejemplo claro es reducir el caso en cinco dimensiones a cuatro dimensiones. Cuando se reduce dimensionalmente la acción (3.0.12) se tiene:

$$\begin{aligned} S_4 =& 3k \int_{M_4} d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{a_1...a_5} [\lambda^2 e^{a_1}_\mu e^{a_2}_\nu e^{a_3}_\rho e^{a_4}_\sigma e^{a_5}_{\dot{4}} + \frac{4}{3} \lambda e^{a_1}_\mu e^{a_2}_\nu e^{a_3}_\rho R^{a_4 a_5}_{\rho_4} \\ &+ 2\lambda e^{a_1}_\mu e^{a_2}_\nu e^{a_3}_{\dot{4}} R^{a_4 a_5}_{\rho\sigma} + e^{a_1}_\mu R^{a_2 a_3}_{\nu\rho} R^{a_4 a_5}_{\sigma \dot{4}} + e^{a_1}_{\dot{4}} R^{a_2 a_3}_{\mu\nu} R^{a_4 a_5}_{\rho\sigma}], \end{aligned} \tag{3.0.23}$$

donde μ, ν, ρ, σ son los índices curvados en M_4, y $R^{ab}_{\mu\nu}$ puede ser obtenido de (3.0.10). Es simple de ver que los subgrupos SO(1,4) o SO(2,3), pueden ser preservados del truncamiento $e^a_\mu = 0$. El término que sobrevive es el último término en (3.0.23), y coincide con la acción cuatri-dimensional de (3.0.22). Este truncamiento no es natural. Reescribiendo la ecuación (3.0.23) en términos del campo cuatri-dimensional se obtiene:

$$\begin{aligned}S_4 =&3k\int_{M_4} d^4x\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}[\lambda^2 e_\mu^\alpha e_\nu^\beta e_\rho^\gamma e_\sigma^\delta e_4^4 - 4\lambda^2 e_\mu^\alpha e_\nu^\beta e_\rho^\gamma e_\sigma^4 e_4^\delta + \frac{8}{3}\lambda e_\mu^\alpha e_\nu^\beta e_\rho^\gamma R_{\sigma 4}^{\delta 4}\\ &+ 4\lambda e_\mu^\alpha e_\nu^\beta e_\rho^4 R_{\sigma 4}^{\gamma\delta} + 2\lambda e_\mu^\alpha e_\nu^\beta e_4^4 R_{\rho\sigma}^{\gamma\delta} + 4\lambda e_\mu^4 e_\nu^\alpha e_4^\beta R_{\rho\sigma}^{\gamma\delta} + 4\lambda e_\mu^\alpha e_\nu^\beta e_4^\gamma R_{\rho\sigma}^{\delta 4} + e_\mu^4 R_{\nu\rho}^{\beta 4} R_{\sigma 4}^{\gamma\delta}\\ &+ 2e_\mu^\alpha R_{\nu\rho}^{\beta\gamma} R_{\sigma 4}^{\delta 4} + 2e_\mu^\alpha R_{\nu\rho}^{\beta 4} R_{\sigma 4}^{\gamma\delta} + e_4^4 R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} R_{\rho\sigma}^{\gamma\delta} + 4e_4^\alpha R_{\mu\nu}^{\beta\delta} R_{\rho\sigma}^{\delta 4}].\end{aligned} \tag{3.0.24}$$

En esta descomposición $(e_\mu^\alpha, \omega_\mu^{\alpha\beta})$ describirá el gravitón cuatri-dimensional, $(e_\mu^4, \omega_\mu^{\alpha 4})$ el vector y $(e_4^4, \omega_4^{\alpha 4})$ el escalar.
El truncamiento estándar es hacer $e_\mu^4, \omega_\mu^{\alpha 4}, e_4^4$ y $\omega_4^{\alpha\beta}$ cero, lo cual es consistente con la invariancia de Sitter restante SO(1,4) p SO(2,3). Si definimos:

$$\omega_\mu^{ab} = (e_\mu^\alpha, \omega_\mu^{\alpha\beta}), \quad \phi^a(e_4^4, \omega_4^{\alpha 4}), \tag{3.0.25}$$

e integramos por pare, el truncamiento S_4 puede ser escrito como:

$$S_4 = 3k\int_{M_4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{abcde}\phi^a R^{bc} R^{de}, \tag{3.0.26}$$

donde

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^{ac}\omega_c^b. \tag{3.0.27}$$

Esto coincide completamente con el truncamiento simple y muestra que la acción invariante de grupo (3.0.22) es única.

Capítulo 4

Gravedad Chern-Simons

4.1. Formas de Chern-Simons

Antes de entrar a definir la gravedad de Chern-Simons, haremos un breve resumen de algunas definiciones.
Una forma de Chern-Simons es una función polinomial local de una $1-$forma $\mathbf{A}$ valuada en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dada por

$$\omega_{CS}^{(2n+1)} := (n+1)\int_0^1 dt\langle \mathbf{A}(td\mathbf{A}+t^2\mathbf{A}^2)^n\rangle, \tag{4.1.1}$$

donde $\langle\cdots\rangle$ denota un tensor simétrico invariante bajo algún grupo de simetría. Ejemplos serían los casos $n=1$ y $n=2$.

$$\begin{aligned} \omega_{CS}^{(3)} &= \langle \mathbf{A}d\mathbf{A}+\frac{2}{3}\mathbf{A}^3\rangle, \\ \omega_{CS}^{(5)} &= \langle \mathbf{A}(d\mathbf{A})^2+\frac{3}{2}\mathbf{A}^3d\mathbf{A}+\frac{3}{5}\mathbf{A}^5\rangle. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Puesto que la $2-$forma curvatura es dada por $\mathbf{F}=d\mathbf{A}+\mathbf{A}^2$, se encuentra que

$$d\omega_{CS}^{(2n+1)} = \langle \mathbf{F}^{n+1}\rangle \tag{4.1.3}$$

lo cual bajo una transformación de gauge transforma como

$$d(\delta\omega_{CS}^{(2n+1)}) = 0 \tag{4.1.4}$$

La correspondiente forma de Chern-Simons transforma como

$$\omega_{CS}^{(2n+1)}(\mathbf{A}') = \omega_{CS}^{(2n+1)}(\mathbf{A}) + (-1)^{n+1}\frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!}\langle (g^{-1}dg)^{2n+1}\rangle + d\Omega^{(2n)}, \tag{4.1.5}$$

donde g es un elemento del grupo de simetría.

4.2. Gravedad Chern-Simons

Tenemos que la teoría de Chern-Simons fue descubierta en el contexto de anomalías en los años 70, y fue usada como modelo exótico para sistemas de gauge en dimensiones $2+1$. Luego, se percataron que la teoría ordinaria de la gravedad de Einstein en $2+1$ dimensiones es un ejemplo natural del sistema Chern-Simons, especialmente a través del trabajo de Witten. Con esto, tenemos que la Relatividad General en $2+1$ dimensiones con o sin constante cosmológica, es un sistema Chern-Simons, para los grupos $ISO(2,1)$ o $SO(2,2)$ respectivamente.

Tenemos que la forma de Pontryagin es

$$P = Tr[F \wedge F], \tag{4.2.1}$$

es cerrado, es decir $dP = 0$.
Luego, el lema de Poincaré, se tiene que P es exacto local, es decir, siempre es posible de escribir en un vecindario abierto como la derivada exterior de una 3-forma

$$P = dL. \tag{4.2.2}$$

Donde la 3-forma L es el Lagrangiano Chern-Simons. Revisemos algunos hechos del sistema Chern-Simons en tres dimensiones.
Tenemos que

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \tag{4.2.3}$$

es la curvatura en la representación adjunta y $\mathbf{A}$ es la 1-forma conección de un álgebra de Lie. Sea $\mathbf{G}$ el grupo de gauge y $\mathcal{G}$ su álgebra generada por las matrices $\mathbf{T}_a$, tal que $[\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b] = C_{ab}^{ca}\mathbf{T}_c$. Bajo la acción del grupo de gauge, la conección

$$\mathbf{A} = A_\mu^a \mathbf{T}_a dx^\mu \tag{4.2.4}$$

transforma como

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = g^{-1}\mathbf{A}g + g^{-1}dg \tag{4.2.5}$$

donde la 0-forma $g(x)$ es un elemento de $\mathcal{G}$. Luego, la curvatura transforma como

$$\mathbf{F} \to \mathbf{F}' = g^{-1}\mathbf{F}g. \tag{4.2.6}$$

Podemos encontrar el Lagrangiano usando el hecho de que la 3-forma L_{CS} cumple con

$$dL_{CS} = Tr[\mathbf{F} \wedge \mathbf{F}]. \tag{4.2.7}$$

De (4.2.7), se encuentra que el Lagrangiano **CS** está dado por

$$L_{CS} = Tr[\mathbf{A} \wedge d\mathbf{A} + \frac{2}{3}\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}]. \tag{4.2.8}$$

1. ***Invariancia de gauge:***

   Revisemos la invariancia de la acción de Chern-Simons bajo transformaciones de gauge.
   Podemos observar que el lado derecho de (4.2.7) es invariante bajo la transformación (4.2.5), y con eso tenemos que $\delta(dL_{CS}) = 0 \quad \longrightarrow d\delta L_{CS} = 0$.
   A medida que δL_{CS} se aproxima a cero lo suficientemente rápido en el

borde espacial, tenemos que la acción **CS** también debe ser invariante. Reemplazando (4.2.5) en (4.2.8), tenemos que

$$L_{CS}(\mathbf{A}^{'}) = L_{CS}(\mathbf{A}) - dTr[dgg^{-1}\mathbf{A}] - \frac{1}{3}Tr[(g^{-1}dg)^{3}]. \tag{4.2.9}$$

Luego, la acción cambia como

$$I_{CS}[\mathbf{A}^{'}] = I_{CS}[\mathbf{A}] - \int_{\partial\mathcal{M}} Tr[dgg^{-1}\mathbf{A}] - \frac{1}{3}\int_{\mathcal{M}} Tr[(dgd^{-1})^{3}]. \tag{4.2.10}$$

Esta acción es invariante si realizamos los análisis pertinentes: si $g \to 1$ lo suficientemente rápido, tenemos se elimina el segundo término. Esta condición se da porque es parte de las reglas del juegoen cualquier problema variacional donde los campos satisfacen las condiciones de borde apropiadas y eso restringe el tipo de transformaciones de campo permitidas en el borde espacio temporal.

El último término en (4.2.9) es cerrado por lo que sin que hayan artilugios topológicos previstos, este término puede ser expresado localmente como la derivada exterior de una 2-forma que depende de $g(x)$.

La ley de transformación (4.2.10) nos dice que la acción cambia por un término de superficie y posiblemente por un funcional de $g(x)$. A pesar que ninguno de estos términos alteran las ecuaciones de campo, pueden cambiar las propiedades globales de la teoría, como la definición de cargas conservadas. También proporcionan diferentes pesos para distintas configuraciones topológicas en la teoría cuántica.

2. ***Ecuaciones de Campo:***

Estudiemos ahora las ecuaciones de campo relacionadas para la acción. Haciendo variar la acción, tenemos

$$\delta I_{CS}[\mathbf{A}] = 2\int_{\mathcal{M}} Tr[\mathbf{T}_{a},\mathbf{T}_{b}]F^{a}\wedge\delta A^{b} - \int_{\partial\mathcal{M}} Tr[\mathbf{T}_{a},\mathbf{T}_{b}]A^{a}\wedge\delta A^{b}. \tag{4.2.11}$$

Podemos observar que la condición de tener un extremo bajo una variación arbitraria δA^b implica

$$F^a = 0 \tag{4.2.12}$$

proporcione el grupo de algebra tal que

$$\gamma_{ab} \equiv Tr[\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b] \tag{4.2.13}$$

sea una matriz no singular, lo cual siempre es el caso para un algebra de Lie **semisimple** en la representación adunta y γ_{ab} es la matriz de Killing.
Las álgebras semisimples son aquellas que no contienen subalgebras abelianas invariantes.Hay un álgebra de Lie que no es semisimple que es una representación fiable para la cual γ_{ab} es no degenerado, y es el grupo de Poincaré $ISO(2,1)$ en $2+1$ dimensiones, cuya álgebra es $so(2,1) \oplus R^{2,1}$. Esta excepción a la regla permite escribir el Lagrangiano Einstein-Hilbert como una 3-forma de **CS** para el grupo de Poincaré y es la clave para cuantizar la gravedad en $2+1$ dimensiones.

Las ecuaciones de campo (4.2.12) se ven simples, y hay un conocido resultado acorde para el cual se cumple

$$d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = 0, \tag{4.2.14}$$

luego, $\mathbf{A}$ puede ser escrita como una transformación de gauge de la conección trivial

$$\mathbf{A} = g^{-1}dg, \qquad \text{en todo B.} \tag{4.2.15}$$

3. ***Generalización a más dimensiones:***

Ahora se analizará cómo se extiende la idea de la teoría Chern-Simons para más dimensiones. El ingrediente esencial para dicha construcción es la existencia de la $2n$-forma

$$Q_{2n}(\mathbf{A}) = \gamma_{a_1...a_n} F^{a_1} \wedge F^{a_2} \wedge ... \wedge F^{a_n}, \tag{4.2.16}$$

la cual es cerrada:

$$dQ_{2n} = 0,$$

e invariante bajo la transformación $\mathbf{A} \to \mathbf{A}^{'} = g^{-1}\mathbf{A}g + g^{-1}dg$:

$$Q_{2n}(\mathbf{A}^{'}) = Q_{2n}(\mathbf{A}).$$

Es directo mostrar que las invariantes de la forma

$$Q_{2n}(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge ... \wedge \mathbf{F} \rangle \qquad \text{n veces} \tag{4.2.17}$$

satisfacen los requerimientos, donde hemos definido

$$\gamma_{a_1...a_n} \equiv \langle T_{a_1} T_{a_2} ... T_{a_n} \rangle, \tag{4.2.18}$$

donde $\langle ... \rangle$ es la operación traza en la representación apropiada del álgebra de Lie G. De ahora en adelante, escribiremos

$$Q_{2n}(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{F}^n \rangle, \tag{4.2.19}$$

donde estos invariantes son conocidos como los invariantes **Chern-Weil**. Luego, podemos escribir la ecuación análoga a (4.2.7) como

$$dL_{CS}^{2n-1} = \langle \mathbf{F}^n \rangle, \tag{4.2.20}$$

y su solución es

$$L_{CS}^{2n-1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 dt \langle \mathbf{A}(td\mathbf{A} + t^2\mathbf{A}^2)^{n-1} \rangle + \alpha, \tag{4.2.21}$$

donde α es una $(2n-1)$-forma arbitraria cerrada ($d\alpha = 0$).

Bajo una transformación de gauge de la forma (4.2.5), se tiene que la forma Chern-Simons (4.2.21) cambia como

$$L_{CS}^{2n-1}(\mathbf{A}') = L_{CS}^{2n-1}(\mathbf{A}) + d\beta + (-1)^{n-1}\frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!}\langle (g^{-1}dg)^{2n-1}\rangle, \quad (4.2.22)$$

donde la $(2n-1)$-forma β es una función de $\mathbf{A}$ y depende de g a través de la combinación $g^{-1}dg$. Con esto, se tiene que la acción

$$I_{CS}^{2n-1}[\mathbf{A}] = \int_M L_{CS}^{2n-1} \quad (4.2.23)$$

describe la teoría de gauge para el grupo $\mathbf{G}$, el cual bajo una transformación de gauge finita transforma como (4.2.22).

La mejor descripción que se tiene hasta ahora de nuestro universo a gran escala es la relatividad general con la acción de Einstein-Hilbert definida en un espacio tiempo en cuatro dimensiones

$$I = \int_{M_4} \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)d^4x, \quad (4.2.24)$$

donde R es el escalar de Ricci y Λ es la constante cosmológica. La falla en lograr cuantizar esta teoría, inspiró la observación clásica de Witten de que la gravedad en $2+1$ dimensiones de espacio-tiempo es un modelo soluble, lo que significa que la teoría cuántica puede ser completa y explícitamente deletreada, eso es si todas las funciones de correlación o en alternativa, todo el espacio de Hilbert es conocido. La prueba de la solubilidad de esta teoría es el hecho de que la gravedad en $2+1$ es un sistema Chern-Simons, y por ende tiene todas las características de una teoría de gauge. La gravedad en $3+1$ dimensiones por otro lado no puede ser interpretada como un sistema de gauge del grupo de Poincaré o AdS, y esta es una seria limitación para su cuantización.

La acción de Einstein-Hilbert análoga a (4.2.24) es una teoría de primer orden por lo que solo ocurren derivadas de primer orden

$$I[\omega, e] = \frac{1}{2} \int \epsilon_{abcd} (R^{ab} - \frac{1}{6} \Lambda e^a e^b) e^c e^d, \tag{4.2.25}$$

donde $R^{ab} = d\omega^a_{\ b} + \omega^a_{\ c} \omega^c_{\ b}$ es la 2-forma curvatura, y los campos dinámicos son el vielbein $e^a = e^a_\mu(x) dx^\mu$ y la conección de Lorentz $\omega^{ab}_\mu = \omega^{ab}_\mu(x) dx^\mu$.
Cuando se hace variar la acción (4.2.25) con respecto a e^d y ω^{ab}, se encuentran las siguientes ecuaciones de campo

$$\epsilon_{abcd} (R^{ab} - \frac{1}{3} \Lambda e^a e^b) e^c = 0 \tag{4.2.26}$$

$$\epsilon_{abcd} T^c e^d = 0 \tag{4.2.27}$$

La primera expresión son las ecuaciones usuales de Einstein, mientras que la segunda expresión el desvanecimiento de la torsión $T^a := D^a = de^a + \omega^a_{\ b} e^b = 0$, lo cual es usualmente postulado en relatividad general.

4.3. Gravedad a partir de gravedad Chern-Simons

En [16] se muestra que la acción topológica para gravedad en $2n$-dimeniones puede ser obtenida de la acción de Chern-Simons $(2n+1)$-dimensional genuinamente invariante bajo el grupo de Poincaré. A continuación se presentan algunos resultados de este trabajo.

Lo primero es considerar la gravedad de Lovelock invariante bajo el grupo de Poincaré. En [18], [19], [13] se muestra que el formalismo de Stelle-West [23], que es una aplicación de la teoría de las realizaciones no lineales a la gravedad, permite construir una acción para la teoría de gravedad de Lanczos-Lovelock genuinamente invariante bajo el grupo AdS. De hecho, una acción verdaderamente invariante para dimensiones pares asi como impares es construida en ref [19] usando el formalismo Stelle-West [23]. La acción para esta teoría es

$$S^{(d)}_{SW} = \int \sum_{p=0}^{[D/2]} \alpha_p \varepsilon_{a_1 \cdots a_d} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2p-1} a_{2p}} V^{a_{2p+1}} \cdots V^{a_d}, \tag{4.3.1}$$

donde $V^a = \Omega^a_{\ b} (\cosh z) e^b + \Omega^a_{\ b} (\frac{\sinh z}{z}) D_\omega \phi^b$ y $R^{ab} = dW^{ab} + W^a_{\ c} W^{cb}$ con $W^{ab} =$

$\omega^{ab} + \frac{\sigma}{l^2}(\frac{\sinh z}{z})e^c + (\frac{\cosh z - 1}{z^2})D_\omega\phi^c(\phi^a\delta^b_c - \phi^b\delta^a_c)$ y $\Omega^a_b(u) \equiv u\delta^a_b + (1-u)\frac{\phi^a\phi_b}{\phi^2}$. Aquí ϕ^a corresponde a la asi llamada "Coordenada (A)dS "que parametriza el espacio coset $SO_{\hat{\eta}}(D+1)/SO_\eta$, y $z = \phi/l$. Esta coordenada no tiene dinámica, ya que cualquier valor que eligamos para ella es equivalente a una elección de gauge rompiendo la simetría de $(A)dS$ al grupo de Lorentz.

De (4.3.1) la teoría se vuelve indistingible de la usual, y la simetría AdS es rota en la simetría del grupo de Lorentz. Sin embargo una excepción muy interesante ocurre cuando los coeficientes α_p se eligen como $\alpha_p = \alpha_0\frac{(2n-1)(2\gamma)^p}{(2n-2p-1)}\binom{n-1}{p}$. En este caso, y para cualquier valor de ϕ^a, es posible mostrar que la acción de Euler-Chern-Simons escrita con e^a y ω^{ab} difiere de aquella escrita con V^a y W^{ab} por un término de borde. Luego es directo mostrar que el limite $l \to \infty$ obtenemos una teoría de gravedad de Lovelock genuinamente invariante bajo el grupo de Poincaré:

$$S^{(d)}_{SW} = k\int \varepsilon_{a_1\cdots a_d}R^{a_1a_2}\cdots R^{a_{d-2}a_{d-1}}V^{a_d}, \tag{4.3.2}$$

donde $V^a = e^a + D_\omega\phi^a = d\phi^a + \omega^a_{\ b}\omega^{cd}$, con $W^{ab} = \omega^{ab}$, y ϕ^a corresponde a la llamada "coordenada de Poincaré ". Los campos ϕ^a, e^a, ω^{ab} bajo traslaciones locales de Poincaré cambian como $\delta\phi^a = -\rho^a$; $\delta e^a = \kappa^a_{\ b}e^b$; $\delta\omega^{ab} = -D\kappa^{ab}$.

Procederemos ahora a mostrar que la acción para una gravedad topológica en $2n$-dimeniones puede ser obtenida de una gravedad de Chern-Simons (2n+1)-dimensional geuinamente invariante bajo el grupo de Poincaré

La acción de Lanczos-Lovelock genuinamente invariante bajo el grupo de Poincaré es dada por

$$S^{(d)}_{SW} = k\int_M \epsilon_{a_1\cdots a_{(2n+1)}}R^{a_1a_2}\cdots R^{a_{2n-1}a_{2n}}V^{a_{2n+1}}. \tag{4.3.3}$$

Introduciendo los campos de gauge no lineales V^a en (4.3.3) obtenemos

$$
\begin{aligned}
S &= k \int_M \epsilon_{a_1 \cdots a_{(2n+1)}} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2n-1} a_{2n}} e^{a_{2n+1}} \\
&= k \int_M \epsilon_{a_1 \cdots a_{(2n+1)}} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2n-1} a_{2n}} D\phi^{a_{2n+1}}, \\
S &= k \int_M \epsilon_{a_1 \cdots a_{(2n+1)}} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2n-1} a_{2n}} e^{a_{2n+1}} \\
&+ k \int_M d[\epsilon_{a_1 \cdots a_{(2n+1)}} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2n-1} a_{2n}} \phi^{a_{2n+1}}],
\end{aligned} \tag{4.3.4}
$$

donde hemos utilizado la identidad de Bianchi $DR^{ab} = 0$. Así

$$
\begin{aligned}
S &= k \int_M \epsilon_{a_1 \cdots a_{(2n+1)}} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2n-1} a_{2n}} e^{a_{2n+1}} \\
&= k \int_{\partial M} \epsilon_{a_1 \cdots a_{(2n+1)}} R^{a_1 a_2} \cdots R^{a_{2n-1} a_{2n}} \phi^{a_{2n+1}}.
\end{aligned} \tag{4.3.5}
$$

La acción difiere de la forma de Chern-Simons usual por un término de borde. Finalmente en [16] se muestra que para soluciones con condiciones de borde apropiadas es posible obtener la dinámica para la acción topológica en dimensiones pares. Esta acción topológica corresponde a la propuesta por Chamssedine en [1], lo interesante de este resultado es que aquí se ah introducido el campo coseto ϕ^a de una manera geometricamente natural.

Capítulo 5

Gravedad Brans-Dicke a partir de la Gravedad Topológica

En [1] y [6] se construyeron acciones para la gravedad topológica en varias dimensiones.
Para dimensiones impares, tenemos que la acción está dada por

$$S_{2n+1} = k \int_{\mathcal{M}_{2n+1}} L_{2n+1} \tag{5.0.1}$$

donde

$$L_{2n+1} = \sum_{l=0}^{n} \alpha_1 \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_{2n+1}} R^{a_1 a_2} \ldots R^{a_{2l-1} a_{2l}} e^{a_{2l+1}} \ldots e^{a_{2n+1}} \tag{5.0.2}$$

es una forma Chern-Simons y $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^{ac}\omega_c^b$ con $a = 0, 1, 2..,2n$.
Las teorías para las dimensiones pares, tenemos que la acción está dada por

$$S_{TG}^{(2n)} = k \int_{\mathcal{M}_{2n}} \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_{2n+1}} \phi^{a_{2n+1}} R^{a_1 a_2} \ldots R^{a_{2n-1} a_{2n}} \tag{5.0.3}$$

donde $R^{ab} d\omega^{ab} + \omega^{ac}\omega_c^b$ con $a = 0, 1, 2..,2n$ y $\mathcal{M}_{2n} = \partial \mathcal{M}_{2n+1}$. Esta acción es obtenida realizando una reducción dimensional de la acción de Chern-Simons.

Ahora, procederemos a recuperar la acción de la gravedad Brans-Dicke a partir de la Gravedad Topológica.

La acción para la Gravedad Topológica en cuatro dimensiones, puede ser escrita como

$$S_{TG}^{(4)} = \int_{\mathcal{M}_4=\partial\mathcal{M}_5} \langle \phi F F \rangle \tag{5.0.4}$$

donde ϕ es un campo escalar en la representación fundamental del grupo de gauge $SO(2,4)$ (AdS) o $S = (1,5)$ (dS) y el $F = d\mathbf{A} + \mathbf{AA}$. La conección con la gravedad se realiza a través de la identificación

$$\begin{aligned} A^{ab} &= \omega^{ab}; \\ A^{a_5} &= e^a, \quad a = 0,1,2,3,4 \end{aligned} \tag{5.0.5}$$

El Lagrangiano (5.0.4) es invariante bajo el algebra AdS. Esta algebra permite la interpretación de los campos de gauge e^a y ω^{ab} como el vielbein de cinco dimensiones y la conección de spin respectivamente. Consideramos ahora la S-expansión en [14], utilizando como semigrupo $S_{\mathcal{M}}^{(2)} = \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ dotada con la regla de multiplicación

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha \lambda_\beta &= \lambda_{\alpha+\beta} \quad \text{si} \quad \alpha + \beta \leq 2 \\ \lambda_\alpha \lambda_\beta &= \lambda_{\alpha+\beta-2} \quad \text{si} \quad \alpha + \beta > 2 \end{aligned} \tag{5.0.6}$$

Luego de extraer el subalgebra resonante, podemos encontrar el $\mathcal{L}_4$-algebra AdS, el cual coincide con el algebra $\mathbf{so}(D-1,1) \oplus \mathbf{so}(D-1,2)$ en [21] y [22], cuyos generadores D-dimensionales satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$
\begin{aligned}
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc} J_{ad} + \eta_{ad} J_{bc} - \eta_{ac} J_{bd} + \eta_{bd} J_{ac} \\
[J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b \\
[P_a, P_b] &= Z_{ab} \\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{bc} Z_{ad} + \eta_{ad} Z_{bc} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac} \\
[Z_{ab}, P - c] &= \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b \\
[Z_{ab}, Z_{cb}] &= \eta_{bc} Z_{ad} + \eta_{ad} Z_{bc} - \eta_{ac} Z_{bd} - \eta_{bd} Z_{ac}
\end{aligned}
\tag{5.0.7}
$$

donde $a, b, c, d = 0, 1, ..., D - 1$.
Usando el teorema VII,2 en [14] se puede demostrar que las componentes del tensor invariante para el algebra AdS $\mathcal{L}_4$ están dados por

$$
\begin{aligned}
\langle J_{ab} J_{cd} P_e \rangle &= \frac{4}{3} \alpha_1 l^3 \epsilon_{abcde} \\
\langle Z_{ab} Z_{cd} P_e \rangle &= \frac{4}{3} \alpha_1 l^3 \epsilon_{abcde} \\
\langle J_{ab} Z_{cd} P_e \rangle &= \frac{4}{3} \alpha_1 l^3 \epsilon_{abcde}
\end{aligned}
\tag{5.0.8}
$$

donde α_1 son constantes dimensionales arbitrarias, y $a, b, c, d, e = 0, 1, 2, 3, 4$.
Para escribir el Lagrangiano de la gravedad topológica en cinco dimensiones para el algebra AdS $\mathcal{L}_4$, comenzamos con la 1-forma conección de gauge evaluada en dicha algebra

$$
A = \frac{1}{l} e^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} J_{ab} + \frac{1}{2} k^{ab} Z_{ab} \quad , a, b = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{5.0.9}
$$

La 2-forma curvatura asociada es

$$
F = \frac{1}{2} R^{ab} J_{ab} + \frac{1}{l} (T^a + k^a_{\ b} e^b) P_a + \frac{1}{2} (D_\omega k^{ab} + k^a_{\ c} k^{cb} + \frac{1}{l^2} e^a e^b) Z_{ab} \tag{5.0.10}
$$

y el campo escalar 0-forma

$$
\phi = \frac{1}{2} \phi^{ef} J_{ef} + \frac{1}{l} \phi^e + P_e + \frac{1}{2} h^{ef} Z_{ef} \tag{5.0.11}
$$

Es interesante observar que los J_{ab} aún son los generadores de Lorentz, pero los P_a ya no son boosts AdS. Sin embargo, los e^a aún transforman como vector bajo las transformaciones de Lorentz como debe ser para la gravedad.

Usando el procedimiento dual de la S-expansión en términos de las formas de Maurer-Cartan mostrado en [12], podemos encontrar que la acción de la gravedad topológica invariante bajo el algebra AdS $\mathcal{L}_4$ está dada por

$$\begin{aligned}
S_{BD-(4)}^{(AdS\mathcal{L}_4)} = \int_{\mathcal{M}_4} & \frac{\alpha_1 l^2}{3}\varepsilon_{abcde}\{\phi^e[R^{ab}R^{cd} + 2R^{ab}(D_\omega k^{cd} + k^c{}_f k^{fd} + \frac{1}{l^2}e^c e^d) \\
& + (D_\omega k^{ab} + k^a{}_f k^{fb} + \frac{1}{l^2}e^a e^b)(D_\omega k^{cd} + k^c{}_f k^{fd} + \frac{1}{l^2}e^c e^d)] \\
& + 2h^{ab}[(D_\omega k^{cd} + k^c{}_f k^{fd} + \frac{1}{l^2}e^c e^d)(T^e k^e{}_f e^f) + R^{cd}(T^e + k^e{}_f e^f)] \\
& + 2\phi^{ab}[(D_\omega k^{cd} + k^c{}_f k^{fd} + \frac{1}{l^2}e^c e^d)(T^e + k^e{}_f e^f) + R^{cd}(T^e + k^e{}_f e^f)]\}
\end{aligned} \tag{5.0.12}$$

la cual puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}
S_{BD-(4)}^{(AdS\mathcal{L}_4)} = \int_{\mathcal{M}_4} & \frac{\alpha_1 l^2}{3}\varepsilon_{abcde}\phi^e R^{ab}R^{cd} + \frac{2\alpha_1 l^2}{3}\varepsilon_{abcde}\phi^e R^{ab}D_\omega k^{cd} \\
& + \frac{2\alpha_1}{3}\varepsilon_{abcde}\{\phi^e R^{ab}e^c e^d + \frac{1}{2l^2}\phi^e e^a e^b e^c e^d + \phi^e(D_\omega k^{ab})e^c e^d + \phi^e(k^2)^{ab}e^c e^d\} \\
& + \frac{2\alpha_1 l^2}{3}\varepsilon_{abcde}\{\phi^e R^{ab}(k^2)^{cd} + \phi^e(D_\omega k^{ab})(k^2)^{cd} + \frac{1}{2}\phi^e(k^2)^{ab}(k^2)^{cd} + \frac{1}{2}\phi^e(D_\omega k^{ab})(D_\omega k^{cd})\} \\
& + \frac{\alpha_1 l^2}{3}\varepsilon_{abcde}\{2h^{ab}[(D_\omega k^{cd} + (k^2)^{cd} + \frac{1}{l^2}e^c e^d)(T^e + k^e{}_f e^f) + R^{cd}(T^e + k^e{}_f e^f)] \\
& + 2\phi^{ab}[(D_\omega k^{cd} + (k^2)^{cd} + \frac{1}{l^2}e^c e^d)(T^e + k^e{}_f e^f) + R^{cd}(T^e + k^e{}_f e^f)]\}
\end{aligned} \tag{5.0.13}$$

donde $(k^2)^{ab} = k^a{}_f k^{fb}$, y e^a y ω^{ab} son 1-formas. Por simplicidad, consideraremos $k^{ab} = 0$ y $T^a = 0$, con lo que la acción queda como:

$$S^{(4)}_{AdS\mathcal{L}_4} = \int_{\mathcal{M}_4=\partial\mathcal{M}_5} \alpha_1 \varepsilon_{abcde}(\frac{l^2}{3}R^{ab}R^{cd}\phi^e + \frac{2}{3}R^{ab}e^c e^d\phi^e + \frac{1}{3l^2}e^a e^b e^c e^d\phi^e) \tag{5.0.14}$$

donde $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c\omega^{cd}$ con $a, b, c, d, e : 0, 1, 2, 3, 4$. Luego, usamos la descomposición $e^a = (e^i, e^4)$ con $i = 0, 1, 2, 3$ y

$$\omega^{ab}_\mu = (\omega^{ij}_\mu, \omega^{i4}_\mu = \lambda e^i_\mu), \quad i, j = 0, 1, 2, 3$$
$$\phi^a = (\phi^i, \phi^4 \equiv \phi)$$

encontramos que la acción se puede escribir como

$$S^{(4)}_{AdS\mathcal{L}_4} = \int_{\mathcal{M}_4=\partial\mathcal{M}_5} \alpha_1\phi\varepsilon_{ijkl}(\frac{l^2}{3}\bar{R}^{ij}\bar{R}^{kl} + \frac{2}{3}\bar{R}^{ij}e^k e^l + \frac{1}{3l^2}e^i e^j e^k e^l) \tag{5.0.15}$$

donde $\bar{R}^{ij} = R^{ij} + \frac{1}{l^2}e^i e^j$. Tenemos que ω^{ij}_μ y e^i_μ con $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $i = 0, 1, 2, 3$ pueden ser interpretados como la conección de spin en cuatro dimensiones y el vierbein respectivamente.
De (5.0.15) podemos observar que para valores pequeños de l^2, encontramos que

$$S^{(4)}_{AdS\mathcal{L}_4} = \varepsilon_{ijkl}(\phi R^{ij}e^k e^l + \frac{3}{2l^2}\phi e^i e^j e^k e^l) \tag{5.0.16}$$

acción que corresponde a la acción de Brans-Dicke con un término cosmológico. Por otro lado, cuando ϕ es constante, la acción (5.0.15) corresponde a la acción de Einstein-Hilbert con un término cosmológico ([10]).

Capítulo 6

Gravedad Topológica y el Algebra B_5

Siguiendo las definiciones en [14], consideremos la S-expansión del álgebra de Lie $SO(4,2)$ usando el semigrupo $S_E^{(3)}$. Luego de extraer el subalgebra resonante y realizando una 0_S-reducción, podemos encontrar una nueva álgebra de Lie, conocida como $\mathfrak{B}_5$, generada por J_{ab}, P_a, Z_{ab}, Z_a, donde estos nuevos generadores pueden ser escritos como

$$\begin{aligned} J_{ab} &= \lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ab} \\ Z_{ab} &= \lambda_2 \otimes \tilde{J}_{ab} \\ P_a &= \lambda_1 \otimes \tilde{P}_a \\ Z_a &= \lambda_3 \otimes \tilde{P}_a \end{aligned} \tag{6.0.1}$$

$\tilde{J}_{ab}$ y $\tilde{P}_a$ corresponden a los generadores originales $SO(4,2)$, y los λ_α pertenecen a un semigrupo discreto y abeliano. Los elementos del semigrupo $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ no son números reales y son adimensionales. En este caso particular, tenemos que los generadores obedecen la regla de multiplicación dada por

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta} & , \quad \alpha+\beta \leq 4 \\ \lambda_4 & , \quad \alpha+\beta > 4 \end{cases} \tag{6.0.2}$$

Usando el teorema VII,2 de [14], podemos demostrar que las únicas componentes del tensor invariante para el álgebra $\mathfrak{B}$ que permanece, están dadas por

$$
\begin{aligned}
\langle J_{a_1a_2}J_{a_3a_4}P_{a_5}\rangle &= \alpha_1\frac{4l^3}{3}\varepsilon_{a_1\ldots a_5},\\
\langle J_{a_1a_2}J_{a_3a_4}Z_{a_5}\rangle &= \alpha_3\frac{4l^3}{3}\varepsilon_{a_1\ldots a_5},\\
\langle J_{a_1a_2}Z_{a_3a_4}P_{a_5}\rangle &= \alpha_3\frac{4l^3}{3}\varepsilon_{a_1\ldots a_5},
\end{aligned}
\tag{6.0.3}
$$

donde α_1 y α_3 son constantes arbitrarias independientes de dimensiones. Para escribir el Lagrangiano para el álgebra $\mathfrak{B}$, comenzamos desde la 1-forma de conección de gauge

$$
A = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}e^aP_a + \frac{1}{2}k^{ab}Z_{ab} + \frac{1}{l}h^aZ_a,
\tag{6.0.4}
$$

la 2-forma curvatura

$$
F = \frac{1}{2}R^{ab}J_{ab} + \frac{1}{l}T^aP_a + \frac{1}{2}(D_\omega k^{ab} + \frac{1}{l^2}e^ae^b)Z_{ab} + \frac{1}{l}(D_\omega h^a + k^a_{\ b}e^b)Z_a,
\tag{6.0.5}
$$

y la 0-forma campo escalar

$$
\phi = \frac{1}{2}\phi^{ef}J_{ef} + \frac{1}{l}\phi^eP_e + \frac{1}{2}\bar{\phi}^{ef}Z_{ef} + \frac{1}{l}\bar{\phi}^eZ_e
\tag{6.0.6}
$$

Consistencia con el procedimiento dual de la S-expansión en términos de las formas de Maurer-Cartan en [12] demanda que h^a, ϕ^e y $\hat{\phi}^e$ hereda unidades de longitud del vielbein. Por esto es necesario introducir el parámetro l nuevamente, esta vez asociado a h^a, ϕ^e y $\hat{\phi}^e$.
Es interesante observar que $\mathbf{J}_{ab}$ aún son los generadores de Lorentz, pero los P_a ya no son los boosts AdS.
Un cálculo directo muestra que es posible escribir un Lagrangiano para la gravedad topológica en cuatro dimensiones para el álgebra $\mathfrak{B}_5$ como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{TG}^{(4)} &= \frac{\alpha_1 l^2}{3}\varepsilon_{abcde}[2\phi^{ab}R^{cd}T^e + R^{ab}R^{cd}\phi^e] \\
&+ \frac{\alpha_3 l^2}{2}\varepsilon_{abcde}[\phi^{ab}R^{cd}(D_\omega h^e + k^e_{\ g}e^g) + \frac{1}{2}R^{ab}R^{cd}\hat{\phi}^e + \phi^{ab}D_\omega k^{cd}T^e + \phi^e R^{ab}D_\omega k^{cd} + \hat{\phi}^{ab}R^{cd}T^e] \\
&+ \alpha_3\varepsilon_{abcde}[\phi^e R^{ab}e^c e^d + \phi^{ab}e^c e^d T^e]
\end{aligned}
\tag{6.0.7}
$$

Es necesario notar un punto importante: el Lagrangiano se divide en dos términos independientes, uno proporcional a α_1 y el otro proporcional a α_3. Siguiendo el procedimiento utilizado en el capítulo 8, tenemos que el término proporcional a α_3 contiene el término de Brans-Dicke $\varepsilon_{ijkl}\phi R^{ij}e^k e^l$ más acoplamientos no-lineales entre la curvatura y los campos bosónicos materiales k^{ij}, ϕ^{ij}, $\hat{\phi}^{ij}$, $\hat{\phi}^i$ y h^i, donde el parámetro l puede ser interpretado como un tipo de constante de acoplamiento.

Capítulo 7

Introducción al Término Wess-Zumino-Witten

Las teorías de gravedad Chern-Simons se han extendido usando formas de transgresión en vez de formas de Chern-Simons como acciones [5]-[15]. Las teorías de transgresión y de Chern-Simons sólo son válidas para dimensiones impares y para tener una teoría bien definida para dimensiones pares, es necesario realizar una reducción o compactación. Se ha visto que las teorías de Chern-Simons están conectadas con unas estructuras de dimensiones pares conocidas como términos de gauge de Wess-Zumino-Witten ([2]-[17]). Esta conexión sugiere que pueda ser una alternativa para la compactación o reducción dimensional.
Por otro lado en [6], Chamseddine construyó acciones topológicas para todas las dimensiones. Las teorías en dimensiones impares están basadas en formas de Chern-Simons mientras que las teorías en dimensiones pares usan, además de los campos de gauge, un campo escalar ϕ^a en la representación fundamental del grupo de gauge.
En [20] se describe cómo la gravedad topológica en dimensiones pares es un término de gauge Wess-Zumino-Witten salvo por una constante multiplicativa. Esto significa que la gravedad topológica en 2n dimensiones es descrita por la dinámica de borde de la gravedad $(2n + 1)$ Chern-Simons.
El campo ϕ^a necesario para construir las teorías de la gravedad en dimensiones pares es identificado como el campo coseto asociado a realizaciones no lineales del grupo de Poincaré $ISO(2n, 1)$.

Capítulo 8

Término Wess-Zumino-Witten

8.1. Gravedad Topológica y Formalismo Stelle-West

1. ***Gravedad Topológica***

A.H. Chamseddine construyó acciones para la gravedad topológica en $1+1$y $(2n-1)+1$ dimensiones ([1], [6] y [7]),las cuales fueron construidas del producto de los n campos de fuerza F^{ab} y el campos escalar ϕ^a en la representación fundamental del grupo de gauge.
En $(1+1)$ dimensiones, la acción está dada por

$$S^{(1+1)}[A,\phi] = k\int_{\mathcal{M}_\in} \epsilon_{abc}\phi^a F^{bc}. \tag{8.1.1}$$

En $(2n-1)+1$ dimensiones la acción correspondiente puede ser escrita como

$$S^{(2n)}[A,\phi] = k\int_{\mathcal{M}_{\in\setminus}} \epsilon_{a_1\ldots a_{2n+1}}\phi^{a_1}F^{a_2a_3}\ldots F^{a_{2n}a_{2n+1}} \tag{8.1.2}$$

donde $F^{ab} = dA^{ab} + A^{ac}A_c^b$ y A es una 1-forma conección de gauge. Esta acción fue obtenida de la forma Chern-Simons realizando una reducción dimensional.

2. ***Formalismo Stelle-West***

La idea base de este formalismo es fundado en el estudio no linear en [8], [3]. Consideremos un grupo de Lie $\mathcal{G}$ con n generadores, y un subgrupo de estabilidad $\mathcal{H}$. Asumamos que los generadores restantes $Y_{l l=1}^{d}$ son escogido tal que formen una representación de $\mathcal{H}$, es decir, $[X_i, Y_l]$ debe ser una combinación lineal de Y_l. Si estos elementos de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ son denotados por z, y si los campos independientes necesitados para parametrizar z son denotados por ϕ^l, entonces los elementos de grupo $g \in \mathcal{G}$ pueden ser representados unicamente en la forma $g = zh$, donde h es un elemento de $\mathcal{H}$ y $z = e^{-\phi^l Y_l}$.
Cuando $\mathcal{G}$ es un grupo asociado al álgebra de Lie AdS

$$\begin{aligned}
[\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b] &= m^2 J_{ab} \\
[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_c] &= (\eta_{bc}\mathbf{P}_a - \eta_{ac}\mathbf{P}_b) \\
[\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{J}_{cd}] &= (\eta_{ac}\mathbf{J}_{bd} - \eta_{bc}\mathbf{J}_{ad} + \eta_{bd}\mathbf{ac} - \eta_{ad}\mathbf{bc})
\end{aligned} \tag{8.1.3}$$

cuyos generadores son $\mathbf{P}_a, \mathbf{J}_{ab}$, y si el subalgebra $\mathcal{H}$ es el álgebra de Lorentz $SO(3,1)$ cuyos generadores son $\mathbf{J}_{ab}$, entonces

$$\frac{1}{2}W^{ab}\mathbf{J}_{ab} + V^a\mathbf{P}_a = e^{\phi^c\mathbf{P}_c}[d + \frac{1}{2}\omega^{ab}\mathbf{J}_{ab} + e^a\mathbf{P}_a]e^{-\phi^c\mathbf{P}_c}. \tag{8.1.4}$$

Usando las relaciones de conmutaciónndel álgebra AdS, encontramos los campos no lineales V^a y W^{ab} están dados por

$$\begin{aligned}
V^a = e^a &+ (coshx - 1)(\delta^a_b - \frac{\phi_b\phi^a}{\phi^2})e^b \\
&+ \frac{sinhx}{x}D\phi^a - (\frac{sinhx}{x} - 1)(\frac{\phi^c d\phi_c}{\phi^2}\phi^a),
\end{aligned} \tag{8.1.5}$$

$$\begin{aligned} W^{ab} &= \omega^{ab} - m^2 \frac{sinhx}{x}(\phi^a e^b - \phi^b e^a) \\ &- m^2[\phi^a D\phi^b - \phi^b D\phi^a](\frac{coshx - 1}{x^2}) \end{aligned} \tag{8.1.6}$$

con $x = m(\phi^a \phi_a)^{\frac{1}{2}} = m\phi$. Usando el límite $m \xrightarrow{0}$ en la relación de conmutación del álgebra de Lie AdS en (8.1.5) y (8.1.6), encontramos que el álgebra de Lie AdS toma la forma del álgebra de Lie de Poincaré donde los campos no lineales están dados por

$$V^a = e^a + D\phi^a; \qquad W^{ab} = \omega^{ab}. \tag{8.1.7}$$

8.2. Término de gauge Wess-Zumino-Witten

En el artículo [4], tenemos que

$$Q_{2n+1}(A^Z, A) = Q_{2n+1}(A^Z, F^Z) - Q_{2n+1}(A, F) - dB_{2n}(A^Z, A) \tag{8.2.1}$$

donde las conexiones A^Z y A están relacionadas por a transformación de gauge dada por

$$A^Z = z^{-1}(d + A)z, \tag{8.2.2}$$

con

$$\begin{aligned} z &= e^{-\phi^a P^a} \\ A^Z &= \frac{1}{2} W^{ab} J_{ab} + V^a P_a = V + W. \end{aligned} \tag{8.2.3}$$

Los términos $Q_{2n+1}(A, F)$ correspondiente al Lagrangiano para a gravedad Chern-Simons $(2n+1)$-dimensional para la 1-forma conexión A, está dada por

$$
\begin{aligned}
Q_{2n+1}(A,F) = {} & \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_{2n+1}} R^{a_1 a_2} \ldots R^{a_{2n-1} a_{2n}} e^{a_{2n+1}} \\
& - n(n+1) d\{\int_0^1 dt t^n \langle R_t^{n-1} \omega e \rangle\}
\end{aligned}
\tag{8.2.4}
$$

donde $R_t = d\omega + t\omega^2$.
Si A^Z y A están dados por $A = e^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{ab} J_{ab} = e + \omega$ y $A^Z = V^a P_a + \frac{1}{2} W^{ab} J_{ab} = V + W$, donde $V^a = e^a + D_\omega \phi^a$ y $W^{ab} = \omega^{ab}$ entonces $Q_{2n+1}(A^Z, F^Z)$ está dada por

$$
\begin{aligned}
Q_{2n+1}(A^Z, F^Z) = {} & \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_{2n+1}} R^{a_1 a_2} \ldots R^{a_{2n-1} a_{2n}} e^{a_{2n+1}} \\
& + \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_{2n+1}} R^{a_1 a_2} \ldots R^{a_{2n-1} a_{2n}} D\phi^{a_{2n+1}} \\
& - n(n+1) d\{\int_0^1 dt t^n \langle R_t^{n-1} \omega e \rangle\} \\
& - n(n+1) d\{\int_0^1 dt t^n \langle R_t^{n-1} \omega D\phi \rangle\}
\end{aligned}
\tag{8.2.5}
$$

Por otro lado, $B_{2n}(A, A^Z)$ está dada por

$$
B_{2n}(A^Z, A) = -n(n+1) \int_0^1 dt t^n \langle R_t^{n-1} \omega D\phi \rangle \tag{8.2.6}
$$

Introduciendo (8.2.4), (8.2.5), (8.2.6) en (8.2.3), encontramos que

$$
Q_{2n+1}(A^Z, A) = \varepsilon_{a_1 \ldots a_{2n+1}} R^{a_1 a_2} \ldots R^{a_{2n-1} a_{2n}} D\phi^{a_{2n+1}} \tag{8.2.7}
$$

Luego, usando la identidad de Bianchi $DR^{ab} = 0$, podemos escribir

$$
Q_{2n+1}(A^Z, A) = d[\varepsilon_{a_1 \ldots a_{2n+1}} R^{a_1 a_2} \ldots R^{a_{2n-1} a_{2n}} \phi^{a_{2n+1}}] \tag{8.2.8}
$$

la cual demuestra que la acción para la Gravedad Topológica en $2n$-dimensiones encontrada en [1] y [6] es un término de gauge Wess-Zumino-Witten. Esto significa que la gravedad topológica en 2n-dimensiones es descrita por la dinámica de borde de una gravedad $(2n+1)$ de Chern-Simons.

En el caso particular de $n = 2$, tenemos que

$$S^{(4)}_{gWZW}(A^Z, A) = k \int_{\mathcal{M}_4 = \partial \mathcal{M}_5} Q_{2n+1}(A^Z, A) = k \int_{\mathcal{M}_4 = \partial \mathcal{M}_5} \varepsilon_{abcde} R^{ab} R^{cd} \phi^e \quad (8.2.9)$$

donde R^{ab} es una 2-forma obtenida en cuatro dimensiones. Esto significa que (8.2.9) puede ser escrita como

$$S^{(4)} = k \int_{\mathcal{M}_4 = \partial \mathcal{M}_5} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abcde} R^{ab}_{\mu\nu} R^{cd}_{\rho\sigma} \phi^e \quad (8.2.10)$$

donde $\mu, \nu, \rho\sigma : 0, 1, 2, 3$ y $a, b, c, d, e : 0, 1, 2, 3, 4$.

Usando la descomposición

$$\begin{aligned} \omega^{ab}_{\mu} &= (\omega^{ij}_{\mu}, \omega^{i4}_{\mu} = \lambda e^i_{\mu}), \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \\ \phi &= (\phi^i, \phi^4 \equiv \phi) \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

y rotando la base de tal forma para que en cada punto del espacio el campo ϕ^a tenga componentes $\phi^4 \equiv \phi$, $\phi^i = 0$, tenemos que

$$\bar{R}^{ij} = R^{ij} + \lambda^2 e^i e^j \quad (8.2.12)$$

con $R^{ij} = d\omega^{ij} + \omega^i{}_k \omega^{kj}$. Esto significa que la acción (8.2.9) se puede escribir como

$$S^{(4)} = k \int_{\mathcal{M}_4} \phi \varepsilon_{ijkl} \bar{R}^{ij} \bar{R}^{kl}. \quad (8.2.13)$$

Luego, ω^{ij}_{μ} con $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $i = 0, 1, 2, 3$ puede ser interpretado como la conección de spin cuatridimensional y e^i_{μ} puede ser interpretado como el vierbein. Esto significa que la descomposición (8.2.11) es consistente con la invariancia restante $so(3, 2)$ o $so(4, 1)$.

Capítulo 9

Conclusión

En esta tesis se ha descrito un resumen de la Teoría de la Relatividad de Einstein, la cual es la teoría más usada para describir la gravedad. También se ha realizado una breve descripción de la teoría de Brans-Dicke, la cual es sugerida como una teoría alternativa a la Relatividad General.

La teoría General de la Relatividad es la teoría mejor aceptada para describir la gravedad. Sin embargo, las teorías de gauge parecen ser las teorías para describir las fuerzas de la naturaleza, entre ellas la gravedad, pero la Relatividad General no ha podido ser formulada como una teoría de gauge.
El hecho de que la gravedad formulada a través de la Relatividad General no sea cuantizable, indica que se debe explorar la alternativa de las teorías de gauge para describir la gravedad. Es por ello que esta tesis ha enfocado su estudio en las teorías de gravedad topológicas, donde se ha realizado una breve descripción de la teoría de la gravedad de Chamseddine para dimensiones pares, y la teoría de la gravedad de Chern-Simons para dimensiones impares.

En esta tesis también se ha estudiado la conexión entre las teorías de la gravedad en dimensiones pares descritas por la teoría de la gravedad de Chamseddine, y las teorías de la gravedad topológicas en dimensiones impares descritas por la teoría de la gravedad de Chern-Simons. Vimos que ambas teorías se conectan a través del término de gauge Wess-Zumino-Witten, realizando una compactación de la teoría de Chern-Simons, la cual desemboca en la acción de Chamseddine.

El fuerte de esta tesis se basa en el estudio de una teoría de Brans-Dicke para describir la gravedad, a partir de una gravedad topológica, donde se ha usado la acción de Chamseddine para el propósito . Se ha demostrado a través de esta tesis, que el procedimiento de S-expansión hace posible la recuperación cuatridimensional de la teoría de la gravedad Brans-Dicke con un término cosmológico a partir de la teoría de la gravedad topológica invariante bajo el álgebra de Lorentz. Si analizamos la ecuación (5.0.13) podemos observar que, si ϕ^e es constante, tenemos que el primer y segundo término serían una forma exacta. Además se tiene que el tercer término de $L_{BI-4}^{(AdS\mathcal{L}_4)}$ corresponde, salvo por factores numéricos, al Lagrangeano (29) de [9].

Esto puede mostrar una directa relación entre las teorías de la gravedad en dimensiones impares, con el trabajo realizado en el procedimiento de S-expansión que nos entrega la gravedad de Brans-Dicke desde la acción de Chamseddine.

Esto permite ver una conexión importante entre la teoría de Brans-Dicke y la gravedad topológica, lo cual permitiría encontrar unas ecuaciones de campo para describir la gravedad a través del Lagrangeano obtenido desde la acción en cuatro dimensiones.

Un futuro trabajo consistiría en la obtención de soluciones Cosmológicas, por ejemplo tipo Friedmann-Robertson-Walker, para las ecuaciones de movimiento de la gravedad Topológica invariante bajo el álgebra $\mathcal{B}$, también conocida como álgebra de Poincaré generalizada y cpmparar los resultados obtenidos para la gravedad Topológica con los resultados obtenidos con gravedad de Brans-Dicke y con Relatividad General.

Apéndice A

Expansión de Algebras de Lie

El objetivo principal de las expansiones algebráicas, es la obtención de nuevas álgebras mediante un proceso de cambio de dimensionalidad. En [14] se presenta un método para obtener nuevas álgebras de Lie, mediante un procedimiento conocido como S-expansión, el cual consiste en obtener nuevas álgebras de Lie realizando el producto directo de un álgebra de Lie ya conocida con un semigrupo abeliano. A continuación se presenta un breve resumen de los conceptos básicos con los cuales se construye dicha expansión.

Teorema Sea $S = \{\lambda_\alpha\}$ un semigrupo abeliano con 2-selector ${K_{\alpha\beta}}^{\gamma}$ y $\mathfrak{g}$ un algebra de Lie con bases $\{\mathbf{T}_A\}$ y constantes de estructura ${C_{AB}}^{C}$. Denotaremos un elemento de la base del producto directo $S \times \mathfrak{g}$ por $\mathbf{T}_{(A,\alpha)} = \lambda_\alpha T_A$ y consideramos el conmutador inducido $[\mathbf{T}_{(A,\alpha)}, \mathbf{T}_{(B,\beta)}] \equiv \lambda_\alpha \lambda_\beta [\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B]$. Entonces, $S \times \mathfrak{g}$ también es un álgebra de Lie con constantes de estructura

$$C_{(A,\alpha)(B,\beta)}{}^{(C,\gamma)} = K_{\alpha\beta}{}^{\gamma} C_{AB}{}^{C} \quad . \tag{A0.1}$$

Un álgebra S-expandida, en cierto modo, reproduce el álgebra original $\mathfrak{g}$ en una serie de niveles correspondientes a los elementos del semigrupo. Hay dos métodos para extraer álgebras más pequeñas de $S \times \mathfrak{g}$. El primero entrega un álgebra resonante, y el segundo produce 'algebras reducidas.

Teorema Sea $\mathfrak{g} = \oplus_{p \in I} V_p$, donde I es un set de índices, un subespacio de $\mathfrak{g}$, con una estructura descrita por lo siguiente

$$[V_p, V_q] \subset \oplus_{r\in i_{(p,q)}} V_r, \tag{A0.2}$$

y sea $S = \cup_{p\in I} S_p$ un subset resonante del semigrupo abeliano S, con la estructura

$$S_p \cdot S_q \subset \cap_{r\in i_{(p,q)}} S_r. \tag{A0.3}$$

Se definen los subespacios de $\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$ como

$$W_p = S_p \times V_p \qquad p \in I, \tag{A0.4}$$

entonces, se tiene que

$$\mathfrak{G}_R = \oplus_{p\in I} W_p \tag{A0.5}$$

es un subalgebra de $\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$, denominada como *subalgebra resonante del álgebra S-expandida.*

Teorema

Sea $\mathfrak{G}_R = \oplus_{p\in I} S_p \times V_p$ una subalgebra resonante de $\mathfrak{G} = S \times \mathfrak{g}$, y sea $S_p = \hat{S}_p \cup \check{S}_p$ una partición de los subset $S_p \subset S$ tal que

$$\hat{S}_p \cap \check{S}_p = \emptyset, \tag{A0.6}$$

$$\hat{S}_p \cdot \check{S}_p \subset \bigcap_{r\in i_{(p,q)}} \hat{S}_r. \tag{A0.7}$$

Las condiciones (A0.6) y (A0.7) inducen la decomposición $\mathfrak{G} = \hat{\mathfrak{G}}_R \oplus \check{\mathfrak{G}}_R$ sobre el subálgebra resonante, donde

$$\check{\mathfrak{G}}_R = \bigoplus_{p\in I} \check{S}_p \times V_p, \tag{A0.8}$$

$$\hat{\mathfrak{G}}_R = \bigoplus_{p \in I} \hat{\mathfrak{G}}_R \times V_p. \tag{A0.9}$$

Cuando se cumplen las condiciones (A0.8) y (A0.9), entonces se tiene que

$$[\check{\mathfrak{G}}_R, \hat{\mathfrak{G}}_R] \subset \hat{\mathfrak{G}}_R, \tag{A0.10}$$

por lo que $|\hat{\mathfrak{G}}_R|$ corresponde a un álgebra reducida de $\mathfrak{G}_R$.

Ejemplo: S-expansión del álgebra so(4,2) La S-expansión del álgebra so(4,2) se realiza utilizando el semigrupo $S_E^{(3)}$. Una base para so(4,2) es $\{\tilde{J}_{ab}, \tilde{P}_c\}$, donde $\tilde{J}_{ab}$ son las rotaciones de Lorentz y $\tilde{P}_a$ corresponde al boost Ads.

1. *Separación del álgebra*

   Sea $\mathfrak{G} = so(4,2) = V_0 \oplus V_1$, donde V_0 es el subalgebra de Lorentz generado por $\tilde{J}_{ab}$ y V_1 es un subespacio generado por $\tilde{P}_a$. Esta álgebra obedece a las relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned}
[\tilde{J}_{ab}, \tilde{J}_{cd}] &= \eta_{cb}\tilde{J}_{ad} - \eta_{ca}\tilde{J}_{bd} + \eta_{db}\tilde{J}_{ca} - \eta_{da}\tilde{J}_{cb} \qquad \Rightarrow [V_0, V_0] \subset V_0, \\
[\tilde{J}_{ab}, \tilde{P}_c] &= \eta_{cb}\tilde{P}_a - \eta_{ca}\tilde{P}_b \qquad \Rightarrow [V_0, V_1] \subset V_1, \\
[\tilde{P}_a, \tilde{P}_b] &= \tilde{J}_{ab} \qquad \Rightarrow [V_1, V_1] \subset V_0.
\end{aligned} \tag{A0.11}$$

   Por lo que la separación satisface la condición donde V_0 es un subalgebra y V_1 es un coseto simétrico $\frac{\mathfrak{G}}{V_0} \sim V_1$.

2. *Expansión del álgebra*

   Se realiza la expansión del álgebra $\mathfrak{g} = S \otimes \mathfrak{G}$, donde $S = S_E^{(3)}$ con $S_E^{(3)} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, N=3, N+1=4. Este semigrupo esta dotado del producto

$$\lambda_\alpha \lambda_\beta = \begin{cases} \lambda_{\alpha+\beta} \quad , & \alpha + \beta \leq N \\ \lambda_{N+1} \quad , & \alpha + \beta > N \end{cases} \tag{A0.12}$$

El álgebra expandida entonces es

$$\mathfrak{g} = S_E^{(3)} \otimes \mathfrak{G} = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} \otimes \{V_0, V_1\}, \tag{A0.13}$$

la cual es generada por $\{\tilde{J}_{ab,0}, \tilde{J}_{ab,1}, \tilde{J}_{ab,2}, \tilde{J}_{ab,3}, \tilde{J}_{ab,4}, \tilde{P}_{a,0}, \tilde{P}_{a,1}, \tilde{P}_{a,2}, \tilde{P}_{a,3}, \tilde{P}_{a,4}\}$, con $\tilde{J}_{ab,\alpha} = \lambda_\alpha \tilde{J}_{ab}$ y $\tilde{P}_{a,\alpha} = \lambda_\alpha \tilde{P}_a$, $\alpha = 0, ..., 4$.

3. *Obtención de la subálgebra resonante*

La subálgebra resonante es

$$\mathfrak{g}_R = W_0 \oplus W_1$$

con $W_0 = S_0 \otimes V_0$ y $W_1 = S_1 \otimes V_1$, y donde $S_E^{(3)} = S_0 \cup S_1$ es resonante con $\mathfrak{G} = V_0 \oplus V_1$.
Sea $S_p = \{\lambda_{2m+p}, m = 0, 1, ..., \frac{(N-p)}{2}\} \cup \{\lambda_{N+1}\}$, o explícitamente

$$\begin{cases} S_0 = \{\lambda_{2m}, m = 0, 1, 2\} \cup \{\lambda_4\} & = \{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_4\} \\ S_1 = \{\lambda_{2m+1}, m = 0, 1, \frac{3-1}{2}\} \cup \{\lambda_4\} & = \{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4\} \end{cases} \tag{A0.14}$$

con lo que

$$\begin{cases} W_0 = \{\lambda_0 \otimes V_0, \lambda_2 \otimes V_0, \lambda_4 \otimes V_0\} \\ W_1 = \{\lambda_1 \otimes V_1, \lambda_3 \otimes V_1, \lambda_4 \otimes V_1\} \end{cases} \tag{A0.15}$$

Y $\mathfrak{g}_R$ es generado por $\{\tilde{J}_{ab,0}, \tilde{J}_{ab,2}, \tilde{J}_{ab,4}, \tilde{P}_{a,1}, \tilde{P}_{a,3}, \tilde{P}_{a,4}\}$.

4. *Algebra resonante reducida*

Se obtiene particionando el semigrupo en:

$$S_p = \hat{S}_p \cup \check{S}_p \tag{A0.16}$$

donde $\hat{S}_p = \{0_S\}$ y $\check{S}_p = S_p - \{0_S\}$. Dado que

$$\mathfrak{g}_R = \oplus S_p \otimes V_p = \oplus(\hat{S}_p \otimes V_p) \cup (\check{S}_p \otimes V_p) \tag{A0.17}$$

donde $\hat{\mathfrak{g}}_R = \oplus \hat{S}_p \otimes V_p$ y $\check{\mathfrak{g}}_R = \oplus \check{S}_p \otimes V_p$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{g}}_R &= \{0_S\} \otimes V_p = 0 \\ \check{\mathfrak{g}}_R &= (\lambda_0 \otimes V_0, \lambda_2 \otimes V_0) \oplus (\lambda_1 \otimes V_1, \lambda_3 \otimes V_1). \end{aligned} \tag{A0.18}$$

Entonces, tenemos que una base para el álgebra so(4,2) $S_E^{(3)}$ expandida resonante reducida es $\{\tilde{J}_{ab,0}, \tilde{J}_{ab,2}, \tilde{P}_{a,1}, \tilde{P}_{a,3}\}$.

5. *Relaciones de conmutación*

Redefinimos los generadores como

$$\begin{aligned} J_{ab} &\equiv \tilde{J}_{ab,0} = \lambda_0 \tilde{J}_{ab}, \\ P_a &\equiv \tilde{P}_{a,1} = \lambda_1 \tilde{P}_a, \\ Z_{ab} &\equiv \tilde{J}_{ab,2} = \lambda_2 \tilde{J}_{ab}, \\ Z_a &\equiv \tilde{P}_{a,3} = \lambda_3 \tilde{P}_a \end{aligned} \tag{A0.19}$$

con lo que las relaciones de conmutación de la nueva álgebra son

$$
\begin{aligned}
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{cb} J_{ad} - \eta_{cd} J_{ab} + \eta_{db} J_{ac} - \eta_{da} J_{cb}, \\
[P_a, P_b] &= Z_{ab}, \\
[J_{ab}, P_c] &= \eta_{bc} P_a - \eta_{ca} P_b, \\
[J_{ab}, Z_{cd}] &= \eta_{cb} Z_{ad} - \eta_{ca} Z_{bd} + \eta_{db} Z_{ca} - \eta_{da} Z_{cb}, \\
[J_{ab}, Z_c] &= \eta_{cb} Z_a - \eta_{ca} Z_b, \\
[Z_{ab}, P_c] &= \eta_{cb} Z_a - \eta_{ca} Z_b, \\
[P_a, Z_b] &= 0, \\
[Z_{ab}, Z_c] &= 0, \\
[Z_{ab}, Z_{cd}] &= 0, \\
[Z_a, Z_b] &= 0.
\end{aligned}
\tag{A0.20}
$$

Apéndice B

Gravedad Chern-Simons invariante bajo el Algebra B_5

En [11] describe un modelo alternativo para la gravedad basado en los modelos Chern-Simons, los cuales pueden proveer un principio de acción invariante de gauge verdadero. Un Lagrangiano AdS Chern-Simons para la gravedad en $2n+1$ dimensiones, está dado por

$$\mathcal{L}_G^{2n+1} = \kappa \epsilon_{a_1 \ldots a_{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{l^{2(n-k)+1}} R^{a_1 a_2 \cdots} R^{a_{2k-1} a_{2k}} e^{a_{2k+1}} \ldots e^{a_{2n+1}} \tag{B0.1}$$

donde las constantes c_k están dadas por

$$c_k := \frac{1}{2(n-k)+1} \binom{n}{k}, \tag{B0.2}$$

e^a corresponde al vielbein 1-forma y $R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega_c^a \omega^{cb}$ es la curvatura de Riemann en el formalismo de primer orden.

El Lagrangiano (B0.1) es un invariante off-shell bajo el álgebra de Lie AdS $SO(2n,2)$, cuyos generadores son $\tilde{J}_{ab}$ y $\tilde{P}_a$ y satisfacen las relaciones de conmutación

$$
\begin{aligned}
&[\tilde{J}_{ab}, \tilde{J}_{cd}] = \eta_{cb}\tilde{J}_{ad} - \eta_{ca}\tilde{J}_{bd} + \eta_{db}\tilde{J}_{ca} - \eta_{da}\tilde{J}_{cb} \\
&[\tilde{J}_{ab}, \tilde{P}_{c}] = \eta_{cb}\tilde{P}_{a} - \eta_{ca}\tilde{P}_{b} \\
&[\tilde{P}_{a}, \tilde{P}_{b}] = \tilde{J}_{ab}
\end{aligned}
\tag{B0.3}
$$

El símbolo Levi-Civita $\epsilon_{a_1 \ldots a_{2n+1}}$ en (B0.1) es el único componente no desvaneciente del tensor invariante simétrico de rango $r = n+1$, a saber

$$
\langle \tilde{J}_{a_1 a_2} \ldots \tilde{J}_{a_{2n-1}a_{2n}} \tilde{P}_{a_{2n+1}} \rangle = \frac{2^n}{n+1}\epsilon_{a_1 \ldots a_{2n+1}} \tag{B0.4}
$$

El campo de gauge 1-forma, está dado por:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= A^{A}_{A\mu}\mathbf{T}_{A}dx^{\mu} \\
&= \frac{1}{l}e^{a}\tilde{P}_{a} + \frac{1}{2}\omega^{ab}\tilde{J}_{ab}
\end{aligned}
\tag{B0.5}
$$

donde e^a y ω^{ab} son los campos de gauge asociados a $\tilde{P}_a$ y $\tilde{J}_{ab}$ y son interpretados como el vielbein y la conexión de spin respectivamente.

B1. Acción Einstein-Hilbert a partir de la gravedad Chern-Simons en cinco dimensiones

Tenemos que la acción de Einstein-Hilbert para la gravedad de Chern-Simons, está dada realizando una S-expansión.

El Lagrangiano para la gravedad AdS Chern-Simons en cinco dimensiones, está dado por:

$$
\mathcal{L}^{5}_{AdS} = \kappa\left(\frac{1}{5l^5}\epsilon_{a_1 \ldots a_5}e^{a_1}\ldots e^{a_5} + \frac{2}{3l^3} + \epsilon_{a_1 \ldots a_5}R^{a_1 a_2}e^{a_3}\ldots e^{a_5} + \frac{1}{l}\epsilon_{a_1 \ldots a_5}R^{a_1 a_2}R^{a_3 a_4}e^{a_5}\right) \tag{B1.1}
$$

Consideremos el álgebra de Lie generado por $\mathbf{J}_{ab}, \mathbf{P}_a, \mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_a$, donde

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{ab} &= \lambda_0 \otimes \tilde{J}_{ab}\\ \mathbf{Z}_{ab} &= \lambda_2 \otimes \tilde{J}_{ab}\\ \mathbf{P}_a &= \lambda_1 \otimes \tilde{P}_a\\ \mathbf{Z}_a &= \lambda_3 \otimes \tilde{P}_a\end{aligned} \tag{B1.2}$$

donde λ_α pertenecen a un semigrupo abeliano.

Las componentes del tensor invariante del algebra $\mathcal{B}$ están dados por

$$\begin{aligned}\langle J_{a_1a_2}J_{a_3a_4}P_{a_5}\rangle &= \alpha_1\frac{4l^3}{3}\epsilon_{a_1\ldots a_{a_5}}\\ \langle J_{a_1a_2}J_{a_3a_4}Z_{a_5}\rangle &= \alpha_3\frac{4l^3}{3}\epsilon_{a_1\ldots a_{a_5}}\\ \langle J_{a_1a_2}Z_{a_3a_4}P_{a_5}\rangle &= \alpha_3\frac{4l^3}{3}\epsilon_{a_1\ldots a_{a_5}}\end{aligned} \tag{B1.3}$$

Con esto, la 1-forma conexión de gauge está dada por

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\omega^{ab}\mathbf{J}_{ab} + \frac{1}{l}e^a\mathbf{P}_a + \frac{1}{2}k^{ab}\mathbf{Z}_{ab} + \frac{1}{l}h^a\mathbf{Z}_a \tag{B1.4}$$

y la 2-forma curvatura

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}R^{ab}\mathbf{J}_{ab} + \frac{1}{l}T^a\mathbf{P}_a + \frac{1}{2}(D_\omega k^{ab} + \frac{1}{l^2}e^ae^b)\mathbf{Z}_{ab} + \frac{1}{l}(D_\omega h^a + k^a{}_{pb}e^b)\mathbf{Z}_a \tag{B1.5}$$

El Lagrangiano Chern-Simons para el algebra $\mathcal{B}$ en cinco dimensiones queda como

$$L_{CS}^{(5)} = \alpha_1 l^2\epsilon_{abcde}R^{ab}R^{cd}e^e + \alpha_3\epsilon_{abcde}(\frac{2}{3}R^{ab}e^ce^de^e + 2l^2k^{ab}R^{cd}T^e + l^2R^{ab}R^{cd}h^e) \tag{B1.6}$$

Observando (B1.6), podemos ver que el primer término de este Lagrangiano proporcional a α_1 corresponde a la contracción Inönü-Wignery el segundo término proporcional a α_3 contiene el término de Einstein-Hilbert $\epsilon_{abcde}R^{ab}e^c e^d e^e$ más un acoplamiento no linear entre la curvatura y los campos de materia bosónicos k^{ab} y h^a, donde l^2 se interpreta como una constante de acoplamiento.

Bibliografía

[1] A.H. and Chamseddine. Topological gravity and supergravity in various dimensions. *Nuclear Physics B*, 346(1):213 – 234, 1990.

[2] Luis Alvarez-Gaume and Paul H. Ginsparg. The Structure of Gauge and Gravitational Anomalies. *Annals Phys.*, 161:423, 1985. [Erratum: Annals Phys. 171, 233 (1986)].

[3] S. Bellucci, E. Ivanov, and S. Krivonos. Superbranes and super born-infeld theories from nonlinear realizations. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 102-103:26 – 41, 2001. Proceedings of the International Conference on Supersymmetry and Quantum Field Theory dedicated to the 75th birthday anniversary of Dmitrij V. Volkov.

[4] R. A. Bertlmann. *Anomalies in quantum field theory.* 1996.

[5] Andrzej Borowiec, Marco Ferraris, and Mauro Francaviglia. A covariant formalism for chern simons gravity. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(10):2589–2598, Feb 2003.

[6] A.H. Chamseddine. Topological gauge theory of gravity in five and all odd dimensions. *Physics Letters B*, 233(3):291 – 294, 1989.

[7] A.H. Chamseddine and D. Wyler. Gauge theory of topological gravity in 1+1 dimensions. *Physics Letters B*, 228(1):75 – 78, 1989.

[8] S. Coleman, J. Wess, and Bruno Zumino. Structure of phenomenological lagrangians. i. *Phys. Rev.*, 177:2239–2247, Jan 1969.

[9] José A. de Azcárraga, Kiyoshi Kamimura, and Jerzy Lukierski. Generalized cosmological term from maxwell symmetries. *Phys. Rev. D*, 83:124036, Jun 2011.

[10] David Hilbert. Die Grundlagen der Physik. 1. *Gott. Nachr.*, 27:395–407, 1915.

[11] F. Izaurieta, P. Minning, A. Perez, E. Rodriguez, and P. Salgado. Standard general relativity from chern–simons gravity. *Physics Letters B*, 678(2):213 – 217, 2009.

[12] F. Izaurieta, A. Perez, E. Rodriguez, and P. Salgado. Dual formulation of

the lie algebra s-expansion procedure. *Journal of Mathematical Physics*, 50(7):073511, 2009.

[13] F. Izaurieta, E. Rodriguez, and P. Salgado. Euler–chern–simons gravity from lovelock–born–infeld gravity. *Physics Letters B*, 586(3–4):397 – 403, 2004.

[14] Fernando Izaurieta, Eduardo Rodriguez, and Patricio Salgado. Expanding lie (super)algebras through abelian semigroups. *Journal of Mathematical Physics*, 47(12):123512, 2006.

[15] Fernando Izaurieta, Eduardo Rodriguez, and Patricio Salgado. Eleven-dimensional gauge theory for the M algebra as an Abelian semigroup expansion of osp(32|1). *Eur. Phys. J. C*, 54:675–684, 2008.

[16] N. Merino, A. Perez, and P. Salgado. Even-dimensional topological gravity from chern–simons gravity. *Physics Letters B*, 681(1):85 – 88, 2009.

[17] Pablo Mora, Pablo Pais, and Steven Willison. Gauged WZW models for space-time groups and gravitational actions. *Phys. Rev. D*, 84:044058, 2011.

[18] P. Salgado, M. Cataldo, and S. del Campo. Higher dimensional gravity invariant under the poincaré group. *Phys. Rev. D*, 66:024013, Jul 2002.

[19] P. Salgado, F. Izaurieta, and E. Rodriguez. Higher-dimensional gravity invariant under the ads group. *Physics Letters B*, 574(3–4):283 – 288, 2003.

[20] P. Salgado, P. Salgado-Rebolledo, and O. Valdivia. Topological gravity and gauged wess–zumino–witten term. *Physics Letters B*, 728:99–104, Jan 2014.

[21] Dmitrij V. Soroka and Vyacheslav A. Soroka. Tensor extension of the poincaré algebra. *Physics Letters B*, 607(3):302 – 305, 2005.

[22] Dmitrij V. Soroka and Vyacheslav A. Soroka. Semi-simple extension of the (super) poincaré algebra. *Advances in High Energy Physics*, 2009:1–9, 2009.

[23] K. S. Stelle and P. C. West. Spontaneously broken de sitter symmetry and the gravitational holonomy group. *Phys. Rev. D*, 21:1466–1488, Mar 1980.