Universidad de Concepción
Dirección de Postgrado
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas - Programa de Magister en Matemática

Topologías Estrictas en un Espacio de Funciones y una Representación Integral para Operadores Débilmente Compactos

ANGEL DANIEL BARRÍA COMICHEO
CONCEPCIÓN-CHILE
2011

Profesor Guía: José Aguayo Garrido
Dpto. de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Introducción.

En el año 1958 R.C Buck ([5]) introdujo la noción de topología estricta en el espacio de todas las funciones a valores reales, continuas y acotadas, con dominio en un espacio localmente compacto. Entre los años 1967 y 1972 diferentes generalizaciones de esta topología, entregadas por D.H. Fremlin, A.C.M. Van Rooij y F.D. Sentilles ([9, 27, 24]), fueron definidas en el espacio $C_b(X)$ de todas las funciones a valores reales, continuas y acotadas, con dominio en un espacio X completamente regular. En la literatura, estas topologías son denotadas por β_0, β y β_1. Sentilles logró una identificación de los duales $(C_b(X),\beta_0)'$, $(C_b(X),\beta)'$ y $(C_b(X),\beta_1)'$ con los espacios de medida estudiados por V.S. Varadarajan ([28]) $M_t(X)$, $M_\tau(X)$ y $M_\sigma(X)$ respectivamente, mediante una representación integral de las funcionales en el sentido Riesz. En 1976 A. Katsaras ([14]) generaliza estas topologías al espacio $C_{rc}(X,E)$ de todas las funciones a valores en un espacio localmente convexo Hausdorff E, continuas, de rango relativamente compacto y con dominio en un espacio completamente regular X. La generalización de la topología β_0 en este espacio fue denotada por $\beta_{\mathscr{F}}$. Katsaras mostró que los conjuntos acotados respecto a la topología $\beta_{\mathscr{F}}$ coinciden con los conjuntos uniformemente acotados y también entregó una representación integral de las funcionales pertenecientes a $(C_{rc}(X,E),\beta_{\mathscr{F}})'$ respecto a un espacio de medidas vectoriales. Luego en 1986, esta topología fue generalizada por J. Zafarani ([31]) al espacio $C_b(X,E)$ de las funciones acotadas y continuas con dominio en un espacio completamente regular X y a valores en un espacio localmente convexo Hausdorff E. Esta nueva topología fue denotada por $\beta_{\mathcal{P}}$. El objetivo de esta tesis es desarrollar y complementar el estudio del espacio $(C_b(X,E),\beta_{\mathcal{P}})$ presentado en [31] y estudiar la representación de su dual como un espacio de medidas en base a [14] y [8]. También se planea contribuir en esta teoría mostrando una representación integral de los operadores débilmente compactos sobre el espacio $(C_b(X,E), \beta_{\mathcal{P}})$.

Este documento se estructura de la siguiente forma: en el Capítulo 1 se presentan las definiciones y notaciones de los espacios de funciones y de las topologías que se estudiarán. También se presentan los conceptos básicos sobre conjuntos y medidas de Baire.

En el Capítulo 2 se muestran condiciones necesarias y suficientes para que las diversas topologías definidas en $C_b(X,E)$ coincidan. Se muestra que un subconjunto de $C_b(X,E)$ es $\beta_{\mathcal{P}}$-acotado si y solo si es τ_u-acotado. Se logra identificar a los espacios E y $(C_b(X), \gamma_{\mathcal{P}})$ como subespacios $\beta_{\mathcal{P}}$-cerrados de $C_b(X,E)$ y se prueba la $\beta_{\mathcal{P}}$-densidad de $C_b(X) \otimes E$. Se muestran condiciones necesarias y suficientes para que el espacio $(C_b(X,E), \beta_{\mathcal{P}})$ sea barrelado, cuasibarrelado, DF-espacio, gDF-espacio, bornológico entre otros. Se estudian las condiciones necesarias y suficientes para que el espacio $(C_b(X,E), \beta_{\mathcal{P}})$ sea separable, completo, cuasicompleto y secuencialmente completo. También se logra una caracterización de los conjuntos relativamente $\beta_{\mathcal{P}}$-compactos. Se finaliza el capítulo mostrando diferentes caracterizaciones de la topología β_p a través de diversas bases de vecindades de cero.

En el Capítulo 3 se introducen los conceptos de funcional $\mathcal{P}_p$-tight, medida $\mathcal{P}_p$-tight y operador $\mathcal{P}_p^q$-tight. Se identifica la $\beta_{\mathcal{P}}$-continuidad de operadores y funcionales lineales sobre $C_b(X,E)$ con las condiciones $\mathcal{P}_p^q$-tight y $\mathcal{P}_p$-tight respectivamente. Luego, se muestra una definición equivalente de la integral para funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$, respecto a medidas de Baire, utilizando redes convergentes en el sentido de sumas de Riemman. Este concepto de integración se generaliza para funciones del espacio $C_b(X,E)$, respecto a las medidas vectoriales $\mathcal{P}_p$-tight. Se muestra una representación integral de las funcionales lineales $\beta_{\mathcal{P}}$-continuas respecto a las medidas $\mathcal{P}_p$-tight y se caracterizan los conjuntos $\beta_{\mathcal{P}}$-equicontinuos. También se muestra que si F es un espacio Frechet, entonces, un operador del tipo $T : C_b(X) \to F$ es débilmente $(\tau_{\|\cdot\|}, \tau_F)$-compacto y $(\gamma_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-continuo si y solo si es débilmente $(\gamma_{\mathcal{P}}, \tau_F)$-compacto.