



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

ENERGÍA OSCURA HOLOGRÁFICA



TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS
CON MENCIÓN EN FÍSICAS

AUTOR: GONZALO CASANOVA REYES
DIRECTOR DE TESIS: DR. MAURICIO CATALDO
CO-DIRECTOR DE TESIS: DR. FERNANDO IZAURIETA

CONCEPCIÓN - CHILE, ABRIL DEL 2020

Tabla de Contenido

Índice de ilustraciones	iv
Índice de tablas	vi
Agradecimientos	viii
Abstract	ix
Resumen	x
1 Introducción	1
2 Preliminares	7
2.1 Geometría diferencial	7
2.1.1 Variedades y coordenadas	7
2.1.2 Escalares, vectores y tensores	8
2.1.3 Tensor métrico	9
2.1.4 Derivada covariante	9
2.2 Geodésica	10
2.2.1 Conexión dependiente de la métrica	10
2.2.2 Tensor de Riemman	10
2.3 Relatividad Especial	11
2.3.1 Tiempo propio	12
2.3.2 Energía relativista	12
2.4 Relatividad General	12
2.4.1 Postulados de la Relatividad General	12
2.4.2 Ecuaciones de campo	13
2.4.3 Tensor de energía-momento	13
3 Cosmología	15
3.1 Espacio tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	15
3.2 Dinámica del Universo	17
3.3 Aceleración del Universo	17



3.4	Contenido material del Universo	19
3.4.1	Materia	19
3.4.2	Radiación	20
3.4.3	Constante cosmológica	21
3.5	Distancias en cosmología	22
3.5.1	Distancia horizonte cosmológico	22
3.5.2	Distancia de luminosidad y módulo de distancia	23
3.5.3	Distancia angular	23
3.5.4	Distancia horizonte de sonido	24
3.5.5	Escala de dilatación	24
3.6	El modelo Λ CDM	25
3.6.1	Problemas del modelo Λ CDM	26
3.7	Más allá del Modelo Cosmológico Estándar	27
3.7.1	Interacción cosmológica	27
3.7.2	Principio Holográfico	28
3.7.3	Modelo tipo Ricci	29
3.7.4	Modelo tipo Ricci modificado	30
3.7.5	Modelo tipo Ricci modificado con interacción lineal entre el sector oscuro	31
4	Metodología: comparación bayesiana de modelos	34
4.1	Inferencia bayesiana	35
4.1.1	Límites de confianza	35
4.1.2	Función chi-cuadrado χ^2	36
4.2	Comparación bayesiana de modelos	37
4.2.1	Evidencia bayesiana	37
4.3	Implementación	38
4.4	Cosmología observacional	39
4.4.1	La expansión acelerada del universo	39
4.4.2	Cronómetros cósmicos	40
4.4.3	Anisotropía en la radiación de fondo	41
4.4.4	Oscilaciones acústicas de los bariones	41
4.5	Procedimiento	43
5	Resultados	46
	Conclusión	69
	Bibliografía	71

Índice de ilustraciones

1.1	Grafico de velocidad de recesión vs distancia. A partir de este gráfico, fue que Einstein descarta la existencia de un Universo estático. Fuente: Extraído de [6]	2
1.2	Fuente: Fondo de radiación de microondas (CMB) y sus fluctuaciones. Extraído de [9].	3
5.1	Evolución de la densidad de materia oscura normalizada con respecto a la densidad crítica $\rho_{crit} = 3H^2/8\pi G$ (ver sección 3.48) para el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7) entre el rangos $-1 < z \lesssim 10^6$. Fuente: Elaboración propia.	54
5.2	Evolución de la densidad de energía oscura normalizada con respecto a la densidad crítica $\rho_{crit} = 3H^2/8\pi G$ (ver sección 3.48) para el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7) entre el rangos $-1 < z \lesssim 10^6$. Fuente: Elaboración propia.	55
5.3	Gráfica de la evolución de la función de desaceleración q , la función de coincidencia r y la función de estado ω_Λ de la energía oscura para los distintos modelos estudiados según el mejor ajuste (ver tabla 5.1) usando los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.	56
5.4	Evolución de las componentes del Universo entre los rangos $-1 \lesssim z \lesssim 10^6$ para el modelo cosmológico HRDE (ver sección 3.7.4) usando el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.	57
5.5	Evolución de las componentes del Universo entre los rangos $-1 \lesssim z \lesssim 10^6$ para el modelo cosmológico MHRDE (ver sección 3.7.4) usando el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.	58
5.6	Evolución de las componentes del Universo entre los rangos $-1 \lesssim z \lesssim 10^6$ para el modelo cosmológico Q_1 MHRDE (ver sección 3.7.5) usando el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.	59

5.7	Evolución de las componentes del Universo entre los rangos $-1 \lesssim z \lesssim 10^6$ para el modelo cosmológico Q_2 MHRDE usando el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.	60
5.8	Evolución de las componentes del Universo entre los rangos $-1 \lesssim z \lesssim 10^6$ para el modelo cosmológico Q_3 MHRDE usando el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.	61
5.9	Evolución de las componentes del Universo entre los rangos $-1 \lesssim z \lesssim 10^6$ para el modelo cosmológico Q_4 MHRDE usando el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.	62
5.10	Gráfico de contornos de los parámetros cosmológicos correspondientes al modelo HRDE (ver sección 3.7.3) para los datos SET2 (ver tabla 4.7). La región oscura corresponde al LC 1σ (68%), la región clara corresponde al LC 2σ (95%). Fuente: Elaboración propia.	63
5.11	Gráfico de contornos de los parámetros cosmológicos correspondientes al modelo MHRDE (ver sección 3.7.4) para los datos SET2 (ver tabla 4.7). La región oscura corresponde al LC 1σ (68%), la región clara corresponde al LC 2σ (95%). Fuente: Elaboración propia	64
5.12	Gráfico de contornos de los parámetros cosmológicos correspondientes al modelo Q_1 MHRDE (ver sección 3.7.5) para los datos SET2 (ver tabla 4.7). La región oscura corresponde al LC 1σ (68%), la región clara corresponde al LC 2σ (95%). Fuente: Elaboración propia.	65
5.13	Gráfico de contornos de los parámetros cosmológicos correspondientes al modelo Q_2 MHRDE (ver sección 3.7.5) para los datos SET2 (ver tabla 4.7). La región oscura corresponde al LC 1σ (68%), la región clara corresponde al LC 2σ (95%). Fuente: Elaboración propia.	66
5.14	Gráfico de contornos de los parámetros cosmológicos correspondientes al modelo Q_3 MHRDE (ver sección 3.7.5) para los datos SET2 (ver tabla 4.7). La región oscura corresponde al LC 1σ (68%), la región clara corresponde al LC 2σ (95%). Fuente: Elaboración propia.	67
5.15	Gráfico de contornos de los parámetros cosmológicos correspondientes al modelo Q_4 MHRDE (ver sección 3.7.5) para los datos SET2 (ver tabla 4.7). La región oscura corresponde al LC 1σ (68%), la región clara corresponde al LC 2σ (95%). Fuente: Elaboración propia.	68

Índice de tablas

4.1	La escala de Jeffreys constituye una medición empírica para la interpretación de la evidencia en la comparación de los modelos M_i versus M_j . La columna izquierda indica qué límite para el logaritmo del factor de Bayes y la columna derecha es la interpretación de la evidencia según el límite correspondiente. Fuente: Extraído de [5]	38
4.2	Datos obtenidos a partir del método de cronómetros cósmicos. Fuente: [41]	41
4.3	Mediciones isotrópicas de la señal BAO. Fuente: Elaboración propia.	42
4.4	Mediciones anisotrópicas de la señal <i>BAO</i>	42
4.5	Modelos cosmológicos estudiados y su dependencia paramétrica. Fuente: Elaboración propia	44
4.6	Distribución a priori para los parámetros de los modelos estudiados. Para una distribución Gaussiana como prior (μ, σ^2) , donde μ es el promedio y σ la desviación estándar, para la distribución Uniforme como prior (a, b) representa $a \leq x \leq b$. Fuente: Elaboración propia	44
4.7	Distintas combinaciones de los set de datos ocupados para el ajuste de parámetros y comparación de modelos. Fuente: Elaboración propia	45
5.1	Mejor ajuste para las distintas combinaciones de los set de datos mostrados en la sección 4.4. El mejor ajuste es definido promediando con respecto a la distribución a posteriori. El error es considerado con respecto a 1σ de incerteza (68%). Los datos SET1 y SET2 están definidos en tabla 4.7. Fuente: Elaboración propia.	50
5.2	Comparación bayesiana de modelos para los sets de datos mostrados en la sección 4.2. $E_{\Lambda\text{CDM}}$ corresponde a la evidencia del modelo ΛCDM . La incerteza en la evidencia corresponde a 1σ (68%). Los datos SET1 y SET2 están definidos en tabla 4.7 Fuente: Elaboración propia	51

5.3	Nivel de concordancia entre el ajuste del parámetro h para los sets de datos SET1 y SET2 (ver tabla 4.7) y el valor medido por Riess <i>et al.</i> [2]. La segunda columna representa el valor estandarizado con respecto a la desviación estándar σ_{Riess} . La tercera columna representa la probabilidad asociada al valor estandarizado. Fuente: Elaboración propia.	52
5.4	Nivel de concordancia entre el ajuste del parámetro M_B para los sets de datos Pantheon y SET2 (ver tabla 4.7) entre el modelo Λ CDM y los modelos holográfico estudiados en este trabajo. La segunda columna representa el valor estandarizado con respecto a la desviación estándar $\sigma_{\Lambda CDM}$ encontrada para el modelo Λ CDM. La tercera columna representa la probabilidad asociada al valor estandarizado. Los datos SET2 están definidos en tabla 4.7. Fuente: Elaboración propia.	53



Agradecimientos

Agradezco a todo aquel que siempre estuvo conmigo, en las buenas y en las malas. A todo aquel que fue compasivo y paciente en circunstancias adversas. A todo aquel que de una forma u otra me enseñó una valiosa lección de vida durante este proceso. A todos ustedes, muchas gracias.

Dedicado a Luciana



Abstract

Modern cosmology is based on the framework of General Relativity to describe the observable Universe through the standard cosmological model or the Λ CDM model. This model is successful in predicting the microwave background radiation (CMB), abundances of light elements, fluctuations in the CMB, the Hubble law, the structure formation, the accelerated expansion of the Universe, etc. However, it presents some problems, such as the cosmological constant, cosmological coincidence problem and the recent tension in estimating the Hubble parameter found by the Planck satellite $H_0 = 67.37 \pm 0.54$ km/Mpc s [1] and by Riess *et al.* $H_0 = 74.03 \pm 1.42$ km/Mpc s [2]. It is because of this models that go beyond the Λ CDM model are explored. In this case we explored dark energy models based on the holographic principle with a cutoff given by the Ricci scalar [3] and modified Ricci scalar [4]. The models studied consist of baryonic matter ρ_B , photon and 3 types of neutrinos ρ_R radiation, cold dark matter ρ_{CDM} and dark energy for models with and without interaction between the dark sector (dark matter and dark energy). Four models of linear interaction between the dark sector we studied given by $Q_1 = \Gamma_a \rho_{CDM}$, $Q_2 = \Gamma_b \rho_\Lambda$, $Q_3 = \Gamma_a (\rho_{CDM} + \rho_\Lambda)$ and $Q_4 = \Gamma_a \rho_{CDM} + \Gamma_b \rho_\Lambda$. Using Bayesian inference, cosmological parameters are estimated and holographic models are compared to the Λ CDM model using the Jeffreys scale as an empirical interpretation of the evidence [5] in the light of observational data from type Ia Supernovas, cosmic cornometers, CMB and baryonic acoustic oscillations. Using all the data combined, preference was found in favor of the Λ CDM model over the holographic models studied based on the Ricci scalar.

Resumen

La cosmología moderna se fundamenta en el marco de la teoría de la Relatividad General para describir el Universo observable a través del modelo cosmológico estándar o bien el modelo Λ CDM. Este modelo posee los aciertos de predecir la radiación del fondo de microondas (*CMB*), la abundancia de los elementos ligeros, las fluctuaciones del *CMB*, la ley de Hubble, la formación de estructuras, la reciente expansión acelerada del Universo, etc. Sin embargo, presenta problemas conceptuales tales como son el problema de la constante cosmológica, el problema de la coincidencia y la reciente tensión en la estimación de la constante de Hubble encontrada por el satélite Planck $h = 0.6737 \pm 0.0054$ [1] y por Riess *et al.* $h = 0.7403 \pm 0.0142$ [2]. Es a raíz de esto que se exploran modelos mas allá del modelo Λ CDM. En este trabajo se exploran modelos de energía oscura basados en el principio holográfico con un corte en las longitudes en el infrarrojo dados por el escalar de Ricci [3] y escalar de Ricci modificado [4]. Los modelos estudiados constan de materia bariónica ρ_B , radiación producto de fotones y 3 tipos de neutrinos ρ_R , materia oscura fría ρ_{CDM} y energía oscura para modelos sin y con interacción entre el sector oscuro (materia oscura y energía oscura). Se estudian 4 modelos de interacción lineal entre las componentes del sector oscuro dadas por $Q_1 = 3\Gamma_a H \rho_{CDM}$, $Q_2 = 3H\Gamma_b \rho_\Lambda$, $Q_3 = 3H\Gamma_a(\rho_{CDM} + \rho_\Lambda)$ y $Q_4 = 3H(\Gamma_a \rho_{CDM} + \Gamma_b \rho_\Lambda)$. Mediante la inferencia bayesiana se estiman los parámetros cosmológicos y se realiza una comparación de modelos con respecto al modelo Λ CDM usando la escala de Jeffreys [5] como interpretación empírica de la evidencia a la luz de los datos observacionales de Supernovas tipo Ia (SNe Ia), cronómetros cósmicos, *CMB* y *BAO* (oscilaciones acústica de los bariones). Usando todos los datos ocupados en este trabajo es que se encontró preferencia a favor del modelo Λ CDM por sobre los modelos holográficos estudiados basados en el escalar de Ricci.

Chapter 1

Introducción

En la antigüedad, la visión predominante de como entendemos el Universo era la teoría geocéntrica. En ella se aseguraba que todos los astros giraban en torno al planeta tierra. No fue hasta el siglo XVI durante el renacimiento que el astrónomo Nicolas Copernico presento un modelo matemático predictivo en el cual los planetas giraban en orbitas circulares en torno al sol. Posteriormente, gracias a las observaciones astronómicas presentadas por Galileo Galilei, Johannes Kepler extendio el modelo de Copernico para el caso de orbitas elípticas. En 1686 Isaac Newton presento un modelo matemático conocido como ley de gravedad universal, con el cual podía predecir las trayectorias de los planetas del sistema solar. Albert Einstein en 1915 extiende el modelo de la gravedad de Newton describiendo que la gravedad era la curvatura del espacio tiempo en presencia de fuentes de materia. Esta teoría es conocida como Relatividad General (RG) y su modelo matemático son las ecuaciones de campo de Einstein. Esta teoría permitió crear un marco teórico para el estudio del Universo y sus constituyentes conocida como cosmología, la cual asume como postulados que el Universo es homogéneo e isotropico a grandes escalas ($\gtrsim 100$ Mpc, donde Mpc es un megaparsec y es equivalente a 3.0857×10^{19} km). Es bajo este marco, que científicos se debatían entre un Universo actual estático y dominado por la gravedad o en expansión. Desde un punto de vista teórico un Universo actualmente estático y dominado por la gravedad no puede contener materia. Esto llevo a Einstein en 1917 introducir la constante cosmológica como una modificación a las ecuaciones de campo que permitiesen obtener un Universo estático con un contenido de materia distinto de cero $\rho_{0M} \sim \Lambda/G$, donde ρ_{0M} , Λ y G son la densidad actual de materia, constante cosmológica y constante de gravitación universal. En 1922 Alexander Friedmann en el marco de la RG bajo los postulados cosmológicos deriva las ecuaciones que gobiernan la dinámica del Universo en función de su contenido de materia y energía. Estas ecuaciones son conocidas como ecuaciones de Friedmann (los resultados encontrados por Einstein son consistentes con las ecuaciones de Friedmann). En 1927 George Lematrie postula que nuestro Universo proviene de la explosión de una región extremadamente densa y caliente. Esta teoría es conocida

como la teoría de la gran explosión (mas popularmente conocida como teoría del *big bang*). En 1929 El astrónomo Edwin Hubble estimo la distancia de 24 nebulosas extra galácticas encontrando una relación lineal entre la distancia y la velocidad radial como se puede apreciar en la siguiente figura:

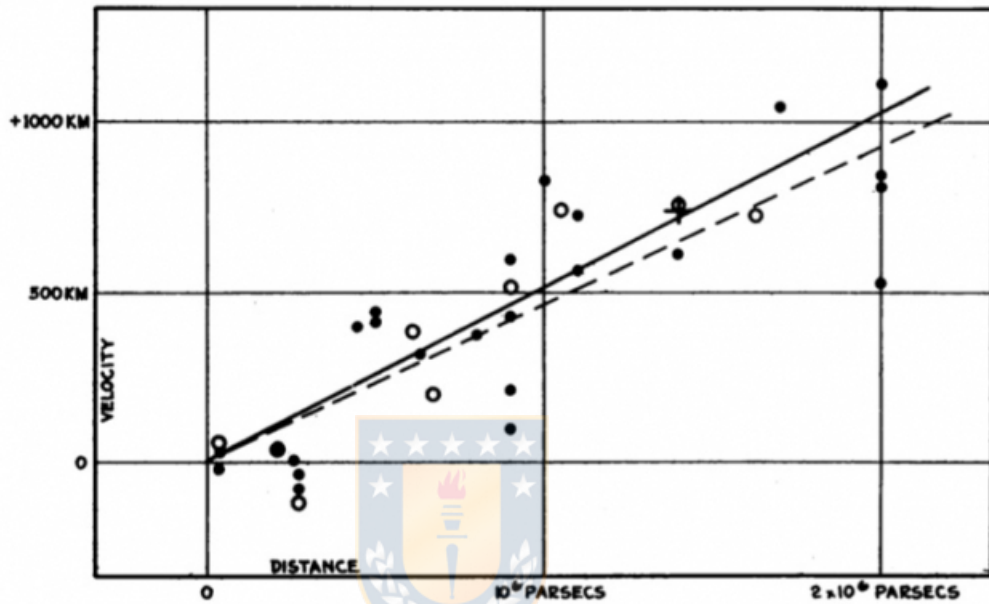


FIGURE 1
Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

Ilustración 1.1: Grafico de velocidad de recesión vs distancia. A partir de este gráfico, fue que Einstein descarta la existencia de un Universo estático. Fuente: Extraído de [6]

Este nuevo escenario llevó a descartar la idea del Universo estático y con ella la constante cosmológica. En 1948 G. Gamow y R. Herman en el marco de la teoría de la gran explosión, teorizaron sobre la existencia de una radiación que permea todo el espacio y su origen viene desde los inicios del Universo. Esta radiación lleva el nombre de Fondo de radiación cósmica de microondas (CMB por sus siglas en ingles). En 1964 los radio astrónomos A. Penzias y R. Wilson descubrieron experimentalmente la existencia del CMB [7] (Figura 1.2 para una imagen del CMB y sus fluctuaciones) el cual se comporta como un cuerpo negro y actualmente tiene una temperatura de $T = 2.760 \pm 0.0013K$ [8]. Este descubrimiento confirma la homogeneidad e isotropía del Universo (sin considerar las fluctuaciones que pueden ser causadas por el polvo extragalactico, fluctuaciones primordiales, etc)

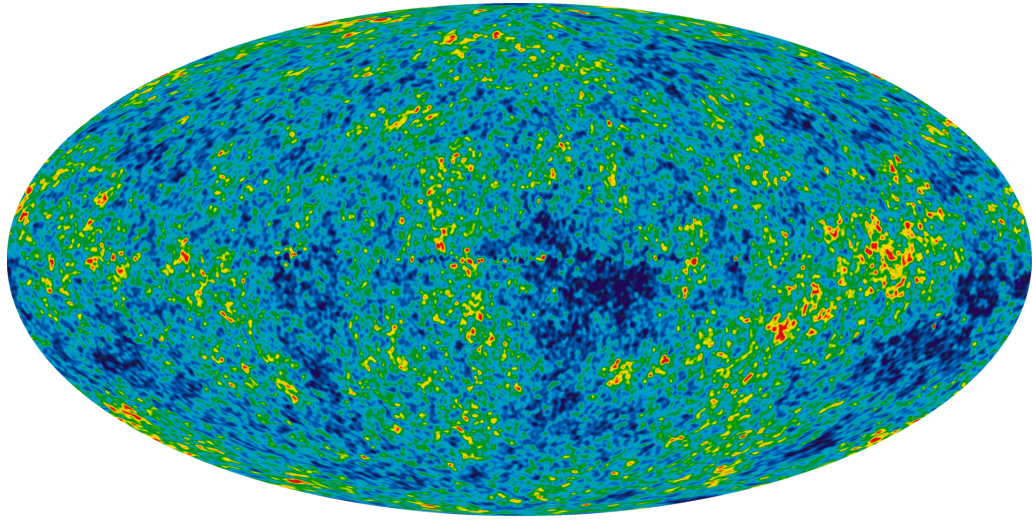


Ilustración 1.2: Fuente: Fondo de radiación de microondas (CMB) y sus fluctuaciones. Extraído de [9].

La existencia del CMB, la formación de estructuras a gran escala y la abundancia de los elementos ligeros son una de las grandes predicciones de la teoría de la gran explosión.

La constante cosmológica volvió a tener la atención de los científicos cuando en los años 1998 dos grupos independientes de astrónomos determinaron a partir del brillo aparente de supernovas tipo Ia que el universo se encuentra actualmente en una fase de expansión acelerada [10, 11]. La sustancia que producía tal efecto fue nombrada energía oscura y es comúnmente modelada como la constante cosmológica (energía del vacío). Determinar la naturaleza de la energía oscura y materia oscura son unos de los desafíos mas grande de la física moderna.

En la ultima década, los datos cosmológicos de supernovas tipo Ia (SNe Ia) y del fondo cósmico de microondas (CMB) son usados para abordar cuestiones fundamentales sobre la naturaleza de la física de nuestro Universo. El modelo Λ CDM (conocido también como el modelo cosmológico estándar) es el modelo mas simple que puede explicar los distintos set de observaciones abarcando una amplia gama de escalas de longitud [12]. Este modelo asume que el Universo esta compuesto por materia bariónica, radiación electromagnética, materia oscura fría [13] y energía oscura como la energía del vacío comportándose como constante cosmológica.

Desde el punto de vista teórico, sin embargo, es sabido que desde la física de partículas que el valor de la densidad de energía del vacío difiere de las observaciones cosmológicas por una cantidad de 120 ordenes de magnitud [14]. Por otra parte a pesar de que la evolución de la materia oscura y energía oscura sobre el tiempo cósmico es muy

diferente, actualmente sus densidades de energía son del mismo orden de magnitud, el cual da lugar a la pregunta si esto es simplemente una coincidencia o existe una razón más fundamental. Esto es conocido como el problema de la coincidencia cósmica [15]. Desde el punto de vista experimental, estimaciones del parámetro de Hubble a partir de los experimentos locales e independientes del modelo $h = 0.7403 \pm 0.142$ [2] tienen mostrado una discrepancia de $\sim 4.5\sigma$ con respecto a las estimaciones hechas por el satélite Planck $h = 0.6737 \pm 0.0054$ km/Mpc seg ocupando el modelo Λ CDM [1]. Esto es conocido como la tensión del parámetro de Hubble. Todas estas cuestiones justifican la exploración de modelos alternativos al MCM que sean consistentes con la evidencia ya encontrada y a su vez puedan resolver estos problemas.

En 1994 L. Suskind, basado en la termodinámica de agujeros negros [16, 17, 18, 19], propone la idea de que los grados de libertad físicos se encuentran distribuidos en superficies y no en volúmenes [20]. Este es el corazón del Principio Holográfico (PH por sus siglas en español). Esto tiene como consecuencia que en una teoría de campos en $3+1$ se produce una sobre estimación de los grados de libertad físicos de un sistema. En 1998, L. Suskind y W. Fischler basado en el de máxima entropía encontrado por Berkenstein, encuentran en el contexto de la cosmología que fluidos ideales que respeten el PH cumplen $\omega < 1$, donde $\omega = p/\rho$ es la ecuación de estado [21]. En 1998 A. Cohen y colaboradores proponen un límite en la máxima entropía más restrictivo que el propuesto por Bekenstein, el cual excluye los grados de libertad que yacen sobre la superficie del radio de schwarzschild [22]. A partir de este límite se deduce una relación entre la densidad de energía del vacío ρ_{vac} y el corte en las longitudes de ondas que están hacia el infrarrojo (o de manera simplificada corte en el infrarrojo) $\lambda \sim L$ en una teoría de campos (L es una distancia en la cual los efectos cosmológicos predominan), dado por $\rho_{vac} \sim 1/L^2$. Los primeros modelos fenomenológicos de energía oscura fueron basados en un corte en el infrarrojo dado por el horizonte cosmológico (distancia que recorre al luz en un Universo en expansión) [21, 23].

La hipótesis

Dado los problemas del modelo Λ CDM y de la desconocida naturaleza del sector oscuro (materia oscura y energía oscura) se exploran modelos basados en los cortes en el infrarrojo dados por el escalar de Ricci (HRDE) [3] y el escalar de Ricci modificado (MHRDE) [4] en presencia de interacción lineal entre el sector oscuro y el caso sin interacción. En particular los modelos de interacción entre materia oscura y energía oscura [24, 25, 26, 27, 28] son basados en el hecho de que no existen ninguna simetría conocida en la Naturaleza que prohíba un acoplamiento mínimo entre estas componentes. Para algunas clases de interacción, el problema de la coincidencia puede ser aliviado en el sentido de que está es producto de la interacción entre materia oscura y energía oscura. Esto fue primeramente discutido por [29]. Por otra parte, distintos autores han considerado la posibilidad de que la interacción entre estas componentes solucione la tensión en el parámetro de Hubble [30, 31, 32]. Por lo tanto se propone que la densidad de energía oscura proviene del límite de máxima entropía de un agujero negro para un adecuado corte en el infrarrojo y que una interacción lineal entre el sector oscuro es la causante de esta coincidencia.

El objetivo

Debido a la gran cantidad de modelos basados en HRDE y MHRDE, es que se emplean técnicas estadísticas para saber cuál es el modelo mas compatible con los datos observacionales (Estos modelos han sido contrastados observacionalmente para modelos de interacción como tanto para modelos sin interacción [4, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]). La Inferencia Bayesiana ofrece una estrategia para resolver este problema y es ampliamente usada por muchos cosmólogos. La Inferencia Bayesiana a partir del teorema de Bayes establece una proporcionalidad de la forma $\text{posteriori} = \text{Prior} \times \mathcal{L} / E$, donde la distribución a posteriori representa la incerteza del modelo, la distribución a priori es el conocimiento previo sobre el sistema, \mathcal{L} es la función de verosimilitud, la cual representa la forma en que los datos se distribuyen y E es la función verosimilitud promediada sobre la distribución a priori (mas conocida como evidencia) [5]. Con esta estrategia se estiman los valores de los parámetros cosmológicos de cada modelo vía su correspondiente distribución a posteriori y mediante la evidencia se realiza la comparación Bayesiana entre el modelo Λ CDM y los modelos holográficos basados en el escalar de Ricci. Se usa la escala de Jeffreys como una interpretación empírica del valor de la comparación. El objetivo de este trabajo es estudiar la viabilidad de los modelos holográficos basados en el escalar de Ricci en comparación al modelo Λ CDM por medio de la evidencia E a la luz de los datos de SNe Ia (supernova tipo Ia) de la compilación Pantheon [42], mediciones de la razón de expansión de cronómetros cósmicos [43], medidas de anisotrópicas de BAO, BOSS-DR12 [44] y Ly α [45], medidas isotrópicas de BAO 6dFGS [46], MGS [47] y eBOSS [48] y de

la estimación de la escala del horizonte sonido en la superficie de último *scattering* reportada por el satélite Planck [1].



Chapter 2

Preliminares

2.1 Geometría diferencial

En esta sección se presentan los elementos matemáticos básicos para desarrollar la teoría de la Relatividad General (RG). En la referencia [49] se encuentra información mas detallada sobre estos tópicos.

2.1.1 Variedades y coordenadas

Una variedad consiste en un conjunto de puntos los cuales pueden ser cubiertos por una cantidad finita de abiertos los cuales a su vez pueden ser dotados con un sistema coordenado. Si p es un punto perteneciente a una variedad $p \in \mathcal{M}$ luego existe una función $\varphi(p)$ la cual le asigna a cada punto un sistema coordenado $\{x^\alpha\}$, tal que este puede ser visto localmente como un espacio Euclidiano de N dimensiones:

$$\varphi^\mu(p) = x^\mu. \quad (2.1)$$

Una variedad admite una cantidad arbitraria de sistemas coordenados (SC). Sean x^μ y x'^μ dos SC en $p \in \mathcal{M}$, estos se relacionan mediante una transformación de coordenadas (TC) definida como:

$$J(p) = \left[\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \right] (p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x'^n}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

El conjunto de transformación que cumple con $\det J(p) \neq 0$ en $p \in \mathcal{M}$ es el grupo general lineal [49]. Una variedad es diferenciable si el conjunto de N funciones $x^\mu = x^\mu(x'^1, \dots, x'^n)$ son diferenciables. Esta propiedad permite definir el espacio tangente y productos tensoriales de espacios tangentes [49]. A continuación se definen escalares, vectores y tensores, los cuales se definen a partir del espacio tangente.

2.1.2 Escalares, vectores y tensores

Se define un escalar ϕ como aquella función que a cada punto de una variedad le asigna un valor y dado que los números son cantidades que son independientes de la elección de las coordenadas, bajo una transformación $x'^\mu = f^\mu(x^\nu)$ se cumple la siguiente regla de transformación:

$$\phi(x^\mu) = \phi(x'^\mu), \quad (2.3)$$

Un vector es una tupla de números reales, los cuales ponderan un valor a sus respectivas bases que lo generan. Entonces un vector puede ser expresado como:

$$V = \sum_{\mu} V^{\mu} e_{\mu} = V^{\mu} e_{\mu}, \quad (2.4)$$

donde en la tercera igualdad se ha ocupado el convenio de sumatoria. Los números V^{α} son las componentes del vector y las cantidades e_{α} son los vectores que generan el espacio vectorial tangente entorno a un punto $p \in \mathcal{M}$. Producto de una transformación de coordenadas, las componentes transforman como:

$$V^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} V'^{\nu}. \quad (2.5)$$

Un vector como objeto geométrico no depende del sistema coordenado, entonces la base e_{α} transforma como el inverso de la transformación de las componentes del vector:

$$e_{\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} e'_{\nu}, \quad (2.6)$$

así mismo el vector puede ser reescrito de una manera alternativa $V = V_{\alpha} e^{\alpha}$ donde la base e^{α} es dual a la base e_{α} en el sentido de que existe un tensor (la métrica) que permite mapear estas bases. Las reglas de transformación en esta base son:

$$V'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} V_{\nu} \quad ; \quad e'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} e^{\nu}. \quad (2.7)$$

Un tensor se define a partir del producto tensorial \otimes [49] como:

$$T = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N} e_{\mu_1} \otimes e_{\mu_2} \otimes \dots \otimes e_{\mu_N} \otimes e^{\nu_1} \otimes e^{\nu_2} \otimes \dots \otimes e^{\nu_M}, \quad (2.8)$$

donde $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N}$ son las componentes del tensor y $e_{\mu_1} \otimes e_{\mu_2} \otimes \dots \otimes e_{\mu_N} \otimes e^{\nu_1} \otimes e^{\nu_2} \otimes \dots \otimes e^{\nu_M}$ son la base que genera este tipo de tensores en un punto $p \in \mathcal{M}$. Bajo una transformación de coordenadas las componentes de este tensor transforman como:

$$T'^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_M} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial x'^{\beta_2}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_N}}{\partial x'^{\beta_N}} \frac{\partial x'^{\nu_1}}{\partial x^{\beta_1}} \frac{\partial x'^{\nu_2}}{\partial x^{\beta_2}} \dots \frac{\partial x'^{\nu_M}}{\partial x^{\beta_M}} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_M}, \quad (2.9)$$

mientras que la base que genera este tipo de tensores transforma como el inverso de esta transformación, al igual que en el caso de los vectores. A continuación se define el tensor métrico.

2.1.3 Tensor métrico

El tensor métrico se define en cada punto $p \in \mathcal{M}$ como:

$$g = g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu, \quad (2.10)$$

donde $g_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico en la base dual. Esta cantidad permite comparar dos vectores en el espacio tangente. Sean U y V dos vectores en $p \in \mathcal{M}$, entonces la métrica actúa sobre estos como:

$$g(U, V) = U^\mu U^\nu g(e_\mu, e_\nu) = U^\mu U^\nu g_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Las componentes de la métrica permiten mapear la base e^μ a su respectiva base dual e_μ como $e_\nu = g_{\mu\nu} e^\mu$, asimismo permite mapear las componentes de un vector/tensor a su respectiva base dual. El tensor métrico juega un rol importante en la RG como la variable dinámica de la teoría.

2.1.4 Derivada covariante

Sea V un vector, la derivada parcial de la componente de este vector viene dado por $T_\mu^\nu = \partial_\mu V^\nu$. Bajo una transformación de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ se tiene que esta cantidad transforma como:

$$\partial'_\mu V'^\nu = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \partial_\sigma \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} V^\gamma \right) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} \partial_\sigma V^\gamma + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} V^\gamma, \quad (2.12)$$

esta cantidad debiese transformar como un tensor, pero este no es el caso debido al segundo termino de la tercera igualdad. Para esto se define la derivada covariante del vector V como:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu V^\sigma, \quad (2.13)$$

donde el termino $\Gamma_{\beta\sigma}^\alpha$ es la conexión. Esta cantidad esta definida de tal forma que bajo una transformación de coordenadas $x^\nu \rightarrow x'^\nu$ transforma como:

$$\Gamma_{\beta\sigma}^{\nu\alpha} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x'^\beta \partial x'^\sigma}. \quad (2.14)$$

Debido a la regla de transformación esta cantidad no es un tensor. A partir de esta regla de transformación, la cantidad $T_\mu^\nu = \nabla_\mu V^\nu$ transforma como:

$$\nabla'_\alpha V'^\beta = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu, \quad (2.15)$$

donde ∇'_α es la derivada covariante en las coordenadas x'^α . La derivada covariante para las componentes de un vector en la base dual $V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta$ están dadas por:

$$\nabla_\alpha V_\beta = \partial_\alpha V_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma V_\sigma, \quad (2.16)$$

para las componentes de un tensor arbitrario $T_{\beta\dots}^{\alpha\dots}$ la derivada covariante viene dada por:

$$\nabla_\mu T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} = \partial_\mu T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha T_{\beta\dots}^{\sigma\dots} + \dots - \Gamma_{\beta\mu}^\sigma T_{\sigma\dots}^{\alpha\dots} - \dots. \quad (2.17)$$

2.2 Geodésica

Una curva en una variedad diferenciable se define como un punto $p \in \mathcal{M}$ que varia suavemente con respecto a algún parámetro λ . Usando un sistema coordenado, la curva puede expresarse como $x^\mu(p(\lambda)) \equiv x^\mu(\lambda)$. Tangente a esta curva se define un vector V cuyas componentes vienen dadas por $V^\mu = dx^\mu/d\lambda$. Entonces si U y V son dos vectores tangentes a sus respectivas curvas, la variación de U con respecto a V viene dada por:

$$\begin{aligned} V^\mu \nabla_\mu U^\nu &= V^\mu \partial_\mu U^\nu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu U^\sigma V^\mu \\ &= \frac{dU^\nu}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu U^\sigma V^\mu. \end{aligned} \quad (2.18)$$

La condición para que el vector U sea constante con respecto a V es $V^\mu \nabla_\mu U^\nu = 0$. Un vector V es constante con respecto a sí mismo si satisface la ecuación de la geodésica:

$$V^\mu \nabla_\mu V^\nu = \frac{dV^\nu}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu V^\sigma V^\mu = 0. \quad (2.19)$$

2.2.1 Conexión dependiente de la métrica

Si U y V son dos vectores constantes a lo largo de un vector W se cumple $W^\alpha \nabla_\alpha (U_\beta V^\beta) = 0$, entonces la métrica satisface [49]:

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda g_{\lambda\mu} = 0, \quad (2.20)$$

despejando la conexión en función de la métrica se obtiene:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{g^{\lambda\alpha}}{2} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (2.21)$$

entonces la geometría determina la forma funcional de la conexión. A partir de ahora se considerara esta elección para la conexión.

2.2.2 Tensor de Riemman

Dado que la conexión no es un tensor este no puede tener un significado geométrico intrínseco de cuanto la variedad esta curvada. La cantidad que cuantifica esta característica es el tensor de Riemman:

$$R^\lambda_{\sigma\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma_{\sigma\beta}^\lambda - \partial_\beta \Gamma_{\sigma\alpha}^\lambda + \Gamma_{\sigma\beta}^\lambda \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda - \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\lambda. \quad (2.22)$$

A partir del tensor de Riemman se define el tensor de Ricci como:

$$R_{\alpha\beta} = R^\lambda_{\alpha\lambda\beta} = \partial_\lambda \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda - \partial_\beta \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\rho\lambda}^\rho - \Gamma_{\rho\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\rho, \quad (2.23)$$

esta cantidad juega un rol importante en la teoría de la RG. A partir del tensor de Ricci se define el escalar de Ricci como:

$$R = R_{\alpha}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad (2.24)$$

esta cantidad juega un rol importante en el principio variacional con el cual se derivan las ecuaciones de campo de Einstein como se vera posteriormente.

2.3 Relatividad Especial

La teoría especial de la Relatividad fue propuesta por primera vez en el año 1905 por Albert Einstein [50]. Esta teoría se sustenta en los siguientes postulados:

- Las leyes de la física son invariantes en todos los sistemas de referencia inerciales.
- La rapidez de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores y esta es una rapidez que ningún cuerpo material puede alcanzar.

Del segundo postulado se tiene que si v es la rapidez de algún cuerpo material vista por un observador arbitrario, luego se cumple $v < c$ donde c es la rapidez de la luz. Entonces si este cuerpo material recorre una distancia Δx en un tiempo Δt se tiene:

$$-c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 < 0, \quad (2.25)$$

la cantidad η cumple con la siguiente propiedad:

$$\eta = \begin{cases} -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 < 0 & \text{El cuerpo se mueve a una velocidad menor al de la luz,} \\ -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 = 0 & \text{El cuerpo se mueve a la velocidad de la luz,} \\ -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 > 0 & \text{El cuerpo se mueve a una velocidad mayor al de la luz.} \end{cases}$$

A partir de esto uno puede postular a la existencia de una métrica η la cual describe la geometría del espacio-tiempo como una entidad unificada, llamada métrica de Minkowski:

$$\eta = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.26)$$

donde se ha suprimido el producto tensorial \otimes por convención. Las componentes de la métrica $\eta_{\mu\nu}$ vienen dadas por:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

esta cantidad mide distancias en el espacio-tiempo. La componente del tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ es invariante bajo transformaciones de Lorentz [51]:

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.28)$$

donde Λ_{ν}^{α} es una transformación de Lorentz.

2.3.1 Tiempo propio

En RE el tiempo pasa a ser una coordenadas, por lo que su parametrización puede ser a priori arbitraria. Se define el tiempo propio de un observador el cual se mueve a una rapidez relativa v con respecto a otro observador, como:

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt, \quad (2.29)$$

donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ es el factor de Lorentz [51].

2.3.2 Energía relativista

Si $x^\mu(\tau)$ es una curva en el espacio de Minkowski. con τ el tiempo propio, su respectiva velocidad se define como:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \vec{v}), \quad (2.30)$$

donde \vec{v} es el vector velocidad. Si el cuerpo en cuestión posee una masa m , su correspondiente momento en el espacio de Minkowski viene dado como:

$$p^\mu \equiv m \frac{dx^\mu}{d\tau} \gamma \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right), \quad (2.31)$$

donde E es la energía del cuerpo en movimiento y \vec{p} es su vector momento. A partir de la norma del espacio de Minkowski es posible determinar la energía relativista:

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2 c^2 \quad \rightarrow \quad E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (2.32)$$

2.4 Relatividad General

La RG es una teoría geométrica de la gravedad publicada por Albert Einstein en 1915 y es la actual descripción de la gravedad. Una descripción mas detallada se encuentra en [51].

2.4.1 Postulados de la Relatividad General

- **Principio de equivalencia:** No existe experimento local que permita distinguir entre la caída libre de un cuerpo no rotante en un campo gravitacional de un movimiento uniformemente acelerado en ausencia de un campo gravitacional.
- **Principio de covarianza :** Este principio asegura que las leyes de la física no dependen del sistema de coordenadas ocupado, esto supone que las leyes de la relatividad general tiene que poseer una forma tensorial.

2.4.2 Ecuaciones de campo

En presencia de fuentes de materia la métrica del espacio-tiempo pasa a ser una función de las coordenadas $g_{\mu\nu}(x)$. A partir de los elementos matemáticos definidos en 2.1 es posible construir un principio de acción para la gravedad conocido como acción de Einstein-Hilbert:

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}, \partial g_{\mu\nu}, \dots] = \frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{M}} R \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.33)$$

donde se ha elegido $c = 1$, G es la constante universal de la gravedad, $\sqrt{-g}$ es el determinante del tensor métrico y R es el escalar de Ricci (2.24). Al minimizar este funcional con respecto a la métrica se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (2.34)$$

A continuación se introduce el tensor de energía-momento, el cual es la fuente del campo gravitacional.

2.4.3 Tensor de energía-momento

El principio de acción para algún contenido de materia en el contexto de la RG viene dado por:

$$S_M = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_M[\phi, \partial\phi, \dots] \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.35)$$

donde \mathcal{L}_M es el lagrangiano de algún campo de materia ϕ . Al variar esta acción con respecto a $g_{\mu\nu}$ se obtiene:

$$\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \int_{\mathcal{M}} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad \text{donde} \quad T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial g_{\mu\nu}}, \quad (2.36)$$

la cantidad $T^{\mu\nu}$ se denomina tensor de energía-momento. En presencia de fuentes de materia las ecuaciones de campo de Einstein toman la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

El tensor de energía-momento que está descrito por su velocidad u^μ , densidad de energía ρ y presión p es conocido como el tensor de energía-momento del fluido ideal [51]. El fluido ideal es caracterizado por ser un sistema físico con ausencia de colisiones por lo que este no presenta gradientes de temperatura. Para construir este tensor se define el siguiente *ansatz*:

$$T^{\mu\nu} = A(x)u^\mu u^\nu + B(x)g^{\mu\nu}, \quad (2.38)$$

donde $A(x)$ y $B(x)$ son dos funciones del espacio-tiempo. Usando un sistema de coordenadas Minskowskiano (este sistema es aquel que cumple con $\eta_{\mu\nu} = e_{\mu}^{\alpha}e_{\nu}^{\beta}g_{\alpha\beta}$ donde e_{ν}^{β} es conocido como tetradra [50]) se tiene:

$$e_{\mu}^{\alpha}e_{\nu}^{\beta}T^{\mu\nu} \equiv T_M^{\alpha\beta} = A(x)u_M^{\alpha}u_M^{\beta} + B(x)\eta^{\alpha\beta}, \quad (2.39)$$

donde el sufijo M es para denotar el sistema Minskowskiano. En este sistema elegimos un observador que se mueve comóvil al fluido $u^{\alpha} = (c, 0)$. Si la componente 00 corresponde a la densidad de energía y la componente ii a la presión, se cumple:

$$\rho = A(x) - B(x), \quad (2.40)$$

$$p = B(x), \quad (2.41)$$

entonces el tensor de energía momento para un fluido ideal viene dado por:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu}, \quad (2.42)$$

luego las ecuaciones de campo de Einstein en presencia de materia dada por un fluido ideal vienen dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G [(\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}]. \quad (2.43)$$

Dado que el tensor $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ es covariantemente constante [51], el tensor de energía-momento satisface:

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}) = \partial_{\mu}T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}\partial_{\mu}\ln\sqrt{-g} = 0, \quad (2.44)$$

esta entrega un set de ecuaciones diferenciales parciales, las cuales permiten determinar la dinámica de la densidad de energía y presión dependiendo de la geometría del espacio tiempo.

Chapter 3

Cosmología

La cosmología es la ciencia que estudia la evolución del Universo y de sus constituyentes. La teoría de la gran explosión es un modelo cosmológico del Universo observable, el cual describe como el Universo se ha expandido desde un estado inicial de alta densidad y temperatura hasta los tiempos actuales. Este modelo ofrece una gran cantidad de fenómenos observables, tales como la abundancia de elementos ligeros, CMB, la estructura a gran escala y la ley de Hubble, entre otros. La cosmología estándar asume como principios que el Universo es homogéneo e isotrópico a grandes escalas ($\gtrsim 100$ Mpc).

El Universo temprano (a una temperatura de unos pocos MeV), consistía en un mar de partículas relativistas distribuidas homogéneamente. Producto del enfriamiento del Universo, las partículas de materia relativista pasan a un régimen no relativista produciendo un desacople entre la radiación y la materia. El desacople entre materia y radiación permite que los haces de luz viajen por el Universo de manera libre hasta nuestros detectores, dándonos información muy valiosa acerca de las fluctuaciones primordiales del CMB, las cuales crecen junto a la expansión del Universo y forman la estructura a gran escala. Actualmente el Universo se encuentra en una transición de una etapa dominada por los efectos gravitacionales a una etapa dominada por la energía del vacío (energía oscura), la cual es la mejor candidata para explicar la expansión acelerada del Universo.

3.1 Espacio tiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

El comportamiento del Universo es modelado a través de su correspondiente tensor métrico $g = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. De los postulados cosmológicos se determinan los grados de libertad de la métrica:

- El postulado de Weyl consiste en que todos los observadores del Universo,

pueden medir eventos en el espacio-tiempo, usando un mismo tiempo. Este es conocido como el tiempo cósmico. Matemáticamente, esto puede ser traducido como $g_{00} = -1$.

- La isotropía del Universo asegura que el Universo no posee una dirección privilegiada, por lo que se puede considerar que las componentes g_{0i} con $i = 1, 2, 3$ son nulas.
- La homogeneidad del Universo asegura que cualquier dinámica que posea el Universo, a de ser una función dependiente únicamente del tiempo.

El espacio-tiempo que satisface estos requerimientos posee el siguiente *ansatz*:

$$g = -dt^2 + a(t)^2 dl^2, \quad (3.1)$$

aquí $a(t)$ es conocido como el factor de escala, el cual condensara toda la dinámica del Universo y dl es la separación espacial entre dos eventos en una misma superficie temporal $t = cte$. Para encontrar la forma explicita de dl supongamos que tenemos un espacio Euclidiano 4-dimensional y una superficie esférica 3-dimensional embebida en éste:

$$dl^2 = dr^2 + dw^2, \quad r^2 + w^2 = R^2, \quad (3.2)$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y R es el radio de la hiperesfera 4-dimensional. Este elemento de linea es invariante bajo rotaciones 4-dimensionales. Existe otra posibilidad, en un espacio Pseudo-Euclidiano, una superficie esférica 3D embebida en un espacio 4D:

$$dl^2 = dr^2 - dw^2, \quad r^2 - w^2 = R^2. \quad (3.3)$$

Este elemento de linea es invariante bajo pseudo rotaciones en un espacio 4-dimensional [52]. Entonces es posible condensar estos dos resultados dentro del siguiente elemento de linea y su respectivo embedimiento:

$$dl^2 = dr^2 \pm dw^2, \quad r^2 \pm w^2 = R^2, \quad (3.4)$$

diferenciando el embedimiento:

$$dw = \mp \frac{rdr}{w} = \mp \frac{rdr}{\sqrt{R^2 \pm r^2}}, \quad (3.5)$$

reemplazando este resultado en el elemento de linea se tiene:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \frac{r^2 dr^2}{R^2 \pm r^2}, \quad (3.6)$$

realizando el cambio de coordenadas cartesianas (x, y, z) a coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) mediante la relación usual:

$$\begin{aligned} z &= r \cos \theta, \\ x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \end{aligned} \quad (3.7)$$

el elemento de línea toma la siguiente forma:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.8)$$

La constante K representa la curvatura del Universo $K = \mp 1$. Finalmente el espacio-tiempo del Universo en expansión es:

$$g = dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right). \quad (3.9)$$

Esta es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

3.2 Dinámica del Universo

Al introducir la métrica de FLRW en las ecuaciones de campo de Einstein (2.34) con un contenido de materia modelado como un fluido ideal (2.42) cuyas componentes no nulas son:

$$T_{00} = \rho, \quad T_{i0} = 0, \quad T_{ij} = a^2 \delta_{ij} p, \quad (3.10)$$

vienen dadas por el siguiente set de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\dot{a}^2 + K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (3.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{p}{3} \right), \quad (3.12)$$

Estas ecuaciones son conocidas como ecuaciones de Friedmann y relacionan la dinámica del Universo con el contenido de materia y energía que este posee.

3.3 Aceleración del Universo

El astrónomo Edwin Hubble en 1929 observando el brillo aparente 24 nebulosas extra galácticas encontró una relación lineal entre la distancia y la velocidad. Esta relación es conocida como la ley de Hubble [6]. Esto llevo a descartar la idea de un Universo

estático propuesto por Einstein [53]. En 1998 dos grupos de astrónomos de forma independiente determinaron que el universo se encuentra actualmente en una fase de expansión acelerada producto de lo que actualmente se denomina energía oscura [10, 11]. Si a_0 y $a(t)$ son el factor de escala en t_0 y $t < t_0$ respectivamente, al expandir la razón a/a_0 en serie de Taylor, en torno a t_0 , se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{a}{a_0} &= 1 + \frac{\dot{a}_0}{a_0}(t - t_0) + \frac{\ddot{a}_0}{a_0} \frac{1}{2}(t - t_0)^2 + \dots \\ &= 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}H_0^2 q_0(t - t_0)^2 + \dots\end{aligned}\quad (3.13)$$

El término de primer orden corresponde a la ley de Hubble $H_0(t - t_0) = H_0 d$. Con d la distancia que recorre la luz y H_0 la constante de Hubble definida como:

$$H_0 \equiv \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0} . \quad (3.14)$$

El término de segundo orden es conocido como el parámetro de desaceleración actual y es una medición adimensional de la aceleración del Universo. Esta cantidad está definida como:

$$q_0 \equiv \left. -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \right|_{t=t_0} . \quad (3.15)$$

Combinando ambas definiciones es posible expresar el parámetro de desaceleración actual en función de la constante de Hubble como:

$$q_0 = -1 - \left. \frac{\dot{H}}{H^2} \right|_{t=t_0} \quad (3.16)$$

A partir de estas definiciones, es posible extender estas cantidades para cualquier tiempo. Estas son llamadas función de Hubble $H(t)$ y función de desaceleración $q(t)$. Estas cantidades se relacionan con el contenido de materia y energía a través de las ecuaciones de Friedmann (3.11)-(3.12):

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (3.17)$$

$$q = -\frac{4\pi G}{3H^2} \left(\rho + \frac{p}{3} \right), \quad (3.18)$$

La primera ecuación es una generalización de la ley de Hubble mientras que la segunda ecuación entrega un criterio para determinar si el Universo se expande aceleradamente $q < 0$ o bien de manera desacelerada $q > 0$.

3.4 Contenido material del Universo

En esta sección se muestran distintos tipos de fluidos ideales que pueden ser ocupados para modelar el contenido material y energía del Universo. Dado que el fluido ideal no posee gradientes de temperatura, su entropía total se mantiene constante en el tiempo por lo que de la primera ley de la termodinámica se tiene que $dU = -pdV$ donde V es el volumen y $U = \rho V$ es la energía total. En términos del factor de escala se tiene que el volumen crece como $V = a(t)^3 V_0$, entonces la primera ley de la termodinámica puede reescribirse como:

$$d(a^3 \rho) + p da^3 = 0. \quad (3.19)$$

Diferenciando esta ecuación con respecto al tiempo se obtiene la siguiente ecuación de conservación:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (3.20)$$

se consideraran fluidos que satisfacen una ecuación de estado barotropico $p = \omega\rho$, con ω el parámetro de estado del fluido el cual puede en general ser una función del tiempo.

3.4.1 Materia

En el contexto de la cosmología existen dos tipos de materias: Materia bariónica y materia oscura. La materia bariónica es toda aquella formada por bariones, se detecta por su interacción con la luz y comprende aproximadamente un 4.7% del contenido total del Universo [52]. La materia oscura es un tipo de materia que no interacciona con la luz pero posee una alta influencia gravitacional sobre la materia bariónica. Aún es un gran misterio el origen de la materia oscura y representa uno de los desafíos mas grandes en la física moderna. Actualmente comprende un 25% del contenido total del Universo [52]. Sea p^μ el momento de una partícula cosmológica de masa M , ha partir de la relación $p^\mu p^\nu g_{\mu\nu} = -1$ se puede deducir la energía relativista para la partícula cosmológica:

$$E = \sqrt{M^2 + \left(\frac{p_0}{a}\right)^2}, \quad (3.21)$$

donde p_0 es su momento actual. La densidad de energía por unidad de volumen viene dada por:

$$\rho_M = \frac{E}{V} = \frac{1}{a^3} \sqrt{\rho_{0M}^2 + \left(\frac{\rho_{0p}}{a}\right)^2}, \quad (3.22)$$

donde ρ_{0M} es la densidad actual de materia y ρ_{0p} es la densidad actual de momento. En el limite relativista, la materia se comporta como $\rho_M \sim 1/a^4$ mientras que en el

régimen no relativista $\rho_M \sim 1/a^3$. La materia bariónica se encontraba en una fase relativista $\sim 1/a^4$ antes de que esta se desacoplara de la radiación. La transición entre un Universo dominado por la radiación a uno dominado por la materia, tiene como efecto, que la densidad de materia a gran escala se comporte como $\sim 1/a^3$. En el caso de la materia oscura, esta es modelada generalmente como materia no relativista, esto supone que las partículas que lo componen (si es que existiesen) se encuentran en una fase no relativista y sin interacción (materia oscura fría). Es sabido que esta elección ad hoc permite explicar los picos de las oscilaciones acústicas de bariones [54]. La interpretación estándar de la materia oscura fría, es que cuando se producen las oscilaciones acústicas en el plasma de barión-fotón, la materia cae en los pozos gravitacionales producidos por la materia oscura fría.

3.4.2 Radiación

En el rango de longitudes de ondas del orden de milímetros a centímetros, el espacio está inmerso en un mar de radiación electromagnética dominado por una componente homogénea e isotrópica conocida fondo cósmico de microondas CMB. La homogeneidad e isotropía sugieren que el CMB es uniformemente distribuido a lo largo de todo el espacio y su espectro observado es muy cercano a la distribución del cuerpo negro a una temperatura dada por [55]:

$$T_{0\gamma} = 2.736 \pm 0.017 \text{ K.} \quad (3.23)$$

La interpretación estándar del CMB, es que esta radiación proviene de los inicios del Universo, cuando se encontraba muy denso y caliente y debido a su expansión se vuelve cada vez menos denso y mas frío hasta llegar a la temperatura actual. Si p^μ es el momento descrito por la luz, a partir de la relación $p^\mu p^\nu g_{\mu\nu} = 0$, la energía producto de la radiación viene dada por:

$$E_\gamma = \frac{p_{0\gamma}}{a}, \quad (3.24)$$

donde $p_{0\gamma}$ es el momento actual de la radiación. La energía por unidad de volumen producto de la radiación de fotones es:

$$\rho_\gamma = \frac{E_\gamma}{V} = \frac{\rho_\gamma}{a^4}, \quad (3.25)$$

con ρ_γ la radiación de fotones actual del Universo. La radiación tiene el mismo valor del parámetro de estado para la materia relativista. Por otro lado de la ley de Stefan Boltzmann se sabe que $\rho_\gamma \propto T^4$. Introduciendo esta densidad en la ecuación de conservación (3.20) se cumple lo siguiente:

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.26)$$

entonces la temperatura del *CMB* sigue la siguiente ley de enfriamiento:

$$T = \frac{2.736}{a(t)} \text{ K.} \quad (3.27)$$

Pese a que el sistema posee temperatura variable, esta ley de enfriamiento preserva el equilibrio termodinámico [52], por otro lado, la contribución de radiación producto de los neutrinos sigue la misma ley de enfriamiento que en el caso de los fotones. La radiación total de la componente homogénea e isotrópica del *CMB* producto de los fotones y de los N_n tipos de especie de neutrinos es [52]:

$$\rho_R \propto T^4 \left[1 + \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} N_n \right]. \quad (3.28)$$

3.4.3 Constante cosmológica

Antes de los descubrimientos de Hubble, existía un debate entre la comunidad científica acerca de la dinámica actual de nuestro Universo. En el caso particular de un Universo estático y dominado principalmente por materia no relativista, el factor de escala es constante $a(t) = a_0$. Considerando las ecuaciones de Friedmann (3.11)-(3.12) bajo estas circunstancias se cumple $\rho_M = 0$. Esto condujo a Einstein a introducir en 1917 la constante cosmológica Λ como una modificación de sus ecuaciones de campo [53]. Las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica en presencia de materia vienen dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \rho_M u^\mu u^\nu, \quad (3.29)$$

donde Λ es conocida como la constante cosmológica. Entonces en un Universo estático la densidad de materia actual según Einstein viene dada por:

$$\rho_{0M} = \frac{\Lambda}{4\pi G}. \quad (3.30)$$

De Sitter en el mismo año que Einstein introdujo la constante cosmológica, estudió la posibilidad de contrastar observacionalmente este modelo. Él consideró la posibilidad de estimar la densidad de materia ρ_{0M} en una nebulosa espiral, estimaciones que son cerca de cuatro ordenes de magnitud mas grande de lo que hoy en día es estimado [56]. Esto sumado a el descubrimiento del *redshift* de nebulosas extra galácticas llevo a descartar la constante cosmológica y el Universo estático. Aun así la idea de la constante cosmológica no fue del todo descartada, De Sitter propuso una solución alternativa a la propuesta por Einstein en la cual el universo era dominado por constante cosmológica. En este modelo la ecuaciones de Friedmann (3.11)-(3.12) sin curvatura $K = 0$, tienen como solución:

$$a(t) \propto \exp \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right), \quad (3.31)$$

y su función de Hubble es $H = \sqrt{\Lambda/3}$. actualmente la constante cosmológica es considerada ser la energía del vacío y es la mejor candidata para explicar la expansión acelerada del Universo y comprende aproximadamente un 70% del contenido total del Universo [56].

3.5 Distancias en cosmología

Producto de la expansión del Universo, la luz que viaja desde fuentes lejanas sufre un *redshift* en sus frecuencia (o simplemente *redshift*) de origen cosmológico. Es gracias a este *redshift*, que es posible determinar cuestiones muy fundamentales del Universo. El *redshift* cosmológico es una medida de cuanto disminuye la energía (o bien frecuencia) de la luz producto de la expansión del Universo y matemáticamente puede ser definida como:

$$z \equiv \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \quad (3.32)$$

donde ω es la frecuencia en un instante dado y ω_0 es la frecuencia con respecto a los tiempos de medición (tiempo actual). Usando la energía de la luz en un Universo de FLRW (3.24) se obtiene:

$$a(t) = \frac{1}{1+z} \quad (3.33)$$

Esta relación es fundamental debido a que permite relacionar las mediciones experimentales con el Universo de FLRW. De esta forma es posible relacionar matemáticamente el tiempo con el *redshift* como:

$$dt = \frac{d \ln(1+z)}{H}. \quad (3.34)$$

En esta sección se muestran distintas distancias en función del *redshift* que pueden ser deducidas a partir de un espacio tiempo de FLRW.

3.5.1 Distancia horizonte cosmológico

A partir del *redshift* y de la definición de la función de Hubble en función del *redshift* se tiene que la métrica de FLRW puede ser reescrita como:

$$ds^2 = \frac{1}{(1+z)^2} \left(-\frac{dz^2}{H^2} + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (3.35)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2$ es el la métrica de una esfera en 2 dimensiones. Para haces de luz que siguen trayectorias radiales $ds^2 = 0$, se cumple:

$$d_H = \int_0^z \frac{dz}{H}, \quad (3.36)$$

donde d_H es la distancia del horizonte cosmológico, el cual es interpretado como la distancia que recorre la luz desde su fuente de emisión hasta nuestros detectores. De esta expresión puede notarse que la distancia depende del contenido de materia y energía del Universo por medio de la ecuación (3.17), por lo que determinar el contenido de energía y materia del Universo permite estimar distancia entre distintos sucesos en el Universo.

3.5.2 Distancia de luminosidad y módulo de distancia

La luminosidad absoluta L se define como la energía emitida por una fuente por unidad de tiempo, la luminosidad aparente ℓ se define como la energía recibida por una fuente luminosa por unidad de tiempo por centímetro cuadrado. A partir de un análisis dimensional, es posible determinar que estas cantidades se relacionan como $\ell = L/4\pi d_L^2$ donde d_L^2 es la distancia de luminosidad, la cual en el contexto de la cosmología esta definida como:

$$d_L \equiv (1+z) \int_0^z \frac{dz}{H}. \quad (3.37)$$

Es una convención usual en astronomía expresar L y ℓ en función de la magnitud aparente m_B y la magnitud absoluta M_B [52] como:

$$\ell = 10^{-2m_B/5} \times 2.52 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}, \quad (3.38)$$

$$L = 10^{-2M_B/5} \times 3.02 \times 10^{35} \text{ erg s}^{-1}, \quad (3.39)$$

introduciendo estas expresiones en la ley $\ell = L/4\pi d_L^2$ se puede deducir la siguiente expresión:

$$d_L = 10^{5+(m_B-M_B)/5} \text{ Mpc}, \quad (3.40)$$

a partir de esta expresión se define el módulo de distancia como:

$$\mu \equiv m_B - M_B = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25. \quad (3.41)$$

3.5.3 Distancia angular

La distancia angular describe la relación entre el tamaño angular observado en el cielo de un objeto de algún tamaño dado. En una geometría Euclidiana la relación entre el tamaño del objeto y la distancia es dada por la ecuación:

$$\tan \theta = \frac{s}{r}, \quad (3.42)$$

donde s es el tamaño físico del objeto, r es la distancia y θ es el tamaño angular del objeto. En general los objetos observados en el cielo son muy lejanos, por lo tanto

$\tan \theta \sim \theta$ entonces $\theta = s/r$. En el contexto de la cosmología el tamaño angular de un objeto puede ser expresado como:

$$\theta = \frac{s}{d_A} = \frac{(1+z)s}{\int \frac{dz}{H}}, \quad (3.43)$$

donde la distancia angular d_A se define como [52]:

$$d_A \equiv \frac{1}{(1+z)} \int \frac{dz}{H}. \quad (3.44)$$

3.5.4 Distancia horizonte de sonido

A temperaturas del orden de los $T \sim \text{eV}$, los fotones permanecen débilmente acoplados a los electrones por medio del *scattering* de Compton y electrones con protones vía *scattering* de Coulomb [52]. Es sabido que en el plasma barión-fotón se producen fluctuaciones que crecen junto con el Universo produciendo sobre-densidades de materia que a su vez producen campos gravitacionales. Entonces en el medio se encuentra un constante tira y afloja entre el campo electromagnético (el cual tiende a dispersar átomos de hidrógeno ionizado) y el campo gravitacional (el cual tiende a aglutinar la materia). Este efecto produce ondas de sonido que se propagan por el medio a una velocidad dada por [57]:

$$c_S = \frac{1}{\sqrt{3(1+R)}}, \quad \text{donde } R = \frac{3\rho_B}{4\rho_\gamma}, \quad (3.45)$$

a partir de esta cantidad es posible construir una distancia análoga al horizonte cosmológico llamada distancia del horizonte de sonido:

$$d_S = \frac{1}{H_0} \int \frac{c_S(z) dz}{H}, \quad (3.46)$$

esta es la distancia que recorre las ondas de sonido, las cuales dejan de producirse en el momento que la materia se vuelve transparente a la radiación (un desacople total entre bariones y fotones).

3.5.5 Escala de dilatación

La escala de dilatación se construye como la raíz cubica del producto entre el radio de Hubble y el cuadrado de la distancia del horizonte cosmológico [58, 59]:

$$d_V = \left(\frac{d_H^2}{H} \right)^{1/3}. \quad (3.47)$$

En [58, 59] los autores tienen mencionado que esta distancia es ocupada para medir los efectos de las fluctuaciones primordiales en el CMB en los mapas de distribución de galaxias.

3.6 El modelo Λ CDM

El modelo estándar usado para explicar las distintas fases del Universo a lo largo de su historia es el Modelo Cosmológico Estándar (MCE) o bien el modelo Λ CDM. Este modelo consiste en un contenido de materia-energía dado por materia bariónica, materia oscura fría, radiación y energía oscura modelada como constante cosmológica. Este es, hasta ahora el mejor modelo que nos permite responder a cuestiones fundamentales de nuestro Universo y que a su vez sea simple en el sentido de la cantidad de parámetros que este necesita. La ecuación de Friedmann (3.11) para este modelo es:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho_\Lambda + \frac{\rho_{0M}}{a^3} + \frac{\rho_{0R}}{a^4} \right) \quad (3.48)$$

donde $\rho_{0M} = \rho_{0B} + \rho_{0CDM}$ es la densidad actual de materia bariónica más materia oscura fría, ρ_{0R} es la densidad de energía actual de radiación y $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$ es la densidad de energía del vacío (en términos cosmológicos la densidad de energía oscura). En este modelo se excluye el término de curvatura debido a la evidencia a favor de un Universo con $K = 0$ [1, 60]. La ecuación de Friedmann es más conveniente escribirla de la siguiente manera:

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{vac} + \frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_R}{a^4} \right], \quad (3.49)$$

Donde se han definido los parámetros cosmológicos adimensionados Ω como:

$$\Omega_M \equiv \frac{\rho_{0M}}{\rho_{crit,0}}, \quad \Omega_R \equiv \frac{\rho_{0R}}{\rho_{crit,0}}, \quad \Omega_{vac} \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad (3.50)$$

y $\rho_{crit,0} = 3H_0^2/8\pi G$ es la densidad crítica actual y esta se interpreta como la densidad de energía actual del sistema. Esta cantidad puede ser extendida para cualquier tiempo:

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (3.51)$$

Evaluando la ecuación de Friedmann en tiempos actuales $a(t_0) = 1$ se cumple la siguiente ecuación de balance entre los constituyentes del Universo:

$$1 = \Omega_{vac} + \Omega_M + \Omega_R. \quad (3.52)$$

Esta expresión es muy útil, debido que refleja la contribución de cada componente del Universo en la actualidad sin necesidad de saber el valor de la constante de Hubble. La función de desaceleración (3.18) de este modelo es:

$$q = \left(\frac{H_0}{H} \right)^2 \left[\frac{\Omega_R}{a^4} + \frac{\Omega_M}{2a^3} - \Omega_\Lambda \right]. \quad (3.53)$$

En la actualidad, se sabe que $\Omega_R \sim 10^{-5}$, $\Omega_M \sim 0.3$ y $\Omega_{vac} \sim 0.7$ [1], entonces la función de desaceleración actual es $q_0 \sim -0.55$, por lo tanto, el modelo Λ CDM predice que actualmente nos encontramos en una fase de expansión acelerada. Es posible determinar el *redshift* en el cual el Universo para de estar en una fase de expansión desacelerada a acelerada al imponer la condición $q = 0$. Por lo tanto el *redshift* para esta transición de fase (despreciando la contribución de radiación) es dado por:

$$z_{tf} = \left(\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_M} \right)^{1/3} - 1 \sim 0.671. \quad (3.54)$$

Este *redshift* es mayor que el *redshift* de la igualdad entre materia y energía oscura $z_{eq} = (\Omega_\Lambda/\Omega_M)^{1/3} - 1 \sim 0.409$, por lo tanto la transición de fase ocurre antes que la la energía oscura domine en el Universo.

3.6.1 Problemas del modelo Λ CDM

El Λ CDM permite consistentemente explicar la evolución de nuestro Universo, pese a esto presenta algunos problemas tanto conceptuales como experimentales los cuales motivan a explorar nuevos modelos. Estos problemas son:

- El problema de la constante cosmológica: A pesar de que la constante cosmológica es el mejor candidato para describir la energía oscura, su naturaleza permanece desconocida. Asumiendo que la energía oscura viene de la densidad de energía del vacío cuántico, es obtenido que la densidad de energía es aproximadamente $\rho_{vac} \sim 10^{71} \text{GeV}^4$, pero de las observaciones cosmológicas se tiene que la densidad de energía asociada a la constante cosmológica es $\rho_{vac} \sim 10^{-47} \text{GeV}^4$ [14]. Esta discrepancia es conocida como la pero predicción teórica en la historia de la física.
- El problema de la coincidencia: Las observaciones experimentales tienen indicado que nosotros vivimos en una época muy particular en la historia del Universo, cuando Ω_{CDM} y Ω_Λ son del mismo orden de magnitud. Para esto se define la función de coincidencia como:

$$r \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{CDM}}. \quad (3.55)$$

la cual actualmente tiene un valor de $r_0 \sim 14/5$ Esto da lugar a la siguiente pregunta ¿ Por que la densidad de energía de la materia oscura es del mismo orden de magnitud que la densidad de energía producto de la constante cosmológica? [15].

- La tensión en el valor de la constante de Hubble: Las recientes mediciones del *CMB* hechas por el satélite Planck, confirman las predicciones hechas por el

modelo Λ CDM, tales como la Gaussianidad de las perturbaciones primordiales del *CMB* [61], las anisotropías del *CMB*, efectos de lentes gravitacionales, etc [1]. Sin embargo, mediciones locales del parámetro de Hubble [2] se encuentran en desacuerdo con el valor estimado por el satélite Planck. Este hecho genera una "tensión" en los distintos set de datos. Los valores del parámetro de Hubble reportado por ambos equipos,

$$H_0 = (0.7403 \pm 0.142) \frac{100 \text{ km}}{\text{Mpc s}} \text{ (Riess } et al. \text{ 2019[2])} \quad (3.56)$$

$$H_0 = (0.6737 \pm 0.054) \frac{100 \text{ km}}{\text{Mpc s}} \text{ (Satélite Planck 2018 [1]).} \quad (3.57)$$

Estos resultados muestran una diferencia correspondiente a 4.4σ ($\sim 99.99\%$).

3.7 Más allá del Modelo Cosmológico Estándar

3.7.1 Interacción cosmológica

A partir del problema de la constante cosmológica, del problema de la coincidencia y de la tensión del parámetro de Hubble es que se motivan a estudiar modelos de interacción. En vista de la desconocida naturaleza de la materia oscura y de la energía oscura, ninguna simetría conocida en la Naturaleza impide un acoplamiento mínimo entre estas componentes [24, 25, 26, 27, 28]. Un posible modelo fenomenológico que describe una posible interacción entre materia oscura y energía oscura viene dado por la siguientes ecuaciones de conservación :

$$\nabla_\mu T_{CDM}^{\mu\nu} = -Q^\mu, \quad \nabla_\mu T_\Lambda^{\mu\nu} = Q^\mu, \quad (3.58)$$

donde $T_{CDM}^{\mu\nu}$ y $T_\Lambda^{\mu\nu}$ son los tensores de energía-momento de la materia oscura y energía oscura correspondientemente y Q^μ son las componentes del vector interacción. Esta elección de interacción esta construida de tal forma que la suma de estos tensores sea covariantemente conservada. Si la interacción no posee transferencia de energía producto del momento de sus constituyentes, se tiene $Q^\mu = (Q, 0) = u^\mu Q$, donde Q es una función del tiempo. Entonces las ecuaciones de conservación pueden ser expresadas como:

$$\dot{\rho}_{CDM} + 3H\rho_{CDM} = -Q, \quad \dot{\rho}_\Lambda + 3H(1 + \omega_\Lambda)\rho_\Lambda = Q, \quad (3.59)$$

donde ω_Λ es la función de estado para la energía oscura. Bajo una perturbación escalar de la métrica de FLRW, una interacción entre el materia oscura y energía oscura puede llevar a violar el principio de equivalencia débil. Al elegir una interacción del tipo $Q^\mu = Qu^\mu$ el principio de equivalencia débil es respetado [62]. Los modelos de interacción pueden aliviar el problema de coincidencia [25] en el sentido

de que el particular valor actual de $r_0 \sim 14/5$ no es una coincidencia, sino mas bien producto de una interacción cosmológica en la cual, la función $r = \rho_{CDM}/\rho_\Lambda$ en $a \sim \infty$ converge a un valor distinto de cero. En el modelo Λ CDM la función de coincidencia satisface una ecuación diferencial del tipo $\dot{r} = -3Hr$, de tal forma que en $t \sim \infty$ se cumple $r \sim 0$. Por otro lado usando la definición (3.55) y combinando las ecuaciones (3.59) se obtiene la siguiente ecuación diferencial para r [28]:

$$\frac{dr}{d \ln a} + 3r \left[\frac{Q}{3H\rho_{crit}} \frac{(1+r)^2}{r} - \omega_\Lambda \right] = 0. \quad (3.60)$$

Donde ρ_{crit} es la densidad critica del Universo para cualquier tiempo definida como $\rho_{crit} = 3H^2/8\pi G$. La condición para que r tenga un atractor distinto de cero en $a \sim \infty$ esta dada por:

$$\left(\omega_\Lambda + \frac{Q}{3H\rho_{crit}} \frac{(1+r)^2}{r} \right) \Big|_{z=-1} = 0 \quad (3.61)$$

donde $z = -1$ es equivalente a $a \sim \infty$ (ver definición (3.33)). Es en este sentido que el problema de la coincidencia es aliviado por un modelo de interacción entre el sector oscuro, sin embargo, para un modelo sin interacción, esta condición es satisfecha solo si la función de estado asintoticamente toma el valor $\omega_\Lambda(z = -1) \sim 0$, es decir, la energía oscura se comporta como materia. Por otra parte distintos autores consideraron la posibilidad de que la interacción entre estas componentes solucione la tensión en el parámetro de Hubble [30, 31, 32].

3.7.2 Principio Holográfico

El principio holográfico asegura que los grados de libertad no necesariamente se encuentran distribuidos en regiones encerradas por volúmenes, si no mas bien en las superficies que encierran estos volúmenes [20]. Este principio está basado en la entropía de agujeros negros [16, 17, 18, 19]. La estimación de la energía del vacío (en unidades naturales) de un campo escalar para una teoría cuántica de campos efectiva con un corte en el ultravioleta dado por la masa de Planck M_p es dada por [14]:

$$\rho_\Lambda = \int_0^{M_p} \frac{4\pi}{2(2\pi)^3} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk \sim \frac{\ell_p^{-4}}{16\pi^2} \sim 10^{71} \text{ GeV}^4. \quad (3.62)$$

Este resultado posee una diferencia de 10^{118} ordenes de magnitud de diferencia con respecto a la densidad de energía producto de la constante cosmológica [14]. Para mostrar una alternativa a este método se propone un corte en el infrarrojo producto del límite de formación de agujeros negros. La energía total de un sistema de tamaño L no puede exceder la masa de un agujero negro del mismo tamaño $L^3 \rho_\Lambda \leq LM_p^2$

[22]. Luego el corte en el infrarrojo que satura la desigualdad, da lugar a una energía oscura de origen holográfico:

$$\rho_\Lambda \propto \frac{M_p^2}{L^2}. \quad (3.63)$$

El comportamiento de esta densidad de energía esta caracterizado por la función de estado, la cual para una interacción general entre el sector oscuro (ver sección 3.7.1) viene dada por:

$$\omega_\Lambda = -1 - \frac{1}{\rho_\Lambda} \frac{d\rho_\Lambda}{d \ln a} + \frac{Q}{3H\rho_\Lambda}, \quad (3.64)$$

donde $H(t)$ es la función de Hubble (ver sección 3.3) y se ha ocupado el cambio de variables $dt = d \ln a / H$. A continuación se verán distintos tipos de energía oscura holográfica a partir de distintas elecciones del corte en el infrarrojo.

3.7.3 Modelo tipo Ricci

Este tipo de energía fue propuesto por primera vez por [3] y esta basado en el escalar de Ricci $R = -6(\dot{H} + 2H^2)$. El corte en el infrarrojo y su respectiva densidad de energía vienen dados por:

$$L^2 = \frac{1}{6(\dot{H} + 2H^2)}; \quad \rho_\Lambda = \frac{3\alpha}{8\pi G}(\dot{H} + 2H^2), \quad (3.65)$$

donde α es un parámetro que permite la igualdad en la ecuación (3.63). La ecuación de Friedmann toma la siguiente forma:

$$E^2 = \frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_R}{a^4} + \alpha \left(\frac{1}{H_0} \dot{E} + 2E^2 \right), \quad (3.66)$$

donde $E = H/H_0$ y los parámetros Ω se definen de manera analoga a lo hecho por el modelo Λ CDM (ver sección 3.48). Resolviendo esta ecuación diferencial se obtiene como solución:

$$E^2 = \frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_R}{a^4} + \frac{\alpha}{2-\alpha} \frac{\Omega_M}{a^3} + f_0 a^{-2(2-\frac{1}{\alpha})}, \quad (3.67)$$

donde f_0 es una constante de integración. Por simple inspección es posible identificar a la densidad de energía oscura como:

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{crit,0}} = \frac{\alpha}{2-\alpha} \frac{\Omega_M}{a^3} + f_0 a^{-2(2-\frac{1}{\alpha})}, \quad (3.68)$$

donde $\rho_{crit,0}$ es la densidad critica actual (ver sección 3.48). La constante de integración f_0 es encontrada a partir de la ecuación de Friedmann evaluada en tiempos actuales:

$$f_0 = 1 - \Omega_R + \frac{2}{2 - \alpha} \Omega_M. \quad (3.69)$$

Usando la definición de la función de desaceleración (ver sección 3.3) y de la función de estado sin interacción (3.64) se obtienen los siguientes valores:

$$\omega_\Lambda = -1 + \frac{\frac{\alpha}{2-\alpha} \frac{\Omega_M}{a^3} - \frac{2}{3} \left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) f_0 a^{-2(2-\frac{1}{\alpha})}}{\frac{\alpha}{2-\alpha} \frac{\Omega_{0M}}{a^3} + f_0 a^{-2(2-\frac{1}{\alpha})}} \quad (3.70)$$

$$q = -\frac{\rho_{0,crit}}{2H^2} \left[\frac{\Omega_M}{a^3} + \left(1 + \frac{\omega_\Lambda}{3}\right) \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} \frac{\Omega_{0M}}{a^3} + f_0 a^{-2(2-\frac{1}{\alpha})} \right) \right], \quad (3.71)$$

donde se ha despreciado la contribución producto de la radiación $\Omega_R \sim 10^{-5}$ en la función de desaceleración (la radiación no afecta la dinámica actual del Universo).

3.7.4 Modelo tipo Ricci modificado

Este modelo fue propuesto en [4]. El corte en el infrarrojo viene dado por una combinación lineal de los términos \dot{H} y H^2 . El corte en el infrarrojo y su respectiva densidad de energía vienen dados por:

$$L^2 = \frac{1}{3(\beta\dot{H} + \alpha H^2)}; \quad \rho_\Lambda = \frac{3}{8\pi G}(\beta\dot{H} + \alpha H^2)., \quad (3.72)$$

donde α y β son constantes. Luego la ecuación de Friedmann puede ser expresada como:

$$E^2 = \frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_R}{a^4} + \left(\frac{\beta}{H_0} \dot{E} + \alpha E^2 \right), \quad (3.73)$$

resolviendo esta ecuación diferencial se obtiene como solución:

$$E^2 = \frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_R}{a^4} + \left(\frac{3\beta - 2\alpha}{2\alpha - 3\beta - 2} \right) \frac{\Omega_M}{a^3} + \left(\frac{2\beta - \alpha}{\alpha - 2\beta - 1} \right) \frac{\Omega_R}{a^4} + f_0 a^{-2(\frac{1-\alpha}{\beta})}, \quad (3.74)$$

donde f_0 es una constante de integración. Por simple inspección es posible identificar a la densidad de energía oscura como:

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{crit,0}} = \left(\frac{3\beta - 2\alpha}{2\alpha - 3\beta - 2} \right) \frac{\Omega_M}{a^3} + \left(\frac{2\beta - \alpha}{\alpha - 2\beta - 1} \right) \frac{\Omega_R}{a^4} + f_0 a^{2(\frac{1-\alpha}{\beta})}, \quad (3.75)$$

la constante de integración f_0 es encontrada a partir de la ecuación de Friedmann evaluada en tiempos actuales:

$$f_0 = 1 + \frac{2\Omega_M}{2\alpha - 3\beta_H - 2} + \frac{\Omega_R}{\alpha - 2\beta_H - 1}. \quad (3.76)$$

Este modelo coincide con el modelo tipo Ricci identificando los parámetros $\beta = \alpha/2$. Usando la definición de la función de desaceleración (ver sección (3.3)) y de la función de estado sin interacción (3.64) se obtienen los siguientes valores:

$$\omega_\Lambda = -1 + \frac{\left(\frac{3\beta-2\alpha}{2\alpha-3\beta-2}\right) \frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{3}{4} \left(\frac{2\beta-\alpha}{\alpha-2\beta-1}\right) \frac{\Omega_R}{a^4} - \frac{2}{3} \left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right) f_0 a^{2\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)}}{\left(\frac{3\beta-2\alpha}{2\alpha-3\beta-2}\right) \frac{\Omega_M}{a^3} + \left(\frac{2\beta-\alpha}{\alpha-2\beta-1}\right) \frac{\Omega_R}{a^4} + f_0 a^{2\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)}}, \quad (3.77)$$

$$q = -\frac{\rho_{0,crit}}{2H^2} \left[\frac{\Omega_M}{a^3} + \left(1 + \frac{\omega_\Lambda}{3}\right) \left(\left(\frac{3\beta-2\alpha}{2\alpha-3\beta-2}\right) \frac{\Omega_M}{a^3} + f_0 a^{2\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)} \right) \right] \quad (3.78)$$

donde se ha despreciado la contribución producto de la radiación $\Omega_R \sim 10^{-5}$ en la función de desaceleración (la radiación no afecta la dinámica actual del Universo).

3.7.5 Modelo tipo Ricci modificado con interacción lineal entre el sector oscuro

Una interacción entre las componentes del sector oscuro (energía oscura y materia oscura) de tal forma que la suma de sus respectivos tensores de energía momento sean covariantemente conservado fue introducido en sección 3.59. En este trabajo se tratarán 4 tipos de interacción [63]:

$$Q_1 = 3H\Gamma_a\rho_{CDM}, \quad (3.79)$$

$$Q_2 = 3H\Gamma_b\rho_\Lambda, \quad (3.80)$$

$$Q_3 = 3H\Gamma_a(\rho_{CDM} + \rho_\Lambda), \quad (3.81)$$

$$Q_4 = 3H(\Gamma_a\rho_{CDM} + \Gamma_b\rho_\Lambda), \quad (3.82)$$

donde Γ_a y Γ_b son constantes. Los modelos de interacción entre materia oscura y energía oscura [24, 25, 26, 27, 28] son basados en el hecho de que no existen ninguna simetría conocida en la Naturaleza que prohíba un acoplamiento mínimo entre estas componentes. Definiendo la densidad de energía del sector oscuro $\rho_D \equiv \rho_{CDM} + \rho_\Lambda$ y usando la definición de energía oscura tipo Ricci modificado (3.72) se cumple:

$$\rho_{CDM} = \rho_D - 3(\beta\dot{H} + \alpha H^2). \quad (3.83)$$

Realizando el cambio de variables $dt = dx/3H$ e introduciendo la ecuación de Friedmann $H^2 \sim \rho_B + \rho_R + \rho_D$ en la última expresión se obtiene:

$$\rho_{CDM} = -\frac{3\beta}{2} \frac{d\rho_D}{dx} + (1 - \alpha)\rho_D + (2\beta - \alpha)\rho_R + \left(\frac{3\beta}{2} - \alpha\right) \rho_B. \quad (3.84)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de conservación para la densidad de materia oscura ρ_{CDM} (3.59) y considerando la interacción Q_4 (esta interacción es una generalización de las otras interacciones) se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la densidad del sector oscuro:

$$\frac{d^2 \rho_D}{dx^2} + b_1 \frac{d\rho_D}{dx} + b_2 \rho_D + b_3 \rho_B + b_4 \rho_R = 0, \quad (3.85)$$

las constantes b_1 , b_2 , b_3 y b_4 están definidas como:

$$b_1 = \frac{2(\alpha - 1)}{3\beta} + \Gamma_a - \Gamma_b + 1, \quad (3.86)$$

$$b_2 = \frac{2}{3\beta}(\alpha[\Gamma_a - \Gamma_b + 1] - \Gamma_a - 1), \quad (3.87)$$

$$b_3 = \left(\frac{2\alpha}{3\beta} - 1\right)(\Gamma_a - \Gamma_b), \quad (3.88)$$

$$b_4 = \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 2\right) \left(\Gamma_a - \Gamma_b - \frac{1}{3}\right). \quad (3.89)$$

Al solucionar la ecuación diferencial anterior se obtiene como solución:

$$\frac{\rho_D}{\rho_{crit,0}} = c_B \frac{\Omega_B}{a^3} + c_R \frac{\Omega_R}{a^4} + f_{01} a^{3\ell_1} + f_{02} a^{3\ell_2}, \quad (3.90)$$

f_{01} y f_{02} son constantes de integración obtenidas a partir de la solución homogénea. Las constantes c_B , c_R , ℓ_1 y ℓ_2 se definen como:

$$c_B = \frac{b_3}{b_1 - b_2 - 1}, \quad (3.91)$$

$$c_R = \frac{9b_4}{12b_1 - 9b_2 - 16}, \quad (3.92)$$

$$\ell_1 = -\frac{b_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 - 4b_2}, \quad (3.93)$$

$$\ell_2 = -\frac{b_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 - 4b_2}. \quad (3.94)$$

Usando la solución encontrada para ρ_D , la ecuación de Friedmann toma la siguiente forma:

$$H^2 = H_0^2 \left[(1 + c_B) \frac{\Omega_B}{a^3} + (1 + c_R) \frac{\Omega_R}{a^4} + f_{01} a^{3\ell_1} + f_{02} a^{3\ell_2} \right], \quad (3.95)$$

Para identificar la densidad de energía oscura se introduce la ecuación de Friedmann encontrada en la definición de densidad de energía oscura holográfica tipo Ricci

Modificado (3.72) obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{crit}} &= \left(\alpha - \frac{3\beta}{2} \right) (1 + c_B) \frac{\Omega_B}{a^3} + (\alpha - 2\beta)(1 + c_R) \frac{\Omega_R}{a^4} \\ &+ \left(\frac{3\ell_1\beta}{2} + \alpha \right) f_{01} a^{3\ell_1} + \left(\frac{3\ell_2\beta}{2} + \alpha \right) f_{02} a^{3\ell_2}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

A partir de este resultado y de la definición de densidad de energía del sector oscuro es posible encontrar el valor funcional de la densidad de materia oscura:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{CDM}}{\rho_{crit}} &= \left[c_B - \left(\alpha - \frac{3\beta}{2} \right) (1 + c_B) \right] \frac{\Omega_B}{a^3} + [c_R - (\alpha - 2\beta)(1 + c_R)] \frac{\Omega_R}{a^4} \\ &+ \left(1 - \frac{3\ell_1\beta}{2} - \alpha \right) f_{01} a^{3\ell_1} + \left(1 - \frac{3\ell_2\beta}{2} - \alpha \right) f_{02} a^{3\ell_2}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Para encontrar los valores de las constantes de integración f_{01} y f_{02} primero se obtiene la constante f_{02} al imponer las condiciones de tiempo actual en la ecuación de Friedmann. La constante f_{01} se obtiene al evaluar en tiempo actual la densidad de materia oscura y reemplazar el valor encontrado para f_{01} . A continuación se muestran sus valores:

$$\begin{aligned} f_{01} &= \frac{\{3\beta(\ell_2 + 1)(c_B + 1) - 2\}\Omega_B + \{3\beta(3\ell_2 + 4)(c_R + 1) - 2\}\Omega_R - 2\Omega_{CDM} + 2(1 - \alpha) - 3\beta}{3\beta(\ell_1 - \ell_2)} \\ f_{02} &= 1 - (1 + c_B)\Omega_B - (1 + c_R)\Omega_R - f_{01}. \end{aligned}$$

La función de desaceleración y la función de estado no serán mostrados de forma explícita dada su compleja forma funcional. Sin embargo, es posible expresar el valor de la función de estado con una interacción genérica Q_4 (esta interacción es una generalización del resto de interacciones):

$$\omega_\Lambda = -1 + \Gamma_b + \Gamma_r - \frac{1}{3\rho_\Lambda} \frac{d\rho_\Lambda}{d \ln a}, \quad (3.98)$$

donde r es la función de coincidencia. Por otro lado, evaluando esta expresión asintóticamente en el factor de escala y reemplazando su valor en la condición (3.61) se obtiene la condición necesaria para que el problema de la coincidencia sea aliviado:

$$(\Gamma_a r_\infty + \Gamma_b) \left(\frac{1 + 2r_\infty}{r_\infty} \right) - \frac{1}{3\rho_\Lambda(\infty)} \frac{d\rho_\Lambda}{d \ln a} \Big|_{a=\infty} = 0, \quad (3.99)$$

donde $\rho_\Lambda(\infty)$ es la densidad de energía del vacío evaluada asintóticamente en el factor de escala.

Chapter 4

Metodología: comparación bayesiana de modelos

Históricamente la conexión entre física y la estadística bayesiana siempre ha sido muy fuerte. En el último tiempo los métodos bayesianos han sido implementados en la cosmología motivado por la gran cantidad de datos obtenidos en el último tiempo [5]. A continuación se introducen definiciones básicas de la teoría de probabilidades: Sean $x \in A$ e $y \in B$ variables aleatorias pertenecientes al conjunto de variables aleatorias A y B respectivamente. Se define el promedio del conjunto x como:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{x \in A} x, \quad (4.1)$$

donde N es la cantidad total de variables aleatorias. La medida de qué tan dispersos se encuentran las variables aleatorias $x \in A$ es dada por la desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (4.2)$$

De los axiomas de la probabilidad, se define la probabilidad condicional $P(A|B)$ como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (4.3)$$

Donde $A \cap B$ es la intersección de conjuntos. Por otro lado, se define la probabilidad marginal de A como:

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B) \cup (A \cap B^C)), \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap B^C), \\ &= P(A|B)P(B) + P(A|B^C)P(B^C), \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde B^C es el complemento de B ($B \cap B^C = \emptyset$) y en la segunda línea se usó la definición de probabilidad condicional. Dada la propiedad $A \cap B = B \cap A$, se cumple

$P(A \cap B) = P(B \cap A)$, entonces:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

esta expresión es el teorema de Bayes [5]. Es posible generalizar este resultado para el caso de que el conjunto de variables mutuamente exclusivos $B_i \in B$ con $i = 1, 2, \dots, N$, en este caso la probabilidad marginal se define como la suma sobre todos los eventos mutuamente exclusivos.

4.1 Inferencia bayesiana

La principal motivación para aplicar este formalismo es la estimación de parámetros y la comparación de modelos cosmológicos. La inferencia bayesiana ofrece una estrategia que permite resolver estas cuestiones. Considerando el teorema de Bayes es posible expresar esta estrategia como sigue:

$$p(\theta|d) = \frac{p(d|\theta)p(\theta)}{E(d)}, \quad (4.6)$$

donde θ son los parámetros físicos del modelo que describe los datos d . La cantidad $p(\theta|d)$ representa la incerteza del modelo tomando en cuenta los datos d y es conocida como distribución a posteriori, la cantidad $p(\theta)$ representa la información previa conocida sobre el sistema (un conocimiento acerca de los parámetros de la teoría), esta cantidad es conocida como distribución a prior, la cantidad $p(d|M)$ es la forma en que los datos son distribuidos y representa el cambio en la probabilidad de los parámetros físicos cuando nuevos datos son adquiridos. Esta es llamada función de verosimilitud $\mathcal{L}(\theta) \equiv p(d|\theta)$ y el factor de normalización $E(d)$ es la evidencia, la cual es la probabilidad marginal sobre θ :

$$E(d) = \sum_{\theta} \mathcal{L}(\theta)p(\theta). \quad (4.7)$$

Esta cantidad puede ser omitida a la hora de querer saber el valor de la distribución a posteriori pero es clave para la comparación de modelos como se muestra mas adelante.

4.1.1 Límites de confianza

Una vez obtenido la distribución a posteriori de cada parámetro es posible definir el mejor ajuste como la media de la distribución a posteriori. Un límite de confianza

(LC por sus siglas) se define como una región cerrada en el espacio de parámetros que contenga un porcentaje de la distribución a posteriori en torno a la media (mejor ajuste). Los LC por lo tanto miden qué tan confiable es nuestra estimación (su incerteza) y relaciona ésta con la probabilidad acumulativa para la distribución a posteriori $P(a < \theta_M < b|d)$, donde a y b son dos números. Es usual ocupar la desviación estándar σ como unidad estandarizada (medida de incerteza) cuya probabilidad acumulativa es:

$$100 \times p(\theta_M - \sigma < \theta_M < \theta_M + \sigma) \sim 68\%. \quad (4.8)$$

Es posible generalizar esto para N unidades de σ cuya probabilidad acumulativa es $p(\theta_M - N\sigma < \theta_M < \theta_M + N\sigma)$. El valor de θ como variable estandarizada se define como:

$$Z = \left| \frac{\theta_M - \theta}{\sigma} \right|, \quad (4.9)$$

entonces su respectiva probabilidad acumulativa viene dada por:

$$100 \times p(\theta_M - Z\sigma < \theta_M < \theta_M + Z\sigma). \quad (4.10)$$

Los gráficos de contornos (ver figura 5.10-5.15) representan los LC para el caso de dos variables aleatorias. Estos contornos son definidos de tal forma que la región mas oscura encierra un 68% de los datos y por lo tanto corresponde a 1σ . Cuando la función verosimilitud es definida menos un medio veces la función mínimos cuadrados (ver siguiente sección) los contornos son definidos como $\chi_{min}^2 - \chi^2 = \text{const}$ (para mas detalles [64]).

4.1.2 Función chi-cuadrado χ^2

La forma funcional de la función de verosimilitud refleja la manera en que los datos fueron obtenidos, por ejemplo para un problema de conteo es usual ocupar la distribución de Poisson como función de verosimilitud y así muchos otros ejemplos. Cuando se tiene una muestra de muchos datos, se aplica el teorema del limite central, el cual asegura que en este limite, las distribuciones siempre se comportan como una distribución normal. Es bajo este argumento que se elige una función de verosimilitud como una distribución normal:

$$\mathcal{L}(\theta) = \exp \left[-\frac{1}{2} \chi^2 \right], \quad (4.11)$$

donde χ^2 es la función chi-cuadrado, la cual es definida como:

$$\chi^2 \equiv \sum_{ij} (f_i - f_i(\theta)) C_{ij}^{-1} (f_j - f_j(\theta)), \quad (4.12)$$

f_i representa el valor observacional de alguna cantidad para el i -ésimo dato, $f_i(\theta)$ su predicción teórica y C_{ij}^{-1} son las componentes de la inversa de la matriz de covarianza, cuyas componentes son definidas como:

$$C_{ij} = \langle f_i f_j \rangle - \langle f_i \rangle \langle f_j \rangle \quad (4.13)$$

sus elementos diagonales corresponden al inverso cuadrado de la desviación estándar correspondiente a cada valor observado f_i . Esta matriz mide que tan correlacionadas se encuentran las varianzas entre dos datos [64].

4.2 Comparación bayesiana de modelos

Un modelo puede ser pensando como un candidato a ser el que explica los datos observados, entonces cuando se tiene un conjunto de modelos los cuales compiten entre sí, la comparación bayesiana de modelos proporciona un formalismo para evaluar su relativa probabilidad a la luz de los datos e información a priori disponible. Como es sabido, un modelo con muchos parámetros siempre puede ajustarse bien a algún set de datos, sin embargo, mayor cantidad de datos implica un modelo mas complejo en el sentido de qué tantos parámetros tenga la teoría y qué tan grande es el espacio de parámetros [5]. Esto esta inspirado en el principio de simpleza conocido como navaja de Ockham, el cual asegura que la teoría mas simple compatible con la evidencia existente debería ser preferido. Por lo tanto, la cantidad de parámetros libres y el rango de valores permitidos impuestos por el prior controlan la fuerza del efecto de la navaja de Ockham en la comparación bayesiana de modelos.

4.2.1 Evidencia bayesiana

La evaluación del rendimiento de un modelo a la luz de los datos se basa en la evidencia bayesiana (4.7). La evidencia es la función verosimilitud promediada sobre la distribución a priori. Si consideramos que los modelos M_1 y M_2 , son candidatos a describir los datos observados, entonces para comparar estos modelos se usa la razón entre sus correspondientes distribuciones a posteriori:

$$\frac{p(M_1|d)}{p(M_2|d)} = B_{12} \frac{\mathcal{L}(M_1)}{\mathcal{L}(M_2)}, \quad (4.14)$$

donde se ha considerado que ambos modelos poseen la misma distribución a priori y se ha definido el factor de bayes como:

$$B_{12} = \frac{E_1}{E_2}, \quad (4.15)$$

y E_1 y E_2 son la evidencia para el modelo 1 y 2 respectivamente. Cuando $B_{12} > (<)0$ representa un incremento (disminución) del apoyo en favor del modelo 1 versus el

modelo 2 a la luz de los datos disponibles. La escala de Jeffreys da una medición empírica para la interpretación de la evidencia bayesiana en la comparación de modelos. En este trabajo se usa una versión conservadora de la escala de Jeffreys definida en la referencia [5] (ver tabla 4).

$ \ln B_{ij} $	Interpretación de la evidencia
< 1	Inconclusiva
1	Débil
2.5	Moderada
5	Fuerte

Tabla 4.1: La escala de Jeffreys constituye una medición empírica para la interpretación de la evidencia en la comparación de los modelos M_i versus M_j . La columna izquierda indica qué límite para el logaritmo del factor de Bayes y la columna derecha es la interpretación de la evidencia según el límite correspondiente. Fuente: Extraído de [5]

4.3 Implementación

En general un modelo puede ser paramétrico como no paramétrico. Desde el punto de vista físico, los modelos trabajados son paramétricos y sus parámetros contienen información sobre el sistema. Para encontrar la distribución a posteriori de cada parámetro se usa el teorema de Bayes y se marginaliza sobre todos los parámetros que no son de interés. Sea φ el parámetro de interés y ϕ el resto de parámetros, entonces la distribución a posteriori de φ vendrá dada por:

$$p(\varphi|d) \propto \int \mathcal{L}(\theta, \phi)p(\varphi, \phi)d\phi, \quad (4.16)$$

luego una vez obtenida esta cantidad, es posible realizar un gráfico del posteriori para encontrar los *peak* de la distribución. Lamentablemente existen pocos casos de interés para el cual el procedimiento descrito puede ser llevado a cabo mediante métodos analíticos. Dada esta dificultad es que se emplean métodos numéricos para evaluar la función de verosimilitud y graficar el posteriori. La solución a este problema esta dado por las Cadenas de Markov Monte Carlos (MCMC por sus siglas en ingles). El propósito de los algoritmos de MCMC es construir una secuencia de puntos de manera aleatoria en el espacio de parámetros, cuya densidad sea proporcional a la distribución a posteriori [5]. En este sentido se utilizó el algoritmo de Monte Carlo nested sampling (NS) [65] el cual es conocido por su eficiencia en la computación de la evidencia ya que está diseñado para estimar directamente la evidencia y la distribución a posteriori.

4.4 Cosmología observacional

En Cosmología los datos experimentales juegan un rol clave a la hora de poner a prueba los distintos modelos cosmológicos. En la actualidad se cuenta con una gran cantidad de datos observacionales que juegan roles tanto en las épocas más tempranas del Universo como en épocas más actuales. En este capítulo se introducen los datos de SNe Ia de la compilación Pantheon [42], mediciones de la razón de expansión de Cronómetros Cósmicos (CC por sus siglas) [43], medidas de anisotrópicas de BAO BOSS-DR12 [44] y $L\alpha$ [45] así como medidas isotrópicas 6dFGS [46], MGS [47], eBOSS [48] y de la estimación de la escala del horizonte sonido en la superficie de último *scattering* reportado por Planck 2018 [1].

4.4.1 La expansión acelerada del universo

Para poder determinar distancia a partir de la luminosidad aparente ℓ , es necesario conocer la luminosidad absoluta L de la fuente. Fuentes con igual luminosidad absoluta son denominadas como *standard candles*. Las Supernovas tipo Ia (o bien SNe Ia) son un tipo de *standard candle*. Este tipo de objeto se cree que ocurren cuando una enana blanca en un sistema binario, acreta suficiente materia de su compañero de tal forma que ésta alcanza un límite cercano al límite de Chandrasekhar, la máxima masa posible que puede soportar la presión de degeneración electrónica, cuando esto sucede la enana blanca se vuelve inestable y el aumento en temperatura y densidad permite la conversión de carbono y oxígeno en ^{56}Ni , desencadenando una explosión termo-nuclear que puede ser vista desde cientos de megaparsecs. La explosión de la enana blanca tiene siempre una masa cercana al límite de Chandrasekhar, de tal forma que a partir de una relación masa luminosidad, es posible determinar que la luminosidad de estos objetos varía muy poco, lo cual la hace un *standard candle* ideal [52]. Las SNe Ia son objetos importantes dado que a partir de su luminosidad aparente y absoluta fue descubierto que el universo se encuentra en una fase de expansión acelerada [10, 11]. La última compilación de mediciones de SNe Ia es la llamada compilación *Pantheon* la cual contiene un conjunto de 1048 SNe Ia [42] confirmadas espectroscópicamente para $0.01 < z < 2.3$, compuesto por una combinación del subconjunto de 279 PSI [66] SN Ia $0.03 < z < 0.68$, con adecuadas estimaciones de la distancia de SN Ia de SDSS [67] en el intervalo $0.05 < z < 0.4$, además de SNLS [68, 69, 70] hasta el *redshift* $z < 1$, varias muestras con bajo *redshift* $z < 0.1$ y algunas de alto *redshift* dadas por Hubble *Space Telescope* [71] con *redshift* $0.216 < z < 1.755$. La compilación Pantheon entrega la magnitud aparente $m_B(z)$, su correspondiente *redshift* y su respectiva matriz de covarianza C_{m_B} . Entonces la

función χ^2 correspondiente a estos datos viene dada por:

$$\begin{aligned}\chi_{pantheon}^2 &= \sum_{ij} [\mu_{i,obs} - \mu_{i,teo}] C_{ij,mB}^{-1} [\mu_{j,obs} - \mu_{j,teo}] \\ &= \sum_{ij} [m_{i,B} - \mu_{i,teo} + M_B \delta_i] C_{ij,mB}^{-1} [m_{j,B} - \mu_{j,teo} + M_B \delta_j],\end{aligned}\quad (4.17)$$

donde $\delta_i = \{1, 1, \dots, 1\}$, $\mu_{i,obs}$, $\mu_{i,teo}$ corresponden a las componentes del módulo distancia observacional y teórico respectivamente y M_B es la magnitud absoluta.

4.4.2 Cronómetros cósmicos

Los 24 datos de cronómetros cósmicos utilizados se obtuvieron a través del *differential age method*. Los datos utilizados se muestran en la tabla 3 de la referencia [41]. Como se sugiere en la referencia [72] se considera la edad relativa de galaxias que evolucionan pasivamente, con respecto al *redshift*. Este es el único método que entrega mediciones directas e independientes del modelo cosmológico [73]. De la relación (3.34), si uno considera dos galaxias con una diferencia finita de tiempo Δt y por ende una diferencia finita en el *redshift* Δz es posible estimar el valor de la función de Hubble $H(z)$. En [73] los autores argumentan que los datos de la historia de la expansión del universo podrían no ser regulares fuera del rango $0.1 < z < 1.2$. Del mismo modo, los autores de la referencia [74] también han demostrado que fuera de este rango, el modelo de síntesis de población estelar adoptado para derivar las edades de las galaxias se vuelve relevante, por lo cual solo usamos datos del *redshift* en el rango $0.1 < z < 1.2$. Si $H(z)$ es la función de Hubble dado por el modelo cosmológico y H_{obs} es el valor medido mediante este método, se tiene que la función χ_H^2 para estos datos viene dada por:

$$\chi_H^2 = \sum_{z_k} \left(\frac{H_{obs}(z_k) - H(z_k)}{\sigma(z_k)} \right)^2, \quad (4.18)$$

donde σ_k es la incerteza para cada dato en z_k . En la siguiente tabla se muestra los datos ocupados:

z	H [km/s/Mpc]	Ref.	z	H [km/s/Mpc]	Ref.
0.07	69 ± 19.6	[75]	0.4004	77 ± 10.2	[43]
0.09	69 ± 12	[76]	0.4247	87.1 ± 11.2	[43]
0.12	68.6 ± 26.2	[75]	0.4497	92.8 ± 12.9	[43]
0.17	83 ± 8	[76]	0.4783	80.9 ± 12.9	[43]
0.179	75 ± 4	[74]	0.48	97 ± 62	[77]
0.199	75 ± 4	[74]	0.593	104 ± 13	[74]
0.20	72.9 ± 29.6	[75]	0.68	92 ± 8	[74]
0.27	77 ± 14	[76]	0.781	105 ± 12	[74]
0.28	88.8 ± 36.6	[75]	0.875	125 ± 17	[74]
0.352	83 ± 14	[74]	0.88	90 ± 40	[77]
0.3802	83 ± 13.5	[43]	0.9	117 ± 23	[76]
0.4	95 ± 17	[76]	1.037	154 ± 20	[75]

Tabla 4.2: Datos obtenidos a partir del método de cronómetros cósmicos. Fuente: [41]

4.4.3 Anisotropía en la radiación de fondo

Al momento en el que la materia se desacopla de la radiación, los fotones viajan libremente hasta nuestros detectores. Estos fotones son lo que hoy se denominan radiación del fondo de micro ondas *CMB*. La trayectoria de estos fotones libres son desviadas por gradientes de los potenciales gravitacionales asociados a las inhomogeneidades del universo (perturbaciones cosmológicas). Estas perturbaciones se propagan en forma de ondas de sonido y pueden ser observadas en las inhomogeneidades en el *CMB*. A partir de estas inhomogeneidades es que se estima el ángulo que subtiende las perturbaciones (su tamaño en escala). La escala del horizonte de sonido en el *redshift* de la época de desacople $z_* = 1089.80$ [1], viene dado por:

$$\theta_* = \frac{d_S(z_*)}{d_H(z_*)}. \quad (4.19)$$

El tamaño físico del objeto es dado por la distancia del horizonte de sonido evaluado en este *redshift*. El valor teórico para la escala angular del horizonte de sonido en z_* reportado por el satélite Planck 2018 es $100\theta_* = 1.04119 \pm 0.00029$ [1]. Entonces si $\theta(z_*)$ es el valor teórico, la función χ_{CMB}^2 para este dato viene dado por:

$$\chi_{CMB}^2 = \left(\frac{1.04119 - 100\theta(z_*)}{0.00029} \right)^2. \quad (4.20)$$

4.4.4 Oscilaciones acústicas de los bariones

Debido a la ionización del medio y las sobredensidades de materia, es que se producen ondas de sonido que se propagan por el medio [57]. Estas ondas se congelan al

momento en el cual la materia se desacopla de la radiación. Hoy en día pueden ser observados los vestigios de estas ondas de sonido en los mapas de distribución de las galaxias, a través de los datos de las oscilaciones acústicas de los bariones o bien BAO por sus siglas en inglés. Las mediciones isotrópicas de la señal BAO se dan en términos de la relación adimensional:

$$d_z(z) = \frac{d_V(z)}{d_S(z_d)}, \quad (4.21)$$

donde d_V es la escala transversal de dilatación (3.47), d_S es la distancia del horizonte de sonido (3.46) y z_d es el *redshift* en la época *drag*. En esta época (posterior al desacople entre materia y radiación) los bariones son afectados por una fuerza de arrastre producido por el medio. Se utilizan las medidas isotropicas de *BAO* de 6dFGS [46], MGS [47] y eBOSS [48] como se muestra en la siguiente tabla:

Catalogo	z	d_z
6dFGS	0.106	2.98
MGS	0.15	4.47
eBOSS	1.52	26.1

Tabla 4.3: Mediciones isotrópicas de la señal BAO. Fuente: Elaboración propia.

Para mediciones anisotrópicas de la señal BAO se considera BOSS DR12 [44] y Ly α forest [45] las cuales se definen en términos de las cantidades:

$$\frac{d_A(z)}{d_s(z_d)} ; \quad \frac{r_H(z)}{d_s(z_d)}, \quad (4.22)$$

donde $r_H = H^{-1}$ es el radio de Hubble. En la siguiente tabla se muestra los datos correspondientes:

Catalogo	z	Medida
BOSS-DR12	0.38	$d_A(0.38)/r_s(z_d) = 7.42$
BOSS-DR12	0.38	$r_H(0.38)/r_s(z_d) = 24.97$
BOSS-DR12	0.51	$d_A(0.51)/r_s(z_d) = 8.85$
BOSS-DR12	0.51	$r_H(0.51)/r_s(z_d) = 22.31$
BOSS-DR12	0.61	$d_A(0.61)/r_s(z_d) = 9.69$
BOSS-DR13	0.61	$r_H(0.61)/r_s(z_d) = 20.49$
Ly α	2.4	$d_A(2.4)/r_s(z_d) = 10.76$
Ly α	2.4	$r_H(2.4)/r_s(z_d) = 8.94$

Tabla 4.4: Mediciones anisotrópicas de la señal *BAO*

La correspondiente matriz de covarianza de estos datos es obtenida en [78] para estos datos. La matriz viene dada por:

$$\mathbf{C}_{ANISO} = \begin{pmatrix} 0.015 & -0.0358 & 0.0071 & -0.01 & 0.0032 & -0.0036 & 0. & 0. \\ -0.0357 & 0.5304 & -0.0160 & 0.1766 & -0.0083 & 0.0616 & 0. & 0. \\ 0.0071 & -0.016 & 0.0182 & -0.0323 & 0.0097 & -0.0131 & 0. & 0. \\ -0.0100 & 0.1766 & -0.0323 & 0.3267 & -0.0167 & 0.145 & 0. & 0. \\ 0.0032 & -0.0083 & 0.0097 & -0.0167 & 0.0243 & -0.0352 & 0. & 0. \\ -0.0036 & 0.0616 & -0.0131 & 0.145 & -0.0352 & 0.2684 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.1358 & -0.0296 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -0.0296 & 0.0492 \end{pmatrix}.$$

De esta matriz se puede notar que las mediciones de BOSS-DR12 y Ly α no se encuentran correlacionadas. Entonces la función χ_{BAO}^2 para los datos de la señal BAO son la suma de su correspondiente función χ_{ISO}^2 para la señal isotrópica y la función χ_{ANISO}^2 para la señal anisotrópica:

$$\chi_{BAO}^2 = \sum_k \left(\frac{(d_k)_{obs} - d_z(z_k)}{\sigma_k} \right)^2 + \sum_{ij} v_i (C_{ANISO}^{-1})_{ij} v_j, \quad (4.23)$$

$(d_z)_{obs}$ y d_z son los valores medidos y teóricos respectivamente, v_i es un vector cuyas componentes son:

$$v_i = \left\{ \frac{d_A(0.38)}{d_S(z_d)}, \frac{r_H(0.38)}{d_S(z_D)}, \frac{d_A(0.51)}{d_S(z_d)}, \frac{r_H(0.51)}{d_S(z_d)}, \frac{d_A(0.61)}{d_S(z_d)}, \frac{r_H(0.61)}{d_S(z_d)}, \frac{d_A(2.4)}{d_S(z_d)}, \frac{r_H(2.4)}{d_S(z_d)} \right\} \quad (4.24)$$

4.5 Procedimiento

Con el fin de encontrar el mejor ajuste se realizan las siguientes parametrizaciones: El parámetro de Hubble en tiempos actuales puede ser parametrizado como:

$$H_0 = \frac{100h \text{ km}}{\text{Mpc s}}, \quad (4.25)$$

donde h es un parámetro que toma valores $h \in [0, 1]$. Por otro lado en todos los modelos cosmológicos estudiados existen ciertos factores en común tales como la densidad de materia bariónica y la densidad de radiación. Es importante no alterar estas cantidades debido a que ello conlleva cambiar la física de las épocas tempranas del Universo, donde la fenomenología es bien conocida. El parámetro cosmológico Ω_R puede ser expresado en términos de h como [52]:

$$\Omega_R = \frac{\rho_{0R}}{\rho_{0,crit}} = 4.22 \times 10^{-5} h^{-2} \quad (4.26)$$

donde se ha ocupado $T_\gamma = 2.736 \pm 0.017$ [55] y la cantidad de especies de neutrinos según la evidencia existente es $N_n = 3.046$ [79]. Por otro lado, a partir de las

mediciones encontradas por Planck 2018 [1] se tiene que el parámetro cosmológico Ω_B puede ser expresado en términos de h como:

$$\Omega_B \equiv \frac{\rho_{0B}}{\rho_{0,crit}} = 0.022393h^{-2}, \quad (4.27)$$

estas dos cantidades estarán determinadas por el valor de la constante de Hubble H_0 o bien por el parámetro h . Es usual eliminar la dependencia del parámetro cosmológico Ω_Λ al evaluar la ecuación de Friedmann en tiempos actuales:

$$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_B - \Omega_R - \Omega_{CDM} \quad (4.28)$$

En la siguiente tabla se muestran los parámetros usados para cada modelo cosmológico estudiado usando las consideraciones recién mostradas:

Modelo	Parámetros	Número de parámetros	Ecuación
Λ CDM	h, Ω_{CDM}, M_B	3	(3.48)
HRDE	$h, \Omega_{CDM}, \alpha, M_B$	4	(3.67)
MHRDE	$h, \Omega_{CDM}, \alpha, \beta, M_B$	5	(3.74)
Q_1 MHRDE	$h, \Omega_{CDM}, \alpha, \beta, \Gamma_a, M_B$	6	(3.95)
Q_2 MHRDE	$h, \Omega_{CDM}, \alpha, \beta, \Gamma_b, M_B$	6	(3.95)
Q_3 MHRDE	$h, \Omega_{CDM}, \alpha, \beta, \Gamma_a = \Gamma_b, M_B$	6	(3.95)
Q_4 MHRDE	$h, \Omega_{CDM}, \alpha, \beta, \Gamma_a, \Gamma_b, M_B$	7	(3.95)

Tabla 4.5: Modelos cosmológicos estudiados y su dependencia paramétrica. Fuente: Elaboración propia

Para realizar el análisis mencionado en la sección 4.1 se eligen las siguientes distribuciones a priori para los distintos parámetros cosmológicos:

Parámetro	Distribución a Priori	Referencia
h	Gaussiano: (0.7403, 0.0142)	[2]
Ω_{CDM}	Uniforme: (0,1)	-
α	Uniforme: (0,1)	[35, 36, 38, 39, 40]
β	Uniforme: (0,1)	[35, 36, 38, 39, 40]
Γ_a	Uniforme: (-1,1)	[35, 39, 41]
Γ_b	Uniforme: (-1,1)	[35, 39, 41]
M_B	Uniforme: (-20,-18)	[42]

Tabla 4.6: Distribución a priori para los parámetros de los modelos estudiados. Para una distribución Gaussiana como prior (μ, σ^2) , donde μ es el promedio y σ la desviación estándar, para la distribución Uniforme como prior (a, b) representa $a \leq x \leq b$. Fuente: Elaboración propia

La construcción de la distribución a posteriori y el cálculo de la evidencia fue llevado a cabo con el paquete de python *pymultinest* [80]. Se requirió una tolerancia de 0.03 como criterio de convergencia con un set de 1000 puntos para mejorar la precisión en la estimación de la evidencia. El mejor ajuste para los parámetros cosmológicos se define como el promedio de su respectivas distribuciones a posteriori y su respectiva incerteza sera definida con LC de 1σ (68 %). El cálculo de los límites de confianza, el gráfico de la distribución a posteriori y los gráficos de contorno fueron llevados a cabo con el paquete de python *getdist* [81]. Para el análisis del ajuste de parámetros y la comparación con respecto al modelo Λ CDM se ocuparan las siguientes combinaciones de datos:

Nombre	χ^2
CC	χ_{CC}^2
Pantheon	$\chi_{pantheon}^2$
SET1	$\chi_{CMB}^2 + \chi_{BAO}^2$
SET2	$\chi_{pantheon}^2 + \chi_{CC}^2 + \chi_{CMB}^2 + \chi_{BAO}^2$

Tabla 4.7: Distintas combinaciones de los set de datos ocupados para el ajuste de parámetros y comparación de modelos. Fuente: Elaboración propia

Esta elección se escoge por la siguiente razón: los sets de datos Pantheon y CC ofrecen una descripción actual del Universo $z \lesssim 2$ mientras que el sets de datos SET1 describen procesos provenientes de la época de desacople entre radiación y materia. Los sets de datos CC y Pantheon se han escogido por separado dado que estos poseen una cantidad de datos suficiente (al menos) para poder realizar el ajuste de parámetros. Para el set de datos SET1 se han elegido en conjunto los experimentos de CMB y BAO debido a que para el experimento de CMB existe solo 1 dato observacional y éste por si solo no es suficiente para realizar un buen ajuste de parámetros. Finalmente el último sets de datos SET2 se juntan todos los datos ocupados en este trabajo. Por medio de la comparación bayesiana se compararan los modelos holográficos basados en el escalar de Ricci con respecto al modelo Λ CDM. Si $E_{\Lambda CDM}$ y E_i , son la evidencia para el modelo Λ CDM y la evidencia para algún modelo holográfico respectivamente. Ocupando la escala de Jeffreys como interpretación empírica de la evidencia, el valor de $\ln E_i/E_{\Lambda CDM} > 1$ indica evidencia a favor del modelo holográfico en cuestión en comparación al modelo Λ CDM, el valor $\ln E_i/E_{\Lambda CDM} < -1$ indica evidencia en contra del modelo holográfico en cuestión en comparación al modelo Λ CDM, mientras que un valor $-1 < \ln E_i/E_{\Lambda CDM} < 1$, indica que no existe suficiente evidencia para realizar una conclusión acerca de la comparación de modelos en relación a los datos empleados.

Chapter 5

Resultados

En este trabajo se realizó la comparación bayesiana para los modelos holográficos presentados en la tabla 4.5 con respecto al modelo Λ CDM usando la escala de Jeffreys (ver tabla 4.1). En este estudio se usaron las distribuciones a priori mostradas en la tabla 4.6 y se ocuparon distintas combinaciones de datos para el análisis (ver tabla 4.7). En la tabla 5.1 se muestran los resultados del mejor ajuste de los parámetros cosmológicos y su respectiva incerteza, en la tabla 5.2 se muestra el valor numérico de la evidencia, su comparación con el modelo Λ CDM y su respectiva interpretación en términos de la escala de Jeffreys. En la tabla 5.3 se muestra la discrepancia entre los resultados de la estimación del parámetro h para los distintos modelos estudiados con respecto al parámetro h_{Riess} encontrado por Riess *et al.* En la tabla 5.4 se muestra el mejor ajuste de la magnitud absoluta y su discrepancia con respecto al mejor ajuste del modelo Λ CDM. En la gráfica 5.3 se muestra la evolución de la función de desaceleración q , la función de estado ω_Λ y la función de coincidencia (ver sección 3.3) para los modelos estudiados. En las figuras 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15 se muestran los gráficos de contorno, cuya regiones encerradas corresponden a 1σ ($\sim 68\%$) y 2σ ($\sim 95\%$), correspondientemente.

En la tabla 5.1 el mejor ajuste del parámetro h para los datos CC y Pantheon, muestran una leve discrepancia, en el sentido de que sus respectivas incertezas 1σ contienen al mejor ajuste de los modelos. Mientras que para los datos SET1 y SET2, esa discrepancia es mayor. Se puede notar que para los datos SET1 y SET2 la incerteza en la estimación es menor en comparación a los datos CC y Pantheon. Para los datos SET1 y SET2, los mejores ajustes del parámetro α y β para el modelo MHRDE ($\alpha \approx 1, \beta \approx 0.5$) y el modelo HRDE $\alpha \approx 1$ permiten identificar los cortes en el infrarrojo de ambos modelos (ver sección 3.7.4). Para los datos SET1, el parámetro de interacción del modelo Q_1 MHRDE resulta pequeño. Esto significa que este modelo es muy parecido al modelo MHRDE. Para los datos SET1 y SET2 (ver tabla 4.7) se observa una discrepancia mas significativa entre el mejor ajuste del parámetro h con respecto al parámetro h_{Riess} , este resultado es resumido en la

tabla 5.3. Para los datos SET1 y SET2, el modelo Λ CDM muestra una discrepancia para el parámetro h de 3.2σ ($\sim 99.86\%$) y 3.5σ ($\sim 99.96\%$) respectivamente, lo cual muestra una tensión entre estos set de datos en relación al modelo encontrado por Riess *et al.* Si bien los modelos holográficos tienen una menor discrepancia $\lesssim 1\sigma$ en relación al modelo encontrado por Riess *et al.* esto no constituye un indicativo suficiente para argumentar que estos modelos alivian la tensión en el parámetro de Hubble para estos datos. Esto es debido a que se requiere un análisis mas profundo para poder determinar si realmente estos modelos alivian la tensión. Los resultados de la comparación bayesiana de modelos (tabla 5.2) para los datos CC muestra una débil evidencia a favor para los modelos MHRDE, Q_2 MHRDE y Q_3 MHRDE e inconclusiva para el resto de modelos. Por lo tanto estos datos mostrarían preferencia por modelos que van mas allá del modelo cosmológico estándar. Sin embargo esta tendencia cambia para el resto de sets de datos. En el caso de la compilación Pantheon, se observa evidencia débil en contra de los modelos holográficos HRDE, Q_1 MHRDE, Q_2 MHRDE y Q_4 MHRDE. Para los datos SET1, el modelo Q_2 MHRDE muestra una fuerte evidencia en contra mientras que los modelos Q_1 MHRDE y Q_4 MHRDE muestra una evidencia moderada en contra. Cuando se consideran todos los datos SET2, es posible notar conclusiones mas definitivas en comparación al análisis hecho por los datos en separado. Para los datos se observa una fuerte y moderada evidencia en contra de los modelos holográficos. Por otra parte, del mejor ajuste del parámetro M_B (ver tabla 5.4) muestran una discrepancia con respecto al modelo Λ CDM. Esta discrepancia es pequeña para los datos de Pantheon $\lesssim 1\sigma$, sin embargo, para los datos SET2 esta discrepancia aumenta significativamente a excepción del modelo HRDE. De los gráficos de contornos figura 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15 es posible observar que el parámetro M_B se encuentra correlacionado con el parámetro h . Por lo tanto las discrepancias en el parámetro h "pueden" influir en las discrepancias en la magnitud absoluta M_B . De la gráfica 5.1 se observa que la evolución de la densidad de materia oscura ρ_{CDM} para el modelo Q_4 MHRDE posee valores mayores a la densidad de energía crítica ρ_{crit} (ver sección 3.48) la cual es compensada por una densidad de energía oscura negativa (ver gráfica 5.2). Dado que la energía oscura está vinculada a una característica geométrica que depende del escalar de Ricci modificado, existe la posibilidad de que ésta pueda tener valores negativos. Para los modelos holográficos HRDE, MHRDE, Q_1 MHRDE, Q_2 MHRDE y Q_3 MHRDE la densidad de materia oscura posee una forma similar a la densidad de materia oscura del modelo Λ CDM. Sin embargo posee las siguiente peculiaridades: los modelos Q_2 MHRDE y Q_4 MHRDE poseen una densidad de materia oscura que siempre es mayor a la densidad de materia oscura del modelo Λ CDM, las cuales no van a cero para el *redshift* $z = -1$ y esto es un indicio de que la función de coincidencia en este limite cumple $r_\infty \neq 0$ como se verá mas adelante. Por otra parte la densidad de materia oscura para estos modelos muestra una contribución de energía a la correspondiente época dominada por la radiación. Por otro lado los modelos HRDE, MHRDE, Q_1 MHRDE y Q_3 MHRDE poseen una densidad de materia oscura que siempre es menor a la

densidad de materia oscura para el modelo Λ CDM y estos encuentran el valor nulo en los límites $z = -1$ y $z \sim \infty$. Para la evolución de la densidad de energía oscura para los distintos modelos estudiados (ver figura 5.2) se observa que en el caso del modelo Q_2 MHRDE, la densidad de energía oscura posee valores negativos y argumentos similares a lo hecho por la densidad de energía oscura del modelo Q_4 MHRDE pueden ser ocupados. Sin embargo, a diferencia del modelo Q_4 MHRDE, la densidad de materia oscura del modelo Q_2 no excede la densidad de energía crítica como compensación a los valores negativos de la densidad de energía oscura. Para el resto de modelos, la densidad de energía oscura es definida positivamente y siempre es mayor o igual a la densidad de energía oscura del modelo Λ CDM. Del gráfico de la función de desaceleración (ver gráfico 5.3) se observa que los modelos HRDE y MHRDE poseen una función de desaceleración similar al modelo Λ CDM, en este escenario el Universo entra a una fase de expansión acelerada aproximadamente en el mismo *redshift* $z \sim 0.55$. Sin embargo, la función de desaceleración del resto de modelos muestra un comportamiento diferente al modelo Λ CDM. En el caso de los modelos Q_1 MHRDE, Q_2 MHRDE y Q_3 MHRDE la función de desaceleración se comporta de manera similar, prediciendo una aceleración en el futuro $z = -1$ mas rápida que en el caso del modelo Λ CDM $q(z = -1) < -1$, mientras que el modelo Q_4 MHRDE posee una función desaceleración que difiere del resto de los modelos y acelera mas rápidamente que estos en el futuro. Del gráfico para la función de estado (ver gráfica 5.3), se observa los modelos holográficos HRDE y MHRDE poseen una función de estado similar (esto debido al ya mencionado constraint $\alpha = 2\beta$ para el mejor ajuste de MHRDE). Para el modelo Q_2 MHRDE (Q_4 MHRDE), la función de estado crece (decrece) indefinidamente. Esto se debe a que en ambos modelos, la densidad de energía oscura pasa por el valor cero en su evolución (ver gráfica 5.2) y de la definición de función de estado (3.64) se puede observar que esta depende de términos que van como $\sim 1/\rho_\Lambda$. Para la gráfica de la función de coincidencia (ver gráfica 5.3) de los modelos holográficos, se observa que los modelos que poseen una densidad de energía oscura negativa Q_2 MHRDE y Q_4 MHRDE, la función de coincidencia en el futuro es del orden de $r_\infty \sim O(10^{-1})$, mientras que en los modelos HRDE, MHRDE y Q_1 MHRDE la función de coincidencia es del orden de $r_\infty \sim O(10^{-7})$, estos resultados son resumidos a continuación :

$$r_\infty \sim 10^{-7} \quad (\text{Modelo HRDE}), \quad (5.1)$$

$$r_\infty \sim 10^{-7} \quad (\text{Modelo MHRDE}), \quad (5.2)$$

$$r_\infty \sim 10^{-7} \quad (\text{Modelo } Q_1\text{MHRDE}), \quad (5.3)$$

$$r_\infty = 0.479 \quad (\text{Modelo } Q_2\text{MHRDE}), \quad (5.4)$$

$$r_\infty = 0.169 \quad (\text{Modelo } Q_4\text{MHRDE}), \quad (5.5)$$

De la gráfica de la función de coincidencia del modelo Q_4 MHRDE se observa una discontinuidad en sus valores, esto es debido a que la densidad de energía oscura cambia de signo en ese intervalo y por lo tanto pasa por el valor cero $r = \rho_{CDM}/\rho_\Lambda \sim \infty$.

La función de coincidencia para el modelo Q_3 MHRDE posee un valor mas pequeño que $\lesssim O(10^{-7})$. Por último, en las gráficas 5.5-5.9 se muestra el comportamiento de los modelos holográficos considerando todos sus componentes (materia barionica, radiación, materia oscura y energía oscura). Los modelos HRDE y MHRDE se comportan de manera similar por el ya mencionado constraint $\alpha \approx 2\beta$, en estos modelos se puede observar que la densidad de energía oscura contribuye una cantidad de energía mayor a los bariones en la época dominada por la materia y decae en la época dominada por la radiación. Para el modelo Q_1 MHRDE, se observa que el Universo pasa de una época dominada por energía oscura a una dominada por radiación sin pasar por una época dominada por materia bariónica y materia oscura y la energía oscura está presente en la época dominada por la radiación. Para el modelo Q_2 MHRDE, la densidad de energía oscura posee valores negativos en la época dominada por la materia y como consecuencia de la interacción entre el sector oscuro, la materia oscura alcanza el valor de la densidad crítica $\rho_{CDM} \sim \rho_{crit}$, por lo que en este periodo se cumple el constraint $\rho_B + \rho_R + \rho_\Lambda \sim 0$. Posteriormente en la época dominada por la radiación, la densidad de energía producto de la radiación excede la densidad crítica. Para el modelo Q_3 MHRDE, la evolución de sus componentes se comporta de manera similar a los modelos HRDE y MHRDE, esto es debido a la similitud en sus mejores ajuste y los pequeños valores para los parámetros de interacción $\Gamma_a \sim \Gamma_b \sim 0$. Finalmente el modelo Q_4 MHRDE muestra que la densidad de materia oscura excede la densidad de energía crítica y en forma de compensación la densidad de energía oscura toma valores negativos. Para este modelo, el Universo pasa de estar dominado por energía oscura a materia oscura, no se observa una época dominada por la radiación.

Modelo	h	Ω_{CDM}	α	β	Γ_a	Γ_b
Cronómetros Cósmicos						
Λ CDM	$0.731^{+0.026}_{-0.026}$	$0.185^{+0.088}_{-0.080}$	-	-	-	-
HRDE	0.739 ± 0.027	$0.24^{+0.11}_{-0.12}$	$0.68^{+0.29}_{-0.26}$	-	-	-
MHRDE	$0.739^{+0.026}_{-0.027}$	$0.51^{+0.31}_{-0.36}$	$0.40^{+0.49}_{-0.40}$	$0.68^{+0.32}_{-0.41}$	-	-
Q_1 MHRDE	0.740 ± 0.026	$0.41^{+0.43}_{-0.36}$	$0.50^{+0.45}_{-0.46}$	$0.69^{+0.33}_{-0.47}$	$0.18^{+0.73}_{-0.68}$	-
Q_2 MHRDE	$0.739^{+0.028}_{-0.026}$	$0.5^{+0.33}_{-0.45}$	$0.39^{+0.46}_{-0.39}$	$0.70^{+0.31}_{-0.38}$	-	$0.09^{+0.87}_{-0.98}$
Q_3 MHRDE	$0.739^{+0.028}_{-0.025}$	$0.49^{+0.35}_{-0.44}$	$0.39^{+0.47}_{-0.39}$	$0.70^{+0.31}_{-0.37}$	-	$0.12^{+0.86}_{-0.97}$
Q_4 MHRDE	0.739 ± 0.026	$0.42^{+0.42}_{-0.40}$	$0.45^{+0.45}_{-0.43}$	$0.69^{+0.32}_{-0.43}$	$0.09^{+0.73}_{-0.79}$	$0.15^{+0.83}_{-0.99}$
Compilación Pantheon						
Λ CDM	0.741 ± 0.025	$0.258^{+0.045}_{-0.042}$	-	-	-	-
HRDE	$0.741^{+0.025}_{-0.024}$	$0.231^{+0.078}_{-0.066}$	$0.89^{+0.12}_{-0.16}$	-	-	-
MHRDE	$0.741^{+0.024}_{-0.023}$	$0.46^{+0.36}_{-0.33}$	$0.75^{+0.27}_{-0.40}$	$0.75^{+0.26}_{-0.39}$	-	-
Q_1 MHRDE	0.741 ± 0.024	$0.57^{+0.40}_{-0.38}$	$0.64^{+0.37}_{-0.45}$	$0.69^{+0.32}_{-0.43}$	$-0.17^{+0.40}_{-0.36}$	-
Q_2 MHRDE	$0.739^{+0.028}_{-0.027}$	$0.77^{+0.22}_{-0.23}$	$0.43^{+0.16}_{-0.19}$	$0.86^{+0.15}_{-0.22}$	-	$0.44^{+0.59}_{-0.78}$
Q_3 MHRDE	$0.740^{+0.024}_{-0.025}$	$0.58^{+0.39}_{-0.36}$	$0.63^{+0.37}_{-0.35}$	$0.81^{+0.21}_{-0.31}$	$0.17^{+0.82}_{-0.97}$	$0.17^{+0.82}_{-0.97}$
Q_4 MHRDE	$0.741^{+0.024}_{-0.023}$	0.61 ± 0.38	$0.61^{+0.38}_{-0.44}$	$0.72^{+0.29}_{-0.37}$	$-0.22^{+0.50}_{-0.60}$	$0.16^{+0.82}_{-0.98}$
SET1						
Λ CDM	$0.6949^{+0.0092}_{-0.0083}$	$0.239^{+0.010}_{-0.011}$	-	-	-	-
HRDE	$0.721^{+0.020}_{-0.017}$	0.173 ± 0.010	$0.866^{+0.062}_{-0.070}$	-	-	-
MHRDE	0.734 ± 0.026	$0.160^{+0.015}_{-0.014}$	$0.962^{+0.041}_{-0.066}$	$0.432^{+0.036}_{-0.035}$	-	-
Q_1 MHRDE	0.742 ± 0.020	$0.178^{+0.089}_{-0.052}$	$0.966^{+0.036}_{-0.062}$	$0.50^{+0.33}_{-0.22}$	$0.004^{+0.027}_{-0.031}$	-
Q_2 MHRDE	$0.733^{+0.024}_{-0.023}$	$0.2963^{+0.0092}_{-0.0099}$	$0.080^{+0.13}_{-0.085}$	$0.967^{+0.035}_{-0.075}$	-	$0.096^{+0.021}_{-0.019}$
Q_3 MHRDE	$0.741^{+0.023}_{-0.025}$	$0.371^{+0.050}_{-0.043}$	$0.948^{+0.055}_{-0.087}$	$0.73^{+0.22}_{-0.11}$	$-0.163^{+0.083}_{-0.079}$	$-0.163^{+0.083}_{-0.079}$
Q_4 MHRDE	$0.735^{+0.019}_{-0.018}$	$0.932^{+0.071}_{-0.094}$	$0.47^{+0.24}_{-0.26}$	$0.86^{+0.14}_{-0.18}$	$-0.403^{+0.093}_{-0.094}$	$0.83^{+0.14}_{-0.13}$
SET 2						
Λ CDM	0.690 ± 0.01	0.245 ± 0.013	-	-	-	-
HRDE	$0.703^{+0.011}_{-0.010}$	$0.1723^{+0.0090}_{-0.0092}$	$0.953^{+0.042}_{-0.045}$	-	-	-
MHRDE	$0.723^{+0.019}_{-0.018}$	0.162 ± 0.011	$0.973^{+0.028}_{-0.037}$	$0.445^{+0.027}_{-0.029}$	-	-
Q_1 MHRDE	$0.725^{+0.013}_{-0.011}$	$0.1478^{+0.0091}_{-0.0094}$	$0.941^{+0.050}_{-0.053}$	$0.345^{+0.053}_{-0.063}$	$-0.022^{+0.013}_{-0.018}$	-
Q_2 MHRDE	$0.722^{+0.018}_{-0.017}$	$0.355^{+0.063}_{-0.19}$	$0.907^{+0.095}_{-0.12}$	$0.67^{+0.21}_{-0.20}$	-	$-0.16^{+0.17}_{-0.14}$
Q_3 MHRDE	$0.724^{+0.019}_{-0.017}$	$0.166^{+0.028}_{-0.022}$	$0.969^{+0.032}_{-0.052}$	$0.45^{+0.15}_{-0.14}$	$0.001^{+0.015}_{-0.013}$	$0.001^{+0.015}_{-0.013}$
Q_4 MHRDE	$0.723^{+0.017}_{-0.016}$	$0.86^{+0.14}_{-0.17}$	$0.46^{+0.24}_{-0.20}$	$0.84^{+0.16}_{-0.14}$	$0.35^{+0.16}_{-0.14}$	$-0.73^{+0.25}_{-0.22}$

Tabla 5.1: Mejor ajuste para las distintas combinaciones de los set de datos mostrados en la sección 4.4. El mejor ajuste es definido promediando con respecto a la distribución a posteriori. El error es considerado con respecto a 1σ de incerteza (68%). Los datos SET1 y SET2 están definidos en tabla 4.7. Fuente: Elaboración propia.

Modelo	$\ln E$	$\ln E/E_{\Lambda\text{CDM}}$	Interpretación
Cronómetros Cósmicos			
ΛCDM	-7.796 ± 0.046	-	-
HRDE	-7.442 ± 0.053	0.354 ± 0.099	Inconclusivo
MHRDE	-6.558 ± 0.045	1.238 ± 0.091	Débil a favor
$Q_1\text{MHRDE}$	-7.197 ± 0.051	0.599 ± 0.097	Inconclusivo
$Q_2\text{MHRDE}$	-6.541 ± 0.045	1.255 ± 0.091	Débil a favor
$Q_3\text{MHRDE}$	-6.481 ± 0.044	1.315 ± 0.090	Débil a favor
$Q_4\text{MHRDE}$	-7.144 ± 0.051	0.652 ± 0.097	Inconclusivo
Compilación Pantheon			
ΛCDM	-521.749 ± 0.085	-	-
HRDE	-523.313 ± 0.100	-1.563 ± 0.185	Débil en contra
MHRDE	-522.712 ± 0.088	-0.962 ± 0.173	Inconclusivo
$Q_1\text{MHRDE}$	-523.205 ± 0.090	-1.456 ± 0.175	Débil en contra
$Q_2\text{MHRDE}$	-523.474 ± 0.089	-1.725 ± 0.174	Débil en contra
$Q_3\text{MHRDE}$	-522.427 ± 0.086	-0.677 ± 0.173	Inconclusivo
$Q_4\text{MHRDE}$	-523.006 ± 0.088	1.25 ± 0.173	Débil en contra
SET1			
ΛCDM	-21.344 ± 0.110	-	-
HRDE	-21.142 ± 0.100	-0.202 ± 0.210	Inconclusivo
MHRDE	-20.969 ± 0.110	0.375 ± 0.22	Inconclusivo
$Q_1\text{MHRDE}$	-25.124 ± 0.124	-3.779 ± 0.234	Moderado en contra
$Q_2\text{MHRDE}$	-34.418 ± 0.121	-13.073 ± 0.231	Fuerte en contra
$Q_3\text{MHRDE}$	-22.060 ± 0.118	-0.716 ± 0.228	Inconclusivo
$Q_4\text{MHRDE}$	-24.318 ± 0.127	-2.974 ± 0.237	Moderado en contra
SET2			
ΛCDM	-542.037 ± 0.124	-	-
HRDE	-547.099 ± 0.135	-5.062 ± 0.259	Fuerte en contra
MHRDE	-546.428 ± 0.134	-4.390 ± 0.258	Moderado en contra
$Q_1\text{MHRDE}$	-553.016 ± 0.152	-10.979 ± 0.276	Fuerte en contra
$Q_2\text{MHRDE}$	-546.983 ± 0.136	-4.956 ± 0.260	Moderado en contra
$Q_3\text{MHRDE}$	-550.519 ± 0.146	-8.482 ± 0.270	Fuerte en contra
$Q_4\text{MHRDE}$	-549.123 ± 0.144	-7.086 ± 0.268	fuerte en contra

Tabla 5.2: Comparación bayesiana de modelos para los sets de datos mostrados en la sección 4.2. $E_{\Lambda\text{CDM}}$ corresponde a la evidencia del modelo ΛCDM . La incerteza en la evidencia corresponde a 1σ (68%). Los datos SET1 y SET2 están definidos en tabla 4.7 Fuente: Elaboración propia

h_{modelo}	Valor estandarizado	%
SET1		
$h_{\Lambda\text{CDM}}$	$3.2 \sigma_{\text{Riess}}$	99.86%
h_{HRDE}	$1.4 \sigma_{\text{Riess}}$	82.59%
h_{MHRDE}	$0.4 \sigma_{\text{Riess}}$	34.27%
$h_{Q_1\text{MHRDE}}$	$0.1 \sigma_{\text{Riess}}$	9.53%
$h_{Q_2\text{MHRDE}}$	$0.5 \sigma_{\text{Riess}}$	39.28%
$h_{Q_3\text{MHRDE}}$	$0.05 \sigma_{\text{Riess}}$	3.93%
$h_{Q_4\text{MHRDE}}$	$0.4 \sigma_{\text{Riess}}$	29.10%
SET2		
$h_{\Lambda\text{CDM}}$	$3.5 \sigma_{\text{Riess}}$	99.96%
h_{HRDE}	$2.6 \sigma_{\text{Riess}}$	99.14%
h_{MHRDE}	$1.2 \sigma_{\text{Riess}}$	77.69%
$h_{Q_1\text{MHRDE}}$	$1.1 \sigma_{\text{Riess}}$	71.87%
$h_{Q_2\text{MHRDE}}$	$1.3 \sigma_{\text{Riess}}$	80.25%
$h_{Q_3\text{MHRDE}}$	$1.1 \sigma_{\text{Riess}}$	74.90%
$h_{Q_4\text{MHRDE}}$	$1.2 \sigma_{\text{Riess}}$	77.69%

Tabla 5.3: Nivel de concordancia entre el ajuste del parámetro h para los sets de datos SET1 y SET2 (ver tabla 4.7) y el valor medido por Riess *et al.* [2]. La segunda columna representa el valor estandarizado con respecto a la desviación estándar σ_{Riess} . La tercera columna representa la probabilidad asociada al valor estandarizado. Fuente: Elaboración propia.

$(M_B)_{\text{modelo}}$	Valor estimado	Valor estandarizado	%
Compilación Pantheon			
$(M_B)_{\Lambda\text{CDM}}$	-19.277 ± 0.077	-	-
$(M_B)_{\text{HRDE}}$	$-19.236^{+0.080}_{-0.078}$	$0.5 \sigma_{\Lambda\text{CDM}}$	0.53%
$(M_B)_{\text{MHRDE}}$	$-19.236^{+0.072}_{-0.073}$	$0.5 \sigma_{\Lambda\text{CDM}}$	0.53%
$(M_B)_{Q_1\text{MHRDE}}$	$-19.233^{+0.075}_{-0.077}$	$0.6 \sigma_{\Lambda\text{CDM}}$	0.57%
$(M_B)_{Q_2\text{MHRDE}}$	$-19.190^{+0.72}_{-0.59}$	$1.1 \sigma_{\Lambda\text{CDM}}$	1.13%
$(M_B)_{Q_3\text{MHRDE}}$	$-19.240^{+0.076}_{-0.078}$	$0.5 \sigma_{\Lambda\text{CDM}}$	0.48%
$(M_B)_{Q_4\text{MHRDE}}$	$-19.234^{+0.074}_{-0.072}$	$0.6 \sigma_{\Lambda\text{CDM}}$	0.56%
SET2			
$(M_B)_{\Lambda\text{CDM}}$	-19.383 ± 0.026	-	-
$(M_B)_{\text{HRDE}}$	$-19.360^{+0.023}_{-0.020}$	$0.9 \sigma_{\Lambda\text{CDM}}$	62.36%
$(M_B)_{\text{MHRDE}}$	$-19.288^{+0.057}_{-0.053}$	$3.6 \sigma_{\Lambda\text{CDM}}$	99.97%
$(M_B)_{Q_1\text{MHRDE}}$	$-19.283^{+0.042}_{-0.037}$	$3.8 \sigma_{\Lambda\text{CDM}}$	99.98%
$(M_B)_{Q_2\text{MHRDE}}$	$-19.286^{+0.054}_{-0.050}$	$3.7 \sigma_{\Lambda\text{CDM}}$	99.98%
$(M_B)_{Q_3\text{MHRDE}}$	$-19.287^{+0.056}_{-0.051}$	$3.7 \sigma_{\Lambda\text{CDM}}$	99.98%
$(M_B)_{Q_4\text{MHRDE}}$	$-19.285^{+0.049}_{-0.046}$	$3.8 \sigma_{\Lambda\text{CDM}}$	99.98%

Tabla 5.4: Nivel de concordancia entre el ajuste del parámetro M_B para los sets de datos Pantheon y SET2 (ver tabla 4.7) entre el modelo ΛCDM y los modelos holográfico estudiados en este trabajo. La segunda columna representa el valor estandarizado con respecto a la desviación estándar $\sigma_{\Lambda\text{CDM}}$ encontrada para el modelo ΛCDM . La tercera columna representa la probabilidad asociada al valor estandarizado. Los datos SET2 están definidos en tabla 4.7. Fuente: Elaboración propia.

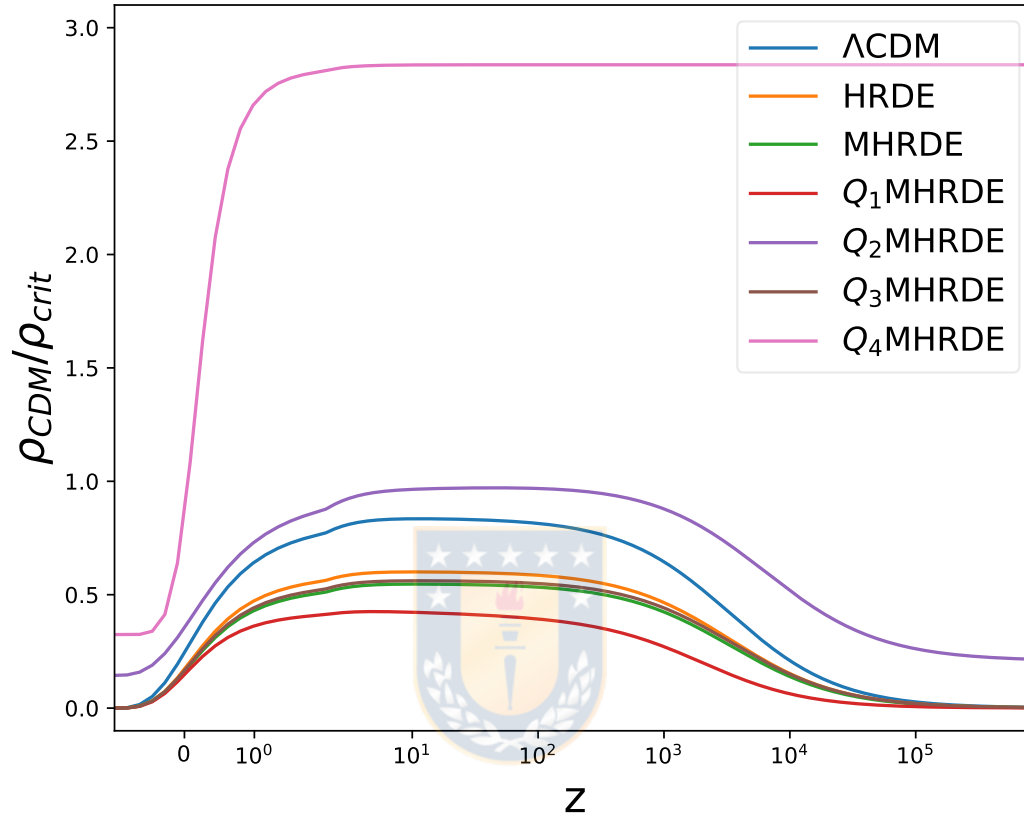


Ilustración 5.1: Evolución de la densidad de materia oscura normalizada con respecto a la densidad crítica $\rho_{crit} = 3H^2/8\pi G$ (ver sección 3.48) para el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7) entre el rangos $-1 < z \lesssim 10^6$. Fuente: Elaboración propia.

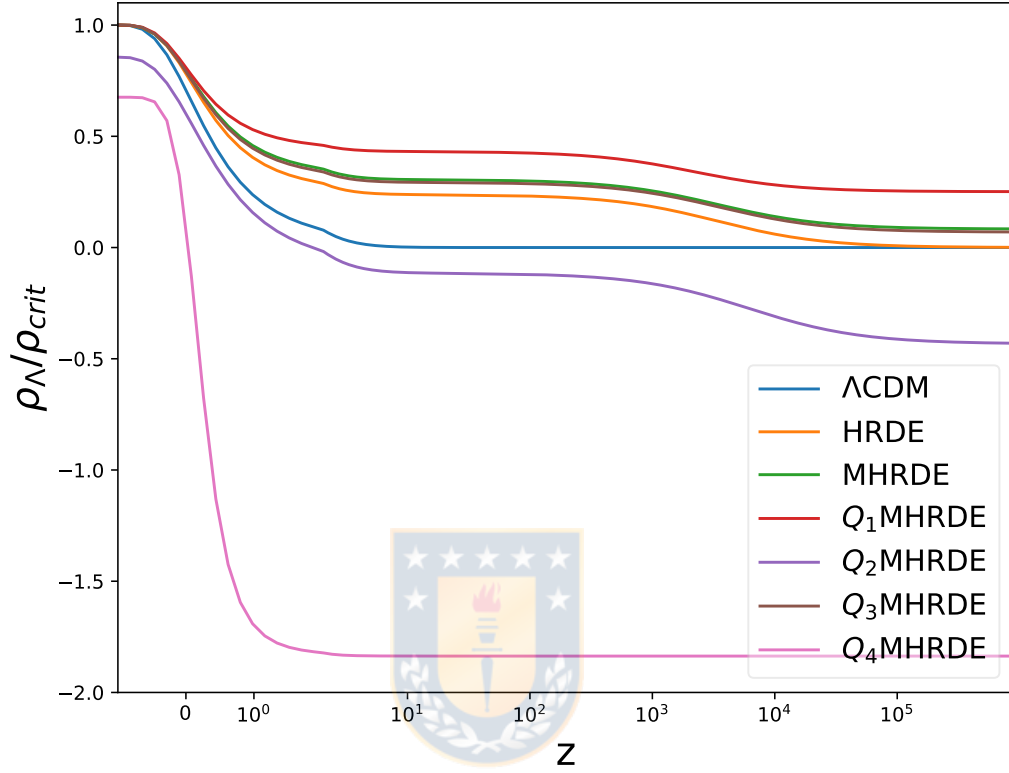


Ilustración 5.2: Evolución de la densidad de energía oscura normalizada con respecto a la densidad crítica $\rho_{crit} = 3H^2/8\pi G$ (ver sección 3.48) para el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7) entre el rangos $-1 < z \lesssim 10^6$. Fuente: Elaboración propia.

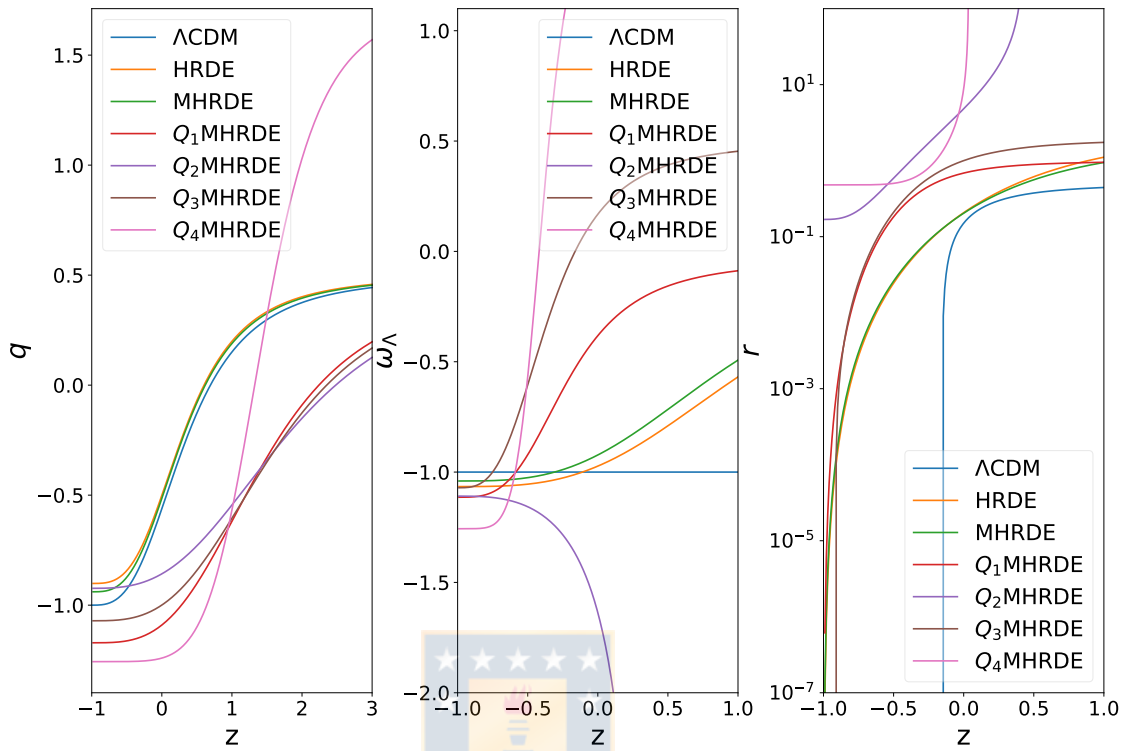


Ilustración 5.3: Gráfica de la evolución de la función de desaceleración q , la función de coincidencia r y la función de estado ω_Λ de la energía oscura para los distintos modelos estudiados según el mejor ajuste (ver tabla 5.1) usando los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.

Modelo HRDE

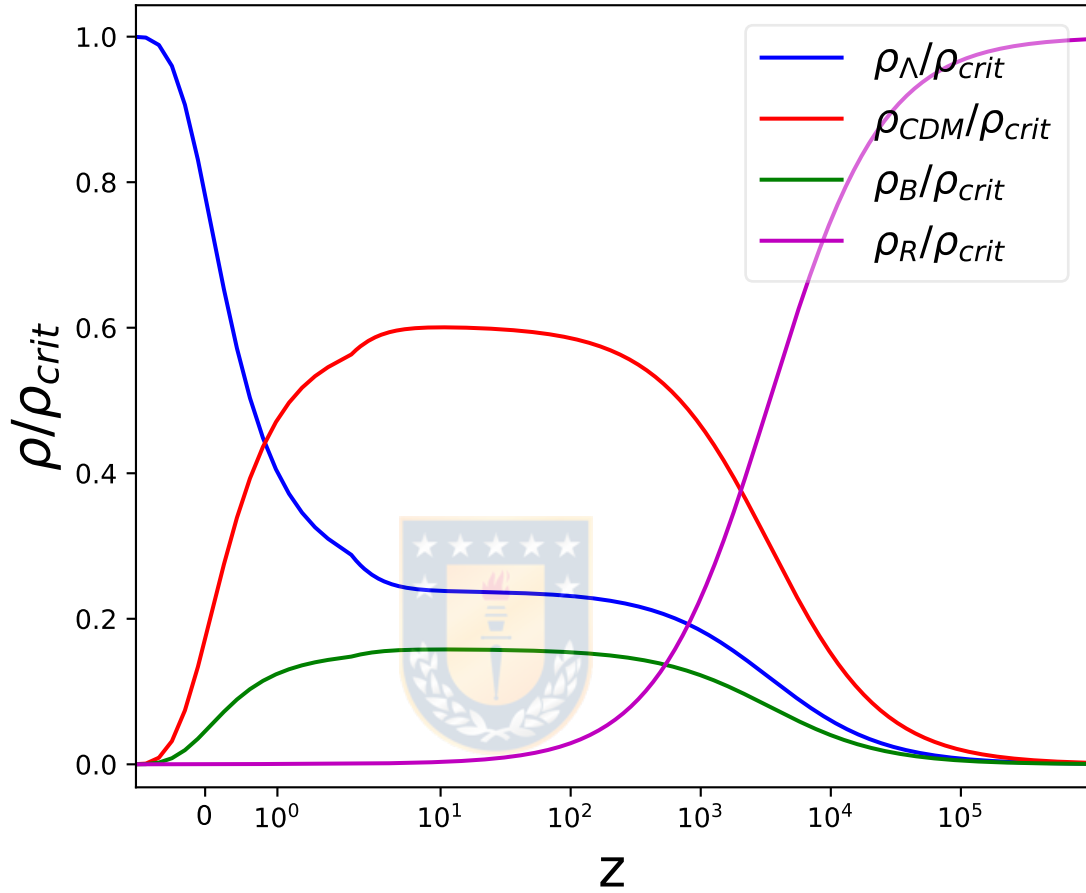


Ilustración 5.4: Evolución de las componentes del Universo entre los rangos $-1 \lesssim z \lesssim 10^6$ para el modelo cosmológico HRDE (ver sección 3.7.4) usando el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.

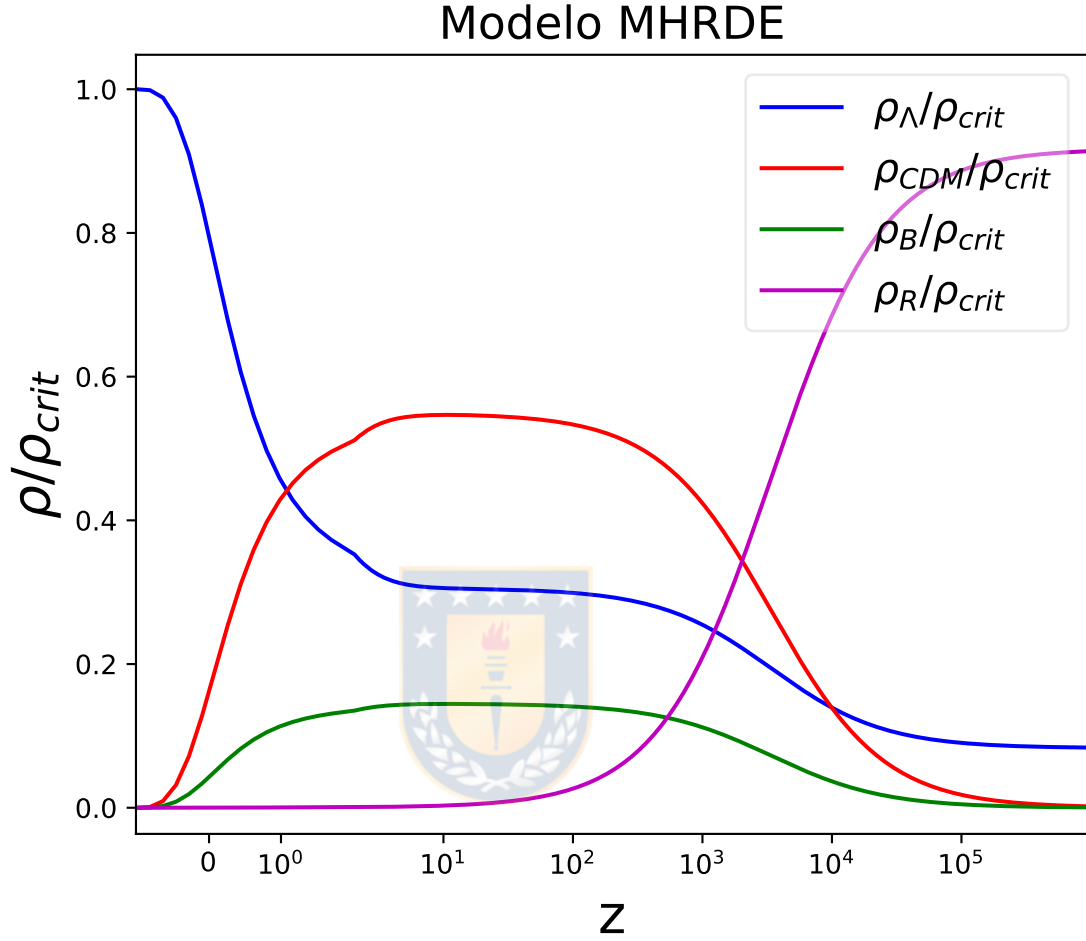


Ilustración 5.5: Evolución de las componentes del Universo entre los rangos $-1 \lesssim z \lesssim 10^6$ para el modelo cosmológico MHRDE (ver sección 3.7.4) usando el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.

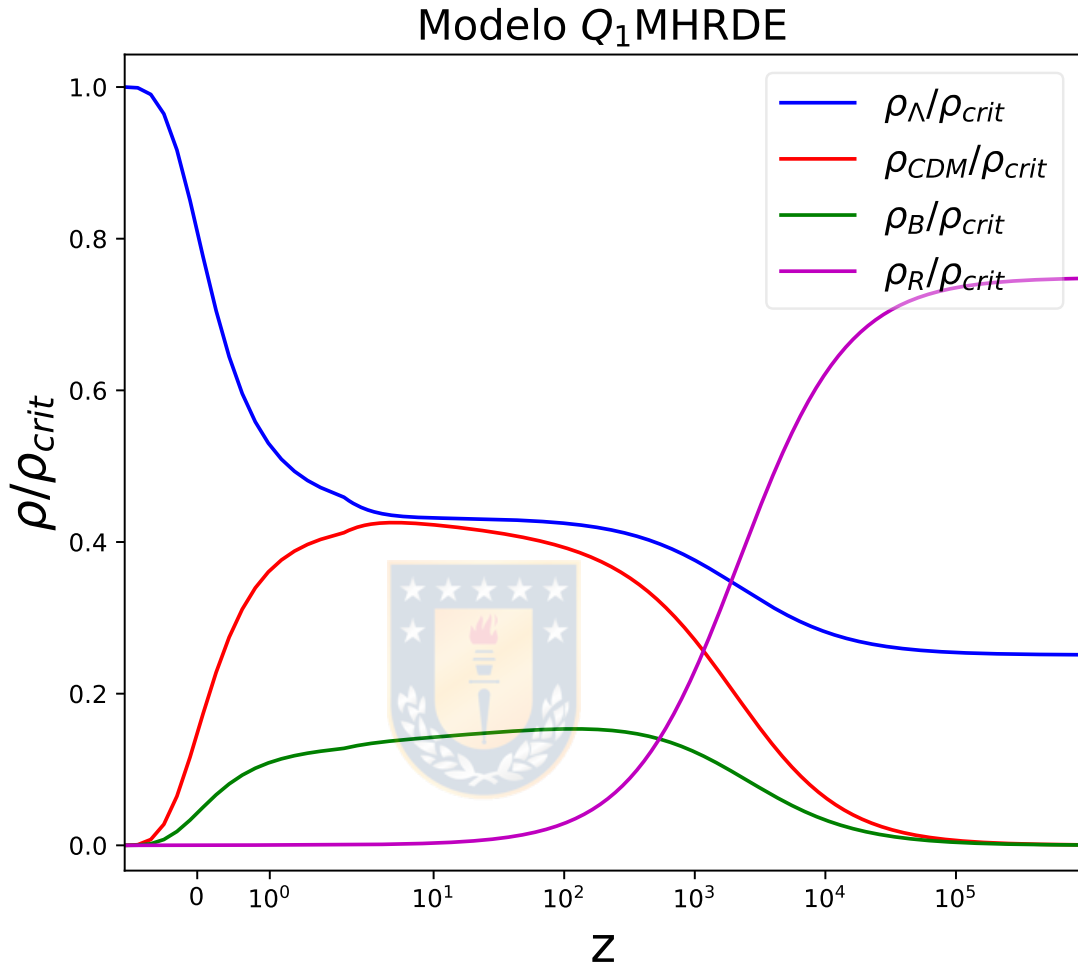


Ilustración 5.6: Evolución de las componentes del Universo entre los rangos $-1 \lesssim z \lesssim 10^6$ para el modelo cosmológico Q_1 MHRDE (ver sección 3.7.5) usando el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.

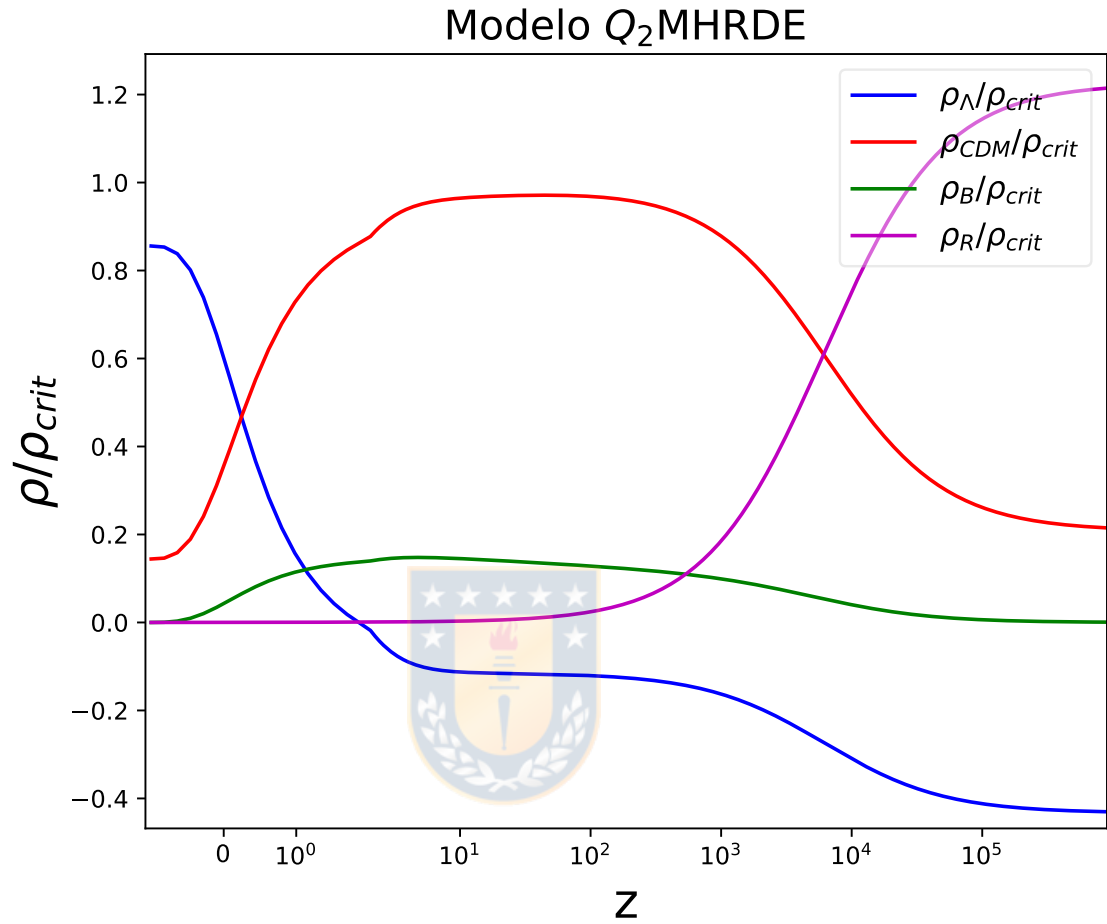


Ilustración 5.7: Evolución de las componentes del Universo entre los rangos $-1 \lesssim z \lesssim 10^6$ para el modelo cosmológico Q_2 MHRDE usando el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.

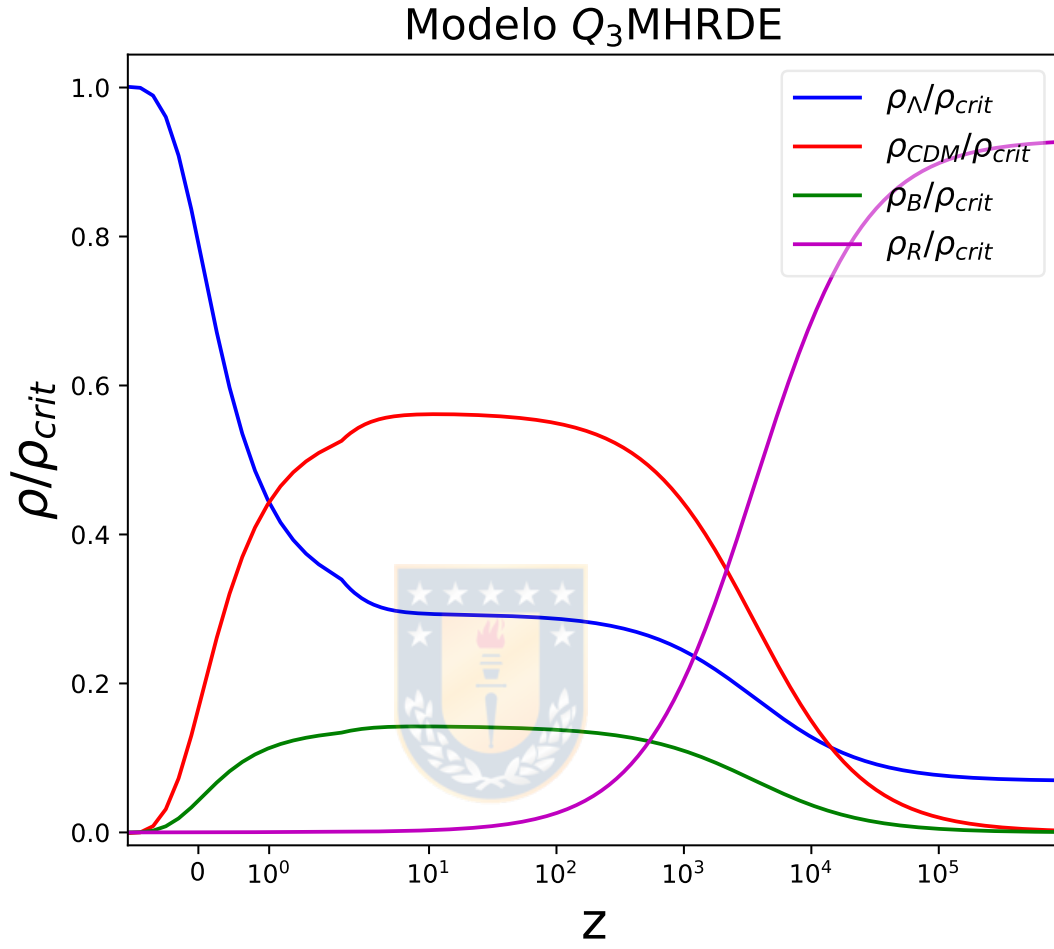


Ilustración 5.8: Evolución de las componentes del Universo entre los rangos $-1 \lesssim z \lesssim 10^6$ para el modelo cosmológico Q_3 MHRDE usando el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.

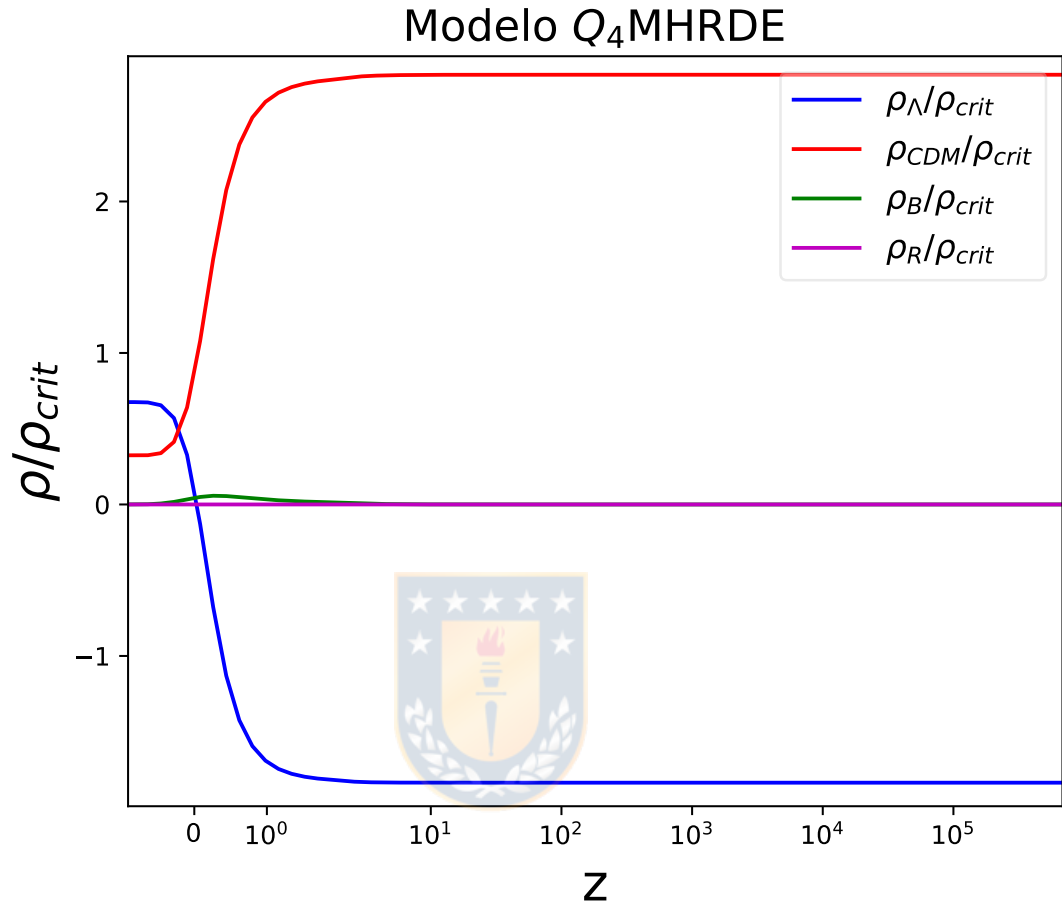


Ilustración 5.9: Evolución de las componentes del Universo entre los rangos $-1 \lesssim z \lesssim 10^6$ para el modelo cosmológico Q_4 MHRDE usando el mejor ajuste encontrado en la tabla 5.1 para los datos SET2 (ver tabla 4.7). Fuente: Elaboración propia.

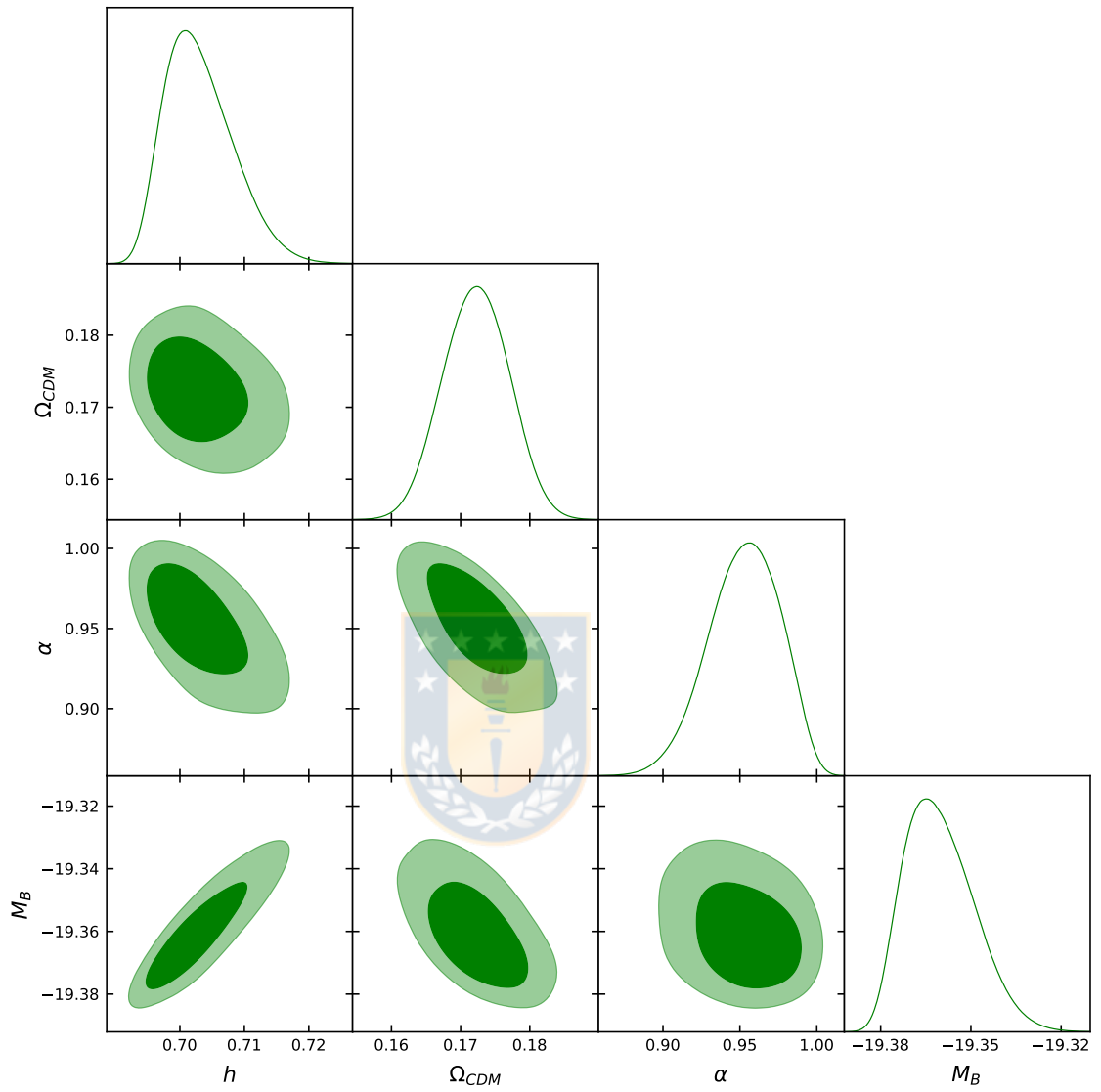


Ilustración 5.10: Gráfico de contornos de los parámetros cosmológicos correspondientes al modelo HRDE (ver sección 3.7.3) para los datos SET2 (ver tabla 4.7). La región oscura corresponde al LC 1σ (68%), la región clara corresponde al LC 2σ (95%). Fuente: Elaboración propia.

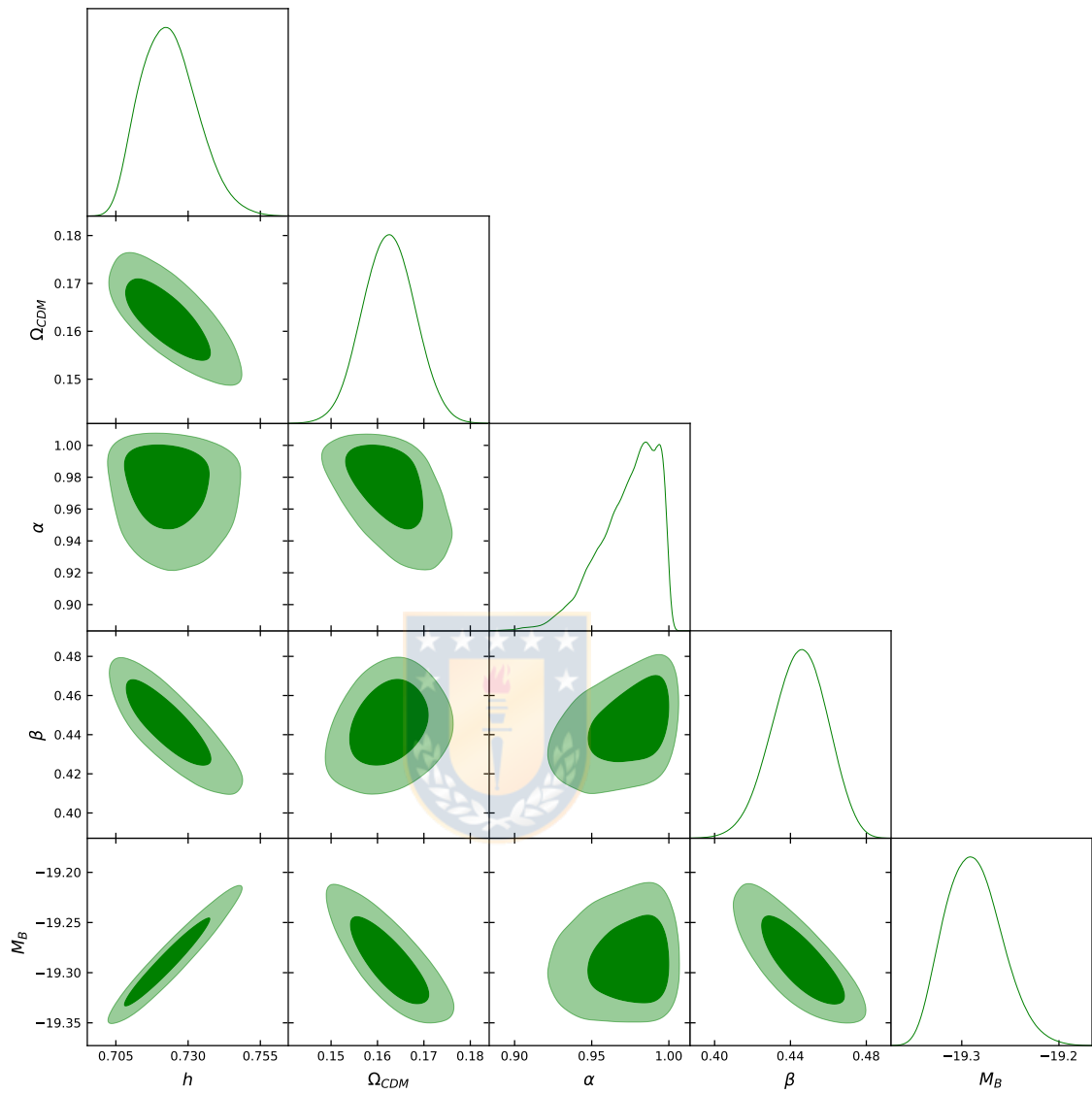


Ilustración 5.11: Gráfico de contornos de los parámetros cosmológicos correspondientes al modelo MHRDE (ver sección 3.7.4) para los datos SET2 (ver tabla 4.7). La región oscura corresponde al LC 1σ (68%), la región clara corresponde al LC 2σ (95%). Fuente: Elaboración propia

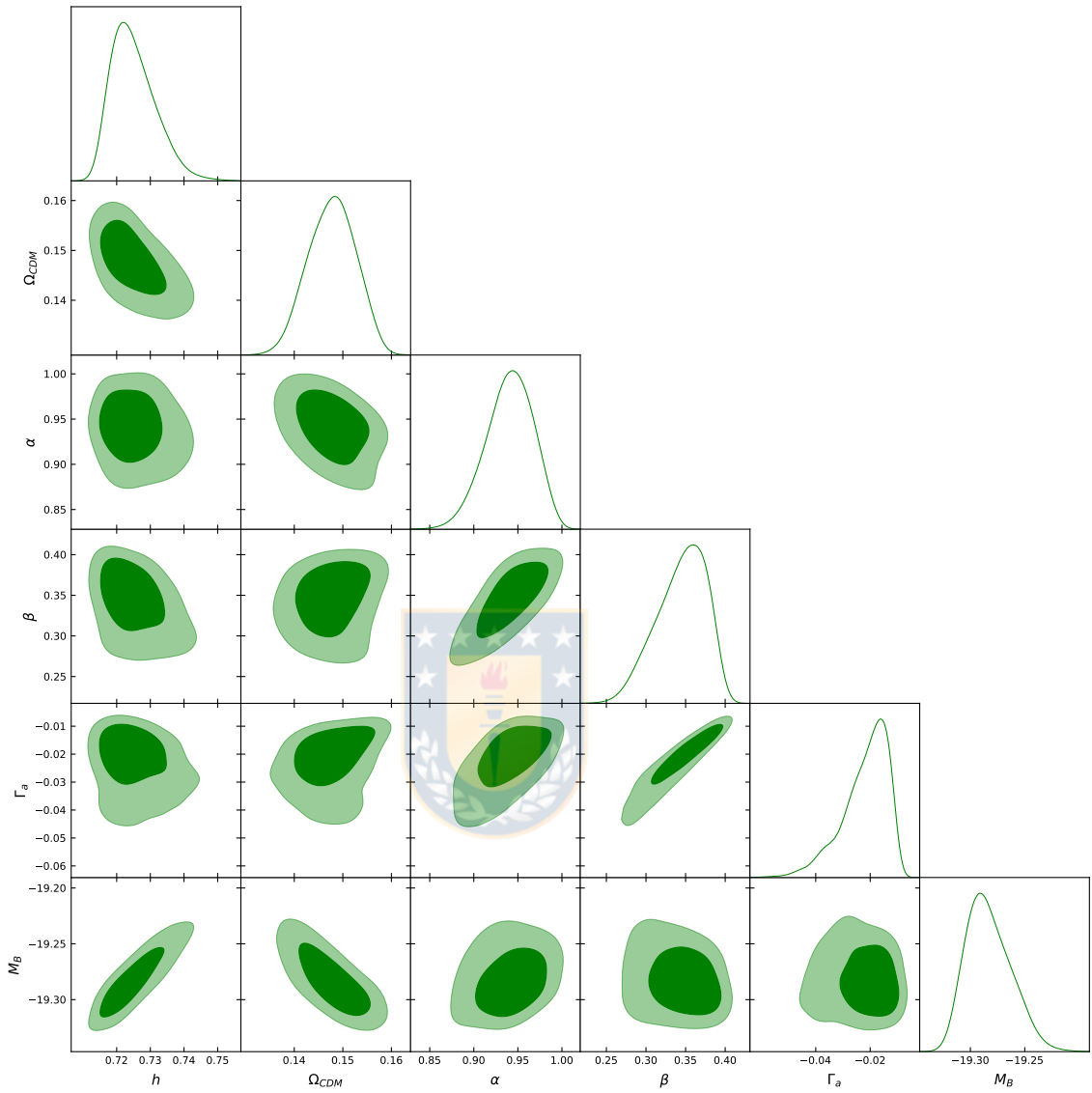


Ilustración 5.12: Gráfico de contornos de los parámetros cosmológicos correspondientes al modelo Q_1 MHRDE (ver sección 3.7.5) para los datos SET2 (ver tabla 4.7). La región oscura corresponde al LC 1σ (68%), la región clara corresponde al LC 2σ (95%). Fuente: Elaboración propia.

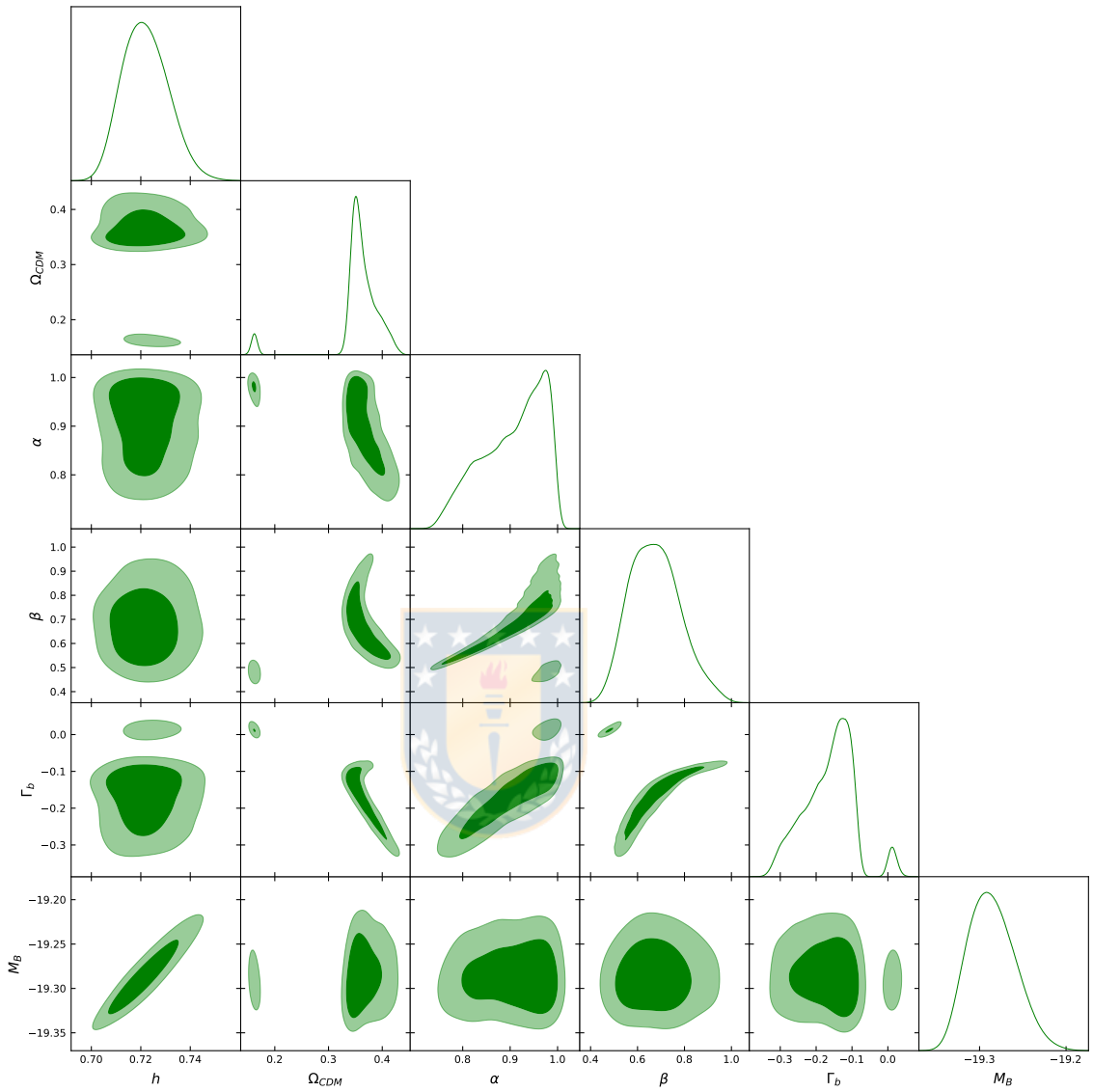


Ilustración 5.13: Gráfico de contornos de los parámetros cosmológicos correspondientes al modelo Q_2 MHRDE (ver sección 3.7.5) para los datos SET2 (ver tabla 4.7). La región oscura corresponde al LC 1σ (68%), la región clara corresponde al LC 2σ (95%). Fuente: Elaboración propia.

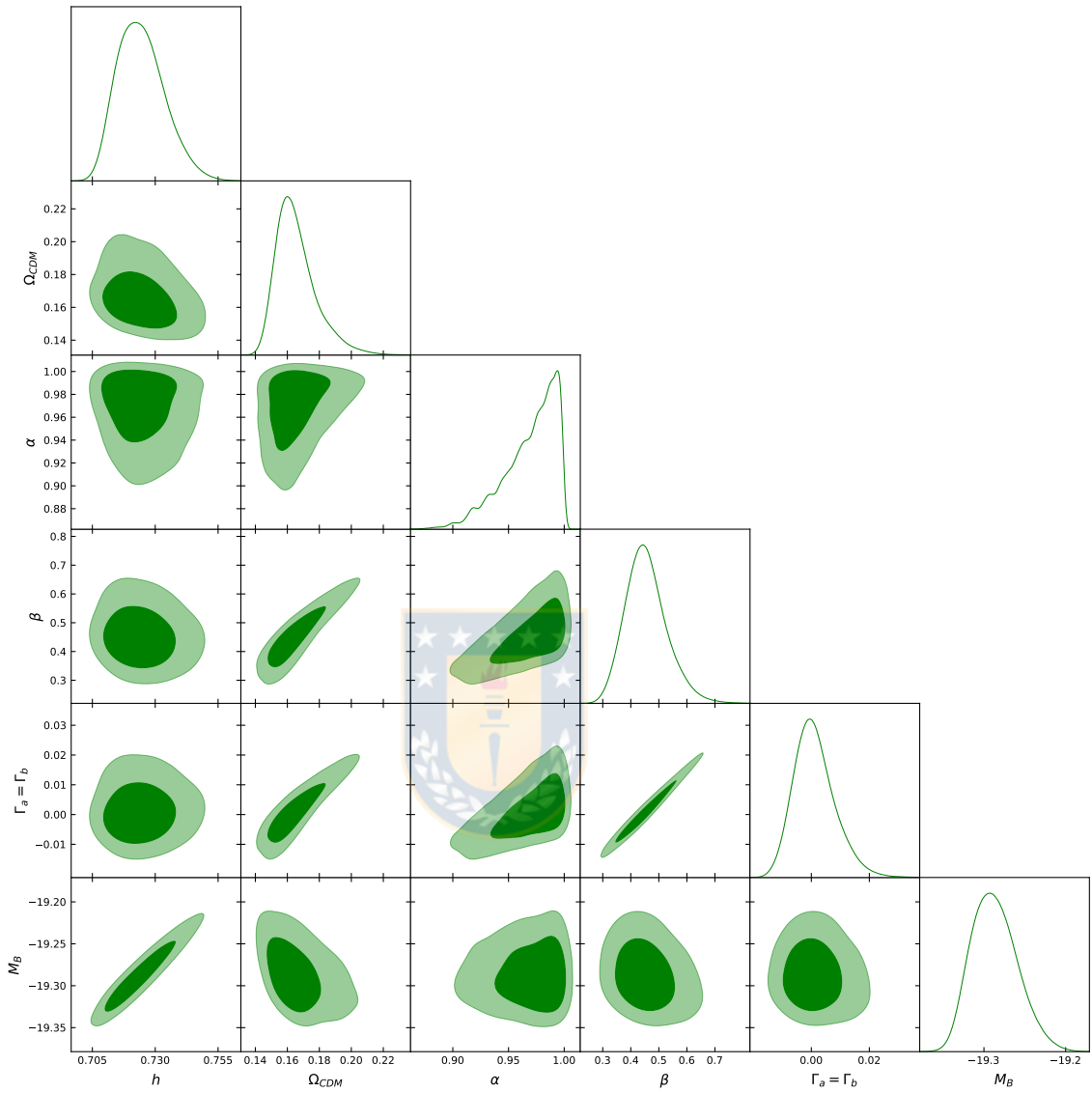


Ilustración 5.14: Gráfico de contornos de los parámetros cosmológicos correspondientes al modelo $Q_3\text{MHRDE}$ (ver sección 3.7.5) para los datos SET2 (ver tabla 4.7). La región oscura corresponde al LC 1σ (68%), la región clara corresponde al LC 2σ (95%). Fuente: Elaboración propia.

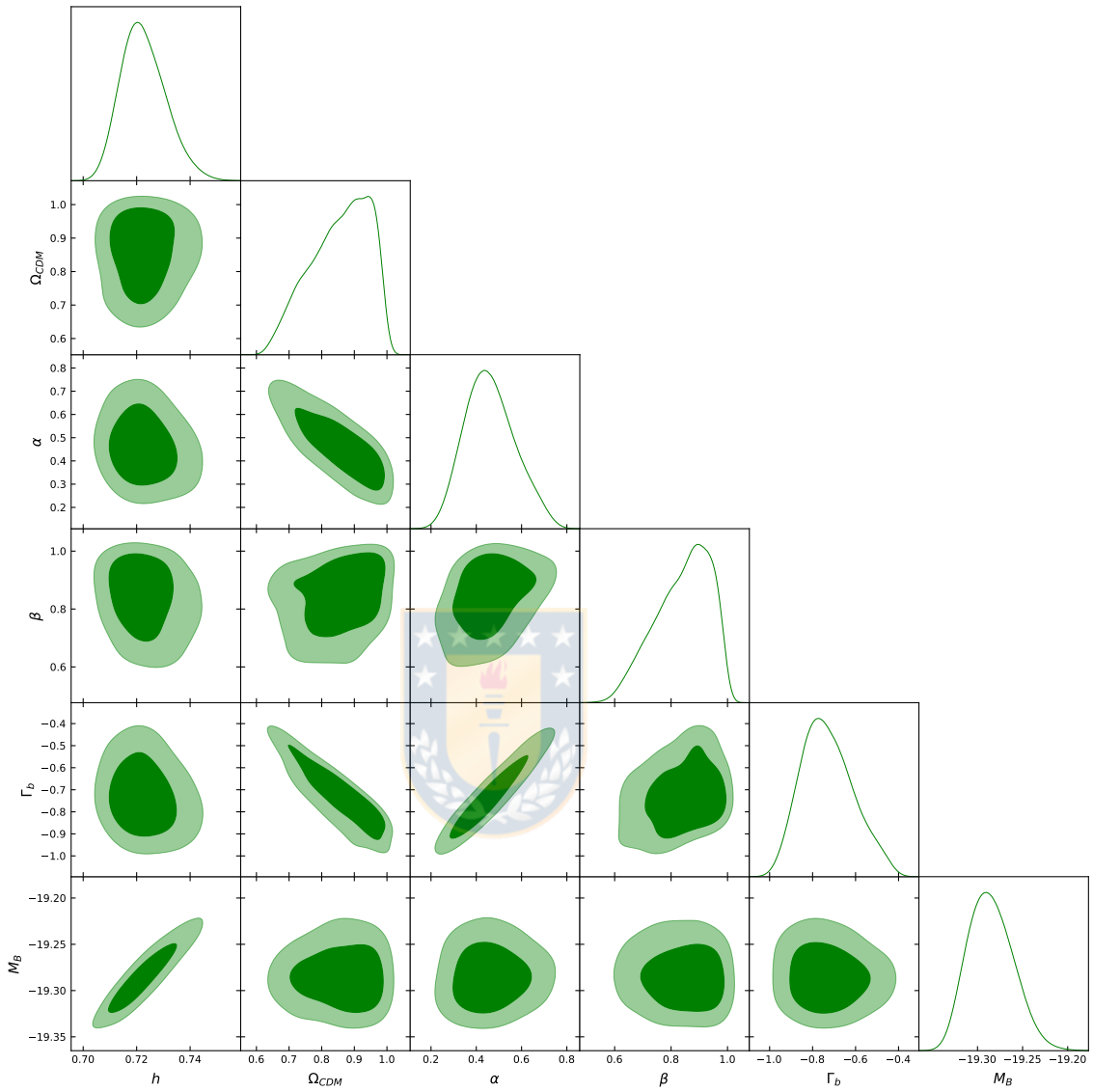


Ilustración 5.15: Gráfico de contornos de los parámetros cosmológicos correspondientes al modelo Q_4 MHRDE (ver sección 3.7.5) para los datos SET2 (ver tabla 4.7). La región oscura corresponde al LC 1σ (68%), la región clara corresponde al LC 2σ (95%). Fuente: Elaboración propia.

Conclusión

En este trabajo se contrastaron observacionalmente distintos modelos de energía oscura holográfica basados en el escalar de Ricci tanto para modelos sin interacción HRDE y MHRDE como modelos con interacción lineal entre el sector oscuro de la forma $Q = 3H(\Gamma_a\rho_{CDM} + \Gamma_b\rho_\Lambda)$, donde los modelos $\Gamma_a = 0$, $\Gamma_b = 0$, $\Gamma_a = \Gamma_b$ y $\Gamma_a \neq 0$, $\Gamma_b \neq 0$ corresponden a los modelos Q_1 MHRDE, Q_2 MHRDE, Q_3 MHRDE y Q_4 MHRDE, respectivamente. En la sección 3.7 obtuvimos soluciones analíticas para los escenarios de energía oscura holográfica y se encontraron expresiones para la función de desaceleración, la función de coincidencia y la función de estado para la energía oscura. Por medio de los datos de 1048 supernovas tipo Ia de la compilación Pantheon para la reciente historia del Universo, los datos de Cronómetros Cósicos para la evolución de la función H de manera independiente del modelo cosmológico, el dato CMB para la escala del tamaño del horizonte de sonido en la superficie de último *scattering* y los datos BAO para las señales isotrópicas y anisotrópicas de la señales de las oscilaciones acústicas de los bariones vista en los mapas de distribución de galaxias, se estimaron los parámetros cosmológicos de los distintos modelos estudiados mediante la inferencia bayesiana (ver tabla 5.1). Por medio de la evidencia se realizó la comparación bayesiana entre los modelos holográficos y el modelo Λ CDM, usando la escala de Jeffreys (ver tabla 4.1) como interpretación empírica de la evidencia. Para los datos Cronómetros Cósicos se encontró una débil evidencia a favor para los modelos MHRDE, Q_2 MHRDE y Q_3 MHRDE en comparación al modelo Λ CDM. Para los datos Pantheon se encontró una débil evidencia en contra de los modelos HRDE, Q_1 MHRDE, Q_2 MHRDE y Q_4 MHRDE en comparación al modelo Λ CDM. Para los datos SET1 (ver tabla 4.7) se encontró moderada evidencia en contra de los modelos Q_1 MHRDE y Q_4 MHRDE y una fuerte evidencia en contra del modelo Q_2 MHRDE. Cuando se considera el total de los datos empleados en este trabajo SET2 (ver tabla 4.7) se encuentra una fuerte evidencia en contra de los modelos HRDE, Q_1 MHRDE, Q_3 MHRDE y Q_4 MHRDE en comparación al modelo Λ CDM, mientras que los modelos MHRDE y Q_2 MHRDE muestran una moderada evidencia en contra en comparación al modelo Λ CDM. Por otro lado se encontró que los modelos Q_2 MHRDE y Q_4 MHRDE alivian el problema de la coincidencia $r_\infty \sim O(10^{-1})$, siendo estos los modelos de energía oscura que poseen densidad de energía negativa para ciertos intervalos de tiempo. Debido a que la densidad de energía oscura

está vinculada a una característica geométrica del espacio-tiempo $\rho_\Lambda(H, \dot{H})$, no existe restricción a priori, que prohíba valores negativos para está. Finalmente para encontrar mas evidencia que favorezca (desfavorezca) a los modelos holográficos es necesario considerar datos de formación de estructura y anisotropías (perturbaciones lineales a los modelos holográficos) con el fin de poder considerar o bien descartar estos modelos como viables en comparación al modelo Λ CDM.



Bibliografía

- [1] N. Aghanim et al. “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters”. In: (July 2018). arXiv: [1807.06209](https://arxiv.org/abs/1807.06209) [[astro-ph.CO](#)].
- [2] Adam G. Riess et al. “Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM”. In: *Astrophys. J.* 876.1 (2019), p. 85. DOI: [10.3847/1538-4357/ab1422](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab1422). arXiv: [1903.07603](https://arxiv.org/abs/1903.07603) [[astro-ph.CO](#)].
- [3] Changjun Gao et al. “A Holographic Dark Energy Model from Ricci Scalar Curvature”. In: *Phys. Rev. D* 79 (2009), p. 043511. DOI: [10.1103/PhysRevD.79.043511](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.043511). arXiv: [0712.1394](https://arxiv.org/abs/0712.1394) [[astro-ph](#)].
- [4] L.N. Granda and A. Oliveros. “Infrared cut-off proposal for the Holographic density”. In: *Phys. Lett. B* 669 (2008), pp. 275–277. DOI: [10.1016/j.physletb.2008.10.017](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.10.017). arXiv: [0810.3149](https://arxiv.org/abs/0810.3149) [[gr-qc](#)].
- [5] Roberto Trotta. “Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology”. In: *Contemp. Phys.* 49 (2008), pp. 71–104. DOI: [10.1080/00107510802066753](https://doi.org/10.1080/00107510802066753). arXiv: [0803.4089](https://arxiv.org/abs/0803.4089) [[astro-ph](#)].
- [6] Edwin Hubble. “A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae”. In: *Proc. Nat. Acad. Sci.* 15 (1929), pp. 168–173. DOI: [10.1073/pnas.15.3.168](https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168).
- [7] Arno A. Penzias and Robert Woodrow Wilson. “A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s”. In: *Astrophys. J.* 142 (1965), pp. 419–421. DOI: [10.1086/148307](https://doi.org/10.1086/148307).
- [8] D.J. Fixsen. “The Temperature of the Cosmic Microwave Background”. In: *Astrophys. J.* 707 (2009), pp. 916–920. DOI: [10.1088/0004-637X/707/2/916](https://doi.org/10.1088/0004-637X/707/2/916). arXiv: [0911.1955](https://arxiv.org/abs/0911.1955) [[astro-ph.CO](#)].
- [9] WMAP. “Nine Year Microwave Sky Image”. In: (2018). URL: <https://map.gsfc.nasa.gov/media/121238/index.html>.
- [10] S. Perlmutter et al. “Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae”. In: *Astrophys. J.* 517 (1999), pp. 565–586. DOI: [10.1086/307221](https://doi.org/10.1086/307221). arXiv: [astro-ph/9812133](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9812133).

- [11] Adam G. Riess et al. “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”. In: *Astron. J.* 116 (1998), pp. 1009–1038. DOI: [10.1086/300499](https://doi.org/10.1086/300499). arXiv: [astro-ph/9805201](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9805201).
- [12] David H. Weinberg et al. “Observational Probes of Cosmic Acceleration”. In: *Phys. Rept.* 530 (2013), pp. 87–255. DOI: [10.1016/j.physrep.2013.05.001](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2013.05.001). arXiv: [1201.2434](https://arxiv.org/abs/1201.2434) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
- [13] P.J.E. Peebles. “Large scale background temperature and mass fluctuations due to scale invariant primeval perturbations”. In: *Astrophys. J.* 263 (1982), pp. L1–L5. DOI: [10.1086/183911](https://doi.org/10.1086/183911).
- [14] Steven Weinberg. “The Cosmological Constant Problem”. In: *Rev. Mod. Phys.* 61 (1989), pp. 1–23. DOI: [10.1103/RevModPhys.61.1](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.61.1).
- [15] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. “Dynamics of dark energy”. In: *Int. J. Mod. Phys. D* 15 (2006), pp. 1753–1936. DOI: [10.1142/S021827180600942X](https://doi.org/10.1142/S021827180600942X). arXiv: [hep-th/0603057](https://arxiv.org/abs/hep-th/0603057).
- [16] Jacob D. Bekenstein. “Black holes and entropy”. In: *Phys. Rev. D* 7 (1973), pp. 2333–2346. DOI: [10.1103/PhysRevD.7.2333](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333).
- [17] Jacob D. Bekenstein. “Generalized second law of thermodynamics in black hole physics”. In: *Phys. Rev. D* 9 (1974), pp. 3292–3300. DOI: [10.1103/PhysRevD.9.3292](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3292).
- [18] Jacob D. Bekenstein. “A Universal Upper Bound on the Entropy to Energy Ratio for Bounded Systems”. In: *Phys. Rev. D* 23 (1981), p. 287. DOI: [10.1103/PhysRevD.23.287](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.287).
- [19] Jacob D. Bekenstein. “Entropy bounds and black hole remnants”. In: *Phys. Rev. D* 49 (1994), pp. 1912–1921. DOI: [10.1103/PhysRevD.49.1912](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.1912). arXiv: [gr-qc/9307035](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9307035).
- [20] Leonard Susskind. “The World as a hologram”. In: *J. Math. Phys.* 36 (1995), pp. 6377–6396. DOI: [10.1063/1.531249](https://doi.org/10.1063/1.531249). arXiv: [hep-th/9409089](https://arxiv.org/abs/hep-th/9409089).
- [21] W. Fischler and Leonard Susskind. “Holography and cosmology”. In: (June 1998). arXiv: [hep-th/9806039](https://arxiv.org/abs/hep-th/9806039).
- [22] Andrew G. Cohen, David B. Kaplan, and Ann E. Nelson. “Effective field theory, black holes, and the cosmological constant”. In: *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999), pp. 4971–4974. DOI: [10.1103/PhysRevLett.82.4971](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.4971). arXiv: [hep-th/9803132](https://arxiv.org/abs/hep-th/9803132).
- [23] Miao Li. “A Model of holographic dark energy”. In: *Phys. Lett. B* 603 (2004), p. 1. DOI: [10.1016/j.physletb.2004.10.014](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2004.10.014). arXiv: [hep-th/0403127](https://arxiv.org/abs/hep-th/0403127).
- [24] Luca Amendola. “Coupled quintessence”. In: *Phys. Rev. D* 62 (2000), p. 043511. DOI: [10.1103/PhysRevD.62.043511](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.043511). arXiv: [astro-ph/9908023](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9908023).

- [25] Winfried Zimdahl and Diego Pavon. “Interacting quintessence”. In: *Phys. Lett. B* 521 (2001), pp. 133–138. DOI: [10.1016/S0370-2693\(01\)01174-1](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(01)01174-1). arXiv: [astro-ph/0105479](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0105479).
- [26] Luis P. Chimento. “Linear and nonlinear interactions in the dark sector”. In: *Phys. Rev. D* 81 (2010), p. 043525. DOI: [10.1103/PhysRevD.81.043525](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.043525). arXiv: [0911.5687](https://arxiv.org/abs/0911.5687) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph).[CO](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
- [27] P.C. Ferreira, J.C. Carvalho, and J.S. Alcaniz. “Probing interaction in the dark sector”. In: *Phys. Rev. D* 87.8 (2013), p. 087301. DOI: [10.1103/PhysRevD.87.087301](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.087301). arXiv: [1212.2492](https://arxiv.org/abs/1212.2492) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph).[CO](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
- [28] Sergio del Campo, Ramon Herrera, and Diego Pavon. “Interacting models may be key to solve the cosmic coincidence problem”. In: *JCAP* 01 (2009), p. 020. DOI: [10.1088/1475-7516/2009/01/020](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2009/01/020). arXiv: [0812.2210](https://arxiv.org/abs/0812.2210) [[gr-qc](https://arxiv.org/abs/gr-qc)].
- [29] Winfried Zimdahl and Diego Pavon. “Interacting quintessence”. In: *Phys. Lett. B* 521 (2001), pp. 133–138. DOI: [10.1016/S0370-2693\(01\)01174-1](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(01)01174-1). arXiv: [astro-ph/0105479](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0105479).
- [30] Eleonora Di Valentino, Alessandro Melchiorri, and Olga Mena. “Can interacting dark energy solve the H_0 tension?” In: *Phys. Rev. D* 96.4 (2017), p. 043503. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.043503](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.043503). arXiv: [1704.08342](https://arxiv.org/abs/1704.08342) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph).[CO](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
- [31] Hassan Amirhashchi and Anil Kumar Yadav. “Interacting Dark Sectors in Anisotropic Universe: Observational Constraints and H_0 Tension”. In: (Jan. 2020). arXiv: [2001.03775](https://arxiv.org/abs/2001.03775) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph).[CO](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
- [32] Suresh Kumar, Rafael C. Nunes, and Santosh Kumar Yadav. “Dark sector interaction: a remedy of the tensions between CMB and LSS data”. In: *Eur. Phys. J. C* 79.7 (2019), p. 576. DOI: [10.1140/epjc/s10052-019-7087-7](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-7087-7). arXiv: [1903.04865](https://arxiv.org/abs/1903.04865) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph).[CO](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
- [33] Juan Magaña et al. “A magnified glance into the dark sector: probing cosmological models with strong lensing in A1689”. In: *Astrophys. J.* 813.1 (2015), p. 69. DOI: [10.1088/0004-637X/813/1/69](https://doi.org/10.1088/0004-637X/813/1/69). arXiv: [1509.08162](https://arxiv.org/abs/1509.08162) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph).[CO](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
- [34] Miao Li et al. “Holographic dark energy models: A comparison from the latest observational data”. In: *JCAP* 06 (2009), p. 036. DOI: [10.1088/1475-7516/2009/06/036](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2009/06/036). arXiv: [0904.0928](https://arxiv.org/abs/0904.0928) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph).[CO](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
- [35] Tian-Fu Fu et al. “Holographic Ricci dark energy: Interacting model and cosmological constraints”. In: *Eur. Phys. J. C* 72 (2012), p. 1932. DOI: [10.1140/epjc/s10052-012-1932-2](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-1932-2). arXiv: [1112.2350](https://arxiv.org/abs/1112.2350) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph).[CO](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
- [36] Luis P. Chimento, Monica Forte, and Martin G. Richarte. “Modified holographic Ricci dark energy coupled to interacting dark matter and a non interacting baryonic component”. In: *Eur. Phys. J. C* 73.1 (2013), p. 2285. DOI: [10.1140/epjc/s10052-013-2285-1](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-013-2285-1). arXiv: [1301.2737](https://arxiv.org/abs/1301.2737) [[gr-qc](https://arxiv.org/abs/gr-qc)].

- [37] Masashi Suwa and Takeshi Nihei. “Observational constraints on the interacting Ricci dark energy model”. In: *Phys. Rev. D* 81 (2010), p. 023519. DOI: [10.1103/PhysRevD.81.023519](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.023519). arXiv: [0911.4810](https://arxiv.org/abs/0911.4810) [astro-ph.CO].
- [38] S. Chattopadhyay and A. Pasqua. “Various aspects of interacting modified holographic Ricci dark energy”. In: *Indian J. Phys.* 87 (2013), pp. 1053–1057. DOI: [10.1007/s12648-013-0328-y](https://doi.org/10.1007/s12648-013-0328-y).
- [39] F. Arevalo et al. “Interacting Ricci-like holographic dark energy”. In: *Astrophys. Space Sci.* 352 (2014), pp. 899–907. DOI: [10.1007/s10509-014-1946-3](https://doi.org/10.1007/s10509-014-1946-3). arXiv: [1308.5007](https://arxiv.org/abs/1308.5007) [gr-qc].
- [40] Masashi Suwa and Takeshi Nihei. “Observational constraints on the interacting Ricci dark energy model”. In: *Phys. Rev. D* 81 (2010), p. 023519. DOI: [10.1103/PhysRevD.81.023519](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.023519). arXiv: [0911.4810](https://arxiv.org/abs/0911.4810) [astro-ph.CO].
- [41] Antonella Cid et al. “Bayesian Comparison of Interacting Scenarios”. In: *JCAP* 03 (2019), p. 030. DOI: [10.1088/1475-7516/2019/03/030](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/03/030). arXiv: [1805.02107](https://arxiv.org/abs/1805.02107) [astro-ph.CO].
- [42] D.M. Scolnic et al. “The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from the Combined Pantheon Sample”. In: *Astrophys. J.* 859.2 (2018), p. 101. DOI: [10.3847/1538-4357/aab9bb](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aab9bb). arXiv: [1710.00845](https://arxiv.org/abs/1710.00845) [astro-ph.CO].
- [43] Michele. Moresco et al. “A 6% measurement of the Hubble parameter at $z \sim 0.45$: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration”. In: *JCAP* 05 (2016), p. 014. DOI: [10.1088/1475-7516/2016/05/014](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/05/014). arXiv: [1601.01701](https://arxiv.org/abs/1601.01701) [astro-ph.CO].
- [44] Shadab Alam et al. “The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 470.3 (2017), pp. 2617–2652. DOI: [10.1093/mnras/stx721](https://doi.org/10.1093/mnras/stx721). arXiv: [1607.03155](https://arxiv.org/abs/1607.03155) [astro-ph.CO].
- [45] Hélion du Mas des Bourboux et al. “Baryon acoustic oscillations from the complete SDSS-III Ly α -quasar cross-correlation function at $z = 2.4$ ”. In: *Astron. Astrophys.* 608 (2017), A130. DOI: [10.1051/0004-6361/201731731](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201731731). arXiv: [1708.02225](https://arxiv.org/abs/1708.02225) [astro-ph.CO].
- [46] Florian Beutler et al. “The 6dF Galaxy Survey: Baryon Acoustic Oscillations and the Local Hubble Constant”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 416 (2011), pp. 3017–3032. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2011.19250.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19250.x). arXiv: [1106.3366](https://arxiv.org/abs/1106.3366) [astro-ph.CO].
- [47] Ashley J. Ross et al. “The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample – I. A 4 per cent distance measure at $z = 0.15$ ”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 449.1 (2015), pp. 835–847. DOI: [10.1093/mnras/stv154](https://doi.org/10.1093/mnras/stv154). arXiv: [1409.3242](https://arxiv.org/abs/1409.3242) [astro-ph.CO].

- [48] Metin Ata et al. “The clustering of the SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 quasar sample: first measurement of baryon acoustic oscillations between redshift 0.8 and 2.2”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 473.4 (2018), pp. 4773–4794. DOI: [10.1093/mnras/stx2630](https://doi.org/10.1093/mnras/stx2630). arXiv: [1705.06373](https://arxiv.org/abs/1705.06373) [[astro-ph.CO](#)].
- [49] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. CRC Press, 2017.
- [50] Albert Einstein. “On the electrodynamics of moving bodies”. In: *Annalen Phys.* 17 (1905). [Annalen Phys.14,194(2005)], pp. 891–921. DOI: [10.1002/andp.200590006](https://doi.org/10.1002/andp.200590006).
- [51] Ray DInverno. *Introducing Einsteins relativity*. Clarendon Press, 2008.
- [52] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2015.
- [53] Albert Einstein. “Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity”. In: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1917 (1917), pp. 142–152.
- [54] Vicent J. Martinez. “The Large Scale Structure in the Universe: From Power-Laws to Acoustic Peaks”. In: 665 (2009), p. 269. DOI: [10.1007/978-3-540-44767-2_10](https://doi.org/10.1007/978-3-540-44767-2_10). arXiv: [0804.1536](https://arxiv.org/abs/0804.1536) [[astro-ph](#)].
- [55] John C. Mather et al. “Calibrator design for the COBE far infrared absolute spectrophotometer (FIRAS)”. In: *Astrophys. J.* 512 (1999), pp. 511–520. DOI: [10.1086/306805](https://doi.org/10.1086/306805). arXiv: [astro-ph/9810373](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9810373).
- [56] P. J. E. Peebles. *Principles of physical cosmology*. Princeton University Press, 1993.
- [57] VA Rubakov DS Gorbunov. *Imtroduction to the theory of the early universe: cosmological perturbations and inflationary theory*. WORLD SCIENTIFIC PUB, 2019.
- [58] Daniel J. Eisenstein et al. “Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies”. In: *Astrophys. J.* 633 (2005), pp. 560–574. DOI: [10.1086/466512](https://doi.org/10.1086/466512). arXiv: [astro-ph/0501171](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0501171).
- [59] Max Tegmark et al. “Cosmological Constraints from the SDSS Luminous Red Galaxies”. In: *Phys. Rev. D* 74 (2006), p. 123507. DOI: [10.1103/PhysRevD.74.123507](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.123507). arXiv: [astro-ph/0608632](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0608632).
- [60] P. de Bernardis et al. “A Flat universe from high resolution maps of the cosmic microwave background radiation”. In: *Nature* 404 (2000), pp. 955–959. DOI: [10.1038/35010035](https://doi.org/10.1038/35010035). arXiv: [astro-ph/0004404](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0004404).
- [61] Mario Ballardini, William Luke Matthewson, and Roy Maartens. “Constraining primordial non-Gaussianity using two galaxy surveys and CMB lensing”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 489.2 (2019), pp. 1950–1956. DOI: [10.1093/mnras/stz2258](https://doi.org/10.1093/mnras/stz2258). arXiv: [1906.04730](https://arxiv.org/abs/1906.04730) [[astro-ph.CO](#)].

- [62] Kazuya Koyama, Roy Maartens, and Yong-Seon Song. “Velocities as a probe of dark sector interactions”. In: *JCAP* 10 (2009), p. 017. DOI: [10.1088/1475-7516/2009/10/017](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2009/10/017). arXiv: [0907.2126](https://arxiv.org/abs/0907.2126) [[astro-ph.CO](#)].
- [63] Sergio del Campo et al. “Cosmology with Ricci dark energy”. In: *Phys. Rev. D* 87.12 (2013), p. 123002. DOI: [10.1103/PhysRevD.87.123002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.123002). arXiv: [1303.3436](https://arxiv.org/abs/1303.3436) [[astro-ph.CO](#)].
- [64] William H. Press. *Numerical recipes: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 2007.
- [65] John Skilling. In: *AIP Publishing* (2004). URL: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1835238>.
- [66] D. Scolnic et al. “SUPERCAL: CROSS-CALIBRATION OF MULTIPLE PHOTOMETRIC SYSTEMS TO IMPROVE COSMOLOGICAL MEASUREMENTS WITH TYPE Ia SUPERNOVAE”. In: *Astrophys. J.* 815.2 (2015), p. 117. DOI: [10.1088/0004-637X/815/2/117](https://doi.org/10.1088/0004-637X/815/2/117). arXiv: [1508.05361](https://arxiv.org/abs/1508.05361) [[astro-ph.IM](#)].
- [67] Masao Sako et al. “The Data Release of the Sloan Digital Sky Survey-II Supernova Survey”. In: *Publ. Astron. Soc. Pac.* 130.988 (2018), p. 064002. DOI: [10.1088/1538-3873/aab4e0](https://doi.org/10.1088/1538-3873/aab4e0). arXiv: [1401.3317](https://arxiv.org/abs/1401.3317) [[astro-ph.CO](#)].
- [68] A. Conley et al. “Supernova Constraints and Systematic Uncertainties from the First 3 Years of the Supernova Legacy Survey”. In: *Astrophys. J. Suppl.* 192 (2011), p. 1. DOI: [10.1088/0067-0049/192/1/1](https://doi.org/10.1088/0067-0049/192/1/1). arXiv: [1104.1443](https://arxiv.org/abs/1104.1443) [[astro-ph.CO](#)].
- [69] J. Guy et al. “The Supernova Legacy Survey 3-year sample: Type Ia Supernovae photometric distances and cosmological constraints”. In: *Astron. Astrophys.* 523 (2010), A7. DOI: [10.1051/0004-6361/201014468](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201014468). arXiv: [1010.4743](https://arxiv.org/abs/1010.4743) [[astro-ph.CO](#)].
- [70] M. Betoule et al. “Improved Photometric Calibration of the SNLS and the SDSS Supernova Surveys”. In: *Astron. Astrophys.* 552 (2013), A124. DOI: [10.1051/0004-6361/201220610](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220610). arXiv: [1212.4864](https://arxiv.org/abs/1212.4864) [[astro-ph.CO](#)].
- [71] Ralph C. Bohlin, Karl D. Gordon, and P. -E. Tremblay. “Techniques and Review of Absolute Flux Calibration from the Ultraviolet to the Mid-Infrared”. In: *Publ. Astron. Soc. Pac.* 126.942 (2016), p. 711. DOI: [10.1086/677655](https://doi.org/10.1086/677655). arXiv: [1406.1707](https://arxiv.org/abs/1406.1707) [[astro-ph.IM](#)].
- [72] Raul Jimenez and Abraham Loeb. “Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages”. In: *Astrophys. J.* 573 (2002), pp. 37–42. DOI: [10.1086/340549](https://doi.org/10.1086/340549). arXiv: [astro-ph/0106145](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0106145).
- [73] Licia Verde, Pavlos Protopapas, and Raul Jimenez. “The expansion rate of the intermediate Universe in light of Planck”. In: *Phys. Dark Univ.* 5-6 (2014), pp. 307–314. DOI: [10.1016/j.dark.2014.09.003](https://doi.org/10.1016/j.dark.2014.09.003). arXiv: [1403.2181](https://arxiv.org/abs/1403.2181) [[astro-ph.CO](#)].

- [74] M. Moresco et al. “Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to $z \sim 1.1$ from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers”. In: *JCAP* 08 (2012), p. 006. DOI: [10.1088/1475-7516/2012/08/006](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2012/08/006). arXiv: [1201.3609](https://arxiv.org/abs/1201.3609) [[astro-ph.CO](#)].
- [75] Cong Zhang et al. “Four new observational $H(z)$ data from luminous red galaxies in the Sloan Digital Sky Survey data release seven”. In: *Res. Astron. Astrophys.* 14.10 (2014), pp. 1221–1233. DOI: [10.1088/1674-4527/14/10/002](https://doi.org/10.1088/1674-4527/14/10/002). arXiv: [1207.4541](https://arxiv.org/abs/1207.4541) [[astro-ph.CO](#)].
- [76] Joan Simon, Licia Verde, and Raul Jimenez. “Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential”. In: *Phys. Rev. D* 71 (2005), p. 123001. DOI: [10.1103/PhysRevD.71.123001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.123001). arXiv: [astro-ph/0412269](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0412269).
- [77] Daniel Stern et al. “Cosmic Chronometers: Constraining the Equation of State of Dark Energy. I: $H(z)$ Measurements”. In: *JCAP* 02 (2010), p. 008. DOI: [10.1088/1475-7516/2010/02/008](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2010/02/008). arXiv: [0907.3149](https://arxiv.org/abs/0907.3149) [[astro-ph.CO](#)].
- [78] Jarah Evslin, Anjan A Sen, and Ruchika. “Price of shifting the Hubble constant”. In: *Phys. Rev. D* 97.10 (2018), p. 103511. DOI: [10.1103/PhysRevD.97.103511](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.103511). arXiv: [1711.01051](https://arxiv.org/abs/1711.01051) [[astro-ph.CO](#)].
- [79] Gianpiero Mangano et al. “Relic neutrino decoupling including flavor oscillations”. In: *Nucl. Phys. B* 729 (2005), pp. 221–234. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2005.09.041](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2005.09.041). arXiv: [hep-ph/0506164](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0506164).
- [80] J. Buchner et al. “X-ray spectral modelling of the AGN obscuring region in the CDFS: Bayesian model selection and catalogue”. In: *Astron. Astrophys.* 564 (2014), A125. DOI: [10.1051/0004-6361/201322971](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201322971). arXiv: [1402.0004](https://arxiv.org/abs/1402.0004) [[astro-ph.HE](#)].
- [81] Antony Lewis. “GetDist: a Python package for analysing Monte Carlo samples”. In: (Oct. 2019). arXiv: [1910.13970](https://arxiv.org/abs/1910.13970) [[astro-ph.IM](#)].