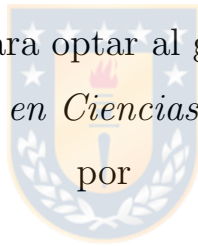




Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Exploración de efectos gravitacionales en información cuántica

Tesis para optar al grado de
Doctor en Ciencias Físicas
por



Marco Antonio Rivera Tapia

18 de marzo de 2021

Profesor Guía
Dr. Aldo Delgado

Resumen

Esta tesis se centra en la interfaz entre Mecánica Cuántica, en particular Información cuántica, y Relatividad General. En específico se presenta el estudio de la desigualdad CHSH en términos de los arreglos interferométricos Franson y abrazado bajo la acción de un campo gravitacional débil. En primer lugar estudiamos los efectos del campo gravitacional sobre los arreglos interferométricos cuando éstos son alimentados por fotones. Aquí vemos cómo el campo gravitatorio impone condiciones sobre la geometría de estos arreglos y así induce un entrelazamiento de caminos. Además, el campo gravitacional genera una disminución de la visibilidad interferométrica de dos fotones, la cual es función de la dilatación temporal. En el segundo lugar estudiamos el efecto del campo gravitacional para estos interferómetros, pero empleando partículas masivas con grados de libertad internos. Aquí mostramos que el campo gravitatorio impone condiciones sobre estos arreglos, nuevamente existe una disminución de la visibilidad interferométrica, pero en este caso está dada al trazar sobre los grados de libertad internos. En este caso nuevamente aparece una dependencia con respecto al número de niveles internos, la diferencia de energía de los niveles y la dilatación temporal gravitacional. Además se estudian los mismos arreglos, pero al considerar un haz de partículas con dispersión en momentum.

Finalmente estudiamos un método tomográfico autoguiado el cual se basa en un método de optimización para funciones reales sobre varia-

bles complejas. Este método de optimización, llamado Complex Perturbation Simultaneous Approximation, permite obtener valores más óptimos para el estado a caracterizar que los métodos previos con un número de recursos experimentales menores.



Abstract

This thesis focuses on the interface between Quantum Mechanics and General Relativity, particularly in the field of Quantum Information and General Relativity. Specifically, the study of the CHSH inequality is presented in terms of the Franson and Hugged interferometric arrangements under the action of a weak gravitational field. In the first place, we study the effects of the gravitational field on the interferometric arrays when they are fed by photons. Here we see how the gravitational field imposes conditions on the geometry of these arrays and thus induces an entangled quantum states. Besides, the gravitational field generates a decrease in the interferometric visibility of two photons, which is a function of the time dilation. Secondly we study the effect of the gravitational field for these interferometers, but now using massive particles with internal degrees of freedom. Here we show that the gravitational field imposes conditions on these arrays, there is again a decrease in interferometric visibility, but in this case it is given by tracing out on the internal degrees of freedom. In this case, a dependence appears again concerning the number of internal levels, the energy difference of the levels, and the gravitational time dilation. Furthermore, the same arrangements are studied, but now considering a beam of particles with dispersion in momentum. Finally, we study a self-guided tomographic method which is based on an optimization method for real functions on complex variables. This optimization method, called

Complex Perturbation Simultaneous Approximation, allows obtaining more optimal values for the state to be characterized than previous methods with a fewer experimental resources.



Índice general

1. Introducción	1
1.1. Organización de la tesis	6
2. Conceptos fundamentales	7
2.1. Introducción a la Mecánica Cuántica	7
2.1.1. Espacio de estados	7
2.1.2. Evolución	8
2.1.3. Medición cuántica	9
2.1.4. Sistemas compuestos	10
2.1.5. Formalismo matrices densidad	11
2.2. Desigualdad de Bell	14
2.3. Interferómetros Mach-Zhender, Franson y abrazado	18
2.3.1. Interferómetro Mach-Zhender	18
2.3.2. Interferómetro Franson y abrazado	20
2.4. Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil	25
2.4.1. Fotones interactuando bajo un campo gravitacional débil	25
2.4.2. Partículas con grados de libertad internos bajo la acción de un campo gravitacional débil	34
2.4.3. Cuantización Hamiltoniano Clásico	34

2.4.4. Corrimiento de fase para partículas con grados de libertad internos	39
2.4.5. Evolución de una partícula en interferómetro Mach-Zehnder	42
3. Interferómetros Franson y abrazado para un campo gravitacional débil: fotones	50
3.1. Arreglo interferométrico Franson	50
3.1.1. Arreglo interferométrico Franson	50
3.1.2. Arreglo interferométrico abrazado	55
3.2. Estado cuántico de dos fotones y probabilidad de detección en los arreglos Franson y abrazado en un campo gravitacional débil	57
3.3. Desigualdad CHSH	67
4. Interferómetros Franson y abrazado para un campo gravitacional débil: partículas masivas con grados de libertad internos	75
4.1. Probabilidad de detección y corrimiento de fase para los arreglos Franson y abrazado	76
4.1.1. Probabilidad de detección	76
4.1.2. Interferómetro Franson: Corrimiento de fase para los grados de libertad de la posición del centro de masa y evolución de grados de libertad internos	80
4.1.3. Arreglo interferométrico abrazado	82
4.2. Desigualdad CHSH	87
4.3. Pureza y Negatividad	98
4.3.1. Pureza	98
4.3.2. Criterio PPT y Negatividad	99
4.4. Partículas masivas con dispersión en momentum	103

5. Tomografía cuántica por medio de CSPA	110
5.1. Tomografía Cuántica Autoguiada	110
5.2. Tomografía cuántica a través de CSPA	113
5.2.1. Cálculo de Wirtinger	114
5.2.2. SPSA Complejo (CSPA)	116
5.2.3. Tomografía cuántica con CSPA	117
6. Conclusiones generales	123
A. Derivación desigualdad CHSH para un campo eléctrico en un campo débil	128
B. Métodos alternativos para el cálculo de la probabilidad de detección en un interferómetro Mach-Zehnder	134
B.0.1. Demostración I	134
B.0.2. Demostración II	135
Referencias	149



Índice de figuras

2.1. Configuración del experimento diseñado por Bohm. Una fuente emite un par de partículas con espín $1/2$, las cuales se dirigen a dos estaciones de medición. En cada estación, se realizan mediciones locales a lo largo de las direcciones a y b	16
2.2. Arreglo interferométrico de Franson. Una fuente generadora de fotones une a dos interferómetros Mach-Zehnder. Los detectores ubicados a la izquierda y derecha de la salida de los interferómetros son denotados por d_+ y d_-	20
2.3. Arreglo interferométrico abrazado. Una fuente generadora de fotones une a dos interferómetros Mach-Zehnder. Los detectores ubicados a la izquierda y derecha de la salida de los interferómetros están denotados por d_+ y d_-	21

2.4. Interferómetro Mach-Zehnder bajo campo gravitacional. El interferómetro consiste en dos beam-splitter (BS) y un par de detectores. La partícula ingresa al interferómetro en el potencial gravitacional $\phi(R)$ y se desplaza a través de los caminos γ_1 y γ_2 en una superposición de estados, para finalmente ser recombinada en el último BS, el cual está ubicado en un potencial $\phi(R + \Delta h)$. Los caminos son elegidos de manera que exista una diferencia de tiempo propio entre ellos. La distancia entre ambos brazos del interferómetro es Δh 29

2.5. Visibilidad interferométrica en términos del tiempo propio $\Delta\tau$ y la diferencia de energía ΔE entre los niveles del reloj. Si estamos presentes en una teoría no relativista, o en una teoría en donde los grados de libertad internos no se acoplen al potencial gravitacional, solo tendríamos un cambio de fase en términos de la energía en reposo y correcciones relativistas a la energía y así la visibilidad se mantendría máxima (líneas grises discontinuas), en cambio, si los grados de libertad internos se acoplan al potencial gravitacional, la visibilidad cambia periódicamente (línea azul continua envolvente) y existe además una corrección al corrimiento de fase producida por $\langle H_{\text{inn}} \rangle$ (línea azul continua). 49

3.1. Arreglo interferométrico Franson. Una fuente generadora de fotones une a dos interferómetros Mach-Zehnder. Esta fuente, y los caminos γ_1 y γ'_1 están localizados en un potencial gravitacional $\phi(R)$. Los segmentos horizontales de los caminos γ_2 y γ'_2 están localizados en un potencial gravitacional $\phi(R+h)$. L_1 y L'_1 indican las longitudes propias de los caminos horizontales γ_1 y γ'_1 , respectivamente. L_2 y L'_2 indican las longitudes propias de los segmentos horizontales de los caminos γ_2 y γ'_2 , respectivamente. H denota la longitud propia de los segmentos verticales de los caminos γ_2 y γ'_2 . Los caminos γ_1 y γ'_1 contienen líneas de retraso simbólicas para controlar la diferencia de longitudes propias entre los caminos γ_1 y γ_2 , y entre los caminos γ'_1 y γ'_2 . Las líneas de retraso se encuentran en el potencial gravitacional $\phi(R)$. Los detectores ubicados a la izquierda y derecha de la salida de los interferómetros están denotados por d_+ y d_- 51



3.2. Arreglo interferométrico abrazado. Una fuente generadora de fotones está localizada en un segmento perteneciente a dos interferómetros Mach-Zehnder. Esta fuente y los caminos γ_1 y γ'_1 están localizados en un potencial gravitacional $\phi(R + h)$. Los segmentos horizontales de los caminos γ_2 y γ'_2 están localizados en un potencial gravitacional $\phi(R + 2h)$ y $\phi(R)$, respectivamente. L_1 y L'_1 indican las longitudes propias de los caminos horizontales γ_1 y γ'_1 , respectivamente. L_2 y L'_2 indican la longitud propia de los segmentos horizontales de los caminos γ_2 y γ'_2 , respectivamente. H denota la longitud propia de los segmentos verticales de γ_2 y γ'_2 . Los caminos γ_1 y γ'_1 contienen retrasos temporales simbólicos para controlar las diferencias de longitud propia entre los caminos γ_1 y γ_2 , y entre los caminos γ'_1 y γ'_2 . Las líneas de retraso están en el potencial gravitacional $\phi(R + h)$. Los detectores a las salidas de los arreglos a la izquierda y derecha están indicados por d_+ y d_- 56

3.3. Probabilidad de detección $p_{+,+}$, de acuerdo a la ec. (3.42) en función del área propia $A = L'_2 H$, y visibilidad $V(\Delta\tau_\gamma) = \exp[-\Delta\tau_\gamma^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/4]$.
 (a) Arreglos Franson y abrazado con retrasos temporales $\Delta\tau_\gamma = L'_2 g H / c^3$. (b) Arreglo abrazado geoméricamente idéntico, balanceado y rotado para los retrasos temporales dado por las ecuaciones (3.36) y (3.37). Para ambas simulaciones $\alpha = \beta = 0$, $\lambda_1 = 806$ nm, $\lambda_2 = 706$ nm, y $\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2 = \delta\lambda$ con $\delta\lambda = 161,2$ nm (línea púrpura segmentada), $\delta\lambda = 322,4$ nm (línea roja punteada), y $\delta\lambda = 644,8$ nm (línea azul continua). Línea negra segmentada denota la probabilidad de detección de $1/4$ 65

- 3.4. Valor del funcional CHSH Σ de acuerdo a la ec. (3.52) para los arreglos Franson y abrazado bajo la condición (3.12), en función del área propia $A = L'_2 H$ y el ancho de banda del paquete de ondas $\delta\lambda$. Empleamos $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$, y $\lambda_1 = 806$ nm, y $\lambda_2 = 706$ nm. 70
- 3.5. Valor de Σ para un arreglo interferométrico en función del área propia $A = L'_2 H$, el tiempo propio $\Delta\tau_\gamma = L'_2 g H / c^3$, y visibilidad $V(\Delta\tau_\gamma) = \exp[-\Delta\tau_\gamma^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/4]$. (a) Arreglos Franson y abrazado balanceados bajo la condición (3.12) de acuerdo a (3.52). (b) Arreglo abrazado balanceado, geoméricamente equivalente y rotado de acuerdo a la ec. (3.53). Para (a) y (b) tenemos: $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$, $\lambda_1 = 806$ nm, $\lambda_2 = 706$ nm, y $\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2 = \delta\lambda$ con $\delta\lambda = 161,2$ nm (línea púrpura segmentada), $\delta\lambda = 322,4$ nm (línea roja punteada), y $\delta\lambda = 644,8$ nm (línea azul continua). Línea horizontal nega representa la violación máxima alcanzable $2\sqrt{2}$ para la desigualdad CHSH. 71
- 3.6. Valor de Σ para un arreglo Franson y abrazado balanceados bajo la condición dada por la ec. (3.12) en función de la longitud propia L'_2 y la altura propia H , acuerdo a la ec. (3.52), considerando $A = L'_2 H$. Hemos considerado $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$, $\lambda_1 = 806$ nm, $\lambda_2 = 706$ nm, y $\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2 = 644,8$ nm. 72

<p>3.7. Probabilidad de detección $p_{+,+}$ y Σ como una función del área propia $A = L'_2 H$, con la visibilidad $V(\Delta\tau_\gamma) = \exp[-\Delta\tau_\gamma^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/4]$, para una fuente SPDC de banda ultra-ancha ref. [1]. (a) Línea continua azul: $p_{+,+}$ para un interferómetro Franson y abrazado con retrasos temporales $\Delta\tau_\gamma = L'_2 g H / c^3$. Línea púrpura: $p_{+,+}$ para un arreglo abrazado, con los interferómetros Mach-Zehnder geoméricamente equivalentes, y balanceados, para los retrasos temporales dado por las ecs. (3.36) and (3.37). (b) Línea azul continua: Funcional CHSH para los arreglos Franson y abrazados balanceado bajo la condición (3.12) y ec. (3.52). Para (a) y (b) la fuente SPDC emplea un cristal SLT con una señales con longitud de onda $\lambda_1 = 3300$ nm, y $\lambda_2 = 995$ nm, dispersión $\delta\lambda_1 = 370$ nm y $\delta\lambda_2 = 34$ nm.</p>	73
<p>4.1. Arreglo interferométrico Franson. La fuente de partículas conecta a dos interferómetros Mach-Zehnder. La fuente y los caminos cortos (S) γ_1 y γ'_1 están localizados a un potencial gravitacional $\phi(R)$. Los segmentos horizontales de los caminos largos (L) γ_2 y γ'_2 están situados en un potencial gravitacional $\phi(R + \Delta h)$. Los detectores situados a la salida de los interferómetros Mach-Zehnder están indicados por +, -.</p>	76
<p>4.2. Probabilidad de detección $p_{+,+}$ para el arreglo Franson, para dos partículas con grados de libertad internos de dos niveles, en términos de la diferencia de tiempo propio de arribo $\Delta\tau$, y la diferencia de energía ΔE.</p>	83

4.3. Arreglo interferométrico abrazado. La fuente de partículas se sitúa en un segmento perteneciente a dos interferómetros Mach-Zehnder. La fuente de partículas y los caminos cortos (S) γ_1 y γ'_1 están localizados a un potencial gravitacional $\phi(R + \Delta h)$. Los segmentos horizontales para los caminos largos (L) γ_2 y γ'_2 están localizados a un potencial gravitacional $\phi(R+2\Delta h)$ y $\phi(R)$, respectivamente. Los detectores situados en los puertos de salida de los interferómetros Mach-Zehnder están indicados por $+$, $-$ 84

4.4. Probabilidad de detección $p_{\alpha\alpha}$ para el arreglo abrazado, en función de la diferencia de tiempo propio de arribo $\Delta\tau$, y la diferencia de niveles de energía ΔE , para dos partículas con grados de libertad internos de dos niveles. 86

4.5. Probabilidad de detección $p_{\alpha\alpha}$ para los arreglos Franson y abrazado, en función de la diferencia de tiempo propio de arribo $\Delta\tau$, y la diferencia de niveles de energía ΔE , para dos partículas con grados de libertad internos de dos niveles. Los valores de las fases locales se toman como cero. 87

4.6. Valor del funcional CHSH para el arreglo Franson, considerando dos partículas con grados de libertad internos de dos niveles, en función de la diferencia de tiempo propio de arribo $\Delta\tau$, y la diferencia de niveles de energía ΔE . Valor de las fases locales $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$ 90

4.7. Valor del funcional CHSH para el arreglo abrazado, considerando dos partículas con grados de libertad internos de dos niveles, en función de la diferencia de tiempo propio de arribo $\Delta\tau$, y la diferencia de niveles de energía ΔE . Valor de las fases locales $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$ 91

- 4.8. Valor del funcional CHSH para los arreglos Franson y abrazado, considerando dos partículas con grados de libertad internos de dos niveles, en función de la diferencia de tiempo propio de arribo $\Delta\tau$, y la diferencia de niveles de energía ΔE . Línea azul continua representa el funcional CHSH para el arreglo Franson, línea roja segmentada para el arreglo abrazado. Valor de las fases locales $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$ 92
- 4.9. Gráfico de líneas de contorno del funcional CHSH para los arreglos Franson y abrazado, en términos de la diferencia de energía ΔE , la diferencia de coordenada espacial vertical Δh y el intervalo de coordenada temporal ΔT . (a) funcional CHSH para el arreglo Franson dado por la ec. 4.25. (b) funcional CHSH para el arreglo abrazado, dado por la ec. 4.26. El rango de valores para ΔE corresponde a diferentes sistemas físicos (desde átomos y neutrones), para más detalles ver ref. [2]. Las fases locales tienen los valores $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$ 93
- 4.10. Valor del funcional CHSH, para los arreglos Franson y abrazado al considerar dos partículas con grados de libertad internos de 2 niveles. Línea azul continua representa al funcional CHSH para el arreglo Franson, línea roja punteada representa al arreglo interferométrico abrazado. Las fases locales tienen los valores $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$ 94
- 4.11. Funcional CHSH, para un sistema con grados de libertad internos de dos niveles, en términos de la velocidad inicial de las partículas, y el producto $\Delta h \Delta T$ [ms]. La velocidad inicial, para cada partícula que ingresa a los interferómetros Mach-Zehnder, es de 2200 [m/s]. Las fases locales tienen los valores $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$. 95

4.12. Funcional CHSH para un sistema de dos neutrones en términos de la masa de las partículas, y el producto $\Delta h \Delta T$ [ms]. La masa de cada neutrón es $1,6 \times 10^{-27}$ [kg]. Las fases locales tienen los valores $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$ 96

4.13. Valor del funcional CHSH para los arreglos Franson y abrazado, en términos de la energía E_0 del estado base del reloj, y el tiempo propio $\Delta\tau$ para la detección de la partícula. Línea azul continua representa el funcional CHSH para el arreglo Franson, y la línea roja continua representa al interferómetro abrazado. (a) y (b) para una partícula con grados de libertad internos de 4 niveles. (c) y (d) para una partícula con grados de libertad internos de 8 niveles. (e) y (f) partícula con grados de libertad internos de 20 niveles. Las fases locales tienen los valores $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$ 97

4.14. Negatividad logarítmica para los arreglos interferométricos Franson y abrazado en términos de la diferencia de tiempo propio $\Delta\tau$, y el estado base E_0 del reloj. Línea azul continua representa la negatividad logarítmica para un estado entrelazado con grados de libertad internos de 4 niveles. Línea roja segmentada para una partícula con grados de libertad internos de 8 niveles. Línea segmentada púrpura con grados de libertad internos de 16 niveles. 102

4.15. Intensidad normalizada en función al área A del interferómetro Mach-Zehnder. Elegimos un paquete de ondas con momentum $k_0 = 1$ 106

4.16. Intensidad normalizada en función del área efectiva de cada interferómetro Mach-Zehnder A , la masa de la partícula m . Consideramos un paquete de onda con $k_0 = 1$ 107

4.17. Valor de Σ para un paquete de ondas con dispersión en momentum para un hamiltoniano con correcciones relativistas, en términos del área A de los interferómetros Mach-Zehnder, y la masa de la partícula m . Para ver el comportamiento del funcional Σ , elegimos los valores del paquete de onda con número de onda $k_0 = 1$, $\sigma = 0,8$ (línea púrpura segmentada), $\sigma = 0,4$ (línea roja punteada), y $\sigma = 0,2$ (línea azul continua). 109

5.1. Infidelidad promedio \bar{I} , con promedio sobre el espacio de Hilbert con 10^4 pares de estados desconocidos y estados iniciales en función del número de iteraciones k para tomografía cuántica de un solo qubit a través de \mathbb{C} SPSA (línea continua roja) y SPSA (línea segmentada azul). áreas sombreadas indican la varianza alrededor del promedio. En el recuadro se exhibe la mediana y el rango intercuartil. Desde la parte superior hasta la inferior líneas continuas rojas (líneas segmentadas azules) corresponden a $N = 10, 10^2, 10^3$ y 10^4 . Para SPSA $\alpha = 1$ y $\gamma = 0,166$ y para \mathbb{C} SPSA $\alpha = 0,602$ and $\gamma = 0,101$. Para ambos métodos $A = 0, a = 3$ y $c = 0,1$ 120

5.2. Infidelidad promedio \bar{I} , calculada sobre 10^4 realizaciones, como función de la dimensión d del espacio de Hilbert después de $k = 100$ iteraciones. Líneas continuas azul, verde, y roja representan a \mathbb{C} SPSA (SPSA) para $N = 10, 10^2$ y 10^3 , respectivamente. Los demás valores como los considerados en la fig. 5.1. 120

5.3. Infidelidad promedio \bar{I} , calculada sobre 10^4 realizaciones, en función de la dimensión d del espacio de Hilbert y el número de iteraciones k para un ensemble de tamaño $N = 10^3$. Los demás valores corresponden a los empleados en la fig. 5.1. 121

5.4. Distribución de las infidelidades promedio \bar{I} para 10^6 realizaciones de SGQT (en azul) y CSPA (en rojo) para diversos número de detecciones. (a) y (b) distribución para 10 detecciones. (c) y (d) distribución para 1000 detecciones. (e) y (f) distribución 122



Capítulo 1

Introducción

Información cuántica es una de las áreas de la Física con más rápido crecimiento en la actualidad. Sus rangos de aplicabilidad van desde experimentos para establecer una comunicación segura a nivel satelital (ver ref. [3; 4; 5; 6; 7; 8; 9], hasta la creación de computadores cuánticos en la nube ref. [10]. En esta tesis nos centramos en dos campos en particular, en los efectos del campo gravitacional de acuerdo a la teoría de la Relatividad General, en particular en su aproximación de campo débil, sobre sistemas cuánticos, tanto para fotones como para partículas con masa. En la segunda parte nos centramos en la aplicación de un método de aproximación estocástica sobre los números complejos y su aplicación a tomografía cuántica.

La búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad es una de las tareas más ambiciosas de la Física moderna. Actualmente es posible dividir el campo de estudio en efectos del campo gravitacional a altas energías y la interacción del campo gravitacional en un límite no-relativista, el cual es mucho más accesible para la experimentación. En este último campo uno de los primeros experimentos fue el de Colella-Overhauser-Werner (COW ref. [11; 12]), quienes estudiaron el fenómeno de interferencia cuántica por medio de un interferómetro Mach-Zehnder considerando

la interacción de neutrones con un potencial gravitacional newtoniano. El aspecto esencial de este experimento es que los brazos del interferómetro se encuentran a distintos potenciales gravitacionales. El experimento COW muestra que el campo gravitacional newtoniano genera un corrimiento de fase, el cual tiene una analogía directa con el efecto Aharonov-Bohm ref. [2], con el rol de la masa de la partícula como carga y el potencial gravitatorio como el potencial eléctrico. Trabajos posteriores estudiaron correcciones al experimento COW ref. [13]. En el experimento COW el tiempo es absoluto y la interacción es con un potencial newtoniano. La inclusión de efectos relativistas puede hacerse de dos formas. En primer lugar podemos considerar la energía de la partícula y luego realizar una cuantización canónica. La segunda forma es obtener la ecuación de Klein-Gordon para el sistema en cuestión y desde ahí, mediante una aproximación WKB, encontrar una expresión para un hamiltoniano con correcciones relativistas. Al incluir correcciones relativistas es posible estudiar el efecto de la dilatación temporal gravitacional en los patrones de interferencia.

En dos artículos seminales Zych *et al.* ref. [2; 14] muestran cómo la dilatación temporal puede ser distinguida en sistemas cuánticos de manera concluyente. La observación clave de Zych *et al.* es considerar una formulación cuántica de la relación masa-energía de Einstein y así las partículas con grados de libertad internos se acoplan al potencial gravitacional. De esta forma en un experimento interferométrico veremos una disminución en la visibilidad interferométrica, la cual solo puede ser explicada a través de la dilatación temporal gravitacional. Bajo la hipótesis de la formulación cuántica de la relación masa-energía de Einstein también es posible estudiar una formulación cuántica del principio de equivalencia de Einstein para partículas con grados de libertad internos ref. [15]. En este contexto la dilatación temporal gravitacional puede ser considerada como un mecanismo de decoherencia cuántica ref. [16]. En el caso de los fotones en un campo gravitacional débil se pre-

sentan los mismos efectos, es decir, en un experimento interferométrico veremos la existencia de una disminución en el patrón de interferencia ref. [14], el cual es producto de la dilatación temporal gravitacional. En este mismo tipo de experimentos, es decir, considerando interferómetros de gran escala, es posible estudiar el principio de equivalencia de Einstein bajo un test óptico ref. [17]. Del mismo modo, es posible estudiar arreglos interferométricos capaces de detectar agujeros de gusano ref. [18], como además estudiar el efecto de la métrica de Gödel a través de la medición de un parámetro de rotación presente en dicha métrica al considerar un interferómetro tipo Sagnac ref. [19]. Debido a que este tipo de experimentos son a gran escala se hace necesario contar con satélites para la realización de dichas propuestas. En el año 2017 la república Popular China pone en órbita el satélite llamado Micius, el cual en su carga útil tiene una fuente de fotones entrelazados que permiten realizar experimentos con haces de luz cuántica. Este dispositivo ha permitido la realización de comunicaciones seguras entre Austria y la República Popular China así como también el estudio de la distribución de entrelazamiento a grandes distancias ref. [20].

El concepto de entrelazamiento ha sido clave para distinguir la Mecánica Cuántica de otras teorías alternativas. Una de las herramientas más exitosas para diferenciar la Mecánica Cuántica de otras teorías alternativas, tales como las teorías de variables ocultas es la Desigualdad de Bell ref. [21]. Para estas teorías de variables ocultas la Desigualdad de Bell predice una cota superior que es violada por las predicciones de la Mecánica Cuántica. Dicha violación es alcanzada por medio de estados cuánticos bipartitos maximalmente entrelazados. Si bien la Desigualdad de Bell ha sido ampliamente estudiada en plataformas experimentales situadas sobre la superficie de la Tierra, sigue siendo aún necesario entender qué ocurre si el campo gravitacional es considerado. Una de las primeras propuestas en este contexto fue la de Fuentes *et al.* ref. [22], en ésta se estudia el entrelazamiento

medido por un observador en caída libre. El marco que describe este fenómeno corresponde al de los modos de un campo escalar sin masa los que están entrelazados. En este estudio se muestra que el entrelazamiento se pierde a medida que la aceleración aumenta. Bajo este formalismo se han estudiado sistemas masivos ref. [23] y con espín ref. [24], y además se han propuesto esquemas de discriminación cuántica para poder distinguir entre los modos de un observador en reposo relativo o en caída libre ref. [25]. Otros estudios del entrelazamiento han extrapolado efectos cuánticos sobre métricas exóticas que contienen curvas tipo tiempo cerradas y métricas débilmente curvas, como en el caso de la métrica en las cercanías de la Tierra. En este caso se estudia cómo el entrelazamiento se pierde mediante un proceso de decoherencia inducido por el campo gravitacional ref. [9]. Si bien estos estudios se centran en los efectos del campo gravitacional sobre la distribución de entrelazamiento entre distintos observadores, hasta la fecha no se ha estudiado la generación de entrelazamiento mediante el campo gravitacional. Así, en esta tesis mostramos cómo crear entrelazamiento de camino empleando fotones y partículas masivas con grados de libertad internos. En este contexto el entrelazamiento es generado a través de los arreglos interferométricos Franson y abrazado. Para estos arreglos se muestra cómo la dilatación temporal gravitacional genera restricciones sobre la geometría de dichos arreglos (imponiendo condiciones sobre las longitudes propias de los brazos de los interferómetros) y los estados, de tal modo que se puede emplear el campo gravitacional para inducir el entrelazamiento.

Uno de los problemas fundamentales en información cuántica es la de caracterizar sistemas cuánticos. En palabras simples esto se describe como el proceso en que se infiere la descripción cuántica de un sistema físico, asignándole un estado cuántico. El proceso de tomografía es fundamental hoy en día para la descripción de los bits cuánticos, o *qubits* (por quantum bit), que corresponden a los bloques principales en información cuántica. Con ellos es posible realizar procesos desde

metrología cuántica, la que permite estimar parámetros con mayor precisión que los procesos clásicos de metrología, hasta computadores cuánticos. En particular, la correcta caracterización de los estados cuánticos es fundamental para lograr una coincidencia de las predicciones teóricas con los resultados experimentales, como por ejemplo en el caso de los arreglos interferométricos. Paradójicamente, a medida que aumentan el número de partículas el número total de mediciones y cálculos requeridos para caracterizar un estado cuántico y almacenar sus parámetros crecen exponencialmente. Los métodos estándar de tomografía requieren un conjunto de mediciones y un post-procesamiento de aquellas mediciones, y así es posible estimar el estado cuántico que describe la distribución de probabilidad obtenida. Este post-procesamiento puede ser eliminado considerando un algoritmo de optimización estocástico. Uno de los algoritmos empleados a sido el Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation (SPSA, por sus siglas en inglés), el cual al ser combinado con un método tomográfico permite estimar estados cuánticos sin necesidad de un post-procesamiento de las mediciones, además de ser robusto frente a errores estadísticos y experimentales. Por otro lado, ya que un qubit $\in \mathbb{C}^2$, en este caso el medir la distancia entre dos qubits puede ser considerada como una función real de variable compleja. Así, para la realización de un proceso tomográfico podemos considerar un algoritmo de optimización para funciones reales de variable compleja. Aquí consideramos entonces la extensión de SPSA a los números complejos. Este algoritmo se conoce como Complex Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation (CSPSA). Al aplicar este método tomográfico, sobre estados puros, se muestra que es mucho más eficiente emplear algoritmos de optimización para funciones reales de variable compleja que algoritmos de optimización sobre funciones reales.

1.1. Organización de la tesis

En el capítulo 1 se realiza una breve introducción al estado del arte del campo en que se contextualiza esta tesis.

En el capítulo 2 se estudian los conceptos básicos de la Mecánica Cuántica, la desigualdad de Bell y la desigualdad CHSH. Además, se introducen los interferómetros Mach-Zehnder, Franson y abrazado, los que son empleados para estudiar el fenómeno de interferencia cuántica y no-localidad, respectivamente. Posteriormente, en el mismo capítulo, se estudian los conceptos fundamentales para la interacción de sistemas cuánticos con un campo gravitacional débil; primero se estudia la interacción de los fotones con el campo gravitatorio, y finalmente la interacción del campo gravitatorio con partículas con grados de libertad internos. Para ambos sistemas se ejemplifica el efecto de tener diferencia de potencial gravitacional entre los brazos de un interferómetro Mach-Zehnder.

En el capítulo 3 se presenta el efecto del campo gravitacional débil en el estudio de no-localidad, en particular, en los arreglos interferométricos Franson y abrazado. Luego, en el capítulo 4 se estudian los mismos arreglos interferométricos, pero para partículas con grados de libertad internos.

Finalmente, en el capítulo 5 se estudia tomografía cuántica a través de un algoritmo de optimización estocástico para funciones de valores reales con variables complejas.

Capítulo 2

Conceptos fundamentales

En este capítulo presentaremos los conceptos fundamentales en los que se basa esta tesis. En primer lugar veremos una breve introducción a la Mecánica Cuántica, luego los interferómetros Mach-Zehnder, Franson y abrazado. Posteriormente veremos una de las técnicas empleadas en los procesos de interferencia de partículas masivas. Finalmente introduciremos las nociones básicas de tomografía.

2.1. Introducción a la Mecánica Cuántica

A continuación hacemos una breve introducción a la Mecánica Cuántica a través de cuatro postulados.

2.1.1. Espacio de estados

El primer postulado hace referencia al espacio matemático en el que se describen los sistemas cuánticos, y en el cual se pueden realizar las predicciones a observar en realizaciones experimentales:

P1 Un sistema físico aislado tiene asociado un espacio vectorial complejo con un producto interno, el cual es llamado un *espacio de Hilbert* \mathcal{H} . Este espacio

es conocido como espacio de estados del sistema. El sistema es descrito completamente por un vector estado, el cual es un vector unitario en el espacio estado del sistema.

Este postulado implica que la superposición de dos estados es un estado del sistema. Si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son estados posibles del sistema, entonces la superposición $|\psi\rangle = a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle$, en donde a_1 y a_2 son números complejos también es un estado del sistema. Además, el producto interno asocia un número complejo a dos estados arbitrarios

$$(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \langle\psi|\phi\rangle = \int dx \psi^*(x)\phi(x). \quad (2.1)$$

Un vector estado $|\psi\rangle$ es un vector normalizado en el espacio de Hilbert, es decir, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Éste también puede ser considerado como una clase de equivalencia, de este modo $|\psi\rangle$ define el mismo estado físico que $\exp(i\varphi)|\psi\rangle$.

2.1.2. Evolución

En esta sección describimos cómo evoluciona un sistema cuántico al considerar un sistema que no interactúa con otros.

P2 Un sistema cerrado evoluciona bajo la descripción de una transformación unitaria. Así, el estado $|\psi\rangle$ de un sistema a un tiempo t_i se relaciona con el estado $|\psi'\rangle$ del sistema en un tiempo t_f a través de un operador unitario U , que es función de los tiempos t_i y t_f . De este modo, la relación entre $|\psi'\rangle$ y $|\psi\rangle$ está dada por

$$|\psi'(t_f)\rangle = U(t_i, t_f)|\psi(t_i)\rangle. \quad (2.2)$$

Además la evolución temporal de un estado cuántico preserva la normalización del

estado asociado. Este postulado requiere que $|\psi\rangle$ obedezca una ecuación diferencial de la forma $i\hbar d|\psi(t)\rangle/dt = H|\psi(t)\rangle$, que es la ecuación de Schrödinger, con H el operador Hamiltoniano.

2.1.3. Medición cuántica

Como vimos en el postulado anterior, los sistemas cuánticos aislados evolucionan a través de una transformación unitaria, pero desde el punto de vista experimental siempre existe una interacción con el medio, así entonces el sistema no siempre está sujeto a una evolución unitaria. De este modo, definimos las mediciones cuánticas de la siguiente forma:

P3 Las mediciones cuánticas se describen por una colección de operadores de medición $\{M_j\}$, el cual actúa en el espacio de Hilbert del sistema que es medido. El índice j hace referencia al número de resultados que podrían ocurrir en un experimento. Si el estado del sistema cuántico en el instante previo a la medición es $|\psi\rangle$, entonces la probabilidad de obtener el resultado j está dada por

$$p(j) = \langle\psi|M_j^\dagger M_j|\psi\rangle, \quad (2.3)$$

y el estado post medición adopta la forma

$$|\psi_{\text{pm}}\rangle = \frac{M_j|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_j^\dagger M_j|\psi\rangle}}. \quad (2.4)$$

Además, los operadores de medición satisfacen la ecuación de completitud

$$\sum_j M_j^\dagger M_j = I. \quad (2.5)$$

Notemos que la relación de completitud expresa el hecho que las probabilidades tienen que sumar uno

$$1 = \sum_j p(j) = \sum_j \langle \psi | M_j^\dagger M_j | \psi \rangle. \quad (2.6)$$

De este postulado podemos inferir otro tipo de operadores de medición, los que son conocidos como medidas proyectivas. Una medida proyectiva se describe por un observable, O , el cual es un operador hermítico en el espacio de Hilbert del sistema observado. El observable tiene una descomposición espectral

$$O = \sum_j j P_j, \quad (2.7)$$

en donde P_j es el proyector en el espacio-propio de O con valor propio j . Los posibles resultados de las mediciones corresponden a los valores propios, j , del observable. El estado post medición está dado por

$$|\psi_{\text{pm}}\rangle = \frac{P_j |\psi\rangle}{\sqrt{p(j)}}, \quad (2.8)$$

con $p(j) = \langle \psi | P_j | \psi \rangle$ la probabilidad de obtener un resultado j al aplicar un proyector P_j .

2.1.4. Sistemas compuestos

Hasta el momento hemos estudiado solo sistemas formados por una sola partícula. En el caso de más partículas hablamos de sistemas compuestos. Estos se definen como:

- 4 El espacio estado de un sistema físico compuesto es el producto tensorial de cada espacio estado de los componentes físicos del sistema. Si los subsistemas

están numerados desde 1 hasta m , el espacio estado está dado por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_m. \quad (2.9)$$

Si cada subsistema está preparado en los estados $\{|\psi_k\rangle\}_{k=1,\dots,m}$, entonces el estado del sistema está descrito por

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_m\rangle. \quad (2.10)$$

Notemos que no todos los sistemas compuestos tienen la forma dada por (2.10), los cuales se conocen como estados separables, al no expresarse de esa forma éstos son llamados entrelazados. Por ejemplo, consideremos un sistema físico descrito por los estados $|u\rangle$ y $|v\rangle$. Un sistema compuesto separable tiene la forma

$$|\psi\rangle = |u\rangle \otimes |v\rangle, \quad (2.11)$$

en cambio, un estado entrelazado está descrito por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\rangle \otimes |v\rangle + |v\rangle \otimes |u\rangle). \quad (2.12)$$

Estos estados entrelazados han sido empleados en protocolos de teleportación cuántica, criptografía cuántica y test de no-localidad en Mecánica Cuántica. Este último es fuertemente estudiado en esta tesis.

2.1.5. Formalismo matrices densidad

Hasta el momento estudiamos los conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica a través del formalismo de vectores estado, pero es posible formular los postulados fundamentales en función de operadores densidad. Este formalismo es

útil cuando los sistemas cuánticos en estudio no son conocidos completamente. Así, supongamos que un sistema cuántico se encuentra en uno de los estados $|\psi_k\rangle$, en donde k es un índice, con una probabilidad respectiva p_k . Llamamos $\{p_k, |\psi_k\rangle\}$ a un conjunto (ensemble) de estados puros. Entonces, el operador densidad del sistema está definido por la ecuación

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|. \quad (2.13)$$

Cabe destacar que ec. (2.13) no necesariamente coincide con la descomposición espectral de ρ , y además k puede ser diferente a la dimensión del espacio de Hilbert \mathcal{H} .

Un operador ρ posee dos características usuales que lo asocian a un conjunto $\{p_k, |\psi_k\rangle\}$, sí y solo sí se satisfacen las condiciones:

- 1) $\text{Tr}\{\rho\} = 1$, es decir, la traza de un operador densidad es uno.
- 2) ρ es un operador definido semipositivo.

Las matrices densidad se pueden clasificar en dos tipos: dado un vector $|\psi\rangle$ de modo que $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, entonces el estado es llamado puro, con $\text{Tr}\{\rho^2\} = 1$. De otro modo, el estado es llamado estado mezcla, con $\text{Tr}\{\rho^2\} = 1/d$, con d la dimensión del estado mezcla.

Bajo el formalismo de matrices densidad podemos formular los postulados de la Mecánica Cuántica. Así, éstos se re-escriben como

P1 Un sistema físico aislado se asocia a un espacio de Hilbert \mathcal{H} conocido como espacio estado del sistema. El sistema es descrito por un operador densidad ρ . Si un sistema se encuentra en el estado ρ_k con probabilidad p_k , entonces el operador densidad que describe dicho sistema es $\sum_k p_k \rho_k$.

P2 La evolución de un sistema cuántico aislado se describe por una transformación unitaria. Así, el estado ρ del sistema a tiempo t_i se relaciona a un estado ρ' de un sistema a un tiempo t_f por una transformación unitaria $U(t_i, t_f)$ de la forma

$$\rho' = U(t_i, t_f)\rho U^\dagger(t_i, t_f). \quad (2.14)$$

P4 Mediciones cuánticas se describen a través de un conjunto de operadores de medición. Si ρ es un estado cuántico previo a una medición, entonces la probabilidad de obtener un resultado k está dada por

$$p(k) = \text{Tr} \left\{ M_k^\dagger M_k \rho \right\}, \quad (2.15)$$

y el estado ρ' después de la medición toma la forma

$$\rho' = \frac{M_k \rho M_k^\dagger}{\text{Tr} \left\{ M_k^\dagger M_k \rho \right\}}. \quad (2.16)$$

P4 El espacio estado de un sistema físico compuesto es el producto tensorial del espacio estado de cada uno de los componentes del sistema físico. Enumerando los sistemas desde 1 hasta l , en donde el sistema i -ésimo está preparado en el estado ρ_i , entonces el estado total del sistema está dado por

$$\rho' = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_l. \quad (2.17)$$

2.2. Desigualdad de Bell

En esta sección describimos la desigualdad de Bell tanto en su forma teórica, como en su formulación experimental a través de la desigualdad CHSH.

Para estudiar la desigualdad de Bell, consideremos el experimento propuesto por Bohm (ver ref. [26]). Vea la fig. (2.1) en la cual se emplea un sistema combinado de dos partículas con espín $1/2$, en donde denotamos el espín de cada partícula como A_i y B_j , e i, j denotan las direcciones en las cuales es medido el espín en cada parte. El sistema físico en estudio se genera a través del decaimiento de un mesón neutral π en un electrón y un positrón, así tenemos que la suma total es un estado de espín cero. Además, cuando éste es medido a lo largo de las direcciones $a = b$, los espines $A_a + B_b = 0$. Cada una de las partículas se propaga en direcciones opuestas, y se realiza una medición del espín de las partículas. Si un observador mide la componente del espín del electrón en la dirección unitaria a , y el otro observador mide la componente del espín del positrón a lo largo de la dirección b , el promedio del valor del producto de los espines $E(a, b) = a \cdot b$, para los detectores con orientaciones a y b . En el caso en que las orientaciones de los detectores sean paralelas ($a = b$) obtenemos $E(a, a) = -1$, en el caso en que sean anti-paralelas ($a = -b$) se obtiene $E(a, -a) = +1$. Este resultado es imposible de obtener con cualquier teoría local de variables ocultas.

En lo siguiente describimos el teorema de Bell ref. [21]. Para esto nos basamos en la descripción dada en ref. [27]. Los modelos Realistas, o de variables ocultas, son modelos probabilistas que se basan en tres pilares fundamentales. El primero es un espacio de muestra Γ , en el cual están todos los valores posibles de las variables ocultas. El segundo es una familia de eventos χ , la que es subconjunto de Γ , por ejemplo, el conjunto de variables ocultas en donde un valor específico de las mediciones va a ser obtenido (puede ser: algún valor que no controlemos o no entendamos bien). El último pilar corresponde a que χ debe ser medido

empleando una medida de probabilidad P , de tal modo que cada evento tiene una probabilidad bien definida. Dadas las variables aleatorias λ , su distribución ρ puede ser construida desde P . Así, los resultados del experimento se describen por variables aleatorias, $B(\lambda)$, las cuales toman elementos de las variables ocultas a los posibles resultados del experimento. Así, el valor esperado del resultado de un experimento está dado por

$$E(B) = \int_{\Gamma} B(\lambda) dP(\lambda) = \int_{\Gamma} B(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (2.18)$$

Para formular la desigualdad de Bell consideremos dos locaciones en las cuales se realizan mediciones. Tal como fue expresado en el párrafo anterior, cada locación presenta configuraciones locales a y b , respectivamente. De este modo, definimos los siguientes conceptos:

1. *Realismo*: los resultados de las mediciones pueden ser descritos por dos familias de variables aleatorias A y B , para cada lugar, respectivamente. Estas variables aleatorias dependen de las configuraciones locales a y b , y las variables ocultas λ . Así $A = A(a, b, \lambda)$ y $B = B(a, b, \lambda)$.
2. *Localidad*: los resultados de las mediciones son independientes de las configuraciones remotas, es decir,

$$\begin{aligned} A(a, \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} A(a, b_1, \lambda) = A(a, b_2, \lambda), \\ B(b, \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} B(a_1, b, \lambda) = B(a_2, b, \lambda). \end{aligned} \quad (2.19)$$

3. *Restricción de resultados*: los resultados de las mediciones son ± 1 , entonces

$$|A(a, \lambda)| = |B(b, \lambda)| = 1. \quad (2.20)$$

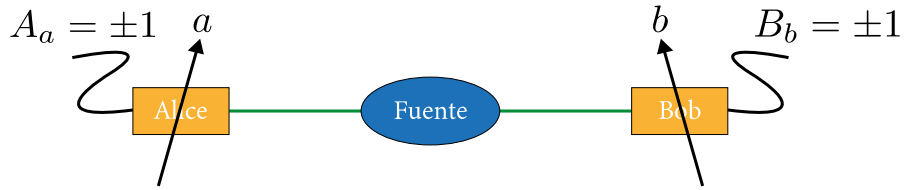


Figura 2.1: Configuración del experimento diseñado por Bohm. Una fuente emite un par de partículas con espín 1/2, las cuales se dirigen a dos estaciones de medición. En cada estación, se realizan mediciones locales a lo largo de las direcciones a y b .

4. *Anticorrelación:* a iguales configuraciones locales, los resultados de las mediciones son opuestos, es decir, si $a = b$, entonces $A(a, \lambda) = -B(b, \lambda)$.

De este modo, la desigualdad de Bell se define como: si $a_1 = b_1$, se tiene que

$$|E(A_2B_1) - E(A_2B_2)| \leq 1 + E(A_1B_2). \quad (2.21)$$

Desde el punto de vista experimental, la desigualdad de Bell (2.21) depende de la obtención de una anticorrelación perfecta, la que es menos probable de obtener en un experimento real. Relajando levemente la condición (4), Clauser, Horne, Shimony y Holt (CHSH) ref. [28] presentaron una generalización del teorema de Bell para realizaciones experimentales. En este caso se exige que:

3. *Restricción de resultados:* los resultados de las mediciones están acotados en absoluto por el valor 1, es decir,

$$|A(a, \lambda)| \leq 1 \quad \text{y} \quad |B(b, \lambda)| \leq 1. \quad (2.22)$$

De este modo, la desigualdad de Bell (2.21) se escribe como

$$\Sigma = |E(A_1B_1) + E(A_1B_2)| + |E(A_2B_1) - E(A_2B_2)| \leq 2. \quad (2.23)$$

esta expresión es conocida como desigualdad CHSH. En el caso cuántico el valor alcanzado para (2.23) es $2\sqrt{2}$.



2.3. Interferómetros Mach-Zhender, Franson y abrazado

Una de las propiedades fundamentales de la Mecánica Cuántica, consiste en la posibilidad de mantener un sistema en superposición. Una de los instrumentos experimentales básicos, que hace posible obtener un estado en superposición, es un *beam-splitter* (divisor de haces), el cual puede ser implementado de diversas formas (dependiendo de la naturaleza de la partícula en estudio). Utilizando divisores de haces y espejos, es posible construir un interferómetro que permite estudiar tanto protocolos de discriminación de estados, no-localidad, entre otros. En esta sección estudiaremos los interferómetros Mach-Zehnder, Franson y abrazado.

2.3.1. Interferómetro Mach-Zhender

Uno de los interferómetros más básicos para entender los fenómenos de interferencia y de superposición es un interferómetro Mach-Zehnder, el cual consta de dos divisores de haces. El primero permite tener una superposición de estados, y el segundo permite recombinar y obtener el fenómeno de interferencia. En este arreglo interferométrico consideramos dos caminos ópticos, por los cuales se propagan las partículas, y terminan recombinándose al ingresar al último divisor de haces. En este arreglo, una partícula cuántica ingresa por una de las entradas de un divisor de haces, pasando por éste la partícula queda en superposición en función de los posibles caminos a tomar, y finalmente es recombinada. De este modo es posible observar interferencia entre ellas.

Para ver el funcionamiento de un divisor de haces, que puede ser implementado en diversos cristales, o a través de la interacción de un láser con partículas masivas, consideremos un estado $|\psi\rangle$ que ingresa al dispositivo. La interacción, entre el sistema cuántico y el divisor de haces, es mediada a través de una transformación

2.3 Interferómetros Mach-Zhender, Franson y abrazado

unitaria U_{BS} , la cual genera el estado

$$U_{\text{BS}}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\rangle + i|v\rangle), \quad (2.24)$$

en donde $|u\rangle$ y $|v\rangle$ son estados propios del interferómetro, los cuales describen el estado de la partícula que se propaga por cada camino, respectivamente. Así, la evolución del estado $|\psi\rangle$ a través de los caminos del interferómetro está dada por un corrimiento de fase mediado por U_{PS}

$$U_{\text{PS}}U_{\text{BS}}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}|u\rangle + ie^{i\varphi_2}|v\rangle). \quad (2.25)$$

Si ambos caminos poseen una diferencia de longitud ΔL , habrá una diferencia de corrimiento de fase dada por $\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$. De este modo, el estado (2.25) está dado por

$$U_{\text{PS}}U_{\text{BS}}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\rangle + ie^{i\Delta\varphi_{12}}|v\rangle). \quad (2.26)$$

Así, el estado (2.26) adopta la forma

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = U_{\text{BS}}U_{\text{PS}}U_{\text{BS}}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}([|x\rangle + i|y\rangle] + ie^{i\Delta\varphi_{12}}[|x\rangle - i|y\rangle]), \quad (2.27)$$

en donde $|x\rangle$ y $|y\rangle$ son los estados correspondientes a los detectores D_x e D_y . De este modo, la probabilidad de detección en los detectores D_x y D_y está dada por

$$P_x = |\langle x|\psi_{\text{out}}\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos[\Delta\varphi_{12}]), \quad (2.28)$$

$$P_y = |\langle y|\psi_{\text{out}}\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos[\Delta\varphi_{12}]) \quad (2.29)$$

Podemos modificar la diferencia de camino óptico de tal modo que $\Delta\varphi_{12} = 0$, es decir, que el interferómetro esté balanceado; de este modo la probabilidad de

2.3 Interferómetros Mach-Zehnder, Franson y abrazado

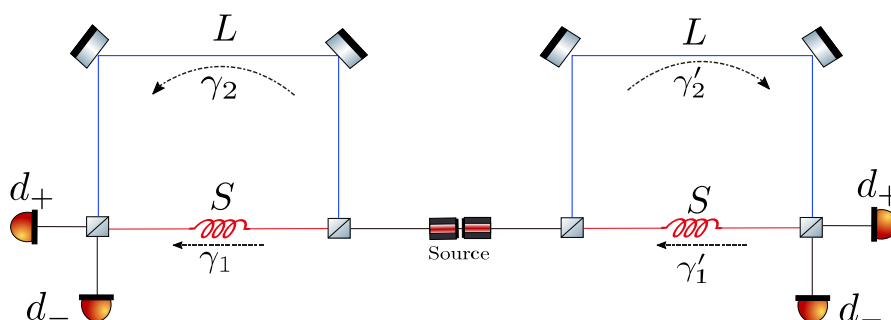


Figura 2.2: Arreglo interferométrico de Franson. Una fuente generadora de fotones une a dos interferómetros Mach-Zehnder. Los detectores ubicados a la izquierda y derecha de la salida de los interferómetros son denotados por d_+ y d_- .

detección $P_x = 1$ y $P_y = 0$. En este caso, tenemos una detección en D_x con probabilidad uno, lo que es contradictorio al caso clásico en donde la probabilidad de detección es $P_x = P_y = 1/2$.

2.3.2. Interferómetro Franson y abrazado

A continuación describimos el funcionamiento de los interferómetros Franson y abrazado, los cuales generan entrelazamiento de camino. Este tipo de entrelazamiento ocurre cuando las partículas son emitidas simultáneamente en un proceso de conservación de energía, y con una emisión producida de manera incierta, de modo tal que uno de los dos caminos que pueda tomar la partícula sea indistinguible. Consideremos los interferómetros Franson (ver fig.2.2) y Abrazado (ver fig.2.3), en los cuales tenemos dos caminos de diferente longitud, uno de longitud corta (denotado como S) y uno largo (denotado como L). La diferencia de camino óptico está dada por $\Delta L = L - S$. En estos interferómetros tenemos una fuente que emite dos partículas, cada partícula arriba a los primeros divisores de haces de cada interferómetro Mach-Zehnder, y cada estado es puesto en un estado en superposición entre los caminos S y L . Cada partícula es recombinada en los últimos divisores de haces de cada interferómetro Mach-Zehnder. De manera particular

2.3 Interferómetros Mach-Zehnder, Franson y abrazado

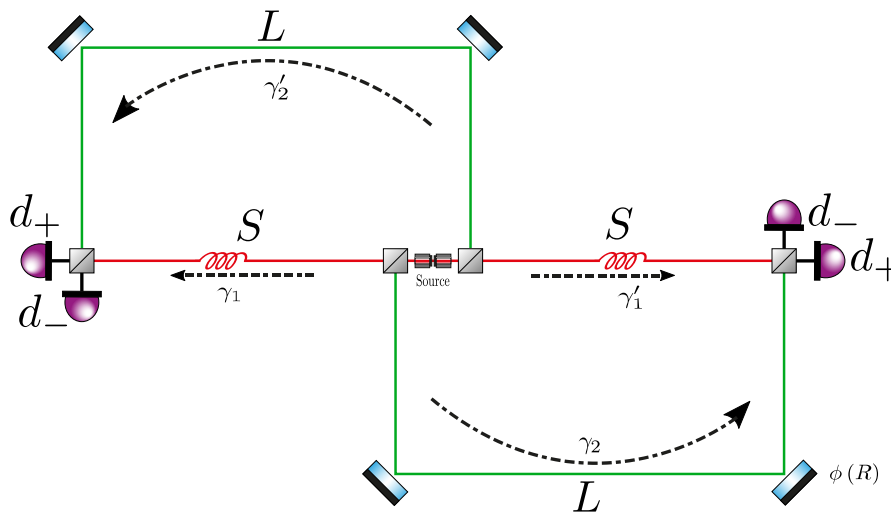


Figura 2.3: Arreglo interferométrico abrazado. Una fuente generadora de fotones une a dos interferómetros Mach-Zehnder. Los detectores ubicados a la izquierda y derecha de la salida de los interferómetros están denotados por d_+ y d_- .

para obtener un estado entrelazado en los arreglos Franson y abrazado se deben cumplir los siguientes requerimientos:

- I.- Para tener interferencia entre dos partículas, la emisión de las partículas debe ser impredecible y simultánea.
- II.- Ambos interferómetros Mach-Zehnder deben ser idénticos.
- III.- Para tener interferencia de una partícula, se debe tener una diferencia de longitud entre los caminos corto y largo. Es posible usar esta diferencia para distinguir entre los eventos cuando la partícula toma los caminos S y L .

El protocolo para obtener un estado entrelazado es el siguiente: considere dos participantes, cada uno ubicado en los detectores. Ambos participantes almacenan los tiempos de detección, la configuración de las fases locales, y el tiempo que le toma a la partícula recorrer la distancia entre la posición en donde se ajustan las fases locales y en donde se realiza la detección de las partículas. La diferencia ΔL

2.3 Interferómetros Mach-Zhender, Franson y abrazado

entre los caminos ópticos permite distinguir entre los caminos tomados por las partículas. Por lo tanto en los interferómetros tendremos dos tiempos de detección

- Si la partícula toma el camino corto (S), esta arribará a un tiempo Δt_0 .
- Si toma el camino (L), el tiempo de detección será $\Delta t_0 + \Delta L/c$, y para el caso de partículas masivas, se tendría un tiempo de detección $\Delta t_0 + \Delta L/v$ con v rapidez relativa de las partículas¹

Con estos tiempos de detección, tenemos un 50% de probabilidad de detectar a las dos partículas arribando en los tiempos Δt_0 y $\Delta t_0 + \Delta L/c$. El otro 50% corresponde a la detección de una partícula en los tiempos Δt_0 y $\Delta t_0 + \Delta L/c$ en diferentes detectores. El siguiente paso es comparar los tiempos de detección. Debido a la configuración de los arreglos interferométricos, este último paso es diferente para el arreglo Franson y abrazado. Así, para

- *Arreglo Franson*: si ambos participantes han obtenido los mismos tiempos de detección para los caminos cortos y largos, ellos almacenan esos datos y descartan el resto. Este procedimiento es llamado post-selección.
- *Arreglo Abrazado*: si ambos participantes obtienen el mismo tiempo de detección para los caminos cortos y largos, entonces las partículas han arribado a diferentes detectores, en cambio, si obtienen una detección en coincidencia entonces ambas partículas arriban a la misma estación de detección, y así ambos participantes descartan estos datos. De este modo, este tipo de interferómetro es capaz de generar un estado entrelazado sin el procedimiento de post-selección.

Una descripción desde el punto de vista cuántico es la siguiente: consideremos un estado bipartito que ingresa al interferómetro, después de pasar a través del primer

¹En lo restante de la sección hablaremos de $\Delta L/c$ como parte de los tiempos de detección. Los análisis son análogos para partículas masivas.

2.3 Interferómetros Mach-Zhender, Franson y abrazado

divisor de haces, cada partícula se encuentra en una superposición de dos estados. El estado antes de ser recombinando tiene la forma

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} [|S(\Delta t_0)\rangle + |L(\Delta t_0 + \Delta L/c)\rangle] [|S(\Delta t_0)\rangle + |L(\Delta t_0 + \Delta L/c)\rangle]. \quad (2.30)$$

Considerando los estados que se detectan en coincidencia, es decir, aquellos que arriban al detector en los tiempos Δt_0 y $\Delta t_0 + \Delta L/c$ en ambos detectores, el estado cuántico que describe el estado en coincidencia está dado por

$$|\Psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} [|S(\Delta t_0)\rangle|S(\Delta t_0)\rangle + |L(\Delta t_0 + \Delta L/c)\rangle|L(\Delta t_0 + \Delta L/c)\rangle]. \quad (2.31)$$

Para estos interferómetros tenemos un único valor para las fases locales $(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ asociadas con los valores propios ± 1 , en donde $\alpha(\beta)$ denota las fases locales en las estaciones de detección de la izquierda y la derecha, respectivamente. La probabilidad de detección para ambos fotones es uno, pero existe un 50% the probabilidad de detección en la cual la partícula arriba primero a una estación que en otra, con el retraso temporal dependiendo en la diferencia de camino óptico entre los caminos del arreglo. Los participantes tienen que descartar este 50% y mantener solo aquellos eventos en donde solo haya coincidencia. Para este tipo de eventos tenemos una probabilidad de detección dada por

$$p_{ij} = \frac{1}{4} (1 - (-1)^{\delta_{ij}} V \cos[\alpha + \beta]), \quad (2.32)$$

con $i, j = \pm 1$ denota los puertos de salida de los interferómetros Mach-Zehnder (i a la izquierda y j a la derecha de la fuente), y V es la visibilidad interferométrica la que es asumida como igual para todos los pares de detectores. Así, el estado generado por los interferómetros Franson y abrazado puede ser empleado para estudiar la naturaleza no-local de la Mecánica Cuántica a través de la desigualdad

2.3 Interferómetros Mach-Zhender, Franson y abrazado

CHSH. Como sabemos la desigualdad CHSH se construye a través del funcional Σ ec. (2.23) con

$$E(\alpha, \beta) = p_{+,+}(\alpha, \beta) + p_{-,-}(\alpha, \beta) - p_{+,-}(\alpha, \beta) - p_{-,+}(\alpha, \beta), \quad (2.33)$$

es el valor esperado de un observable dicotómico con valores propios ± 1 . Además, Σ satisface

$$|\Sigma| \leq 2. \quad (2.34)$$

Si la probabilidad de detección está dada por la ec. (2.32), el valor esperado (2.33) adopta la forma

$$E(\alpha, \beta) = V \cos(\alpha + \beta). \quad (2.35)$$

Si los valores de las fases locales son $\alpha = -\alpha' = \pi/4$, $\beta = 0$, y $\beta' = \pi/2$ entonces el valor de Σ se reduce a $\Sigma = 2\sqrt{2}V$. Cuando la visibilidad interferométrica es máxima, y el estado generado es un estado de Bell, es decir, maximalmente entrelazado, se obtiene $|\Sigma| = 2\sqrt{2}$.

2.4. Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

En esta sección describimos sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil. En particular nos centramos en fotones y partículas con grados de libertad internos las que ingresan a un interferómetro Mach-Zehnder.

2.4.1. Fotones interactuando bajo un campo gravitacional débil

El campo gravitacional induce un corrimiento de fase sobre fotones que se propagan por algún camino en particular. Este corrimiento de fase depende de la frecuencia y la dilatación temporal, o el efecto Shapiro.

Para estudiar la interferencia considere un interferómetro Mach-Zehnder, orientado verticalmente con respecto a la superficie de la Tierra y con el espaciotiempo descrito por una aproximación de la métrica de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas. Para un interferómetro pequeño, comparado con la distancia radial R , todos los puntos en cada uno de los caminos horizontales se encuentran aproximadamente a la misma distancia radial. Describimos el movimiento de los fotones en una métrica en coordenadas isotrópicas a primer orden en ϕ/c^2 usando

$$ds^2 = c^2 d\tau_r^2 - dx_r^2, \quad (2.36)$$

en donde

$$d\tau_r^2 = \left(1 + \frac{2\phi(r)}{c^2}\right) dt^2,$$
$$dx_r^2 = \left(1 - \frac{2\phi(r)}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

Las coordenadas son las siguientes:

- dt : es el intervalo de tiempo infinitesimal medido por un observador lejano (en el infinito, en donde el potencial ϕ es nulo).
- dx, dy, dz : intervalos de longitud espacial infinitesimales medidos por un observador lejano (en el infinito).

Considere la coordenada temporal t_r del fotón a través de los segmentos horizontales del interferómetro a una distancia radial r . En este caso la trayectoria es tipo luz y la coordenada temporal adquiere la forma

$$t_r = \int_0^L dx_r c^{-1} \left(1 - \frac{\phi(r)}{c^2} \right), \quad (2.37)$$

en donde consideramos $t_r = 0$ para $L = 0$. Entonces, al considerar la definición de x_r , por lo que los segmentos espaciales medidos localmente son independientes de r y así $\int_0^L dx_r = L$, expresión que corresponde a la longitud propia. Entonces, la ec. (2.37) adopta la forma

$$t_r = \frac{L}{c} \left(1 - \frac{\phi(r)}{c^2} \right). \quad (2.38)$$

dependiendo de la distancia radial R , el fotón que se desplaza por un camino que tiene un potencial gravitacional dado llegará al detector en tiempos coordenados distintos. Además, debido a la configuración del interferómetro, los tiempos empleados en recorrer los segmentos verticales (o la coordenada radial) son los mismos para las dos trayectorias. Así, la diferencia de tiempo de arribo para el fotón corresponde a la diferencia de tiempo entre los segmentos horizontales y es $t_r - t_{r+\Delta h}$. Además para un observador local en el potencial gravitacional $\phi(R + \Delta h)$ va a

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

medir una diferencia de tiempo de la forma

$$\Delta\tau = \sqrt{1 + 2\frac{\phi(r + \Delta h)}{c^2}} (t_r - t_{r+\Delta h}). \quad (2.39)$$

Usando la aproximación para un interferómetro pequeño, es decir, tal que el potencial gravitacional se puede aproximar linealmente $\phi(r + \Delta h) \approx \phi(r) + g\Delta h$, y la ec (2.38). Así, la expresión para la diferencia de tiempo de arribo (2.39) adquiere la forma

$$\begin{aligned} \Delta\tau &\approx \sqrt{1 + 2\frac{\phi(r + \Delta h)}{c^2}} \left(\frac{L}{c}\right) \left[\left(1 - \frac{\phi(r)}{c^2}\right) - \left(1 - \frac{\phi(r + \Delta h)}{c^2}\right) \right] \\ &\approx \sqrt{1 + 2\frac{\phi(r + \Delta h)}{c^2}} \left(\frac{L}{c}\right) \left[\frac{g\Delta h}{c^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Empleando la expansión de $(1 + 2x)^{1/2}$ con $x = \phi(r)/c^2 \ll 1$, se obtiene

$$\Delta\tau \approx \left(1 + \frac{\phi(r + \Delta h)}{c^2}\right) \left(\frac{L}{c}\right) \left[\frac{g\Delta h}{c^2} \right]. \quad (2.41)$$

Aproximando hasta orden $O(c^{-3})$, la expresión (2.41) queda

$$\Delta\tau \approx \frac{Lg\Delta h}{c^3} + O(c^{-4}). \quad (2.42)$$

Esta expresión corresponde a la diferencia de tiempo de arribo para los fotones medida por un observador ubicado a una altura $R + \Delta h$.

Uno de los efectos del campo gravitacional sobre un fotón es el corrimiento de fase. Para esto considere el corrimiento de fase del campo electromagnético a través de la aproximación de óptica geométrica ref. [29; 30]. En este contexto, la fase

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

del potencial electromagnético satisfase la ecuación eikonal, la cual corresponde a la ecuación de Hamilton-Jacobi para partículas sin masa sobre una métrica en particular. Para el caso de un espaciotiempo estacionario, el corrimiento de fase está dado por

$$\Delta\varphi = \omega_\infty\Delta t, \quad (2.43)$$

en donde ω_∞ es la frecuencia del campo electromagnético medida por un observador al infinito, en donde el potencial gravitacional es nulo, y Δt es el intervalo de coordenada temporal empleado por la luz en recorrer cierto camino en particular. Para un observador en reposo en algún punto en particular, podemos escribir

$$\Delta\varphi = \omega\Delta\tau, \quad (2.44)$$

en donde $\omega = \omega_\infty/\sqrt{g_{00}}$ es la frecuencia del campo electromagnético medida en la posición del observador en particular, y $\Delta\tau = \sqrt{g_{00}}\Delta t$ es el correspondiente tiempo propio.

Consideremos el interferómetro Mach-Zehnder (ver fig. 2.4), orientado verticalmente con respecto a la superficie de la Tierra y la métrica ec. (2.36). Debido a que los brazos del interferómetro están a diferentes alturas y por lo tanto se encuentran bajo un potencial gravitacional distinto, el fotón al salir del primer divisor de haces se encontrará en una superposición, y experimentará un retraso temporal en una de sus trayectorias, por lo que al ser recombinado en el último divisor de haces, un observador a la altura $R + \Delta h$ medirá un retraso temporal dado por la expresión (2.42). Para obtener el efecto de dicho intervalo de tiempo en el arribo del fotón, calculamos el retraso temporal de cada uno de los modos. Entonces, considere el

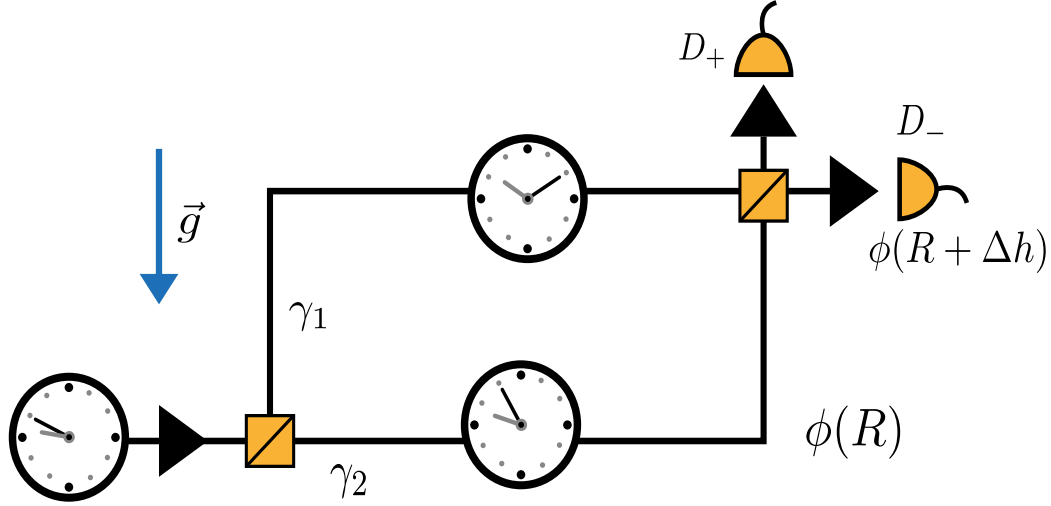


Figura 2.4: Interferómetro Mach-Zehnder bajo campo gravitacional. El interferómetro consiste en dos beam-splitter (BS) y un par de detectores. La partícula ingresa al interferómetro en el potencial gravitacional $\phi(R)$ y se desplaza a través de los caminos γ_1 y γ_2 en una superposición de estados, para finalmente ser recombinada en el último BS, el cual está ubicado en un potencial $\phi(R + \Delta h)$. Los caminos son elegidos de manera que exista una diferencia de tiempo propio entre ellos. La distancia entre ambos brazos del interferómetro es Δh .

estado del fotón de la siguiente forma

$$|\Psi\rangle = \int d\omega f(\omega) e^{\frac{i\omega}{c}(x_r - c\Delta\tau_r)} a_0^\dagger(\omega) |0\rangle, \quad (2.45)$$

donde x_r es la coordenada cartesiana local, $\Delta\tau_r$ es la coordenada local temporal y $f(\omega)$ es la amplitud en función de la frecuencia ω , la cual está definida respecto a un observador local a una distancia radial R y $a_0^\dagger(\omega)$ es un operador de creación que actúa en el modo de frecuencia ω . En el caso del interferómetro Mach-Zehnder

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

la evolución del operador $a_0^\dagger(\omega)$ está dada por

$$a_0^\dagger(\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^\dagger(\omega_1)e^{-i\varphi_{\gamma_1}(\omega_1)} + b^\dagger(\omega_1)e^{-i\varphi_{\gamma_2}(\omega_1)}), \quad (2.46)$$

donde a^\dagger y b^\dagger son los operadores de creación y destrucción para cada uno de los modos, luego de que el fotón haya pasado por el primer divisor de haces¹, τ_{γ_i} corresponde al tiempo empleado en recorrer el camino γ_i ($i = 1, 2.$), los que se encuentran a potenciales gravitacionales distintos (ver fig.2.4). Utilizando (2.46), el estado (2.45) antes de arribar al último divisor de haces adopta la forma

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\omega_1 f(\omega_1) (a^\dagger(\omega_1)e^{-i\varphi_{\gamma_1}(\omega_1)} + b^\dagger(\omega_1)e^{-i\varphi_{\gamma_2}(\omega_1)}) |0\rangle. \quad (2.47)$$

Luego, los operadores (2.46) al pasar por el último divisor de haces adoptan la forma

$$a^\dagger(\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c^\dagger(\omega_1) + d^\dagger(\omega_1)), \quad (2.48)$$

$$b^\dagger(\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c^\dagger(\omega_1) - d^\dagger(\omega_1)). \quad (2.49)$$

El estado (2.47) adquiere la forma

$$|\Psi_{\text{out}}\rangle = \frac{1}{2} \int d\omega_1 f(\omega_1) [(c^\dagger(\omega_1) + d^\dagger(\omega_1)) e^{-i\varphi_{\gamma_1}(\omega_1)} + (c^\dagger(\omega_1) - d^\dagger(\omega_1)) e^{-i\varphi_{\gamma_2}(\omega_1)}] |0\rangle. \quad (2.50)$$

Para calcular la probabilidad de detección, definimos los proyectores para los de-

¹Hemos considerado que el divisor de haces actúa en cada modo de frecuencia de forma independiente.

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

tectores

$$\widehat{P}_c = \int d\omega_a c^\dagger(\omega_a) |0\rangle \langle 0| c(\omega_a), \quad (2.51)$$

$$\widehat{P}_d = \int d\omega_a c^\dagger(\omega_a) |0\rangle \langle 0| c(\omega_a). \quad (2.52)$$

Así, la probabilidad de detección viene dada por la expresión $p = \text{Tr} \{ |\Psi_{\text{out}}\rangle \langle \Psi_{\text{out}}| P_{c(d)} \} = \langle \Psi_{\text{out}}| P_{c(d)} |\Psi_{\text{out}}\rangle$. Entonces, la probabilidad de detección en c es

$$\begin{aligned} p_c &= \frac{1}{4} \int d\omega'_1 f^*(\omega'_1) \langle 0| \left[(c(\omega'_1) + d(\omega'_1)) e^{i\varphi_{\gamma_1}(\omega'_1)} + (c(\omega'_1) - d(\omega'_1)) e^{i\varphi_{\gamma_2}(\omega'_1)} \right] \\ &\quad \left[\int d\omega_a c^\dagger(\omega_a) |0\rangle \langle 0| c(\omega_a) \right] \int d\omega_1 f(\omega_1) \left[(c^\dagger(\omega_1) + d^\dagger(\omega_1)) e^{-i\varphi_{\gamma_1}(\omega_1)} \right. \\ &\quad \left. + (c^\dagger(\omega_1) - d^\dagger(\omega_1)) e^{-i\varphi_{\gamma_2}(\omega_1)} \right] |0\rangle \\ &= \frac{1}{4} \int d\omega'_1 d\omega_1 d\omega_a f^*(\omega'_1) f(\omega_1) e^{i(\varphi_{\gamma_1}(\omega'_1) - \varphi_{\gamma_1}(\omega_1))} \\ &\quad \times \langle 0| \left([c(\omega'_1) + d(\omega'_1)] + [c(\omega'_1) - d(\omega'_1)] e^{i(\varphi_{\gamma_2}(\omega'_1) - \varphi_{\gamma_1}(\omega'_1))} \right) c^\dagger(\omega_a) |0\rangle \\ &\quad \times \langle 0| c(\omega_a) \left([c^\dagger(\omega_1) + d^\dagger(\omega_1)] + [c^\dagger(\omega_1) - d^\dagger(\omega_1)] e^{-i(\varphi_{\gamma_2}(\omega_1) - \varphi_{\gamma_1}(\omega_1))} \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Los términos no nulos producto de la acción de los operadores, dan una probabilidad de detección de la siguiente forma

$$\begin{aligned} p_c &= \int d\omega'_1 d\omega_1 d\omega_a f^*(\omega'_1) f(\omega_1) \\ &\quad \times \left(e^{i(\varphi_{\gamma_1}(\omega'_1) - \varphi_{\gamma_1}(\omega_1))} + e^{i(\varphi_{\gamma_1}(\omega'_1) - \varphi_{\gamma_2}(\omega_1))} + e^{-i(\varphi_{\gamma_1}(\omega_1) - \varphi_{\gamma_2}(\omega'_1))} + e^{i(\varphi_{\gamma_2}(\omega'_1) - \varphi_{\gamma_2}(\omega_1))} \right) \\ &= \frac{1}{4} \int d\omega'_1 d\omega_1 f^*(\omega'_1) f(\omega_1) \delta(\omega'_1 - \omega_1) \left(2 + e^{i(\varphi_{\gamma_1}(\omega_1) - \varphi_{\gamma_2}(\omega_1))} + e^{-i(\varphi_{\gamma_1}(\omega_1) - \varphi_{\gamma_2}(\omega_1))} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \int d\omega_1 |f(\omega_1)|^2 \cos[\omega_1 \Delta\tau] \right), \end{aligned} \quad (2.54)$$

en donde $\varphi_{\gamma_1}(\omega_1) - \varphi_{\gamma_2}(\omega_1)$ es la diferencia de fase adquirida por el fotón al recorrer

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

ambos caminos en el inteferómetro. Esta diferencia es igual a $\Delta\varphi = \omega\Delta\tau$, con $\Delta\tau = \tau_{\gamma_2} - \tau_{\gamma_1}$, la que corresponde a la diferencia en los tiempos de arribo. La probabilidad de detección para ambos detectores en el interferómetro viene dada por la expresión

$$p_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \int d\omega_1 |f(\omega_1)|^2 \cos(\omega_1 \Delta\tau) \right], \quad (2.55)$$

en donde $+$ y $-$ denotan al detector c y d , respectivamente. En el caso en que la distribución de frecuencias esté dada por una distribución gaussiana $f(\omega) = \exp(-(\omega - \omega_1)^2 / (2\sigma_i^2)) / (\sigma\sqrt{2\pi})$, en donde σ y ω_1 son el ancho y el valor medio de la distribución, respectivamente. En este caso, la probabilidad de detección dada por la ec. (2.55) adopta la forma

$$p_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm V(\Delta\tau) \cos[\omega_1 \Delta\tau]), \quad (2.56)$$

en donde $V(\Delta\tau)$ es la visibilidad interferométrica, la que tiene la forma

$$V(\Delta\tau) = \exp \left[-\frac{1}{2} (\Delta\tau^2 \sigma^2) \right]. \quad (2.57)$$

Así un efecto del potencial gravitacional sobre un fotón, además del corrimiento de fase, consiste en una disminución de la visibilidad interferométrica. En este caso, la visibilidad interferométrica decrece de manera exponencial con el cuadrado de la diferencia $\Delta\tau$ de tiempo propio. En el límite newtoniano, no existe la noción de dilatación temporal gravitacional, consecuentemente la visibilidad es máxima, y solo está presente un corrimiento de fase. Notemos que en el caso de la teoría de la Relatividad General en la aproximación de campo débil la diferencia de tiempo propio en general no es nula, y tenemos tanto el efecto del corrimiento de fase como de la disminución de la visibilidad interferométrica.

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

Cabe notar que ésta no es la única forma de calcular la probabilidad de detección, en el apéndice B se describen dos formas distintas de calcular esta magnitud, pero la expuesta en el texto principal es la más adecuada para la descripción de los interferómetros Franson y abrazado.



2.4.2. Partículas con grados de libertad internos bajo la acción de un campo gravitacional débil

2.4.3. Cuantización Hamiltoniano Clásico

Existen diversos enfoques para describir el efecto del campo gravitacional en sistemas cuánticos. Por ejemplo, considere el enfoque más fundamental, el cual consiste en escribir una ecuación relativista, como por ejemplo la ecuación de Dirac o de Klein-Gordon, sobre un espaciotiempo curvo, y así obtener un hamiltoniano aproximado en los límites no relativistas y de campo débil (ver por ejemplo ref. [31; 32; 33; 34]). De manera alternativa, se puede realizar una cuantización canónica de un hamiltoniano clásico (como se ha realizado en ref. [2]). De este modo, existen diferentes hamiltonianos efectivos que intentan describir el efecto del campo gravitacional en sistemas cuánticos. En esta sección mostramos cómo encontrar un hamiltoniano para un sistema con grados de libertad internos.

Consideremos un campo escalar φ_{KG} sin carga, y sin espín. La ecuación de Klein-Gordon sobre una métrica $g_{\mu\nu}$, está dada por

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\varphi_{\text{KG}} - M^2c^2\varphi_{\text{KG}} = 0, \quad (2.58)$$

con ∇_{μ} la derivada covariante definida con los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}$. Consideremos la métrica de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas (ct, x, y, z) ref.[30]

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi(r)}{c^2} + \frac{2\phi^2(r)}{c^4}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi(r)}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.59)$$

Asumamos el siguiente ansatz para el campo escalar φ_{KG}

$$\varphi_{\text{KG}} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}S(x, t)\right], \quad (2.60)$$

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

en donde hacemos una expansión para $S(x, t)$ de la forma

$$S(x, t) = (c^2 S_0(x) + S_1(x) + c^{-2} S_2(x) + \dots). \quad (2.61)$$

Insertamos el ansatz dado por la ec. (2.60) en la ecuación de Klein-Gordon (2.58), y realizamos una comparación en cada una de las potencias de c^2 . Así, encontramos un conjunto de ecuaciones. Entonces, para orden c^4 se obtiene

$$\left(\vec{\nabla} S_0\right)^2 = 0. \quad (2.62)$$

Por lo tanto S_0 es solo una función de t . Para el orden c^2 obtenemos

$$-\left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right)^2 + M^2 = 0, \quad (2.63)$$

cuya solución es del tipo $S_0 = \pm Mt + \text{cte.}$ De este modo, hasta el orden c^2 el ansatz (2.60) adopta la forma

$$\varphi_{\text{KG}} \approx \exp[\pm iMc^2 t/\hbar]. \quad (2.64)$$

Considerando hasta orden c^0 , podemos escribir

$$2M\dot{S}_1 + (\nabla S_1)^2 - i\hbar\nabla^2 S_1 = 0, \quad (2.65)$$

al considerar una función $\varrho = \exp(iS_1/\hbar)$, la ecuación adopta la forma

$$i\hbar\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\vec{p}^2}{2M}\varrho + M\phi(x)\varrho, \quad (2.66)$$

la cual es la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa M interactuando con el potencial gravitacional $\phi(x)$, y $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$. Para los términos S_1 y S_2 pro-

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

cedemos de manera análoga, así reemplazamos $\varphi = \varrho \exp(iS_2/\hbar c^2)$ y obtenemos una ecuación tipo Schrödinger con correcciones relativistas $i\hbar\partial\varphi/\partial t = H\varphi$, con el hamiltoniano H representado con respecto a un producto escalar “plano”, el cual tiene la forma usual respecto al producto escalar no-relativista. Así este operador tiene la forma

$$H = \frac{p^2}{2M} + Mc^2 - \frac{p^4}{8M^3c^2} + M\phi(x) + \frac{M\phi^2(x)}{2c^2} + \frac{3}{2Mc^2} \left(\phi(x)\vec{p}^2 + [\vec{p}\phi(x)] \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} [\vec{p}^2\phi(x)] \right), \quad (2.67)$$

en donde los corchetes cuadrados indican la acción de p sobre $\phi(x)$.

Para incluir los grados de libertad internos, ref. [2]¹ consideró la equivalencia masa-energía, con esto se puede escribir $M = H_{\text{rest}}/c^2$, con H_{rest} es la energía proveniente de la energía interna y/o de enlace de sus constituyentes.

Dado un estado propio de energía con un valor propio E_j , tal que $M_j = E_j/c^2$, entonces es posible escribir $M \rightarrow M_j$ en la expresión para el hamiltoniano (2.67). Además la linealidad de la Mecánica Cuántica requiere que (2.67) sea válido para la superposición arbitraria de estados internos. Sea entonces $|E_j\rangle$ un estado perteneciente a un espacio de Hilbert separable \mathcal{H}_{inn} , así H_{rest} se describe por un operador (para más detalles ver ref. [2])

$$H_{\text{rest}} = mc^2 1_{\text{inn}} + H_{\text{inn}}, \quad (2.68)$$

en donde la parte dinámica de la energía interna se describe por el operador H_{inn} y 1_{inn} es el operador identidad en \mathcal{H}_{inn} . La energía en reposo mc^2 puede ser vista como la energía base de H_{rest} .

¹Los grados de libertad fueron incluidos de manera ad hoc, siendo posible incluirlos de manera fundamental al considerar la ecuación de Dirac en un espacio curvo, y su límite no relativista correspondiente.

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

Reemplazando (2.68) en (2.67) obtenemos

$$\begin{aligned}
 H = & \left(\frac{mc^2 1 + H_{\text{inn}}}{c^2} \right) c^2 + \left(\frac{mc^2 1 + H_{\text{inn}}}{c^2} \right) \phi(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2 1 + H_{\text{inn}}}{c^2} \right) \frac{\phi^2(x)}{c^2} \\
 & + \frac{\vec{p}^2}{2} \left(\frac{mc^2 1 + H_{\text{inn}}}{c^2} \right)^{-1} - \frac{\vec{p}^4}{8c^2} \left(\frac{mc^2 1 + H_{\text{inn}}}{c^2} \right)^{-3} \\
 & + \frac{3}{2} \left(\frac{mc^2 1 + H_{\text{inn}}}{c^2} \right)^{-1} \left(\phi(x) \vec{p}^2 + [\vec{p} \phi(x)] \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} [\vec{p}^2 \phi(x)] \right).
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Aproximando a primer orden en H_{int}/mc^2

$$\begin{aligned}
 H \approx & mc^2 + H_{\text{inn}} + m \left(1 + \frac{H_{\text{inn}}}{mc^2} \right) \phi(x) + \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{H_{\text{inn}}}{mc^2} \right) \frac{\phi^2(x)}{c^2} + \frac{\vec{p}^2}{2m} \left(1 - \frac{H_{\text{inn}}}{mc^2} \right) \\
 & - \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \phi(x) \frac{\vec{p}^2}{mc^2} \left(1 - \frac{H_{\text{inn}}}{mc^2} \right) + \frac{\vec{p}^4}{8m^3 c^2} \left(1 - 3 \frac{H_{\text{inn}}}{mc^2} \right).
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Luego, ya que hemos considerado aproximaciones hasta orden H_{inn}/mc^2 , los términos de orden superior para c son descartados. Así el hamiltoniano adquiere la forma

$$\begin{aligned}
 H \approx & mc^2 + H_{\text{inn}} + m\phi(x) + H_{\text{inn}} \frac{\phi(x)}{c^2} + \frac{1}{2} m \frac{\phi^2(x)}{c^2} + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2} H_{\text{inn}} \\
 & - \frac{1}{8} \frac{\vec{p}^4}{m^3 c^2} + \frac{3}{2mc^2} \left(\phi(x) \vec{p}^2 + [\vec{p} \phi(x)] \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} [\vec{p}^2 \phi(x)] \right)
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Este hamiltoniano (2.71) puede ser reescrito como

$$H = H_{\text{cm}} + \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) H_{\text{inn}}, \tag{2.72}$$

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

con

$$\begin{aligned}
 H_{\text{cm}} = mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} \left[1 - \left(\frac{\vec{p}}{2mc} \right)^2 \right] + m\phi(x) + \frac{1}{2}m\frac{\phi(x)^2}{c^2} \\
 + \frac{3}{2mc^2} \left(\phi(x)\vec{p}^2 + [\vec{p}\phi(x)] \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} [\vec{p}^2\phi(x)] \right),
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

con H_{cm} el operador que actúa sobre los grados de libertad externos. De la ec. (2.73) notamos que los parámetros β y γ solo actúan en los grados de libertad externos de la partícula. El término que se acopla a los grados de libertad internos $(1 - \vec{p}^2/(2m^2c^2) + \phi(x)/c^2)$ se relaciona con el tiempo propio de la partícula, ya que se tiene que

$$\begin{aligned}
 \dot{\tau} &= \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \\
 &= \sqrt{-g_{00} - g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} \\
 &= \left[1 + 2\frac{\phi(x)}{c^2} + 2\frac{\phi(x)^2}{c^4} - \left(1 - 2\frac{\phi(x)}{c^2} \right) \left(\frac{v^2}{c^2} \right)^2 \right]^{1/2} \\
 &= \left[1 + 2\frac{\phi(x)}{c^2} + 2\frac{\phi(x)^2}{c^4} - \frac{p^2}{m^2c^2} + 2\frac{p^2}{m^2c^6}\phi(x) \right]^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

En el último paso hemos usado la relación $\vec{p} = m\vec{v}$. Aproximando sólo hasta orden c^{-2} , se obtiene

$$\dot{\tau} \approx 1 + \frac{\phi(x)}{c^2} - \frac{\vec{p}^2}{2m^2c^2}, \tag{2.75}$$

la que es la expresión que acompaña al Hamiltoniano que actúa en los grados de

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

libertad externos. Así, es posible escribir el Hamiltoniano del sistema como

$$H = H_{\text{cm}} + \hat{\tau} H_{\text{inn}}. \quad (2.76)$$

Así el término $\phi(x)H_{\text{int}}/c^2$ corresponde a la dilatación temporal gravitacional y $-\vec{p}^2 H_{\text{int}}/2m^2 c^2$ corresponde a la dilatación temporal de relatividad especial de los grados de libertad internos.

2.4.4. Corrimiento de fase para partículas con grados de libertad internos

Una forma usual de calcular la evolución temporal de un estado cuántico está dada por $\exp(-i \int dt H/\hbar) = \exp(-i \int dt [H_{\text{cm}} + \hat{\tau} H_{\text{inn}}]/\hbar)$. La evolución del grado de libertad para la posición del centro de masa, a través del hamiltoniano H_{cm} , está dada por $\exp(-i \int_{\gamma_i} dt H_{\text{cm}}/\hbar) |\gamma_i\rangle$. En este caso para simplificar el análisis consideramos las expresiones clásicas del campo gravitacional $\phi(x)$, y del momentum p . En este sentido estas funciones son solo funciones numéricas con valores definidos en una línea de mundo específica. En el caso de partículas masivas sin grados de libertad internos, para calcular el corrimiento de fase inducido por el campo gravitacional seguimos el método de Wajima *et al.* ref. [35]. En este método el hamiltoniano H_{cm} es dividido en una parte libre no-relativista H_{cm}^0 , más las correcciones relativistas $H_{\text{cm}}^{\text{Rel}}$. La solución de la parte no-relativista está dada por el estado $|\Psi_0\rangle$, y la solución total del hamiltoniano está dada por $|\psi_{\text{cm}}\rangle = |\Psi_0\rangle \exp(i\zeta)$, en donde $\zeta = \sum_j \int dt H_{\text{cm}}^{\text{Rel},j}/\hbar$, y j es un índice para cada parte de $H_{\text{cm}}^{\text{Rel}} = \sum_j H_{\text{cm}}^{\text{Rel},j}$.

De este modo, en un experimento interferométrico con una partícula que sigue dos caminos γ_1 y γ_2 , el corrimiento de fase total está dado por $\Delta\zeta_{\text{cm}} = \zeta_{\gamma_1} - \zeta_{\gamma_2}$. En el caso de una partícula con grados de libertad internos es trivial calcular el corrimiento de fase. Para esto, consideremos que el hamiltoniano dado por la ec.

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

(2.76) puede ser reescrito de la forma

$$H = H_{\text{cm}} \otimes I_{\text{inn}} + (1 + \lambda) I_{\text{cm}} \otimes H_{\text{inn}}, \quad (2.77)$$

en donde $H_{\text{cm}} = H_0 + \sum_k H_{\text{cm}}^{\text{Rel},k}$ y $\lambda = -p^2/(2m^2c^2) + \phi(x)/c^2$. Así, la función de onda que describe a un sistema con grados de libertad internos puede considerarse como un sistema puro bipartito $|\Psi\rangle = |\psi_{\text{cm}}\rangle \otimes |\tau\rangle$, en donde $|\psi_{\text{cm}}\rangle$ es la función de onda que describe los grados de libertad de la posición del centro de masa, y $|\tau\rangle$ es la función de onda asociada con los grados de libertad internos, es decir, con el reloj de cada partícula. Entonces, reemplazando $|\Psi\rangle$ en la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H |\Psi\rangle, \quad (2.78)$$

y considerando que la solución libre no-relativista satisfase $H_0|\psi_0\rangle = i\hbar\partial|\psi_0\rangle/\partial t$, el lado izquierdo de la ec. (2.78) adopta la forma

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = -\hbar|\psi_0\rangle \left(\dot{\zeta} \right) \exp(i\zeta) |\tau\rangle + |\psi_0\rangle \exp(i\zeta) H_{\text{inn}}|\tau\rangle + H_0|\psi_0\rangle \exp(i\zeta) |\tau\rangle. \quad (2.79)$$

El lado de derecho de la ec. (2.78) adopta la forma

$$H\Psi = H_0|\psi_0\rangle \exp(i\zeta) |\tau\rangle + \sum_k H_{\text{cm}}^{\text{Rel},k} |\psi_0\rangle \exp(i\zeta) |\tau\rangle + (\lambda + 1)|\psi_0\rangle \exp(i\zeta) H_{\text{inn}}|\tau\rangle, \quad (2.80)$$

en donde hemos empleado que $i\hbar\partial|\tau\rangle/\partial t = H_{\text{inn}}|\tau\rangle$. Igualando las ecuaciones (2.79) y (2.80), calculando el producto interno respecto a $\langle\psi_0| \otimes \langle\tau|$ e integrando respecto

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

al tiempo coordenado, obtenemos una expresión para el corrimiento de fase

$$\zeta = -\frac{1}{\hbar} \sum_k \int_{t_0}^t dt' \langle H_{\text{cm}}^{\text{Rel},k} \rangle - \frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \lambda \langle H_{\text{inn}} \rangle, \quad (2.81)$$

en donde $\langle H_{\text{cm}}^{\text{Rel},k} \rangle = \langle \psi_0 | \Delta H_k | \psi_0 \rangle$ y $\langle H_{\text{inn}} \rangle = \langle \tau | H_{\text{inn}} | \tau \rangle$.

Así, en un interferómetro las partículas siguen dos caminos diferentes γ_1 y γ_2 . Entonces, la diferencia de corrimiento de fase para una partícula que se mueve a lo largo de los dos caminos, está dada por

$$\begin{aligned} \zeta^{\gamma_1} - \zeta^{\gamma_2} = \Delta\zeta_{\gamma_1\gamma_2} = & -\frac{1}{\hbar} \sum_k \left[\int_{\gamma_1} dt \langle H_{\text{cm}}^{\text{Rel},k} \rangle - \int_{\gamma_2} dt \langle H_{\text{cm}}^{\text{Rel},k} \rangle \right] \\ & - \frac{1}{\hbar} \int [\lambda_{\gamma_1} \langle H_{\text{inn}} \rangle_{\gamma_1} - \lambda_{\gamma_2} \langle H_{\text{inn}} \rangle_{\gamma_2}] dt. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Si $\langle H_{\text{inn}} \rangle$ es una función independiente de la posición y λ es dependiente de la posición, entonces (2.82) adopta la forma

$$\Delta\zeta_{\gamma_1\gamma_2} = -\frac{1}{\hbar} \sum_k \left[\int_{\gamma_1} dt \langle H_{\text{cm}}^{\text{Rel},k} \rangle - \int_{\gamma_2} dt \langle H_{\text{cm}}^{\text{Rel},k} \rangle \right] - \frac{1}{\hbar} \langle H_{\text{inn}} \rangle \int [\lambda_{\gamma_1} - \lambda_{\gamma_2}] dt. \quad (2.83)$$

y así obtenemos el resultado tal y como es calculado en ref. [2]. En la ec. (2.83) identificamos dos elementos que contribuyen al corrimiento de fase total, de tal modo que

$$\Delta\zeta_{\gamma_1\gamma_2} = \Delta\phi_{\gamma_1\gamma_2} + \Delta\varepsilon_{\gamma_1\gamma_2}, \quad (2.84)$$

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

en donde

$$\Delta\phi_{\gamma_1\gamma_2} = -\frac{1}{\hbar} \sum_k \left[\int_{\gamma_1} dt \langle H_{\text{cm}}^{\text{Rel},k} \rangle - \int_{\gamma_2} dt \langle H_{\text{cm}}^{\text{Rel},k} \rangle \right], \quad (2.85)$$

$$\Delta\varepsilon_{\gamma_1\gamma_2} = -\frac{1}{\hbar} \langle H_{\text{inn}} \rangle \int [\lambda_{\gamma_1} - \lambda_{\gamma_2}] dt, \quad (2.86)$$

son los corrimientos de fase inducidos por el campo gravitacional en los grados de libertad de la posición del centro de masa y los grados de libertad internos, respectivamente.

2.4.5. Evolución de una partícula en interferómetro Mach-Zehnder

Considere una partícula masiva con grados de libertad internos, esta ingresa a un interferómetro Mach-Zehnder (ver fig. 2.4), el que está bajo la acción de un campo gravitacional $\phi(x)$, y sus brazos se encuentran a potenciales gravitacionales distintos. El sistema ingresa al interferómetro y la evolución de este estado, luego de pasar por el primer divisor de haces, está dada por

$$|\Psi\rangle_{\text{MZ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_1} dt H} |\psi_{\text{cm}}\rangle |\tau\rangle + e^{i\varphi} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_2} dt H} |\psi_{\text{cm}}\rangle |\tau\rangle \right), \quad (2.87)$$

en donde γ_1 y γ_2 denotan los diversos caminos del interferómetro, y φ es una fase local controlable. Utilizando el hamiltoniano H dado por la ec. (2.76), la evolución del estado adopta la forma:

$$|\Psi\rangle_{\text{MZ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_1} dt H_{\text{cm}}} |\psi_{\text{cm}}\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_1} dt \left(1 - \frac{p^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) H_{\text{inn}}} |\tau\rangle \right. \quad (2.88)$$

$$\left. + e^{i\varphi} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_2} dt H_{\text{cm}}} |\psi_{\text{cm}}\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma_2} dt \left(1 - \frac{p^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) H_{\text{inn}}} |\tau\rangle \right). \quad (2.89)$$

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

Como es sabido, un interferómetro MZ tiene dos detectores en su salida. Notando x e y como los detectores, la probabilidad de detección en el detector x está dada por:

$$\begin{aligned}
 P_x = |\langle x | \Psi \rangle_{\text{MZ}}|^2 = & \frac{1}{4} \left[2 + e^{i\varphi} e^{-i\Delta\phi_{\gamma_1\gamma_2}} \right. \\
 & \times \langle \tau | e^{\frac{i}{\hbar} \left[\int_{\gamma_1} dt \left(1 - \frac{p^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) - \int_{\gamma_2} dt \left(1 - \frac{p^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) \right]} H_{\text{inn}} | \tau \rangle \\
 & + e^{-i\varphi} e^{i\Delta\phi_{\gamma_1\gamma_2}} \\
 & \left. \times \langle \tau | e^{-\frac{i}{\hbar} \left[\int_{\gamma_1} dt \left(1 - \frac{p^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) - \int_{\gamma_2} dt \left(1 - \frac{p^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) \right]} H_{\text{inn}} | \tau \rangle \right], \tag{2.90}
 \end{aligned}$$

en donde $\Delta\phi_{\gamma_1\gamma_2}$ es el corrimiento de fase de los grados de libertad de la posición del centro de masa dado en la ecuación (2.85), para los caminos γ_1 y γ_2 . Así para el corrimiento de fase de los grados de libertad internos evaluamos las integrales en los segmentos verticales y horizontales del interferómetro Mach-Zehnder. Así

$$\int_{\gamma_1} dt H_{\text{cm}} - \int_{\gamma_2} dt H_{\text{cm}} = \int_0^{T_V} dt H_{\text{cm}} + \int_{T_V}^{T_{\text{arr}}^{\gamma_1}} dt H_{\text{cm}} - \int_0^{T_H} dt H_{\text{cm}} - \int_{T_H}^{T_{\text{arr}}^{\gamma_2}} dt H_{\text{cm}},$$

en donde para el camino γ_1 se tiene que $\int_0^{T_V}$ es la integral en el segmento vertical y $\int_{T_V}^{T_{\text{arr}}^{\gamma_1}}$ es para el segmento horizontal, con $T_{\text{arr}}^{\gamma_1}$ es el intervalo de coordenada temporal empleado en recorrer todo el trayecto γ_1 . De manera similar para γ_2 , $\int_0^{T_H}$ corresponde al camino horizontal y $\int_{T_H}^{T_{\text{arr}}^{\gamma_2}}$ al segmento vertical, con $T_{\text{arr}}^{\gamma_2}$ el intervalo de coordenada temporal empleado en recorrer el trayecto γ_2 . Entonces, reemplazando

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

la expresión para el Hamiltoniano del centro de masas, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^{T_V} dt H_{\text{cm}} &= \int_0^{T_V} dt \left\{ \frac{\vec{p}^2}{2m} + mc^2 - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} + m\phi(x) + \frac{m}{2c^2}\phi^2(x) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2mc^2} \left(\phi(x)\vec{p}^2 + [\vec{p}\phi(x)] \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} [\vec{p}^2\phi(x)] \right) \right\} \\
 &= \Delta T_V^{\gamma_1} \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + mc^2 - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} \right) + \int_0^{T_V} dt \left\{ m\phi(x) + \frac{m}{2c^2}\phi(x)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2mc^2} \left(\phi(x)\vec{p}^2 + [\vec{p}\phi(x)] \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} [\vec{p}^2\phi(x)] \right) \right\}, \tag{2.91}
 \end{aligned}$$

en donde $\Delta T_V^{\gamma_1}$ es el intervalo de tiempo coordenado utilizado en recorrer el segmento vertical de γ_1 . La integral entonces adopta la forma

$$\begin{aligned}
 \int_{T_V}^{T_{\text{arr}}^{\gamma_1}} dt H_{\text{cm}} &= \Delta T_H^{\gamma_1} \left\{ \frac{\vec{p}^2}{2m} + mc^2 - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} + m\phi(R + \Delta h) + \frac{m}{2c^2}\phi(R + \Delta h)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2mc^2} (\phi(R + \Delta h)\vec{p}^2) \right\}, \tag{2.92}
 \end{aligned}$$

con $\Delta T_H^{\gamma_1}$ el intervalo de tiempo coordenado que demora en recorrer el segmento horizontal de γ_1 . Luego para γ_2 , la integral para el trayecto horizontal da lo siguiente

$$\int_0^{T_H} dt H_{\text{cm}} = \Delta T_H^{\gamma_2} \left\{ \frac{\vec{p}^2}{2m} + mc^2 - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} + m\phi(R) + \frac{m}{2c^2}\phi(R)^2 + \frac{3}{2mc^2} (\phi(R)\vec{p}^2) \right\}, \tag{2.93}$$

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

con $\Delta T_H^{\gamma_2}$ corresponde al intervalo de tiempo utilizado en recorrer el trayecto horizontal de γ_2 . Para la parte vertical del camino

$$\int_{T_H}^{T_{\text{arr}}^{\gamma_2}} dt H_{\text{cm}} = \Delta T_V^{\gamma_2} \left(\frac{p^2}{2m} + mc^2 - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} \right) + \int_{T_H}^{T_{\text{arr}}^{\gamma_2}} dt \left\{ m\phi(x) + \frac{m}{2c^2} \phi(x)^2 + \frac{3}{2mc^2} \left(\phi(x)\vec{p}^2 + [\vec{p}\phi(x)] \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} [\vec{p}^2\phi(x)] \right) \right\}, \quad (2.94)$$

en donde $\Delta T_V^{\gamma_2}$ es el tiempo coordinado de vuelo que demora en recorrer el segmento vertical de γ_2 . Consideramos además que el intervalo de tiempo que se emplea en recorrer el segmento vertical para ambos caminos es el mismo, al igual que el camino horizontal, por lo que $\Delta T_V^{\gamma_2} = \Delta T_V^{\gamma_1}$ y $\Delta T_H^{\gamma_1} = \Delta T_H^{\gamma_2} = \Delta T$. Así,

$$\int_{\gamma_1} dt H_{\text{cm}} - \int_{\gamma_2} dt H_{\text{cm}} = \Delta T \left[m(\phi(R + \Delta h) - \phi(R)) + \frac{m}{2c^2} (\phi^2(R + \Delta h) - \phi^2(R)) + \frac{3}{2mc^2} (\phi(R + \Delta h) - \phi(R)) \right]. \quad (2.95)$$

Considerando un interferómetro pequeño, es decir, que su altura $\Delta h \ll R$, el potencial gravitacional puede ser aproximado a primer orden en Δh como: $\phi(R + \Delta h) = \phi(R) + g\Delta h + O(\Delta h^2)$. Así, se obtiene

$$\int_{\gamma_1} dt H_{\text{cm}} - \int_{\gamma_2} dt H_{\text{cm}} = \Delta T \left[m + \frac{m}{2c^2} \phi(R) + \frac{3\vec{p}^2}{2mc^2} \right] g\Delta h. \quad (2.96)$$

Considerando $\bar{E}_{\text{corr}}^{\text{GR}} = m\phi(R)/2 + 3\vec{p}^2/(2m)$, entonces

$$\int_{\gamma_1} dt H_{\text{cm}} - \int_{\gamma_2} dt H_{\text{cm}} = \Delta T \left[mc^2 + \bar{E}_{\text{corr}}^{\text{GR}} \right] \frac{g\Delta h}{c^2}. \quad (2.97)$$

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

Luego, para la expresión $\langle \tau | e^{\frac{i}{\hbar} \left[\int_{\gamma_1} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) - \int_{\gamma_2} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) \right]} H_{\text{inn}} | \tau \rangle$ procedemos de manera similar a lo hecho anteriormente, es decir, separamos las integrales en los segmentos horizontales y verticales. Así, para el camino γ_1 se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) &= \int_0^{T_V} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) + \int_{T_V}^{T_{\text{arr}}^{\gamma_1}} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) \\ &= \Delta T_V^{\gamma_1} \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) + \int_0^{T_V} dt \frac{\phi(x)}{c^2} \\ &\quad + \Delta T_H^{\gamma_1} \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(R + \Delta h)}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (2.98)$$

De manera análoga para el camino γ_2 , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) &= \int_0^{T_H} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) + \int_{T_H}^{T_{\text{arr}}^{\gamma_2}} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) \\ &= \Delta T_H^{\gamma_2} \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(R)}{c^2} \right) + \Delta T_V^{\gamma_2} \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) \\ &\quad + \int_{T_H}^{T_{\text{arr}}^{\gamma_2}} dt \frac{\phi(x)}{c^2}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Como hemos dicho previamente, $\Delta T_V^{\gamma_1} = \Delta T_V^{\gamma_2}$ y $\Delta T_H^{\gamma_1} = \Delta T_H^{\gamma_2} = \Delta T$, además $\int_0^{T_V} dt \phi(x)/c^2 = \int_R^{R+\Delta h} dx \phi(x)/(vc^2)$ y $\int_{T_H}^{T_{\text{arr}}^{\gamma_2}} dt \phi(x)/c^2 = \int_R^{R+\Delta h} dx \phi(x)/(vc^2)$, por lo que

$$\int_{\gamma_1} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) - \int_{\gamma_2} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) = \Delta T \left(\frac{\phi(R + \Delta h)}{c^2} - \frac{\phi(R)}{c^2} \right). \quad (2.100)$$

La expresión (2.100) denota la dilatación temporal gravitacional entre γ_1 y γ_2 . Así entonces, considerando nuevamente un interferómetro en donde $\Delta h \ll R$, entonces

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

se obtiene

$$\int_{\gamma_1} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) - \int_{\gamma_2} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) \approx \Delta T \frac{g\Delta h}{c^2}. \quad (2.101)$$

Considerando que

$$H_{\text{inn}} = E_0 |0\rangle \langle 0| + E_1 |1\rangle \langle 1|, \quad (2.102)$$

y que $|\tau\rangle = (|0\rangle + |1\rangle) / \sqrt{2}$, obtenemos:

$$\langle \tau | e^{\frac{i}{\hbar} \left[\int_{\gamma_1} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) - \int_{\gamma_2} dt \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\phi(x)}{c^2} \right) \right]} H_{\text{inn}} | \tau \rangle = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\Delta T g \Delta h}{c^2} E_0} + e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\Delta T g \Delta h}{c^2} E_1} \right), \quad (2.103)$$

además $\langle \tau | H_{\text{inn}} | \tau \rangle = \langle H_{\text{inn}} \rangle = (E_0 + E_1) / 2$ y definiendo la diferencia de energía entre los niveles del “reloj” $\Delta E = E_1 - E_0$, se tiene que (2.103) adopta la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\Delta T g \Delta h}{c^2} E_0} + e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\Delta T g \Delta h}{c^2} E_1} \right) &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\Delta T g \Delta h}{c^2} \Delta E} + e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\Delta T g \Delta h}{c^2} \Delta E} \right) e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\Delta T g \Delta h}{c^2} \frac{1}{2}(E_0 + E_1)} \\ &= \cos \left(\frac{\Delta T g \Delta h}{2\hbar c^2} \Delta E \right) e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\Delta T g \Delta h}{c^2} \langle H_{\text{inn}} \rangle}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Entonces, considerando las expresiones para (2.97) y (2.104) se obtiene la siguiente expresión para la probabilidad de detección

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{4} \left[2 + e^{i\varphi} e^{\frac{i}{\hbar} (\Delta T [mc^2 + \bar{E}_{\text{corr}}^{\text{GR}}] \frac{g\Delta h}{c^2})} \cos \left(\frac{\Delta T g \Delta h}{2\hbar c^2} \Delta E \right) e^{\frac{i}{\hbar} \frac{\Delta T g \Delta h}{c^2} \langle H_{\text{inn}} \rangle} \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\varphi} e^{\frac{-i}{\hbar} (\Delta T [mc^2 + \bar{E}_{\text{corr}}^{\text{GR}}] \frac{g\Delta h}{c^2})} \cos \left(\frac{\Delta T g \Delta h}{2\hbar c^2} \Delta E \right) e^{\frac{-i}{\hbar} \frac{\Delta T g \Delta h}{c^2} \langle H_{\text{inn}} \rangle} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[(mc^2 + \bar{E}_{\text{corr}}^{\text{GR}} + \langle H_{\text{inn}} \rangle) \frac{\Delta T g \Delta h}{2\hbar c^2} + \varphi \right] \cos \left[\frac{\Delta T g \Delta h}{2\hbar c^2} \Delta E \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

Se puede demostrar que para los detectores x y en y se tiene que

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \cos \left[(mc^2 + \bar{E}_{\text{corr}}^{\text{GR}} + \langle H_{\text{inn}} \rangle) \frac{\Delta T g \Delta h}{2\hbar c^2} + \varphi \right] \cos \left[\frac{\Delta T g \Delta h}{2\hbar c^2} \Delta E \right] \right\}. \quad (2.106)$$

Esta expresión (2.106) corresponde a la probabilidad de detección de una partícula en las salidas de un interferómetro Mach-Zehnder como función del intervalo de tiempo coordinado ΔT en el cual la partícula viaja en una superposición de dos trayectorias a alturas constantes (una a altura R y otra a $R + \Delta h$). El término proporcional a la masa es el proveniente del corrimiento de fase generado por la energía potencial newtoniana $mg\Delta h$, el término $\bar{E}_{\text{corr}}^{\text{GR}}$ que corresponde a las correcciones relativistas a la energía. Notar que si no existen grados de libertad internos, solo los términos proporcionales a la energía potencial Newtoniana y las correcciones relativistas están presente en la probabilidad de detección. Es posible ver el patrón de interferencia causado por el "reloj" al graficar la diferencia entre las probabilidades P_+ y P_- . Así, en la fig (2.5) podemos ver dos efectos nuevos: uno de ellos consiste en la disminución periódica de la visibilidad, producto de la dilatación temporal gravitacional (presente en el término $\Delta T g \Delta h \Delta E / (2\hbar c^2)$) y otro debido a la corrección al corrimiento de fase producto del valor esperado del H_{inn} .

Hasta el momento hemos considerado sistemas con grados de libertad internos de dos niveles. Es posible considerar sistemas en los cuales los grados de libertad internos correspondan a un estado mezcla arbitrario. En este caso, para un interferómetro Mach-Zehnder la visibilidad interferométrica adopta la forma

$$V = \left| \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{-\frac{i}{\hbar} H_{\text{inn}} \Delta \tau} \right\} \right|. \quad (2.107)$$

2.4 Interferometría de sistemas cuánticos bajo la acción de un campo gravitacional débil

En este caso la visibilidad es máxima si $\Delta\tau = 0$ o si el estado inicial del reloj se encuentra en un estado propio de H_{inn} , ya que en este último caso no existe evolución de los grados de libertad internos. Incluyendo grados de libertad internos descritos por un estado mezcla permite estudiar diversos sistemas físicos, en particular sistemas de varios niveles o en el límite continuo, y así estudiar diversos sistemas macroscópicos (para más detalles ver ref. [16]).

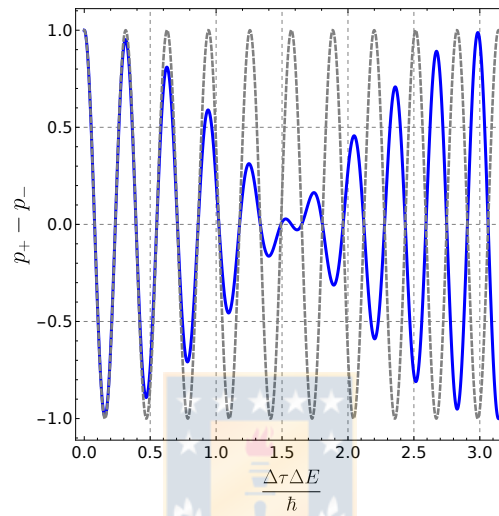


Figura 2.5: Visibilidad interferométrica en términos del tiempo propio $\Delta\tau$ y la diferencia de energía ΔE entre los niveles del reloj. Si estamos presentes en una teoría no relativista, o en una teoría en donde los grados de libertad internos no se acoplen al potencial gravitacional, solo tendríamos un cambio de fase en términos de la energía en reposo y correcciones relativistas a la energía y así la visibilidad se mantendría máxima (líneas grises discontinuas), en cambio, si los grados de libertad internos se acoplan al potencial gravitacional, la visibilidad cambia periódicamente (línea azul continua envolvente) y existe además una corrección al corrimiento de fase producida por $\langle H_{\text{inn}} \rangle$ (línea azul continua).

Capítulo 3

Interferómetros Franson y abrazado para un campo gravitacional débil: fotones



En este capítulo estudiaremos los interferómetros Franson y abrazado bajo la acción de un campo gravitacional débil. Mostraremos que, aún bajo la condición de un interferómetro balanceado, es posible obtener un estado maximalmente entrelazado debido a la dilatación temporal gravitacional.

3.1. Arreglo interferométrico Franson

3.1.1. Arreglo interferométrico Franson

En el arreglo interferométrico Franson, los caminos γ_1 y γ'_1 experimentan un potencial $\phi(R)$, y los segmentos de los caminos γ_2 y γ'_2 experimentan un potencial gravitacional $\phi(R + \Delta h)$, en donde $h = \Delta z$ es la diferencia en la coordenada z (a lo largo de la dirección vertical) de los caminos superiores e inferiores del

3.1 Arreglo interferométrico Franson

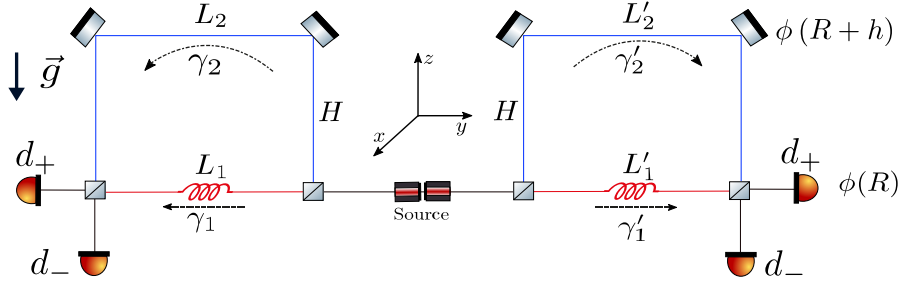


Figura 3.1: Arreglo interferométrico Franson. Una fuente generadora de fotones une a dos interferómetros Mach-Zehnder. Esta fuente, y los caminos γ_1 y γ'_1 están localizados en un potencial gravitacional $\phi(R)$. Los segmentos horizontales de los caminos γ_2 y γ'_2 están localizados en un potencial gravitacional $\phi(R+h)$. L_1 y L'_1 indican las longitudes propias de los caminos horizontales γ_1 y γ'_1 , respectivamente. L_2 y L'_2 indican las longitudes propias de los segmentos horizontales de los caminos γ_2 y γ'_2 , respectivamente. H denota la longitud propia de los segmentos verticales de los caminos γ_2 y γ'_2 . Los caminos γ_1 y γ'_1 contienen líneas de retraso simbólicas para controlar la diferencia de longitudes propias entre los caminos γ_1 y γ_2 , y entre los caminos γ'_1 y γ'_2 . Las líneas de retraso se encuentran en el potencial gravitacional $\phi(R)$. Los detectores ubicados a la izquierda y derecha de la salida de los interferómetros están denotados por d_+ y d_- .

interferómetro. Los segmentos verticales de los caminos γ_2 y γ'_2 experimentan una variación continua del potencial gravitacional desde $\phi(R)$ hasta $\phi(R+h)$.

De acuerdo a la métrica ec. (2.36), la longitud propia del camino γ_1 está dada aproximadamente por

$$L_1 \approx \left(1 - \frac{\phi(R)}{c^2}\right) \Delta x_1, \quad (3.1)$$

en donde Δx_1 es el intervalo de coordenadas espaciales de γ_1 . De manera similar, para el segmento horizontal del camino γ_2

$$L_2 \approx \left(1 - \frac{\phi(R+h)}{c^2}\right) \Delta x_2, \quad (3.2)$$

donde Δx_2 es el intervalo de coordenada espacial de γ_2 . Los segmentos verticales

3.1 Arreglo interferométrico Franson

del camino γ_2 tienen una altura propia dada por

$$H \approx \left(1 - \frac{\phi(R)}{c^2}\right) h. \quad (3.3)$$

El intervalo de coordenada temporal dado por la Ec. (2.37) para una sección del camino γ_2 es, hasta primer orden en h , dada por

$$\Delta t_{\gamma_2}^V \approx \frac{h}{c} \left(1 - 2\frac{\phi(R)}{c^2}\right), \quad (3.4)$$

mientras que los intervalos de tiempo coordinado para el camino γ_1 y el segmento horizontal del camino γ_2 están dados por

$$\Delta t_{\gamma_1} \approx \frac{L_1}{c} \left(1 - \frac{\phi(R)}{c^2}\right) \quad (3.5)$$

y

$$\Delta t_{\gamma_2}^H \approx \frac{L_2}{c} \left(1 - \frac{\phi(R+h)}{c^2}\right), \quad (3.6)$$

respectivamente. El intervalo de coordenada temporal Δt_{γ_2} a lo largo del camino γ_2 es $\Delta t_{\gamma_2} = \Delta t_{\gamma_2}^H + 2\Delta t_{\gamma_2}^V$. El tiempo transcurrido entre la generación y detección de un fotón que se propaga a través de los caminos γ_1 o γ_2 , medido por un reloj ubicado junto a los detectores, a un potencial $\phi(R)$, está dado por los intervalos de tiempo propio

$$\Delta \tau_{\gamma_1} = \sqrt{1 + \frac{2\phi(R)}{c^2}} \Delta t_{\gamma_1} \approx \frac{L_1}{c} \quad (3.7)$$

y

$$\Delta \tau_{\gamma_2} = \sqrt{1 + \frac{2\phi(R)}{c^2}} \Delta t_{\gamma_2} \approx \frac{L_2}{c} \left(1 - \frac{gH}{c^2}\right) + 2\frac{H}{c}, \quad (3.8)$$

respectivamente. Aquí hemos usado $\phi(R+h) \approx \phi(R) + gh$, a primer orden en h . De manera análoga, para fotones propagándose a lo largo de los caminos γ'_1 o γ'_2

3.1 Arreglo interferométrico Franson

obtenemos

$$\Delta\tau_{\gamma'_1} = \sqrt{1 + \frac{2\phi(R)}{c^2}} \Delta t_{\gamma'_1} \approx \frac{L'_1}{c} \quad (3.9)$$

y

$$\Delta\tau_{\gamma'_2} = \sqrt{1 + \frac{2\phi(R)}{c^2}} \Delta t_{\gamma'_2} \approx \frac{L'_2}{c} \left(1 - \frac{gH}{c^2}\right) + 2\frac{H}{c}, \quad (3.10)$$

correspondientemente. Las diferencias de tiempo propio $\Delta\tau_{\gamma_1\gamma'_1} = \Delta\tau_{\gamma_1} - \Delta\tau_{\gamma'_1}$ y $\Delta\tau_{\gamma_2\gamma'_2} = \Delta\tau_{\gamma_2} - \Delta\tau_{\gamma'_2}$ describen el tiempo transcurrido entre las detecciones sucesivas de dos fotones gemelos propagándose a lo largo de los caminos (γ_1, γ'_1) y (γ_2, γ'_2) , respectivamente. Análogamente, $\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2} = \Delta\tau_{\gamma_1} - \Delta\tau_{\gamma_2}$ y $\Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2} = \Delta\tau_{\gamma'_1} - \Delta\tau_{\gamma'_2}$ describen la diferencia de los tiempos de vuelo de un solo fotón que se propaga a lo largo de los brazos de cada interferómetro Mach-Zehnder. Los retrasos temporales $\Delta\tau_{\gamma_1\gamma'_1}$, $\Delta\tau_{\gamma_2\gamma'_2}$, $\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2}$ y $\Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2}$ obedecen las siguientes restricciones

$$\Delta\tau_{\gamma_1\gamma'_1} - \Delta\tau_{\gamma_2\gamma'_2} = \Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2} - \Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2}. \quad (3.11)$$

Imponemos la siguiente condición

$$\Delta\tau_{\gamma_1\gamma'_1} = \Delta\tau_{\gamma_2\gamma'_2} = \Delta\tau, \quad (3.12)$$

con $\Delta\tau \geq 0$. Esto garantiza que no es posible distinguir entre un par de fotones propagándose a lo largo de los caminos (γ_1, γ'_1) de un par de fotones propagándose a lo largo de los caminos (γ_2, γ'_2) a través del tiempo transcurrido entre detecciones sucesivas. De este modo, el arreglo interferométrico Franson genera un estado maximalmente entrelazado incluso cuando no hay coincidencias entre los pares de detectores en diferentes interferómetros Mach-Zehnder.

De acuerdo a la restricción dada por la ec. (3.11) y la condición (3.12), la igualdad $\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2} = \Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2}$ se debe mantener. Por lo que esto también impone una

3.1 Arreglo interferométrico Franson

restricción sobre las longitudes propias, las que son:

$$L_1 \approx L'_1 + c\Delta\tau, \quad (3.13)$$

$$L_2 \approx L'_2 + c\Delta\tau\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right). \quad (3.14)$$

Utilizando estas expresiones, los retrasos temporales $\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2}$ y $\Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2}$ adquieren la forma

$$\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2} = \frac{L'_1}{c} - \frac{L'_2}{c}\left(1 - \frac{gH}{c^2}\right) - \frac{2H}{c}, \quad (3.15)$$

$$\Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2} = \Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2}. \quad (3.16)$$

Ahora, podemos remover los términos que no dependen del potencial gravitacional al demandar que

$$L'_1 = L'_2 + 2H, \quad (3.17)$$

lo cual indica que las longitudes propias para los caminos γ'_1 y γ'_2 son iguales, esto es, el interferómetro Mach-Zehnder para los caminos γ'_1 y γ'_2 es balanceado. Esto significa que, en el caso en que se quiera implementar este arreglo empleando fibras ópticas para guiar los fotones, se requerirían dos fibras, cada una de ellas con longitud L'_1 dada por (3.17), la cual podría formar los caminos γ'_1 y γ'_2 ; el primero localizado en el plano horizontal, mientras que el segundo formando un rectángulo tal y como aparece en la Fig. 3.1. Bajo las condiciones de la ecuación (3.17), los retrasos temporales $\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2}$ y $\Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2}$ se reducen a una expresión proporcional al campo gravitacional ref. [14; 36], esto es, los retrasos gravitacionales están dados por

$$\Delta\tau_{\gamma_1,\gamma_2} = \Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2} \approx \frac{L'_2 g H}{c^3}. \quad (3.18)$$

3.1 Arreglo interferométrico Franson

De este modo, el cambio en la fase viene dado por

$$\Delta\varphi = \omega\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2} = \omega\Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2} \approx \frac{\omega L'_2 g H}{c^3}. \quad (3.19)$$

Así, para generar un estado maximalmente entrelazado, debemos ser capaces de realizar un procedimiento de postselección, esto es, ser capaces de distinguir entre los pares de fotones que siguen los caminos (γ_1, γ'_1) o (γ_2, γ'_2) de los pares de fotones gemelos que siguen los caminos (γ_1, γ'_2) o (γ_2, γ'_1) . Así, necesitamos obtener el valor de los retrasos temporales $\Delta\tau_{\gamma_1\gamma'_2} = \Delta\tau_{\gamma_1} - \Delta\tau_{\gamma'_2}$ y $\Delta\tau_{\gamma_2\gamma'_1} = \Delta\tau_{\gamma_2} - \Delta\tau_{\gamma'_1}$, los cuales pueden ser escritos como

$$\Delta\tau_{\gamma_1\gamma'_2} = \Delta\tau_{\gamma_1\gamma'_1} + \Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2}, \quad (3.20)$$

$$\Delta\tau_{\gamma_2\gamma'_1} = \Delta\tau_{\gamma_2\gamma'_2} - \Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2}. \quad (3.21)$$

Empleando las ecuaciones (3.12) y (3.18) podemos escribir

$$\Delta\tau_{\gamma_1\gamma'_2} \approx \Delta\tau + \frac{L'_2 g H}{c^3}, \quad (3.22)$$

$$\Delta\tau_{\gamma_2\gamma'_1} \approx \Delta\tau - \frac{L'_2 g H}{c^3}, \quad (3.23)$$

lo cual indica que los fotones gemelos que se mueven a lo largo de los caminos (γ_1, γ'_2) pueden ser distinguidos de los fotones que se mueven a través de los caminos (γ_2, γ'_1) por medio de la medición de los tiempos transcurridos entre detecciones sucesivas.

3.1.2. Arreglo interferométrico abrazado

El arreglo interferométrico abrazado, descrito en la figura 3.2, que tiene su fuente de fotones en el potencial gravitacional $\phi(R+h)$. Los fotones que viajan a lo

3.1 Arreglo interferométrico Franson

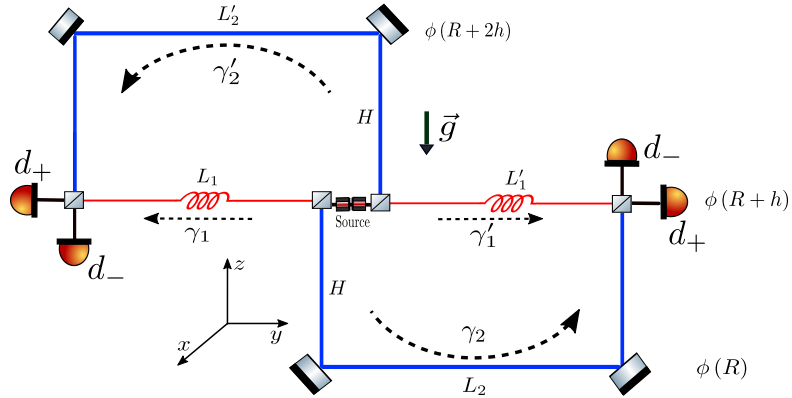


Figura 3.2: Arreglo interferométrico abrazado. Una fuente generadora de fotones está localizada en un segmento perteneciente a dos interferómetros Mach-Zehnder. Esta fuente y los caminos γ_1 y γ_1' están localizados en un potencial gravitacional $\phi(R+h)$. Los segmentos horizontales de los caminos γ_2 y γ_2' están localizados en un potencial gravitacional $\phi(R+2h)$ y $\phi(R)$, respectivamente. L_1 y L_1' indican las longitudes propias de los caminos horizontales γ_1 y γ_1' , respectivamente. L_2 y L_2' indican la longitud propia de los segmentos horizontales de los caminos γ_2 y γ_2' , respectivamente. H denota la longitud propia de los segmentos verticales de γ_2 y γ_2' . Los caminos γ_1 y γ_1' contienen retrasos temporales simbólicos para controlar las diferencias de longitud propia entre los caminos γ_1 y γ_2 , y entre los caminos γ_1' y γ_2' . Las líneas de retraso están en el potencial gravitacional $\phi(R+h)$. Los detectores a las salidas de los arreglos a la izquierda y derecha están indicados por d_+ y d_- .

3.2 Estado cuántico de dos fotones y probabilidad de detección en los arreglos Franson y abrazado en un campo gravitacional débil

largo de los caminos γ_1 y γ'_1 también experimentan este potencial. Los fotones que viajan a lo largo de los segmentos horizontales de los caminos γ'_2 y γ_2 se encuentran bajo la acción de los potenciales gravitacionales $\phi(R+2h)$ y $\phi(R)$, respectivamente. Los segmentos verticales del camino γ'_2 experimentan una variación continua del potencial gravitacional desde $\phi(R+h)$ a $\phi(R+2h)$. Los segmentos verticales del camino γ_2 se encuentran bajo la acción de una variación continua del potencial gravitacional desde $\phi(R)$ a $\phi(R+h)$.

Como en el caso del arreglo Franson, para generar un estado entrelazado, imponemos la condición dada por la ecuación (3.12), la cual garantiza la indistinguibilidad de los fotones gemelos viajando a través de (γ_1, γ'_1) de aquellos que lo hacen a través de los caminos (γ_2, γ'_2) .

Podemos imponer las condiciones dada por la relación (3.17), la cual elimina los términos geométricos que aparecen en $\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2}$. De este modo, obtenemos

$$\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2} = \Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2} \approx \frac{L'_2 g H}{c^3}. \quad (3.24)$$

El corrimiento en la fase adopta entonces la forma

$$\Delta\varphi = \omega\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2} = \omega\Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2} \approx \frac{\omega L'_2 g H}{c^3}. \quad (3.25)$$

3.2. Estado cuántico de dos fotones y probabilidad de detección en los arreglos Franson y abrazado en un campo gravitacional débil

En la sección previa, calculamos varios retrasos temporales entre los eventos de detección en los arreglos Franson y abrazado en la presencia de un campo gravitacional débil. En esta sección, calculamos los efectos de los retrasos temporales

3.2 Estado cuántico de dos fotones y probabilidad de detección en los arreglos Franson y abrazado en un campo gravitacional débil

en la probabilidad de detección entre pares de detectores.

La fuente de luz considerada en este experimento genera dos fotones, de manera simultánea, que se propagan en direcciones opuestas. Asumimos que el estado generado por la fuente se describe como

$$|\psi\rangle = \int \int d\omega_1 d\omega_2 f(\omega_1, \omega_2) a^\dagger(\omega_1) a^\dagger(\omega_2) |0\rangle, \quad (3.26)$$

donde $|0\rangle$ es el estado de vacío del campo electromagnético y el operador $a^\dagger(\omega_i)$ crea un fotón que se propaga a la izquierda ($i = 1$) o a la derecha ($i = 2$) de la fuente de luz con una frecuencia ω_i . La función espectral $f(\omega_1, \omega_2)$ depende de las propiedades específicas de la fuente y satisface la condición de normalización $\int \int d\omega_1 d\omega_2 |f(\omega_1, \omega_2)|^2 = 1$.

El estado después de un proceso de post-selección puede ser reescrito como la siguiente superposición coherente:

$$|\Psi\rangle = \int \int d\omega_1 d\omega_2 \tilde{f}(\omega_1, \omega_2) |\psi\rangle, \quad (3.27)$$

Consideremos una distribución de probabilidad de amplitud dada por

$$\tilde{f}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} f(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1 \Delta\tau} e^{i(\omega_1 + \omega_2) \Delta\tau_{\gamma'_1}}, \quad (3.28)$$

y el estado de dos fotones dado $|\psi\rangle$ definido como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\omega_1, \gamma_1\rangle |\omega_2, \gamma'_1\rangle + e^{i(\omega_1 + \omega_2) \Delta\tau_{\gamma'_2 \gamma'_1} + i(\alpha + \beta)} |\omega_1, \gamma_2\rangle |\omega_2, \gamma'_2\rangle), \quad (3.29)$$

donde los estados $|\omega_1, \gamma_i\rangle |\omega_2, \gamma'_i\rangle$ describen un fotón de frecuencia ω_1 propagándose a lo largo del camino γ_i y un fotón de frecuencia ω_2 propagándose a través del camino γ'_i .

Consideremos el caso en que la fuente empleada no genere estados con disper-

3.2 Estado cuántico de dos fotones y probabilidad de detección en los arreglos Franson y abrazado en un campo gravitacional débil

sión en frecuencia, esto es, $f(\omega_1, \omega_2) = \delta(\omega_1 - \bar{\omega}_1)\delta(\omega_2 - \bar{\omega}_2)$, y con fases locales $\alpha = \beta = 0$. Cuando el interferómetro está configurado de tal modo que todos sus caminos se encuentran bajo el mismo potencial gravitacional, la diferencia de tiempo propio $\Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2}$ es nula. En este caso, el interferómetro genera un estado maximalmente entrelazado,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\bar{\omega}_1, \gamma_1\rangle|\bar{\omega}_2, \gamma'_1\rangle + |\bar{\omega}_1, \gamma_2\rangle|\bar{\omega}_2, \gamma'_2\rangle), \quad (3.30)$$

siempre que el proceso de post-selección pueda llevarse a cabo. Este estado es el generado usualmente por los interferómetros Franson y abrazado. La presencia de un campo gravitacional débil lleva a una fase relativa en el estado $|\psi\rangle$, el cual no cambia la cantidad de entrelazamiento. Así, el estado $|\psi\rangle$ corresponde a una superposición coherente de un estado de dos fotones entrelazado maximalmente.

Un efecto interesante aparece al considerar un arreglo interferométrico Franson y abrazado en una superficie equipotencial. En este caso, si ambos interferómetros Mach-Zehnder que componen cada arreglo están balanceados, esto significa $\Delta\tau = 0$ en las ecuaciones (3.13) y (3.14). En este caso, las cuatro posibles combinaciones de los caminos tienen exactamente la misma longitud y consecuentemente no es posible distinguir entre ellos. Por lo tanto, el estado generado es separable. A pesar de esto, es posible rotar el interferómetro de tal modo que existe una diferencia de potencial gravitacional entre sus brazos, pero cada interferómetro Mach-Zehnder se encuentra balanceado y además son geoméricamente equivalentes con respecto a las longitudes propias. Esto es posible debido a la elección de la métrica de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas. En este caso tenemos que $\Delta\tau$ se anula y el retraso temporal gravitacional adopta la forma $\Delta\tau_{\gamma_1\gamma'_2} = L'_2gH/c^3 = -\Delta\tau_{\gamma_2\gamma'_1}$. De este modo, el proceso de post-selección es posible y el arreglo genera un estado maximalmente entrelazado. En este caso en particular el campo gravitacional hace

3.2 Estado cuántico de dos fotones y probabilidad de detección en los arreglos Franson y abrazado en un campo gravitacional débil

posible la generación de un estado maximalmente entrelazado.

Si el arreglo interferométrico abrazado, formado por interferómetros Mach-Zehnder balanceados y geoméricamente equivalentes, es rotado en 90° sus longitudes propias satisfacen las siguientes ecuaciones

$$L_1 \approx L'_1, \quad (3.31)$$

$$L_2 \approx (1 + 2gH/c^2) L'_2. \quad (3.32)$$

Entonces, para los retrasos temporales a lo largo de cada camino obtenemos

$$\Delta\tau_{\gamma_1} - \Delta\tau_{\gamma'_1} = 0, \quad (3.33)$$

$$\Delta\tau_{\gamma_2} - \Delta\tau_{\gamma'_2} = \frac{4gL'_2H}{c^3}. \quad (3.34)$$

De este modo, los fotones que se propagan a través de los caminos (γ_1, γ'_1) son detectados en coincidencia. Los fotones que se propagan a lo largo de los caminos (γ_2, γ'_2) son detectados con un retraso temporal. En este caso podemos distinguir entre los fotones que se propagan a través de (γ_1, γ'_1) o por los caminos (γ_2, γ'_2) . En el caso de fotones generados sin dispersión en frecuencia, de acuerdo a la ecuación (3.29), el arreglo aún así genera un estado maximalmente entrelazado. Las condiciones mencionadas previamente, para interferómetros geoméricamente equivalentes bajo la ausencia de una diferencia de potencial gravitacional entre los caminos del arreglo, llevan a las siguientes restricciones en las longitudes propias cuando el interferómetro es rotado

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 (1 - gH/c^2) + 2H, \\ L'_1 &= L'_2 (1 + gH/c^2) + 2H. \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.2 Estado cuántico de dos fotones y probabilidad de detección en los arreglos Franson y abrazado en un campo gravitacional débil

Como consecuencia, los retrasos temporales adoptan la forma

$$\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2} = \frac{-gHL'_2}{c^3}, \quad (3.36)$$

$$\Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2} = \frac{gHL'_2}{c^3}. \quad (3.37)$$

Para los fotones que se propagan en el mismo Mach-Zehnder los retrasos temporales adquieren las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{\gamma_1, \gamma'_2} &= \frac{gHL'_2}{c^3}, \\ \Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma_2} &= \frac{-gHL'_2}{c^3}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

De esta forma, ahora es posible detectar dos fotones en diferentes detectores del mismo interferómetro Mach-Zehnder.

Lamentablemente, en presencia de fotones generados con dispersión en frecuencia y en el caso en que el proceso de detección es realizado a través de puertos que no distinguen frecuencia, es decir, se detecta un fotón independiente de su frecuencia, la cantidad de entrelazamiento se reduce. De este modo, los interferómetros Franson y abrazado generan, en presencia de un campo gravitacional débil y dispersión en frecuencia, un estado parcialmente entrelazado. En este caso, se espera una violación no máxima de la desigualdad CHSH. Bajo estas consideraciones, los detectores son modelados de la siguiente manera a través de operadores de proyección

$$P_{i,\alpha} = \int d\omega a_{i,\alpha}^\dagger(\omega)|0\rangle\langle 0|a_{i,\alpha}(\omega), \quad (3.39)$$

en donde $a_{i,\alpha}(\omega)$ denota el operador de aniquilación de un fotón de frecuencia ω actuando en el detector $i = \pm$ a la salida de uno de los detectores del interferómetro Mach-Zehnder a la izquierda ($\alpha = 1$) o a la derecha ($\alpha = 2$). La probabilidad de obtener una detección en el puerto de salida $(i, 1)$ y una en el detector $(j, 2)$ está

3.2 Estado cuántico de dos fotones y probabilidad de detección en los arreglos Franson y abrazado en un campo gravitacional débil

dada por

$$p_{i,j} = \langle \Psi | P_{i,1} P_{j,2} | \Psi \rangle, \quad (3.40)$$

la cual se transforma en

$$p_{i,j} = \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\delta_{ij}} \int d\omega_1 d\omega_2 |f(\omega_1, \omega_2)|^2 \cos(\omega_1 \Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2} + \omega_2 \Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2} + \alpha + \beta) \right). \quad (3.41)$$

La cual es independiente del tiempo de detección desfasada $\Delta\tau$. Pero esta probabilidad de detección es una función de los retrasos gravitacionales temporales $\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2}$ y $\Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2}$, los cuales están acoplados tanto a la frecuencia de los fotones como al ancho espectral. Como es de esperar, en el caso en que todos los brazos del interferómetro estén en el mismo potencial gravitacional, el retraso gravitacional es cero, y así el tiempo de detección en desfase puede ser ajustado a cero. De este modo, la probabilidad de detección $p_{i,j}$ adopta la forma de la ec. (2.32) con una visibilidad interferométrica máxima. Esta probabilidad de detección es conocida como la probabilidad de detección en coincidencia para la configuración usual para los interferómetros Franson y abrazado.

Asumiendo que la distribución de frecuencias para cada fotón es gaussiana, esto es, $f(\omega_1, \omega_2) = f_1(\omega) f_2(\omega)$ con $f_i(\omega) = \exp(-(\omega - \omega_i)^2 / (2\sigma_i^2)) / (\sigma_i \sqrt{2\pi})$, en donde σ_i y ω_i son los anchos y el valor promedio de la distribución gaussiana, respectivamente, la probabilidad de detección adopta la siguiente expresión

$$p_{i,j} = \frac{1}{4} \left[1 - (-1)^{\delta_{ij}} V(\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2}, \Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2}) \cos[\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2}\omega_1 + \Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2}\omega_2 + \alpha + \beta] \right], \quad (3.42)$$

3.2 Estado cuántico de dos fotones y probabilidad de detección en los arreglos Franson y abrazado en un campo gravitacional débil

en donde

$$V(\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2}, \Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2}) = \exp \left[-\frac{1}{4} \left(\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2}^2 \sigma_1^2 + \Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2}^2 \sigma_2^2 \right) \right] \quad (3.43)$$

es la visibilidad interferométrica del proceso de detección de dos fotones. Estas dos expresiones son válidas para un arreglo Franson y abrazado con cualquier configuración geométrica y en la presencia del campo gravitacional débil considerado, el cuál es estático (es decir, los componentes $g_{i0} = 0$).

Las ecuaciones (3.42) y (3.43) pueden ser simplificadas al notar que para los interferómetros Franson y abrazado se cumple que

$$\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2} = \Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2} = \Delta\tau_\gamma \approx \frac{L'_2 g H}{c^3}. \quad (3.44)$$

De este modo, la probabilidad de detección temporal desfasada puede ser escrita como

$$p_{i,j} = \frac{1}{4} \left[1 - (-1)^{\delta_{ij}} V(\Delta\tau_\gamma) \cos(\Delta\tau_\gamma(\omega_1 + \omega_2) + \alpha + \beta) \right], \quad (3.45)$$

con

$$V(\Delta\tau_\gamma) = \exp \left[-\frac{1}{4} \Delta\tau_\gamma^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right]. \quad (3.46)$$

Podemos identificar dos diferentes regímenes. Si la condición $\Delta\tau_\gamma^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \ll 1$ se mantiene, entonces la visibilidad es maximal y la probabilidad de detección temporal desfasada posee un comportamiento oscilatorio armónico en términos del corrimiento en fase total dado por $\Delta\tau_\gamma(\omega_1 + \omega_2)$.

En el régimen opuesto, esto es, $\Delta\tau_\gamma^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \gg 1$, el decaimiento exponencial de la visibilidad interferométrica domina y la oscilación armónica tiende a anularse.

3.2 Estado cuántico de dos fotones y probabilidad de detección en los arreglos Franson y abrazado en un campo gravitacional débil

En este caso, el decaimiento exponencial no depende de las frecuencias ω_1 y ω_2 , pero sí del retraso gravitacional temporal y la distribución espectral.

En el caso en que el retraso temporal gravitacional sea despreciable, es decir, $\Delta\tau_\gamma \rightarrow 0$, la probabilidad de detección adopta la forma

$$p_{ij} = \frac{1}{4} (1 - (-1)^{\delta_{ij}} \cos(\alpha + \beta)), \quad (3.47)$$

que es la expresión habitual de los interferómetros Franson y abrazado.

En la fig. 3.3(a) se muestra el comportamiento de la probabilidad de detección $p_{+,+}$ de acuerdo a la ec. (3.45) como una función del producto $A = L_{\gamma'2}H$. Es importante notar que los fotones gemelos son producidos por un láser de banda ultra ancha ref. [37; 38; 39], en donde los valores de la longitud promedio es comparable con el valor del ancho de banda. Para cada fotón gemelo su distribución en los longitud de onda están centradas en $\lambda_1 = 806$ nm y $\lambda_2 = 706$ nm con un ancho de banda idéntico, es decir, $\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2 = \delta\lambda$. Además, asumimos tres valores diferentes del ancho: $\delta\lambda = 161,2$ nm ($\sigma_1 = 4,724 \times 10^{14}$ Hz y $\sigma_2 = 6,176 \times 10^{14}$ Hz), $\delta\lambda = 322,4$ nm ($\sigma_1 = 9,744 \times 10^{14}$ Hz y $\sigma_2 = 1,286 \times 10^{15}$ Hz), y $\delta\lambda = 644,2$ nm ($\sigma_1 = 2,224 \times 10^{15}$ Hz and $\sigma_2 = 3,076 \times 10^{15}$ Hz). Como es usual, la relación entre el ancho espectral σ y el ancho de banda $\delta\lambda$ está dada por $\sigma = 2\pi c(1/\lambda_{\min} - 1/\lambda_{\max})$, donde $\lambda_{\max} = \lambda_0 + \delta\lambda/2$, $\lambda_{\min} = \lambda_0 - \delta\lambda/2$, y λ_0 es la longitud de onda central del paquete de ondas. Como es aparente en la figura a medida que el ancho de banda $\delta\lambda$ es mayor, más fuerte es el amortiguamiento en la oscilación armónica.

Asumamos un interferómetro abrazado balanceado y geoméricamente equivalente en una superficie equipotencial el cual es rotado 90° hacia la vertical. Consideremos también que ambas frecuencias de los fotones generados es similar, es decir, $\omega_1 = \omega_2$. En este caso los retrasos temporales están dados por $\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2} = -\Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2} \approx -L_2Hg/c^3 = -\Delta\tau_\gamma$. Así, la probabilidad de detección en

3.2 Estado cuántico de dos fotones y probabilidad de detección en los arreglos Franson y abrazado en un campo gravitacional débil

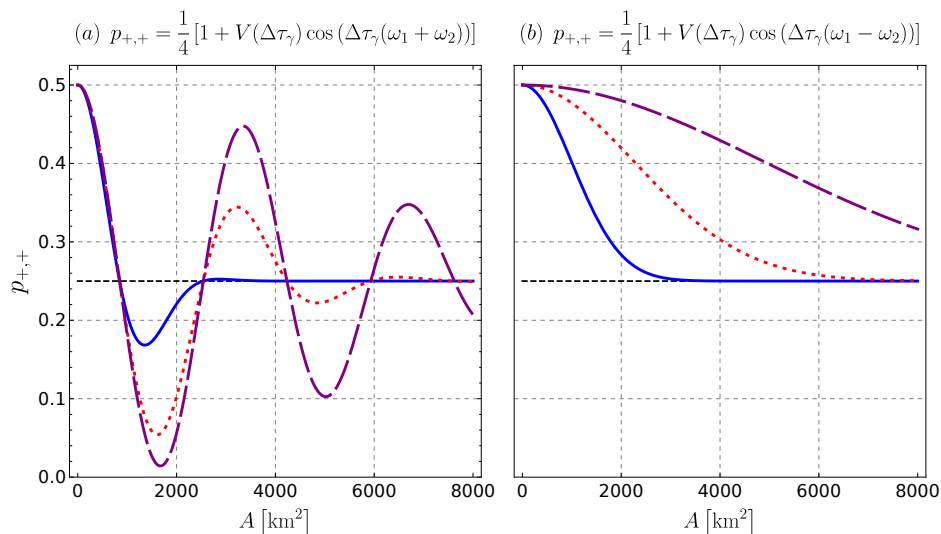


Figura 3.3: Probabilidad de detección $p_{+,+}$, de acuerdo a la ec. (3.42) en función del área propia $A = L'_2 H$, y visibilidad $V(\Delta\tau_\gamma) = \exp[-\Delta\tau_\gamma^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/4]$. (a) Arreglos Franson y abrazado con retrasos temporales $\Delta\tau_\gamma = L'_2 g H / c^3$. (b) Arreglo abrazado geoméricamente idéntico, balanceado y rotado para los retrasos temporales dado por las ecuaciones (3.36) y (3.37). Para ambas simulaciones $\alpha = \beta = 0$, $\lambda_1 = 806$ nm, $\lambda_2 = 706$ nm, y $\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2 = \delta\lambda$ con $\delta\lambda = 161,2$ nm (línea púrpura segmentada), $\delta\lambda = 322,4$ nm (línea roja punteada), y $\delta\lambda = 644,8$ nm (línea azul continua). Línea negra segmentada denota la probabilidad de detección de $1/4$.

desfase adopta la forma

$$p_{i,j} = \frac{1}{4} (1 - (-1)^{\delta_{ij}} V(\Delta\tau_\gamma) \cos(\alpha + \beta)). \quad (3.48)$$

De este modo, el comportamiento oscilatorio no es función del retraso temporal gravitacional y la influencia del campo gravitacional débil se manifiesta solo como una decaimiento en la visibilidad interferométrica $V(\Delta\tau_\gamma)$.

En la fig. 3.3(b) se muestra el comportamiento de la probabilidad de detección desfasada de un interferómetro abrazo balanceado y geoméricamente equivalente, de acuerdo a la ec. (3.45), al considerar frecuencias ω_1 y ω_2 aproximadamente iguales. En este caso, la oscilación armónica es casi cancelada y el decaimiento

3.2 Estado cuántico de dos fotones y probabilidad de detección en los arreglos Franson y abrazado en un campo gravitacional débil

exponencial predomina en la probabilidad de detección. En este caso el decaimiento exponencial representa la visibilidad interferométrica de dos-fotones, la cual es función del producto entre el retraso temporal gravitacional y el ancho espectral de la distribución gaussiana de los paquetes de onda. Cabe notar que en el caso de un interferómetro Mach-Zehnder en presencia de un campo gravitacional débil y con una fuente generando fotones con dispersión en frecuencia, la probabilidad de detección presenta una oscilación amortiguada. En este caso, sin embargo, no es posible aislar el decaimiento exponencial como en el caso de un arreglo interferométrico abrazado.

La probabilidad de detección desfasada $p_{i,j}$ es una función del retraso temporal gravitacional. Sin embargo, este resultado no puede ser interpretado como un test genuino de la teoría de Relatividad General. Un resultado similar puede ser obtenido al considerar la propagación de la luz, en donde el espaciotiempo es considerado plano y en donde los fotones se acoplan a potencial gravitacional newtoniano en el caso en que uno considere una masa efectiva igual a la energía del fotón dividida por c^2 , como en el caso de una partícula con masa. El decaimiento exponencial de la visibilidad es también introducido a través de la dispersión en frecuencia para la fuente de fotones. La situación descrita anteriormente es similar al caso de la predicción del desplazamiento al rojo gravitacional, que también es consecuencia de la dilatación temporal gravitacional. Además, estos efectos son sensibles a la correcciones a primer orden en la componente temporal de la métrica de Schwarzschild, y por lo tanto no dependen, en el orden de aproximación considerado, por ejemplo, de los parámetros post-newtonianos γ y β (ver por ejemplo ref.ref. [40]).

3.3. Desigualdad CHSH

Para estudiar las propiedades del entrelazamiento de un estado de dos fotones generado por los arreglos interferométricos Franson y abrazado en presencia de un campo gravitacional débil, calculamos el valor del funcional Σ de la desigualdad CHSH (en este caso $\Sigma \leq 2$). Consideramos que los arreglos interferométricos emplean fuentes que generan estados con dispersión en frecuencia. Notamos que el empleo de la desigualdad Σ para la inspección de las propiedades del entrelazamiento es debida a que no existen medidas de entrelazamiento para estados de multimodo no gaussianos.

El estado maximalmente entrelazado $|\Psi\rangle$ de la ecuación (3.27) es obtenido en el arreglo Franson a través de un proceso de post-selección, en donde el par de fotones gemelos con tiempos de detección desfasados son descartados. De este modo, el estado $|\Psi\rangle$ describe la fracción de fotones que son detectados en coincidencia. Un experimento típico para medir el funcional Σ podría basarse en estado $|\Psi\rangle$. Sin embargo, se ha mostrado ref. [26] que la fracción de fotones descartados puede ser empleada para crear un modelo de variables ocultas que simula las predicciones de la Mecánica Cuántica, esto es, el arreglo interferométrico Franson es afectado por un tipo de escapatoria. Esta escapatoria no existe si las fases locales α y β son variadas en una escala de tiempo menor que $\Delta L/c$. No obstante, utilizaremos el funcional Σ para estudiar la influencia de un campo gravitacional débil en el entrelazamiento del estado post-seleccionado generado por los arreglos Franson y abrazado. Como vimos anteriormente, el interferómetro abrazado está libre de este tipo de escapatorias, y varios métodos han sido propuestos, tales como, el empleo de polarización e hiperentrelazamiento ref.[41] y entrelazamiento time-bin ref.[42]. Este último es implementando empleando una fuente de luz pulsada y reemplazando los divisores de haces cercanos a la fuente con interferómetros Mach-Zhender balanceados de menor tamaño con modulaciones de fase rápidas e idénticas para

cada interferómetro.

Empleando la probabilidad de detección en desfase $p_{i,j}$, ec. (3.41), el valor esperado $E(\alpha, \beta)$ de los observables dicotómicos definidos a través de las fases α y β adoptan la forma

$$E(\alpha, \beta) = \int d\omega_1 d\omega_2 |f(\omega_1, \omega_2)|^2 \cos[\omega_1 \Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2} + \omega_2 \Delta\tau_{\omega'_1, \omega'_2} + \alpha + \beta]. \quad (3.49)$$

Los demás valores esperados son obtenidos al cambiar los valores de las fases locales. Asumiendo una distribución gaussiana para la frecuencia de los fotones empleados en el experimento, y eligiendo las fases locales de manera usual como se realiza en un estado de Bell, es decir, $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$, el funcional Σ adquiere la forma

$$\Sigma = 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}(\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2}^2 \sigma_1^2 + \Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2}^2 \sigma_2^2)} |\cos(\omega_1 \Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2} + \omega_2 \Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2})|. \quad (3.50)$$

Cabe notar que el funcional Σ puede ser reescrito, para el caso en que $\alpha = \beta = 0$, obteniendo

$$\Sigma = 2\sqrt{2}|4p_{ii} - 1|. \quad (3.51)$$

Para el caso de un arreglo Franson y abrazado balanceados, y satisfaciendo la condición de indistinguibilidad, el funcional CHSH adopta la siguiente expresión

$$\Sigma = 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}\Delta\tau_\gamma^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} |\cos(\Delta\tau_\gamma(\omega_1 + \omega_2))|. \quad (3.52)$$

En la figura (3.4) ilustramos el comportamiento del funcional CHSH Σ dado por la ecuación (3.52) en términos del área propia efectiva $A = L'_2 H$ y el ancho del paquete de ondas σ . Cuando los brazos de los interferómetros Franson y abrazado

se encuentran bajo el mismo potencial gravitacional, el funcional Σ toma el máximo valor $2\sqrt{2}$, que corresponde a la máxima violación de la desigualdad CHSH. Sin embargo, en la presencia de un campo gravitacional débil junto con fotones con dispersión en frecuencia, el funcional Σ muestra un comportamiento armónico con un decrecimiento amortiguado exponencialmente de la amplitud (ver fig. 3.5(a)). Una vez que el área propia A es mayor que $A_* = \sqrt{\ln 4} \left(c^3/g\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)$, no es posible violar la desigualdad CHSH. Cabe destacar que el valor del límite superior A_* es proporcional a $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{-1/2}$, y por consecuencia, un incremento de σ_1 o σ_2 conlleva a que la desigualdad CHSH sea violada en un intervalo de área propia más estrecho. Dentro de este intervalo, el funcional Σ oscila entre valores de A que violan o satisfacen la desigualdad CHSH.

En la fig.3.6 mostramos el funcional Σ como función de H y L'_2 . Como se puede observar en esta figura, la desigualdad CHSH es violada para valores moderados de las longitudes H y L'_2 . Por ejemplo, para $H = L'_2 = 10$ [km] y empleando una fuente de banda ultra-ancha como la empleada en ref. [37; 38; 39], el valor del funcional Σ es aproximadamente 2,55, el cual está sobre el valor de 2, que es el usual para estados separables. Una realización experimental de este entrelazamiento generado gravitacionalmente podría consistir en estaciones para la fuente generadora y los detectores ubicados en la superficie terrestre, los fotones se transmiten desde la fuente hacia los detectores a través de satélites. Tal realización podría ser posible considerando los experimentos de propagación de fotones en el espacio libre ref. [3; 43; 44].

El comportamiento oscilatorio mostrado por el funcional Σ puede ser cancelado en el caso de una interferómetro balanceado y geoméricamente equivalente, en este caso se obtiene

$$\Sigma = 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}\Delta\tau_\gamma^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} |\cos(\Delta\tau_\gamma(\omega_1 - \omega_2))|. \quad (3.53)$$

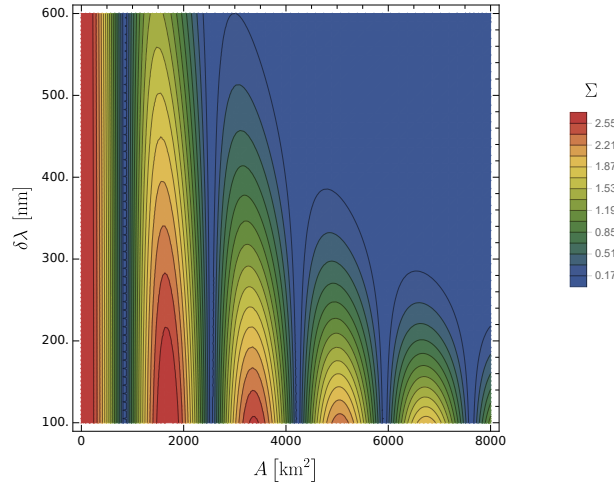


Figura 3.4: Valor del funcional CHSH Σ de acuerdo a la ec. (3.52) para los arreglos Franson y abrazado bajo la condición (3.12), en función del área propia $A = L'_2 H$ y el ancho de banda del paquete de ondas $\delta\lambda$. Empleamos $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$, y $\lambda_1 = 806$ nm, y $\lambda_2 = 706$ nm.

Claramente, la elección $\omega_1 = \omega_2$ elimina el comportamiento armónico. Esto es ilustrado en la fig. 3.5(b) para valores levemente diferentes de ω_1 y ω_2 . Un resultado similar puede ser obtenido sin imponer restricciones sobre la elección de las frecuencias. Para esto, las fases locales pueden ser medidas con respecto a los retrasos temporales de cada fotón a lo largo de cada camino en los arreglos interferométricos. Esto es, $\alpha = \varphi_a - \omega_1 \Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2}$ y $\beta = \varphi_b - \omega_1 \Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2}$ (con $a, b = 1, 2$), en donde φ_a y φ_b son elegidos de tal modo que las diferencias entre estas fases locales y los retrasos gravitacionales son los valores óptimos de las fases locales que maximalmente violan la desigualdad CHSH. En este caso de desigualdad CHSH adopta la forma

$$\begin{aligned} \Sigma = e^{-\frac{1}{4}(\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2}^2 \sigma_1^2 + \Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2}^2 \sigma_2^2)} & [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ & + \cos(\varphi_1 + \varphi'_2) + \cos(\varphi'_1 + \varphi_2) - \cos(\varphi'_1 + \varphi'_2)]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

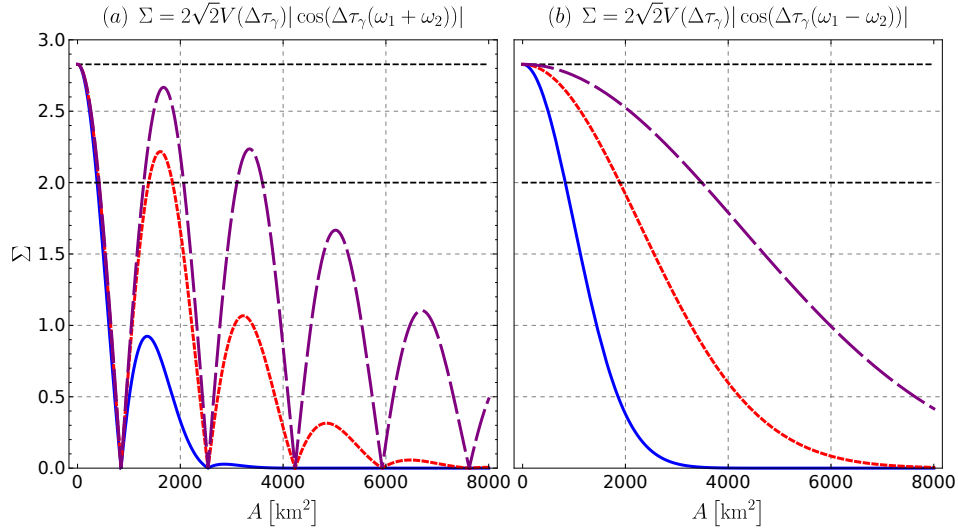


Figura 3.5: Valor de Σ para un arreglo interferométrico en función del área propia $A = L'_2 H$, el tiempo propio $\Delta\tau_\gamma = L'_2 g H / c^3$, y visibilidad $V(\Delta\tau_\gamma) = \exp[-\Delta\tau_\gamma^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/4]$. (a) Arreglos Franson y abrazado balanceados bajo la condición (3.12) de acuerdo a (3.52). (b) Arreglo abrazado balanceado, geoméricamente equivalente y rotado de acuerdo a la ec. (3.53). Para (a) y (b) tenemos: $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$, $\lambda_1 = 806$ nm, $\lambda_2 = 706$ nm, y $\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2 = \delta\lambda$ con $\delta\lambda = 161,2$ nm (línea púrpura segmentada), $\delta\lambda = 322,4$ nm (línea roja punteada), y $\delta\lambda = 644,8$ nm (línea azul continua). Línea horizontal negra representa la violación máxima alcanzable $2\sqrt{2}$ para la desigualdad CHSH.

Considerando las fases locales óptimas $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi'_1, \varphi'_2) = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$ el funcional CHSH (3.54) se escribe como

$$\Sigma = 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}(\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2}^2\sigma_1^2 + \Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2}^2\sigma_2^2)}, \quad (3.55)$$

la cual es válida para los arreglos Franson y abrazados. La expresión previa exhibe el decaimiento exponencial sin una oscilación armónica. Esto sin requerir un interferómetro balanceado o restringiendo las frecuencias del par de fotones generados por la fuente.

En el límite newtoniano, no existe diferencia en el tiempo propio de arribo de

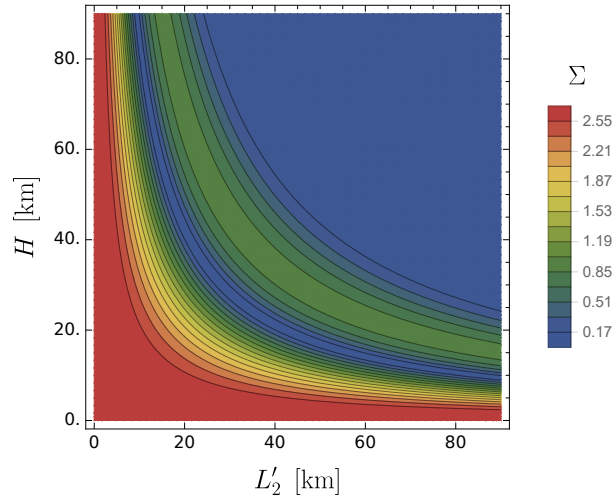


Figura 3.6: Valor de Σ para un arreglo Franson y abrazado balanceados bajo la condición dada por la ec. (3.12) en función de la longitud propia L'_2 y la altura propia H , acuerdo a la ec. (3.52), considerando $A = L'_2 H$. Hemos considerado $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$, $\lambda_1 = 806$ nm, $\lambda_2 = 706$ nm, y $\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2 = 644,8$ nm.

los fotones a los detectores. Entonces, la desigualdad CHSH solamente exhibe un comportamiento armónico, el cual es parecido a la versión óptica del experimento COW ref. [23] que emplea un interferómetro Mach-Zehnder.

Hasta este momento solo hemos considerado una descripción cuántica de la luz propagándose a través de los arreglos Franson y abrazado. Pero, es posible considerar una descripción clásica de la luz, y así el funcional Σ (para más detalles ver ref. [45; 46] y el apéndice A) adopta la forma

$$\Sigma_{\text{class}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{4}(\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2}^2 \sigma_1^2 + \Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2}^2 \sigma_2^2)} \left| \cos(2\pi\nu_1 \Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2} + 2\pi\nu_2 \Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2}) \right|, \quad (3.56)$$

en donde ν es la frecuencia del campo eléctrico, σ_1 y σ_2 son las dispersiones espectrales de ambos campos. Considerando que la amplitud del campo esté dada por

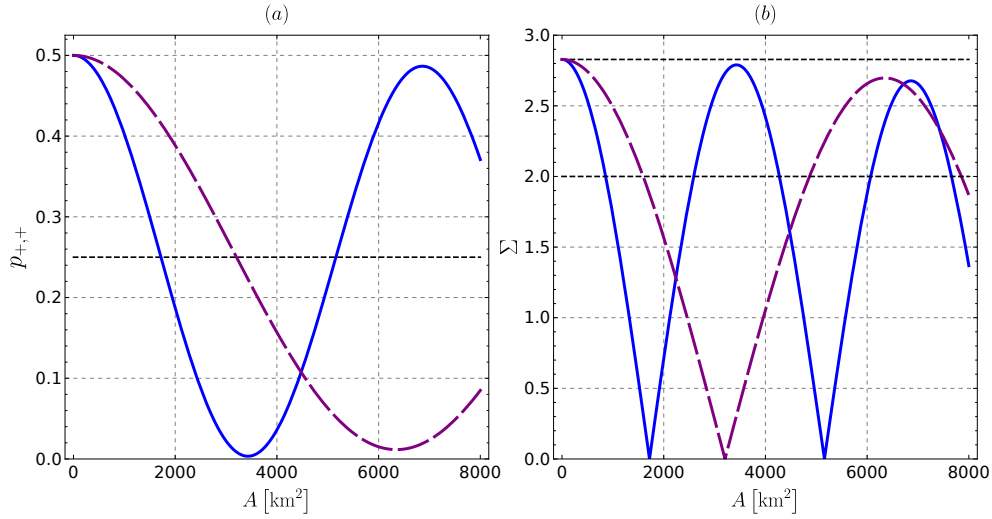


Figura 3.7: Probabilidad de detección $p_{+,+}$ y Σ como una función del área propia $A = L'_2 H$, con la visibilidad $V(\Delta\tau_\gamma) = \exp[-\Delta\tau_\gamma^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/4]$, para una fuente SPDC de banda ultra-ancha ref. [1]. (a) Línea continua azul: $p_{+,+}$ para un interferómetro Franson y abrazado con retrasos temporales $\Delta\tau_\gamma = L'_2 g H / c^3$. Línea púrpura: $p_{+,+}$ para un arreglo abrazado, con los interferómetros Mach-Zehnder geoméricamente equivalentes, y balanceados, para los retrasos temporales dado por las ecs. (3.36) and (3.37). (b) Línea azul continua: Funcional CHSH para los arreglos Franson y abrazados balanceado bajo la condición (3.12) y ec. (3.52). Para (a) y (b) la fuente SPDC emplea un cristal SLT con una señales con longitud de onda $\lambda_1 = 3300$ nm, y $\lambda_2 = 995$ nm, dispersión $\delta\lambda_1 = 370$ nm y $\delta\lambda_2 = 34$ nm.

una distribución gaussiana, el funcional CHSH adquiere la forma

$$\Sigma_{\text{class}} = 2 \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{1}{4}(\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2}^2 \sigma_1^2 + \Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2}^2 \sigma_2^2)} \left| \cos(\omega_1 \Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2} + \omega_2 \Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2}) \right|, \quad (3.57)$$

que no excede el valor clásico de 2.

En este capítulo hemos estudiado el comportamiento de la probabilidad de detección desfasada y el funcional CHSH. Estas expresiones consideran los valores de la longitud de onda y ancho de banda las cuales tienen magnitudes comparables, típicas de fuentes de ancho de banda ultra-ancha. Los valores del ancho de banda fueron escogidos de tal modo que el decaimiento exponencial de la visibilidad

interferométrica de dos-fotones sea observada al considerar valores realistas del área de los interferómetros. En la fig. 3.7 consideramos valores de las longitudes de onda λ_1 y λ_2 y anchos de banda $\delta\lambda_1$ y $\delta\lambda_2$, respectivamente, los cuales son generados con una fuente SPDC de ancho de banda ultra-ancho ref. [1]. Como puede ser apreciado en la fig. 3.7, el decaimiento exponencial de la visibilidad es menos pronunciado dentro de los valores estudiados del área. Es también claro que existen áreas que permiten la violación de la desigualdad CHSH y, consecuentemente, la generación del entrelazamiento a través del retraso temporal gravitacional, incluso bajo la presencia de dispersión en frecuencia.



Capítulo 4

Interferómetros Franson y abrazado para un campo gravitacional débil: partículas masivas con grados de libertad internos



En este capítulo estudiamos los interferómetros Franson y abrazado bajo la interacción de un campo gravitacional débil, para el caso en que estos dos arreglos interferométricos son alimentados a través de una fuente de partículas masivas, las cuales en el caso aquí estudiado poseen grados de libertad internos. Tal y como vimos en la introducción de esta tesis, los grados de libertad internos se acoplan al potencial gravitacional débil, y de este modo afectan el estado maximalmente entrelazado generado por este tipo de interferómetros.

4.1 Probabilidad de detección y corrimiento de fase para los arreglos Franson y abrazado

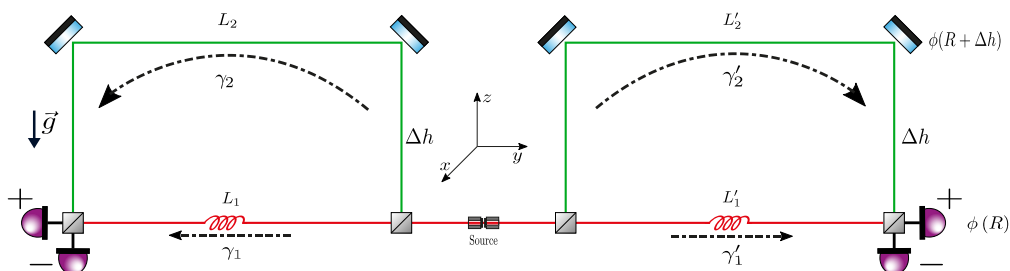


Figura 4.1: Arreglo interferométrico Franson. La fuente de partículas conecta a dos interferómetros Mach-Zehnder. La fuente y los caminos cortos (S) γ_1 y γ'_1 están localizados a un potencial gravitacional $\phi(R)$. Los segmentos horizontales de los caminos largos (L) γ_2 y γ'_2 están situados en un potencial gravitacional $\phi(R + \Delta h)$. Los detectores situados a la salida de los interferómetros Mach-Zehnder están indicados por +, -.

4.1. Probabilidad de detección y corrimiento de fase para los arreglos Franson y abrazado

4.1.1. Probabilidad de detección

En esta subsección calculamos la probabilidad de detección del estado maximalmente entrelazado generado en los arreglos interferométricos Franson y abrazado. Para esto consideramos que el estado inicial es un estado bipartito separable, y como punto final estudiamos una generalización en la que los grados de libertad internos están descritos por estados mezcla arbitrarios. Consideremos un estado cuántico con grados de libertad internos descritos por un espacio de Hilbert N -dimensional. Además, asumamos que la fuente empleada en los arreglos interferométricos genera dos sistemas gemelos, los cuales son generados en un estado completamente separable ρ , esto es, un estado de la forma

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2, \quad (4.1)$$

4.1 Probabilidad de detección y corrimiento de fase para los arreglos Franson y abrazado

en donde los estados ρ_i con $i = 1, 2$, son estados separables, esto es,

$$\rho_i = |\psi_{\text{cm}}\rangle_i \langle \psi_{\text{cm}}| \otimes \sigma_{\text{inn}}^{(i)}, \quad (4.2)$$

en donde $|\psi_{\text{cm}}\rangle_i \langle \psi_{\text{cm}}|$ describe una partícula que se propaga a la izquierda ($i = 1$) o a la derecha ($i = 2$) con los grados de libertad internos descrito por el estado $\sigma_{\text{inn}}^{(i)}$. Una vez que una partícula ha entrado a un interferómetro Mach-Zehnder, los grados de libertad del centro de masa y los grados de libertad internos evolucionan condicionalmente al camino por el cual se desplacen. Estas evoluciones son generadas por las operadores unitarios $U_{\gamma_i} = \exp\left[-i \int_{\gamma_i} dt H_{\text{cm}}/\hbar\right]$, $V_{\gamma_i} = \exp\left[-i \int_{\gamma_i} d\tau H_{\text{inn}}/\hbar\right]$. El estado dado por la ec. (4.2), después de pasar a través de un divisor de haces, adopta la forma

$$\begin{aligned} \rho_{\text{BS}} = & \frac{1}{4} [(|\gamma_1\rangle\langle\gamma_1| - i|\gamma_1\rangle\langle\gamma_2| + i|\gamma_2\rangle\langle\gamma_1| + |\gamma_2\rangle\langle\gamma_2|) \otimes \sigma_1 \\ & \otimes (|\gamma'_1\rangle\langle\gamma'_1| - i|\gamma'_1\rangle\langle\gamma'_2| + i|\gamma'_2\rangle\langle\gamma'_1| + |\gamma'_2\rangle\langle\gamma'_2|) \otimes \sigma_2]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Así, para obtener un estado entrelazado, imponemos las siguientes condiciones:

$$\Delta T_{\gamma_1\gamma'_1} = \Delta T_{\gamma_1} - \Delta T_{\gamma'_1} = 0 \quad \text{and} \quad \Delta T_{\gamma_2\gamma'_2} = \Delta T_{\gamma_2} - \Delta T_{\gamma'_2} = 0. \quad (4.4)$$

Estas condiciones garantizan que no es posible distinguir un par de partículas gemelas que se propagan a lo largo de los caminos (γ_1, γ'_1) de un par de partículas gemelas que se propagan a lo largo de los caminos (γ_2, γ'_2) a través de detecciones sucesivas en un intervalo de coordenada temporal. Además, para poder eliminar cualquier efecto geométrico del arreglo, imponemos que los intervalos de coordenada temporal (o de manera equivalente el correspondiente tiempo propio) entre los caminos γ_1 (γ'_1) y γ_2 (γ'_2) sea iguales. De este modo las condiciones adoptan la

4.1 Probabilidad de detección y corrimiento de fase para los arreglos Franson y abrazado

forma

$$\begin{aligned}\Delta T_{\gamma_1} &= \Delta T_{\gamma_2}, \\ \Delta T_{\gamma'_1} &= \Delta T_{\gamma'_2}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Estas condiciones implican que ambos interferómetros Mach-Zehnder están balanceados. Además, de acuerdo de la ec. (4.4) ambos Mach-Zehnders son geométricamente equivalentes. Aplicando las condiciones (4.4-4.5) al estado dado por la ecuación (4.3), éste adapta la forma

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out}} &= \frac{1}{2} \left\{ U_{\gamma_1} |\gamma_1\rangle \langle \gamma_1| U_{\gamma_1}^\dagger V_{\gamma_1} \sigma_{\text{inn}} V_{\gamma_1}^\dagger U_{\gamma'_1} |\gamma'_1\rangle \langle \gamma'_1| U_{\gamma'_1}^\dagger V_{\gamma'_1} \sigma_{\text{inn}} V_{\gamma'_1}^\dagger \right. \\ &\quad - U_{\gamma_1} |\gamma_1\rangle \langle \gamma_2| U_{\gamma_2}^\dagger V_{\gamma_1} \sigma_{\text{inn}} V_{\gamma_2}^\dagger U_{\gamma'_1} |\gamma'_1\rangle \langle \gamma'_2| U_{\gamma'_2}^\dagger V_{\gamma'_1} \sigma_{\text{inn}} V_{\gamma'_2}^\dagger \\ &\quad + c.c. \\ &\quad \left. + U_{\gamma_2} |\gamma_2\rangle \langle \gamma_2| U_{\gamma_2}^\dagger V_{\gamma_2} \sigma_{\text{inn}} V_{\gamma_2}^\dagger U_{\gamma'_2} |\gamma'_2\rangle \langle \gamma'_2| U_{\gamma'_2}^\dagger V_{\gamma'_2} \sigma_{\text{inn}} V_{\gamma'_2}^\dagger \right\},\end{aligned}\tag{4.6}$$

en donde hemos asumido que los estados iniciales de los grados de libertad internos $\sigma_{\text{inn}}^{(1)}$ y $\sigma_{\text{inn}}^{(2)}$ son iguales. Empleando los operadores $M_{i,j} = |i(j)\rangle \langle i(j)|$, con $i, j = +, -$, en donde $+$ y $-$ especifican los puertos de salida de cada interferómetro Mach-Zehnder (ver figs. 4.1 y 4.3). La probabilidad de detección en coincidencia $p_{i,j} = \text{Tr} \{ \rho_{\text{out}} M_{i,i} \otimes M_{j,j} \}$ para el estado de salida ρ , dado por la ec. (4.6), está dada por

$$\begin{aligned}p_{i,j} &= \frac{1}{4} - \frac{(-1)^{\delta_{ij}}}{8} \left| \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta \tau_{\gamma_1 \gamma_2} H_{\text{inn}}} \right\} \right| \left| \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta \tau_{\gamma'_1 \gamma'_2} H_{\text{inn}}} \right\} \right| \\ &\quad \left[e^{i \Delta \zeta_{\gamma_1 \gamma_2}} e^{i \Delta \zeta_{\gamma_1 \gamma_2}} e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i \Delta \zeta_{\gamma_1 \gamma_2}} e^{-i \Delta \zeta_{\gamma'_1 \gamma'_2}} e^{-i(\alpha+\beta)} \right],\end{aligned}\tag{4.7}$$

4.1 Probabilidad de detección y corrimiento de fase para los arreglos Franson y abrazado

en donde $\Delta\zeta_{\gamma_1\gamma_2}$ y $\Delta\zeta_{\gamma'_1\gamma'_2}$ son los corrimientos de fase, de acuerdo a la ec. (2.83). $\Delta\tau_{\gamma_1\gamma_2} = \int_{\gamma_1} d\tau - \int_{\gamma_2} d\tau$ y $\Delta\tau_{\gamma'_1\gamma'_2} = \int_{\gamma'_1} d\tau - \int_{\gamma'_2} d\tau$ son los tiempos de arribo medidos por relojes situados al mismo potencial gravitacional que los detectores en los interferómetros Mach-Zehnder.

En el caso de partículas con grados de libertad internos de dos niveles, el estado de dos partículas gemelas está descrito por el siguiente estado puro separable

$$|\Psi\rangle_{\text{Initial}} = |x_{\text{in}}, \tau_{\text{in}}\rangle \otimes |\tilde{x}_{\text{in}}, \tilde{\tau}_{\text{in}}\rangle, \quad (4.8)$$

en donde $|x_{\text{in}}\rangle$ y $|\tilde{x}_{\text{in}}\rangle$ denotan el estado inicial de los grados de libertad del centro de masa para una partícula que se propaga a la izquierda o a la derecha, respectivamente. Los estados $|\tau_{\text{in}}\rangle$ y $|\tilde{\tau}_{\text{in}}\rangle$ denotan el estado inicial de los grados de libertad internos, esto es, del reloj, para una partícula que se propaga a la izquierda o la derecha, correspondientemente.

El estado de las partículas gemelas después de dejar los interferómetros Franson y abrazado, pero previo de la llegada a los detectores, está dado por la expresión

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \frac{1}{4} (e^{i(\alpha+\beta)} U_{\gamma_1} |\gamma_1\rangle V_{\gamma_1} |\tau\rangle U_{\gamma'_1} |\gamma'_1\rangle V_{\gamma'_1} |\tilde{\tau}\rangle \\ & + i e^{i\alpha} U_{\gamma_1} |\gamma_1\rangle V_{\gamma_1} |\tau\rangle U_{\gamma'_2} |\gamma'_2\rangle V_{\gamma'_2} |\tilde{\tau}\rangle \\ & + i e^{i\beta} U_{\gamma_2} |\gamma_2\rangle V_{\gamma_2} |\tau\rangle U_{\gamma'_1} |\gamma'_1\rangle V_{\gamma'_1} |\tilde{\tau}\rangle \\ & - |\gamma_2\rangle V_{\gamma_2} |\tau\rangle U_{\gamma'_2} |\gamma'_2\rangle V_{\gamma'_2} |\tilde{\tau}\rangle). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Empleando las restricciones dadas por las ecuaciones (4.4)-(4.5) es posible realizar un proceso de post-selección, y así la probabilidad de detección adopta la forma:

$$\begin{aligned} p_{i,j} = & \frac{1}{4} - (-1)^{\delta_{ij}} \frac{1}{8} \left| \langle \tau_{\text{in}} | e^{\frac{i}{\hbar} (\int_{\gamma_2} d\tau - \int_{\gamma_1} d\tau) H_{\text{inn}}} | \tau_{\text{in}} \rangle \right| \left| \langle \tilde{\tau}_{\text{in}} | e^{\frac{i}{\hbar} (\int_{\gamma'_2} d\tau - \int_{\gamma'_1} d\tau) H_{\text{inn}}} | \tilde{\tau}_{\text{in}} \rangle \right| \\ & \{ e^{i(\alpha+\beta)} e^{-i\Delta\zeta_{\gamma_1\gamma_2}} e^{-i\Delta\zeta_{\gamma'_1\gamma'_2}} + c.c. \}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.1 Probabilidad de detección y corrimiento de fase para los arreglos Franson y abrazado

En donde α y β son fases locales controlables localmente. Los valores esperados $|\langle \tau_{\text{in}} | e^{\frac{i}{\hbar}(\int_{\gamma_2} d\tau - \int_{\gamma_1} d\tau) H_{\text{inn}}} | \tau_{\text{in}} \rangle|$ y $|\langle \tilde{\tau}_{\text{in}} | e^{\frac{i}{\hbar}(\int_{\gamma'_2} d\tau - \int_{\gamma'_1} d\tau) H_{\text{inn}}} | \tilde{\tau}_{\text{in}} \rangle|$ aparecen producto de haber trazado los grados de libertad internos. La ec. (4.10) es un caso particular de la expresión dada por la ec. (4.7).

4.1.2. Interferómetro Franson: Corrimiento de fase para los grados de libertad de la posición del centro de masa y evolución de grados de libertad internos

A continuación calculamos el corrimiento de fase y la evolución de los grados de libertad internos para el arreglo interferométrico Franson, descrito en la figura 4.1. En este arreglo, los caminos γ_1 y γ'_1 experimentan un potencial gravitacional $\phi(R)$ y los segmentos horizontales de los caminos γ_2 y γ'_2 experimentan un potencial gravitacional $\phi(R + \Delta h)$. Los segmentos verticales de los caminos γ_2 y γ'_2 experimentan una variación continua del potencial gravitacional desde $\phi(R)$ a $\phi(R + \Delta h)$. En caso de un grado de libertad interno, la diferencia de tiempo propio entre los caminos γ_2 y γ_1 adopta la forma $\int_{\gamma_2} d\tau - \int_{\gamma_1} d\tau = \Delta\tau_{\gamma_2, \gamma_1}$, de manera análoga $\int_{\gamma'_2} d\tau - \int_{\gamma'_1} d\tau = \Delta\tau_{\gamma'_2, \gamma'_1}$. Dado que el estado que ingresa al interferómetro para los grados de libertad internos $|\tau_{\text{in}}\rangle$ se encuentra en una superposición coherente, es decir, $|\tau_{\text{in}}\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, y el hamiltoniano que describe la evolución de los grados de libertad internos es $H_{\text{inn}} = E_0 |0\rangle \langle 0| + E_1 |1\rangle \langle 1|$,

$$\left| \langle \tau_{\text{in}} | e^{\frac{i}{\hbar}(\int_{\gamma_2} d\tau - \int_{\gamma_1} d\tau) H_{\text{inn}}} | \tau_{\text{in}} \rangle \right| = \left| \cos \left(\frac{\Delta\tau_{\gamma_2, \gamma_1} \Delta E}{2\hbar} \right) \right|. \quad (4.11)$$

De manera similar, para los caminos γ'_2 y γ'_1

$$\left| \langle \tilde{\tau}_{\text{in}} | e^{\frac{i}{\hbar}(\int_{\gamma'_2} d\tau - \int_{\gamma'_1} d\tau) H_{\text{inn}}} | \tilde{\tau}_{\text{in}} \rangle \right| = \left| \cos \left(\frac{\Delta\tau_{\gamma'_2, \gamma'_1} \Delta E}{2\hbar} \right) \right|, \quad (4.12)$$

4.1 Probabilidad de detección y corrimiento de fase para los arreglos Franson y abrazado

en donde los intervalos de tiempo propio $\Delta\tau_{\gamma_2, \gamma_1}$ adoptan la forma

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{\gamma_2, \gamma_1} &= \int_L \left(1 - \frac{p^2}{2m^2c^2} + \frac{\phi(r)}{c^2} \right) dt - \int_S \left(1 - \frac{p^2}{2m^2c^2} + \frac{\phi(r)}{c^2} \right) dt \\ &\approx \frac{g\Delta h \Delta T_{\gamma_1}}{c^2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Debido a la configuración del arreglo interferométrico Franson, ambos retrasos temporales son similares, es decir, $\Delta\tau_{\gamma_2 \gamma_1} = \Delta\tau_{\gamma'_2, \gamma'_1}$. Por lo tanto, el corrimiento de fase en cada partícula del arreglo interferométrico Franson es

$$\Delta\zeta_{\gamma_1 \gamma_2} = \frac{g\Delta h}{c^2} \left(mc^2 + \frac{m\phi(R)}{2} + \frac{3p^2}{2m} \right) \Delta T_{\gamma_1} + \langle H_{\text{inn}}^{(1)} \rangle \frac{g\Delta h \Delta T_{\gamma_1}}{\hbar c^2}, \quad (4.14)$$

en donde ΔT_{γ_1} es el intervalo de coordenada temporal en el camino γ_1 , y $\langle H_{\text{inn}}^{(1)} \rangle$ es el valor esperado del hamiltoniano $H_{\text{inn}}^{(1)}$ respecto a los estados de los grados de libertad internos de una partícula. Debido a la configuración del arreglo, se tiene que $\Delta\zeta_{\gamma_1 \gamma_2} = \Delta\zeta_{\gamma'_1 \gamma'_2}$. Así, la probabilidad de detección en concidencia dada por la ec. (4.10) adopta la forma

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= \frac{1}{4} - \frac{(-1)^{\delta_{ij}}}{4} \cos \left(\frac{g\Delta h \Delta T_{\gamma_1} \Delta E}{2\hbar c^2} \right) \cos \left(\frac{g\Delta h \Delta T_{\gamma_1} \Delta E'}{2\hbar c^2} \right) \\ &\quad \times \cos \left(\frac{2g\Delta h \Delta T_{\gamma_1}}{\hbar c^2} \left[mc^2 + \frac{m\phi(R)}{2} + \frac{3p^2}{2m} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\langle H_{\text{inn}}^{(1)} \rangle + \langle H_{\text{inn}}^{(2)} \rangle \right] \frac{g\Delta h \Delta T_{\gamma_1}}{\hbar c^2} + \alpha + \beta \right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

en donde ΔE y $\Delta E'$ son la diferencias de energía entre los dos niveles de energía para cada partícula, respectivamente. Notemos que estamos considerando que los dos niveles de energía para ambas partículas pueden ser distintos. $\langle H_{\text{inn}}^{(1)} \rangle$ y $\langle H_{\text{inn}}^{(2)} \rangle$ son los valores esperados del hamiltoniano de los grados de libertad internos to-

4.1 Probabilidad de detección y corrimiento de fase para los arreglos Franson y abrazado

mados con respecto al estado inicial del reloj, para la primera y segunda partícula, respectivamente. Si $\Delta E = \Delta E'$ y $\langle H_{\text{inn}}^{(1)} \rangle = \langle H_{\text{inn}}^{(2)} \rangle = \langle H_{\text{inn}} \rangle$, la probabilidad de coincidencia (4.15) se transforma en

$$\begin{aligned}
 p_{i,j} = & \frac{1}{4} - \frac{(-1)^{\delta_{ij}}}{4} \cos^2 \left(\frac{g\Delta h \Delta T_{\gamma_1} \Delta E}{2\hbar c^2} \right) \\
 & \times \cos \left(\frac{2g\Delta h \Delta T_{\gamma_1}}{\hbar c^2} \left[mc^2 + \frac{m\phi(R)}{2} + \frac{3p^2}{2m} \right] \right. \\
 & \left. + 2\langle H_{\text{inn}} \rangle \frac{g\Delta h \Delta T_{\gamma_1}}{\hbar c^2} + \alpha + \beta \right). \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Para un interferómetro Franson balanceado y geoméricamente idéntico emplazado en una superficie equipotencial, la evolución del estado cuántico, dada por la ec. (2.76) solo genera una fase global, con cuatro estados (uno por cada camino del arreglo) arribando al mismo tiempo a los detectores, de este modo no es posible distinguir entre ellos y el proceso de post-selección no puede ser llevado a cabo. Por lo tanto, si existe una diferencia de potencial gravitacional entre los brazos de cada interferómetro Mach-Zehnder, y los interferómetros satisfacen la condición de indistinguibilidad y si estos se encuentran balanceados, entonces la dilatación temporal gravitacional permite la generación de un estado entrelazado.

4.1.3. Arreglo interferométrico abrazado

El interferómetro abrazado, descrito en la figura 4.3, tiene su fuente de partículas localizada en un potencial gravitacional $\phi(R + \Delta h)$. Las partículas desplazándose a lo largo de los caminos γ_1 y γ'_1 también experimentan este potencial gravitacional. Para las partículas moviéndose a lo largo de los segmentos horizontales de los caminos γ'_2 y γ_2 experimentan los potenciales gravitacionales $\phi(R + 2\Delta h)$ y $\phi(R)$, respectivamente. Los segmentos verticales de los caminos γ'_2 perciben una variación continua del potencial gravitacional partiendo en $\phi(R + \Delta h)$ y finalizan-

4.1 Probabilidad de detección y corrimiento de fase para los arreglos Franson y abrazado

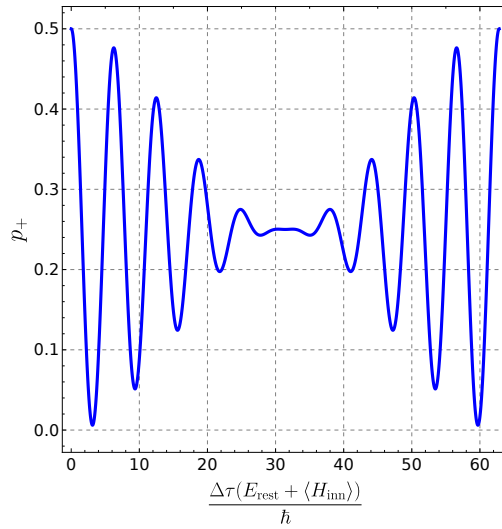


Figura 4.2: Probabilidad de detección $p_{+,+}$ para el arreglo Franson, para dos partículas con grados de libertad internos de dos niveles, en términos de la diferencia de tiempo propio de arribo $\Delta\tau$, y la diferencia de energía ΔE .

do en $\phi(R + 2\Delta h)$. Los segmentos verticales de γ_2 experimentan una variación del potencial gravitacional desde $\phi(R)$ a $\phi(R + \Delta h)$. La diferencia de tiempo propio de arribo para las partículas que se mueven a través de los caminos γ_1 y γ_2 está dada por

$$\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2} \approx \frac{g\Delta h}{c^2} \Delta T_{\gamma'_1}. \quad (4.17)$$

De manera análoga, para los caminos γ'_1 y γ'_2 obtenemos

$$\Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2} \approx -\frac{g\Delta h}{c^2} \Delta T_{\gamma'_1}. \quad (4.18)$$

4.1 Probabilidad de detección y corrimiento de fase para los arreglos Franson y abrazado

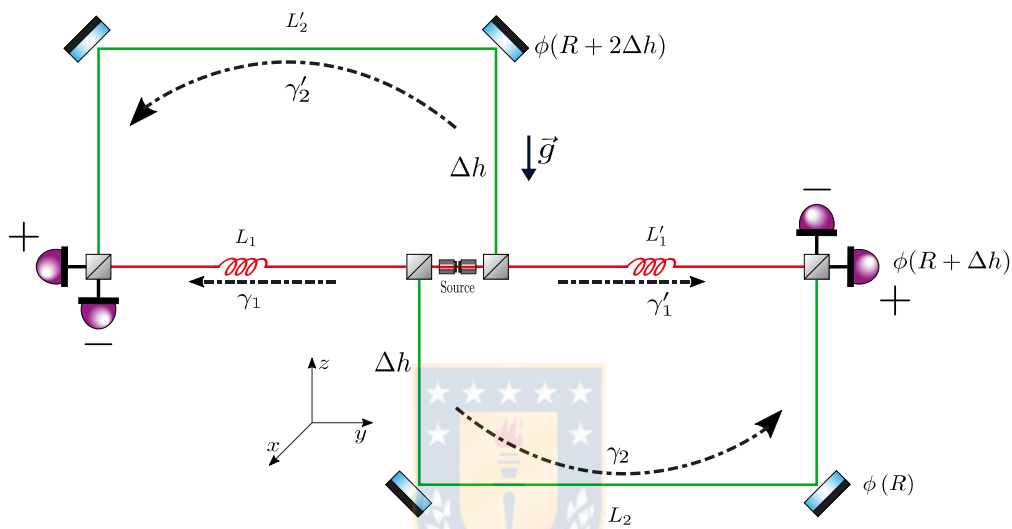


Figura 4.3: Arreglo interferométrico abrazado. La fuente de partículas se sitúa en un segmento perteneciente a dos interferómetros Mach-Zehnder. La fuente de partículas y los caminos cortos (S) γ_1 y γ'_1 están localizados a un potencial gravitacional $\phi(R + \Delta h)$. Los segmentos horizontales para los caminos largos (L) γ_2 y γ'_2 están localizados a un potencial gravitacional $\phi(R + 2\Delta h)$ y $\phi(R)$, respectivamente. Los detectores situados en los puertos de salida de los interferómetros Mach-Zehnder están indicados por +, -.

4.1 Probabilidad de detección y corrimiento de fase para los arreglos Franson y abrazado

El corrimiento de fase inducido por el campo gravitacional para una partícula que se mueve a través de los caminos γ_1 y γ_2

$$\Delta\zeta_{\gamma_1\gamma_2} = \frac{g\Delta h}{\hbar c^2} \left[mc^2 + m\phi(R) + \frac{3p^2}{2m} \right] \Delta T_{\gamma_1} + \frac{g\Delta h}{\hbar c^2} \Delta T_{\gamma'_1} \langle H_{\text{inn}}^{(1)} \rangle \quad (4.19)$$

y para γ'_1 y γ'_2

$$\Delta\zeta_{\gamma'_1\gamma'_2} = -\frac{g\Delta h}{\hbar c^2} \left[mc^2 + m\phi(R) + \frac{3p^2}{2m} \right] \Delta T_{\gamma'_1} - \frac{g\Delta h}{\hbar c^2} \Delta T_{\gamma'_1} \langle H_{\text{inn}}^{(2)} \rangle. \quad (4.20)$$

Debido a la condición de indistinguibilidad dada por (4.4), el corrimiento de fase total $\Delta\zeta_{\text{hg}} = \Delta\zeta_{\gamma_1\gamma_2} + \Delta\zeta_{\gamma'_1\gamma'_2}$ depende de la diferencia entre los valores esperados del hamiltoniano de los grados de libertad internos. De este modo, la probabilidad de detección en coincidencia está dada por

$$p_{i,j} = \frac{1}{4} - \frac{(-1)^{\delta_{ij}}}{4} \cos \left(\frac{g\Delta h \Delta T_{\gamma_1} \Delta E}{2\hbar c^2} \right) \cos \left(\frac{g\Delta h \Delta T_{\gamma_1} \Delta E'}{2\hbar c^2} \right) \times \cos \left(\left[\langle H_{\text{inn}}^{(1)} \rangle - \langle H_{\text{inn}}^{(2)} \rangle \right] \frac{g\Delta h \Delta T_{\gamma_1}}{\hbar c^2} + \alpha + \beta \right). \quad (4.21)$$

Asumiendo que $\Delta E = \Delta E'$ y $\langle H_{\text{inn}}^{(1)} \rangle = \langle H_{\text{inn}}^{(2)} \rangle = \langle H_{\text{inn}} \rangle$, la probabilidad de detección en coincidencia adopta la forma

$$p_{i,j} = \frac{1}{4} - \frac{(-1)^{\delta_{ij}}}{4} \cos^2 \left(\frac{g\Delta h \Delta T_{\gamma_1} \Delta E}{2\hbar c^2} \right) \cos(\alpha + \beta). \quad (4.22)$$

En este caso el corrimiento de fase inducido por el campo gravitacional se anula. En el caso en que las fases locales sean igual a cero, la modulación solo depende en la dilatación temporal gravitacional, la cual permite aislar el efecto de disminución en la visibilidad interferométrica. Además, si el acople entre los grados de

4.1 Probabilidad de detección y corrimiento de fase para los arreglos Franson y abrazado

libertad internos y el potencial gravitacional es tal que la interacción está dada por $\phi(r)\langle H_{\text{inn}}\rangle/c^2$ (es decir, considerar que la formulación cuántica de la relación masa energía esté dada por $mc^2 + \langle H_{\text{inn}}\rangle$) entonces no existe modulación de la visibilidad interferométrica y solo un corrimiento de fase, el cual para un interferómetro balanceado se anula, y solo resta una dependencia de las fases controlables locales. Cabe destacar entonces que la existencia de un decrecimiento en la visibilidad interferométrica para el arreglo abrazado, al considerarse balanceado y con la condición de indistinguibilidad, puede ser considerado como un test para diversas formulaciones cuánticas de la equivalencia masa-energía.

Notemos que podemos obtener un resultado similar al realizar una rotación en 90° de uno de los interferómetros Mach-Zehnder del arreglo Franson. Sin embargo, la ventaja inherente del arreglo abrazado proviene en que éste no posee un tipo de escapatoria producto de la postselección, la cual es propio del arreglo Franson ref. [26; 47].

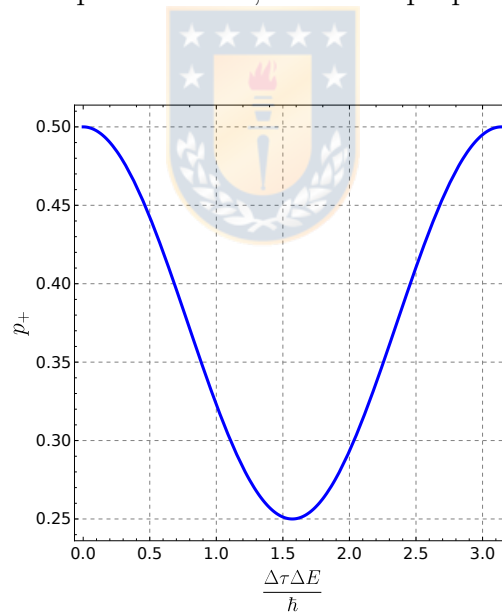


Figura 4.4: Probabilidad de detección $p_{\alpha\alpha}$ para el arreglo abrazado, en función de la diferencia de tiempo propio de arribo $\Delta\tau$, y la diferencia de niveles de energía ΔE , para dos partículas con grados de libertad internos de dos niveles.

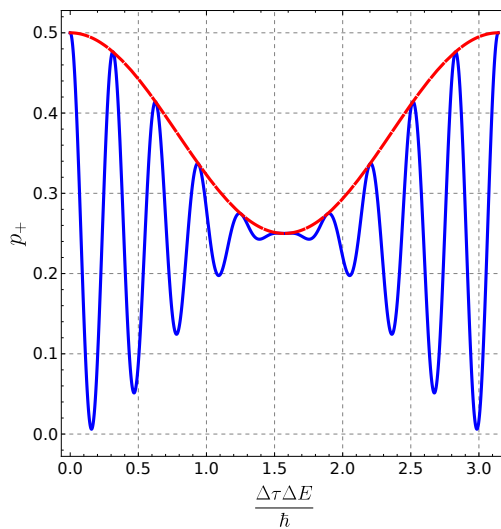


Figura 4.5: Probabilidad de detección $p_{\alpha\alpha}$ para los arreglos Franson y abrazado, en función de la diferencia de tiempo propio de arribo $\Delta\tau$, y la diferencia de niveles de energía ΔE , para dos partículas con grados de libertad internos de dos niveles. Los valores de las fases locales se toman como cero.

4.2. Desigualdad CHSH

Al igual que en el caso de los arreglos Franson y abrazado alimentado por fotones, en este capítulo estudiamos cómo el funcional CHSH es afectado por la dilatación temporal gravitacional en el caso en que los arreglos interferométricos son alimentados por partículas con masa y grados de libertad internos. Veremos aquí que la dilatación temporal gravitacional se evidencia como un corrimiento en la fase para los grados de libertad de la posición del centro de masa, junto con una modulación originada por la inclusión de los grados de libertad internos.

Dada la probabilidad de detección (4.10), el funcional CHSH adopta la expre-

sión

$$\begin{aligned}
 \Sigma = & \cos\left(\frac{\Delta\tau_{\gamma_2\gamma_1}}{2\hbar}\Delta E\right) \cos\left(\frac{\Delta\tau_{\gamma'_2\gamma'_1}}{2\hbar}\Delta E\right) \cos\left(\frac{1}{\hbar}[\Delta\zeta_{\gamma_1\gamma_2} + \Delta\zeta_{\gamma'_1\gamma'_2}]\right) \\
 & \times [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 + \varphi'_2) + \cos(\varphi'_1 + \varphi_2) - \cos(\varphi'_1 + \varphi'_2)] \\
 & + \sin\left(\frac{1}{\hbar}[\Delta\zeta_{\gamma_1\gamma_2} + \Delta\zeta_{\gamma'_1\gamma'_2}]\right) \\
 & [\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi'_2) + \sin(\varphi'_1 + \varphi_2) - \sin(\varphi'_1 + \varphi'_2)],
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Usando los valores usuales para las fases locales $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi'_1, \varphi'_2) = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$, el funcional CHSH (para ambos interferómetros) (4.23) adopta la forma

$$\Sigma = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\Delta\tau_{\gamma_2\gamma_1}}{2\hbar}\Delta E\right) \cos\left(\frac{\Delta\tau_{\gamma'_2\gamma'_1}}{2\hbar}\Delta E\right) \cos\left(\frac{1}{\hbar}[\Delta\zeta_{\gamma_1\gamma_2} + \Delta\zeta_{\gamma'_1\gamma'_2}]\right). \tag{4.24}$$

Así, para el arreglo Franson la ec. (4.24) toma la forma

$$\Sigma_{\text{Fr}} = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\Delta\tau_{\gamma_2\gamma_1}}{2\hbar}\Delta E\right) \cos\left(\frac{\Delta\tau_{\gamma'_2\gamma'_1}}{2\hbar}\Delta E\right) \cos\left(\frac{2}{\hbar}\Delta\zeta_{\gamma_1\gamma_2}\right). \tag{4.25}$$

En este caso el corrimiento de fase inducido por el campo gravitacional es $2\Delta\zeta_{\gamma_1\gamma_2}$ debido a la configuración de los interferómetros Mach-Zehnder en el arreglo Franson. Para el arreglo Franson

$$\Sigma_{\text{Hg}} = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\Delta\tau_{\gamma_2\gamma_1}}{2\hbar}\Delta E\right) \cos\left(\frac{\Delta\tau_{\gamma'_2\gamma'_1}}{2\hbar}\Delta E\right). \tag{4.26}$$

En este caso el corrimiento de fase inducido por el campo gravitacional se pierde totalmente, y esto es debido a la configuración propia del arreglo abrazado. Esto permite poder aislar el efecto de la dilatación temporal gravitacional en el entrelazamiento tipo camino generado en este tipo de interferómetros. De tal modo, es posible elegir otras fases locales para así obtener una violación máxima de la desigualdad CHSH. Para el arreglo Franson podríamos elegir una fase local de la forma $\phi'_a = \phi_A - 2\Delta\zeta_{\gamma_1\gamma_2}$, es decir, elegir las fases locales de tal modo que se anule el corrimiento de fase inducido por el campo gravitacional. Con esta elección el funcional CHSH (4.25) adopta la forma

$$\Sigma_{\text{Fr}} = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\Delta\tau_{\gamma_2\gamma_1}}{2\hbar}\Delta E\right) \cos\left(\frac{\Delta\tau_{\gamma'_2\gamma'_1}}{2\hbar}\Delta E\right). \quad (4.27)$$

Bajo esta elección de las fases locales, los funcionales CHSH para los interferómetros Franson y abrazado son similares, y el único término restante en la expresión proviene de los relojes implementados en cada partícula, es decir, del acople de los grados de libertad internos al potencial gravitacional. Así, solo queda el término que produce una modulación en el funcional CHSH, aislando el efecto de la dilatación temporal gravitacional sobre sistemas cuánticos. Además, como es mencionado en ref. [14] si el acople entre el campo gravitacional y el hamiltoniano de los grados de libertad internos está dado por $\langle H_{\text{inn}} \rangle \phi(r)/c^2$ y las fases locales son escogidas de tal modo que los corrimientos de fase para cada partícula se anulan, el funcional CHSH (4.24) no exhibe un compartamiento oscilatorio dado por la inclusión de los grados de libertad internos, y la desigualdad CHSH es violada maximalmente. Si consideramos un arreglo Franson y abrazado yaciendo en una superficie equipotencial, y usando las restricciones (4.4) y (4.5), no es posible distinguir entre detecciones simultáneas, y por ende, el estado generado por los interferómetros Franson y abrazado es un estado separable.

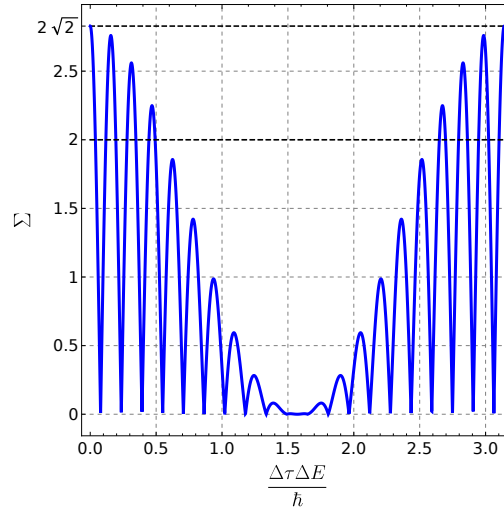


Figura 4.6: Valor del funcional CHSH para el arreglo Franson, considerando dos partículas con grados de libertad internos de dos niveles, en función de la diferencia de tiempo propio de arribo $\Delta\tau$, y la diferencia de niveles de energía ΔE . Valor de las fases locales $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$.

Tenemos que notar que el funcional CHSH (4.27) tiene un valor menor que dos, es decir, se tiene un estado separable si la diferencia de tiempo de arribo está dada por $\Delta\tau = 2\hbar \arccos(2^{-1/4})/\Delta E$, o de otro modo, el campo gravitacional genera un estado entrelazado al considerar dilataciones temporales gravitacionales $\Delta\tau > 2\hbar \arccos(2^{-1/4})/\Delta E$.

En la fig. 4.9 podemos ver en más detalle qué tan robusto es el estado entrelazado generado por los arreglos Franson y abrazado. En el caso de un interferómetro abrazado, para ΔE fijo podemos ver que a medida que aumenta la altura de los brazos Δh , o el tiempo de vuelo ΔT (es decir, estamos aumentando el largo de los brazos del arreglo) el estado de Bell puede seguir violando la desigualdad CHSH, caso contrario al interferómetro Franson, en donde el estado deja de violar la desigualdad CHSH más rápido. Así, el estado maximalmente entrelazado el arreglo abrazado es más robusto a la diferencia de potencial gravitacional como al largo de los brazos de cada interferómetro Mach-Zehnder.

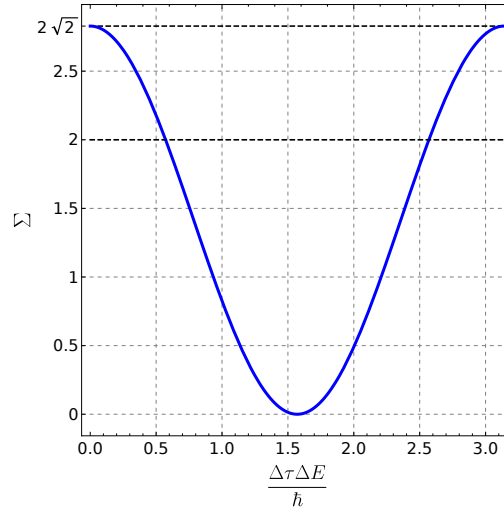


Figura 4.7: Valor del funcional CHSH para el arreglo abrazado, considerando dos partículas con grados de libertad internos de dos niveles, en función de la diferencia de tiempo propio de arribo $\Delta\tau$, y la diferencia de niveles de energía ΔE . Valor de las fases locales $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$.

Notemos que las expresiones (4.26) y (4.27) son independientes de la masa del sistema en cuestión, solo dependen de la diferencia de energía ΔE , y de los tiempos de arribo $\Delta\tau_{\gamma_2\gamma_1}$. En este sentido, a medida que la masa del sistema se escala el entrelazamiento se mantiene, y en este sentido el entrelazamiento debería estar presente en sistemas macroscópicos (siempre y cuando mantengan la coherencia cuántica).

La variación del funcional CHSH, dado por la ec. (4.25), en el caso en que consideremos un sistema con una masa en el rango $10^{-27} - 10^{-20}$ [kg] (es decir, considerando interferometría con neutrones y sistemas con 10^7 UMA), y un interferómetro con largo y altura variable (a través del producto $\Delta h\Delta T$), indica que la variación de la masa no afecta si el estado viola o no la desigualdad CHSH (ver figura 4.11). Solo notamos un efecto en la desigualdad CHSH si aumentamos tanto el largo como alto del arreglo Franson. Del mismo modo, dado que uno de los primeros sistemas cuánticos estudiados bajo el efecto del campo gravitacional

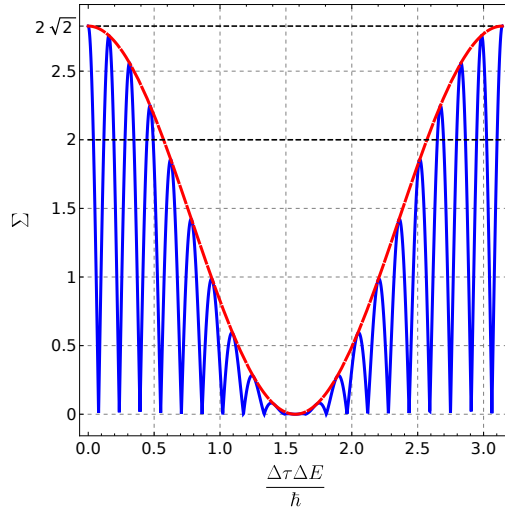


Figura 4.8: Valor del funcional CHSH para los arreglos Franson y abrazado, considerando dos partículas con grados de libertad internos de dos niveles, en función de la diferencia de tiempo propio de arribo $\Delta\tau$, y la diferencia de niveles de energía ΔE . Línea azul continua representa el funcional CHSH para el arreglo Franson, línea roja segmentada para el arreglo abrazado. Valor de las fases locales $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$.

fue el neutrón (en el célebre experimento COW ref. [11; 12]) la variación del funcional CHSH para dicha partícula, en términos de la velocidad inicial v [m/s] y el producto $\Delta h\Delta T$ [m · s] indica que para un intervalo de velocidades no relativistas la desigualdad CHSH es violada maximalmente.

Para una partícula con un número de grados de libertad arbitrarios, la probabilidad de detección dada por la ec. (4.10), el valor esperado de un observable adopta la forma

$$\begin{aligned}
 E(\alpha, \beta) = & \frac{1}{2} \left[e^{i\Delta\phi_{\gamma_1, \gamma_2}} e^{i\Delta\phi_{\gamma_1, \gamma_2}} e^{i(\alpha+\beta)} \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta\tau_{\gamma_2 \gamma_1} H_{\text{Inn}}} \right\} \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta\tau_{\gamma_2' \gamma_1'} H_{\text{Inn}}} \right\} \right. \\
 & \left. + e^{-i\Delta\phi_{\gamma_1, \gamma_2}} e^{-i\Delta\phi_{\gamma_1', \gamma_2'}} e^{-i(\alpha+\beta)} \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{\frac{i}{\hbar} \Delta\tau_{\gamma_2 \gamma_1} H_{\text{Inn}}} \right\} \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{\frac{i}{\hbar} \Delta\tau_{\gamma_2' \gamma_1'} H_{\text{Inn}}} \right\} \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

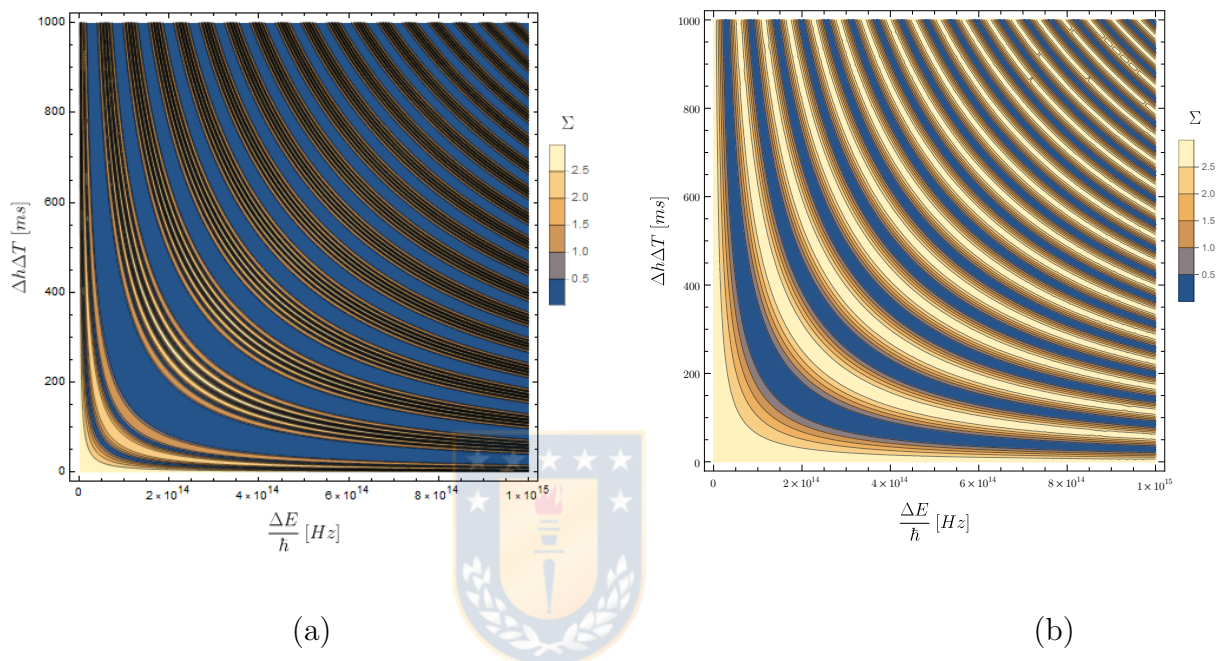


Figura 4.9: Gráfico de líneas de contorno del funcional CHSH para los arreglos Franson y abrazado, en términos de la diferencia de energía ΔE , la diferencia de coordenada espacial vertical Δh y el intervalo de coordenada temporal ΔT . (a) funcional CHSH para el arreglo Franson dado por la ec. 4.25. (b) funcional CHSH para el arreglo abrazado, dado por la ec. 4.26. El rango de valores para ΔE corresponde a diferentes sistemas físicos (desde átomos y neutrones), para más detalles ver ref. [2]. Las fases locales tienen los valores $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$.

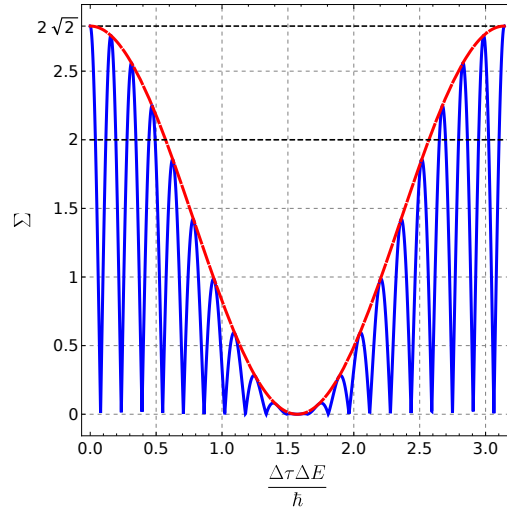


Figura 4.10: Valor del funcional CHSH, para los arreglos Franson y abrazado al considerar dos partículas con grados de libertad internos de 2 niveles. Línea azul continua representa al funcional CHSH para el arreglo Franson, línea roja punteada representa al arreglo interferométrico abrazado. Las fases locales tienen los valores $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$.

Esta expresión puede ser reescrita de la siguiente manera

$$E(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)(A + A^\dagger) + i \sin(\alpha + \beta)(A - A^\dagger)], \quad (4.29)$$

en donde

$$A = e^{i\Delta\phi_{\gamma_1, \gamma_2}} e^{i\Delta\phi_{\gamma_1, \gamma_2}} \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta\tau_{\gamma_2 \gamma_1} H_{\text{Inn}}} \right\} \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta\tau_{\gamma_2' \gamma_1'} H_{\text{Inn}}} \right\}. \quad (4.30)$$

Por lo tanto, el funcional CHSH adopta la forma

$$\begin{aligned} \Sigma = \frac{1}{2} [& (A + A^\dagger) (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha' + \beta) + \cos(\alpha + \beta') - \cos(\alpha'_1 + \beta')) \\ & - i (A - A^*) \times (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha' + \beta) + \sin(\alpha + \beta') - \sin(\alpha' + \beta'))]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

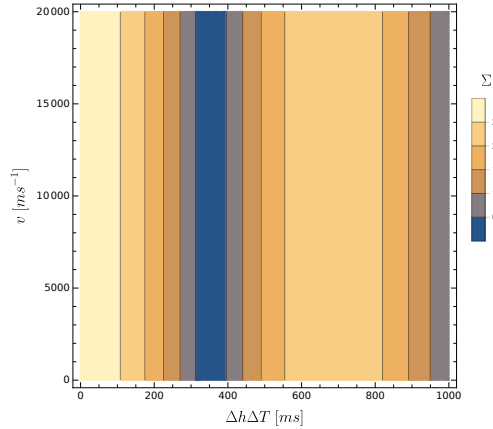


Figura 4.11: Funcional CHSH, para un sistema con grados de libertad internos de dos niveles, en términos de la velocidad inicial de las partículas, y el producto $\Delta h\Delta T$ [ms]. La velocidad inicial, para cada partícula que ingresa a los interferómetros Mach-Zehnder, es de 2200 [m/s]. Las fases locales tienen los valores $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$.

Considerando los valores usuales de las fases locales $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$ el funcional CHSH se transforma en

$$\Sigma = \frac{1}{2} \left[2\sqrt{2}(A + A^*) \right]. \quad (4.32)$$

Para un reloj en un estado inicial $\rho_0 = \prod_{i=1}^{\otimes N} \rho_i$, y cada estado interno en un estado mezcla arbitrario $\rho_i = \sum_{j=1}^n p_j^{(i)} |\kappa\rangle^{(i)} \langle \kappa|^{(i)}$, en donde $|\kappa\rangle$ corresponde a las bases propias de la energía de cada nivel, con los valores propios $E_\kappa^{(i)}$, y $p_j^{(i)}$ es la probabilidad de encontrar ocupado cada nivel del reloj. Así, la expresión (4.30) adopta la forma

$$A = e^{i\Delta\phi_{\gamma_1, \gamma_2}} e^{i\Delta\phi_{\gamma_1, \gamma_2}} \prod_{j=1}^N \sum_{i=1}^n p_i^{(j)} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta\tau_{\gamma_2} \gamma_1 E_i^{(j)}} \prod_{k=1}^N \sum_{i=1}^n p_i^{(k)} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta\tau_{\gamma_2'} \gamma_1' E_i^{(k)}}. \quad (4.33)$$

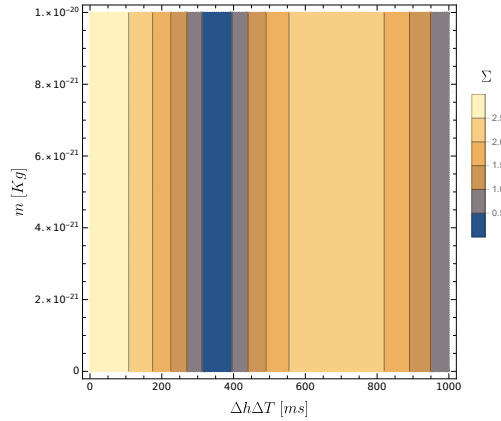


Figura 4.12: Funcional CHSH para un sistema de dos neutrones en términos de la masa de las partículas, y el producto $\Delta h\Delta T$ [ms]. La masa de cada neutrón es $1,6 \times 10^{-27}$ [kg]. Las fases locales tienen los valores $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$.

La desigualdad CHSH para un reloj de m -niveles, tal que la energía de cada nivel es superior al anterior, de modo que $E_i = n_i E_0$, con E_0 el estado base de cada reloj y $n_i = 1, 2, \dots, m$ un entero, está acotada por

$$\Sigma \leq 2\sqrt{2}p^2 \left[\left(\frac{1 - \cos(\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2} E_0 m / \hbar)}{1 - \cos(\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2} E_0 / \hbar)} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - \cos(\Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2} E_0 m / \hbar)}{1 - \cos(\Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2} E_0 / \hbar)} \right)^{1/2} \right], \quad (4.34)$$

en donde hemos considerado $p_j^{(i)} = p$. El comportamiento del funcional CHSH para un reloj de m -niveles se muestra en la figura (4.13), a medida que el número de niveles de energía aumenta, el estado se transforma en un estado separable de manera mucho más rápida que lo haría para una partícula con dos niveles de energía internos.

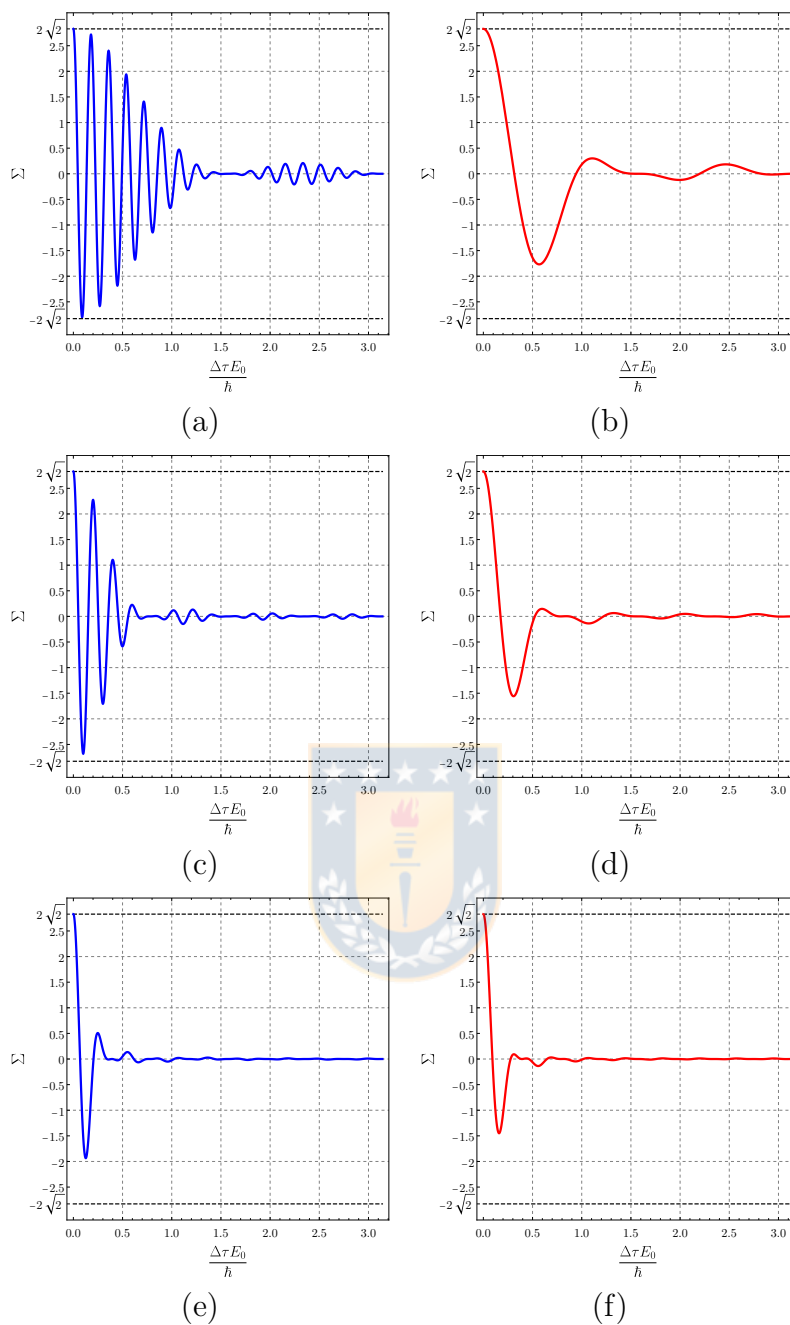


Figura 4.13: Valor del funcional CHSH para los arreglos Franson y abrazado, en términos de la energía E_0 del estado base del reloj, y el tiempo propio $\Delta\tau$ para la detección de la partícula. Línea azul continua representa el funcional CHSH para el arreglo Franson, y la línea roja continua representa al interferómetro abrazado. (a) y (b) para una partícula con grados de libertad internos de 4 niveles. (c) y (d) para una partícula con grados de libertad internos de 8 niveles. (e) y (f) partícula con grados de libertad internos de 20 niveles. Las fases locales tienen los valores $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (\pi/4, 0, -\pi/4, -\pi/2)$.

4.3. Pureza y Negatividad

En esta sección estudiamos la pureza y negatividad del estado entrelazado generado por los arreglos interferométricos Franson y abrazado.

4.3.1. Pureza

Un estado entrelazado maximalmente es un estado puro. La pureza del estado generado por un arreglo interferométrico Franson y abrazado, bajo el efecto de la dilatación temporal gravitacional, está dada por la traza del cuadrado de la matriz reducida del estado generado por los arreglos antes mencionados. Para la obtención de la matriz densidad reducida trazamos los grados de libertad internos. En este caso el trazado sobre los grados de libertad internos, en el caso de sistemas de dos niveles, es realizado en el estado post-seleccionado. Así, la pureza adopta la forma

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \rho_{\text{red}}^2 \} = & \frac{1}{8} \left[1 + |\langle \tau_{\text{in}} | e^{\frac{i}{\hbar} (\int_{\gamma_1} d\tau - \int_{\gamma_2} d\tau) H_{\text{inn}}} | \tau_{\text{in}} \rangle|^2 \right. \\ & \left. \times |\langle \tau_{\text{in}} | e^{\frac{i}{\hbar} (\int_{\gamma_1'} d\tau - \int_{\gamma_2'} d\tau) H_{\text{inn}}} | \tau_{\text{in}} \rangle|^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

En caso en que uno de los interferómetros Mach-Zehnder de los arreglos interferométricos Franson y abrazados esté puesto de modo que no exista diferencia de potencial entre sus brazos, es decir, en una superficie equipotencial, la pureza adopta la forma

$$\text{Tr} \{ \rho_{\text{red}}^2 \} = \frac{1}{8} \left[1 + |\langle \tau_{\text{in}} | e^{\frac{i}{\hbar} (\int_{\gamma_1} d\tau - \int_{\gamma_2} d\tau) H_{\text{inn}}} | \tau_{\text{in}} \rangle|^2 \right]. \quad (4.36)$$

Considerando que el estado inicial del reloj para los grados de libertad internos $|\tau_{\text{in}}\rangle$ se encuentra en una superposición coherente $|\tau_{\text{in}}\rangle = (|0\rangle + |1\rangle) / \sqrt{2}$, y con el hamiltoniano H_{inn} ec.(2.102), de este modo la pureza dada por la ec.(4.35) se

escribe como

$$\text{Tr} \{ \rho_{\text{red}}^2 \} = \frac{1}{8} \left[1 + \cos^2 \left(\frac{\Delta E g \Delta h}{2 \hbar c^2} \Delta T \right) \cos^2 \left(\frac{\Delta E' g \Delta h}{2 \hbar c^2} \Delta T \right) \right]. \quad (4.37)$$

En el caso en que el estado que describe a la posición del centro de masa y a los grados de libertad está dado por una matriz densidad, la pureza adopta la siguiente forma:

$$\text{Tr} \{ \rho_{\text{red}}^2 \} = \frac{1}{8} \left[1 + \left| \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta \tau_{\gamma_1, \gamma_2} H_{\text{inn}}} \right\} \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta \tau_{\gamma'_1, \gamma'_2} H_{\text{inn}}} \right\} \right|^2 \right]. \quad (4.38)$$

En el caso en que el solo sean dos grados de libertad internos, y el hamiltoniano H_{inn} sea el descrito previamente, se recupera la pureza dada por la ec. (4.37).

4.3.2. Criterio PPT y Negatividad

El criterio PPT nos permite cuantificar si un estado cuántico se encuentra entrelazado o no. Para emplear el criterio PPT, calculamos la traza parcial del estado ρ luego de salir del interferómetro. Si el estado es separable, los valores propios de la transpuesta parcial son positivos, si no el estado está entrelazado. Para un estado ρ con grados de libertad internos de dos niveles, solo tenemos un valor propio negativo, de este modo el estado es entrelazado

$$\lambda_- = \frac{1}{4} \cos \left(\frac{\Delta E g \Delta h}{2 \hbar c^2} \Delta T \right) \left(\frac{\Delta E' g \Delta h}{2 \hbar c^2} \Delta T \right). \quad (4.39)$$

Para la descripción de los niveles de energía internos dada por un estado mezcla de dimensión arbitraria se obtiene

$$\lambda_- = \frac{1}{4} \left| \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta \tau_{\gamma_1, \gamma_2} H_{\text{inn}}} \right\} \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta \tau_{\gamma'_1, \gamma'_2} H_{\text{inn}}} \right\} \right| \quad (4.40)$$

El protocolo PPT nos dice si un estado es entrelazado o no, pero no cuantifica la cantidad de entrelazamiento. En caso en que se necesite cuantificar el entrelazamiento se debe emplear un tipo de medida de entrelazamiento. En este caso empleamos la negatividad logarítmica, la cual ha sido empleada previamente en otros tipos de estudios, por ejemplo en la cuantificación del entrelazamiento para observadores en caída libre bajo una métrica de Rindler. Considerando lo expuesto previamente, la negatividad logarítmica se define como $\mathcal{N} = \log_2(\|\rho_{\text{PT}}\|_1)$, en donde $\|\rho_{\text{PT}}\|_1 = \text{Tr} \sqrt{\rho_{\text{PT}}^\dagger \rho_{\text{PT}}}$. En el caso en los grados de libertad internos sean de dos niveles, la negatividad adopta la forma

$$\mathcal{N} = \log_2 \left[1 + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\Delta E g \Delta h}{2 \hbar c^2} \Delta T \right) \cos \left(\frac{\Delta E' g \Delta h}{2 \hbar c^2} \Delta T \right) \right]. \quad (4.41)$$

En caso que la diferencia de energías entre los niveles de los dos relojes sea idéntica (ya que a cada partícula se le asocia un reloj, el cual es implementado en los grados de libertad internos) la negatividad (4.41) adopta la forma

$$\mathcal{N} = \log_2 \left[1 + \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\Delta E g \Delta h}{2 \hbar c^2} \Delta T \right) \right]. \quad (4.42)$$

El entrelazamiento se pierde totalmente en el caso $\mathcal{N} = 0$. Esto ocurre cuando la diferencia de tiempo propio de arriba adopta los valores $\Delta \tau = n\pi\hbar/\Delta E$, con $n = 1, 3, 5, \dots$. Debido a que la negatividad, dada por la ecuación (4.42), depende de una función armónica, y ésta a su vez del intervalo de tiempo propio $\Delta \tau =$

$g\Delta h\Delta T/c^2$, la negatividad va a sufrir un resurgimiento debido a la periodicidad del reloj implementado en cada partícula.

En el caso del sistema del reloj descrito por una matriz densidad arbitraria, la negatividad adopta la forma

$$\mathcal{N} = \log_2 \left[1 + \frac{1}{2} \left| \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta \tau_{\gamma_1, \gamma_2} H_{\text{inn}}} \right\} \text{Tr} \left\{ \rho_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta \tau_{\gamma'_1, \gamma'_2} H_{\text{inn}}} \right\} \right| \right]. \quad (4.43)$$

Consideremos el caso en que los grados de libertad internos sean el producto de N relojes, cuya extensión es mucho menor que la escala en donde la métrica cambia. De este modo $\rho_0 = \prod_{i=1}^{\otimes N} \rho_i$, y cada reloj se describe por un estado mezcla $\rho_i = \sum_{j=1}^n p_j^{(i)} |\kappa\rangle^{(i)} \langle \kappa|^{(i)}$, en donde $|\kappa\rangle$ corresponde a las bases propias de la energía, con valores-propios $E_\kappa^{(i)}$. La negatividad dada por la ec. (4.43) adopta la forma

$$\mathcal{N} = \log_2 \left[1 + \frac{1}{2} \left| \prod_{j=1}^N \sum_{i=1}^n p_i^{(j)} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta \tau_{\gamma_2 \gamma_1} E_i^{(j)}} \prod_{k=1}^N \sum_{i=1}^n q_i^{(k)} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta \tau_{\gamma'_2 \gamma'_1} E_i^{(k)}} \right| \right]. \quad (4.44)$$

Podemos ver el comportamiento de la negatividad logarítmica para los arreglos interferométricos Franson y abrazado como se muestra en las figura 4.14. En la figura vemos cómo al considerar una partícula con solo un reloj, y con n -niveles, el estado entrelazado se transforma en un estado PPT (es decir, la negatividad logarítmica tiende a cero) a medida que el tiempo propio transcurrido aumenta, y el número de niveles de energía aumenta. En la figura 4.14 todos los niveles de energía tienen la misma separación entre ellos.

Si consideramos una partícula con grados de libertad internos, pero con m -niveles, consideramos que la energía de cada nivel está dado por $E_i = n_i E_0$, en donde E_0 es el estado base del reloj y $n_i = 1, 2, \dots, m$. Consideramos que cada nivel tiene la misma probabilidad de detección para cada nivel, la negatividad logarítmica se escribe como

$$\mathcal{N} = \log_2 \left[1 + \frac{p^2}{2} \left(\frac{1 - \cos(\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2} E_0 m / \hbar)}{1 - \cos(\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2} E_0 / \hbar)} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - \cos(\Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2} E_0 m / \hbar)}{1 - \cos(\Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2} E_0 / \hbar)} \right)^{1/2} \right]. \quad (4.45)$$

En caso de los interferómetros Franson y abrazados, con ambos interferómetros Mach-Zehnder balanceados y geoméricamente equivalentes, la negatividad toma la forma

$$\mathcal{N} = \log_2 \left[1 + \frac{p^2}{2} \left(\frac{1 - \cos(\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2} E_0 m / \hbar)}{1 - \cos(\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2} E_0 / \hbar)} \right) \right]. \quad (4.46)$$

En el caso de un sistema con dos niveles de energía, la negatividad logarítmica toma la forma dada por la ec. (4.42)

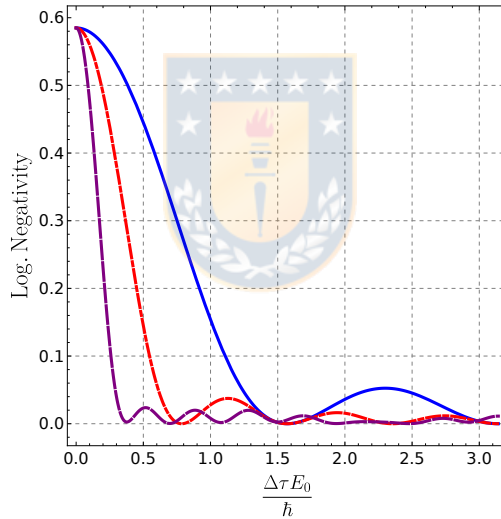


Figura 4.14: Negatividad logarítmica para los arreglos interferométricos Franson y abrazado en términos de la diferencia de tiempo propio $\Delta\tau$, y el estado base E_0 del reloj. Línea azul continua representa la negatividad logarítmica para un estado entrelazado con grados de libertad internos de 4 niveles. Línea roja segmentada para una partícula con grados de libertad internos de 8 niveles. Línea segmentada púrpura con grados de libertad internos de 16 niveles.

4.4. Partículas masivas con dispersión en momentum

En esta sección estudiamos el efecto del campo gravitacional débil en una partícula masiva generada por una fuente con dispersión en momentum. Para estudiar el efecto del campo gravitacional en el límite no relativista, resolvemos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, y empleamos su analogía con respecto a óptica geométrica. Asumiendo que la solución de la ecuación de Schrödinger está dada por $\psi(x, t) = \phi(x)e^{i\omega t}$, con ω relacionado al estado propio de energía $E = \hbar\omega$. Reemplazando el ansatz en la ecuación de Schrödinger se obtiene la ecuación independiente del tiempo

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x)) \right] \phi(x) = 0. \quad (4.47)$$

Definiendo el número de onda de la forma $k(x) = \sqrt{2m(E - V(x))/\hbar^2}$, la ec. (4.47) adopta la forma

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right] \phi(x) = 0, \quad (4.48)$$

Considere que las trayectorias de un paquete de ondas están descritas en términos de trayectorias clásicas. La función $\phi(x)$ puede ser escrita como

$$\phi(x) = \sqrt{\rho(x)} \exp(iS(x)/\hbar). \quad (4.49)$$

De la ec. (4.49) podemos obtener una ecuación para ρ y realizar una aproximación tipo WKB, es decir, asumiendo que las variaciones rápidas de $\phi(x)$ están contenidas en la función exponencial, y que ρ varía lentamente. Así, obtenemos la ecuación eikonal $(\partial S/\partial x)^2 = \hbar^2 k^2$. Para resolver la ecuación eikonal, realizamos otra aproxi-

4.4 Partículas masivas con dispersión en momentum

mación, esta vez consideramos que $V \ll E$, de tal modo que el potencial no influye en la trayectoria de la partícula. Bajo esta consideración, la solución de la ecuación eikonal puede ser escrita de la forma $\phi = \phi_0 \phi_p$, en donde ϕ_0 es la solución para una partícula libre no relativista, dada por $\phi_0 = \sqrt{\rho} \exp\left(i \int^{\vec{x}} \vec{k}_0 \cdot d\vec{x}\right)$. La solución, bajo la acción del potencial gravitacional, está dada por $\phi_p = \exp\left(-i \int^{\vec{x}} \Delta\vec{k} \cdot d\vec{x}\right)$, con $k_0 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ y $\Delta k = k_0 V/2E$. Así, el paquete de ondas sufre un corrimiento de fase dado por la cantidad $\Delta\phi = \int \Delta\vec{k} \cdot d\vec{x}$. Usando esta expresión, ref. [11; 12] calcula el corrimiento de fase para un neutrón bajo la acción de un potencial gravitacional newtoniano.

Considere un paquete de ondas de partículas masivas con dispersión en momentum. Este paquete de onda es inyectado a un interferómetro Mach-Zehnder. El paquete de ondas es descrito por

$$\Psi_0 = \int dk F(k) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4.50)$$

en donde $F(k)$ es la función de distribución espectral del paquete de ondas, sujeta a la condición $\int dk F(k) = 1$. El interferómetro Mach-Zehnder es configurado de tal modo que existe una diferencia de potencial entre cada uno de los brazos del interferómetro, y está dada por $g\Delta h$, en donde Δh es la diferencia de coordenada espacial a lo largo de la vertical. El estado de salida del interferómetro adopta la forma

$$\Psi_{\text{out}} = \frac{1}{2} [(\psi_1 - \psi_2) + i(\psi_1 + \psi_2)], \quad (4.51)$$

4.4 Partículas masivas con dispersión en momentum

en donde

$$\psi_1 = \int dk_1 F(k_1) e^{i(k_1 x - \omega t + \varphi_1)}, \quad (4.52)$$

$$\psi_2 = \int dk_2 F(k_2) e^{i(k_2 x - \omega t + \varphi_2)}. \quad (4.53)$$

los términos φ_1 y φ_2 son las fases adquiridas a lo largo de cada uno de los caminos del interferómetro. La intensidad normalizada en cada detector está dada por

$$I_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\int dk |F(k)|^2 \cos(\Delta\varphi(k))}{\int dk |F(k)|^2} \right], \quad (4.54)$$

en donde $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Para un paquete de ondas con una distribución espectral $F(k)$ gaussiana, es decir, $F(k) = \exp(-(k - k_0)^2/(2\sigma^2))$ y el corrimiento de fase $\Delta\phi$ dado como en ref. [11], la intensidad normalizada (4.54) adopta la forma

$$I_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\int dk |e^{-(k-k_0)^2/(2\sigma^2)}|^2 \cos\left(\frac{m^2 g A}{\hbar^2 k}\right)}{\int dk |e^{-(k-k_0)^2/(2\sigma^2)}|^2} \right]. \quad (4.55)$$

Esta integral no puede ser calculada analíticamente, por lo que realizamos una integración numérica. Este resultado es similar (ver fig. 4.15) al obtenido en las referencias ref. [2; 14] en donde la disminución interferométrica actúa como testigo del tiempo propio. En nuestro caso el descenso de la visibilidad es producido a través del potencial gravitacional newtoniano, en donde el tiempo es absoluto. De este modo, no es posible asociar una disminución en la visibilidad interferométrica como resultado de la dilatación temporal gravitacional. En cambio, solo podemos considerar una disminución de la visibilidad interferométrica en el caso de la interferencia de relojes cuánticos (para detalles ver ref. [48]).

Considerando un interferómetro Mach-Zehnder, y empleando el hamiltoniano (2.67), la intensidad normalizada para un paquete de onda gaussiano (4.55) de-

4.4 Partículas masivas con dispersión en momentum

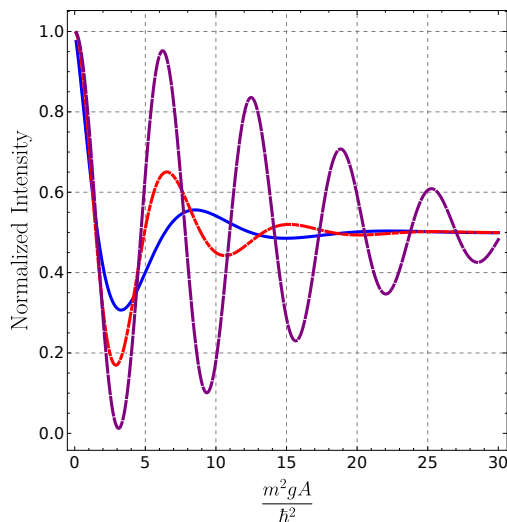


Figura 4.15: Intensidad normalizada en función al área A del interferómetro Mach-Zehnder. Elegimos un paquete de ondas con momentum $k_0 = 1$.

pende del corrimiento de fase $\Delta\Phi$ el cual es similar al corrimiento de fase para partículas propagándose a través del arreglo Franson, pero sin considerar grados de libertad internos. El corrimiento de fase en términos del número de onda k está dado por

$$\Delta\Phi = \frac{m^2 g A}{\hbar^2 k} \left(1 + \frac{\phi(R)}{c^2} \right) + \frac{3gA\hbar k}{2c^2}. \quad (4.56)$$

Es posible estudiar la desigualdad CHSH en los arreglos Franson y abrazado para un paquete de ondas con dispersión en momentum. De este modo, consideremos un arreglo Franson (ver fig. 3.1). El estado que ingresa al interferómetro es

$$\Psi_{\text{in}} = \psi_1(k, t) \otimes \psi_2(k, t), \quad (4.57)$$

en donde ψ_1 y ψ_2 son los estados descritos como en la ec. (4.50). El estado antes

4.4 Partículas masivas con dispersión en momentum

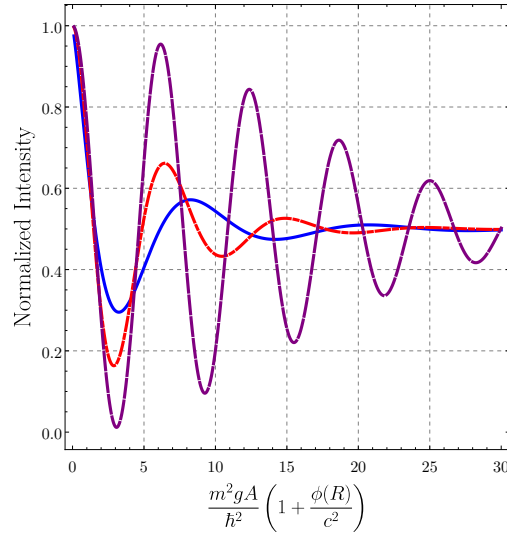


Figura 4.16: Intensidad normalizada en función del área efectiva de cada interferómetro Mach-Zehnder A , la masa de la partícula m . Consideramos un paquete de onda con $k_0 = 1$.

de arribar a los detectores tiene la forma

$$\begin{aligned}\psi_1^{\text{out}} &= \frac{1}{2} \left[\psi_1(k, t_{\gamma_1}) - \psi_1(k, t_{\gamma_2}) e^{i\phi_a} + i \left(\psi_1(k, t_{\gamma_1}) + \psi_1(k, t_{\gamma_2}) e^{i\phi_a} \right) \right], \\ \psi_2^{\text{out}} &= \frac{1}{2} \left[\psi_2(k, t_{\gamma'_1}) - \psi_2(k, t_{\gamma'_2}) e^{i\phi_b} + i \left(\psi_2(k, t_{\gamma'_1}) + \psi_2(k, t_{\gamma'_2}) e^{i\phi_b} \right) \right].\end{aligned}\tag{4.58}$$

Aquí t_{γ_1} ($t_{\gamma'_1}$) y t_{γ_2} ($t_{\gamma'_2}$) son los intervalos de coordenada temporal a través de los caminos γ_1 (γ'_1) y γ_2 (γ'_2), respectivamente, y ϕ_a y ϕ_b son las fases locales. Después

4.4 Partículas masivas con dispersión en momentum

de un proceso de post-selección, el estado adopta la forma

$$\begin{aligned} \Psi^{\text{out}} = \frac{\sqrt{2}}{4} & \left[\psi_1(k, t_{\gamma_1})_{A_1} \psi_2(k, t_{\gamma'_1})_{B_1} + \psi_1(k, t_{\gamma_2})_{A_1} \psi_2(k, t_{\gamma'_2})_{B_1} e^{\phi_a + \phi_b} \right. \\ & + i\psi_1(k, t_{\gamma_1})_{A_1} \psi_2(k, t_{\gamma'_1})_{B_2} - i\psi_1(k, t_{\gamma_2})_{A_1} \psi_2(k, t_{\gamma'_2})_{B_2} e^{\phi_a + \phi_b} \\ & + i\psi_1(k, t_{\gamma_1})_{A_2} \psi_2(k, t_{\gamma'_1})_{B_1} - i\psi_1(k, t_{\gamma_2})_{A_2} \psi_2(k, t_{\gamma'_2})_{B_1} e^{\phi_a + \phi_b} \\ & \left. - \psi_1(k, t_{\gamma_1})_{A_2} \psi_2(k, t_{\gamma'_1})_{B_2} - \psi_1(k, t_{\gamma_2})_{A_2} \psi_2(k, t_{\gamma'_2})_{B_2} e^{\phi_a + \phi_b} \right]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

La probabilidad de detección en coincidencia adopta la forma

$$p_{A_i, A_j} = \frac{1}{4} \frac{(-1)^{\delta_{ij}} \int dk_1 |F(k_1)|^2 \int dk_2 |F(k_2)|^2 \cos(\Delta\phi_{\gamma_1, \gamma_2}(k_1) + \Delta\phi_{\gamma'_1, \gamma'_2}(k_2) + \phi_a + \phi_b)}{4 \int dk_1 |F(k_1)|^2 \int dk_2 |F(k_2)|^2}, \quad (4.60)$$

en donde $\Delta\phi_{\gamma_1, \gamma_2}(k_1)$ es el corrimiento de fase para la partícula moviéndose a través de los caminos γ_1 y γ_2 . De manera análoga, $\Delta\phi_{\gamma'_1, \gamma'_2}(k_2)$ es el corrimiento de fase para los caminos γ'_1 y γ'_2 .

La función CHSH, para la selección usual de las fases locales, adopta la forma

$$\Sigma = 2\sqrt{2} \frac{\int dk_1 |F(k_1)|^2 \int dk_2 |F(k_2)|^2 \cos(\Delta\phi_{\gamma_1, \gamma_2}(k_1) + \Delta\phi_{\gamma'_1, \gamma'_2}(k_2))}{\int dk_1 |F(k_1)|^2 \int dk_2 |F(k_2)|^2}. \quad (4.61)$$

En el caso del arreglo Franson como está descrito en la figura (3.1), los corrimientos de fase son iguales y están dado por la ec. (4.56). Dado que la distribución espectral del paquete de ondas es gaussiana, la evaluación numérica (ver fig. 4.17) muestra un decrecimiento en la visibilidad interferométrica como en el caso de fotones con dispersión en frecuencia (ver ref. [14; 49]). Por lo tanto, una pérdida de entrelazamiento en el arreglo Franson puede ser considerada como evidencia de la

4.4 Partículas masivas con dispersión en momentum

dilatación temporal gravitacional, pero no necesariamente una consecuencia de la formulación cuántica de la relación masa-energía de Einstein (para más detalles, vea ref. [2; 50]). Es interesante notar que un posible test para distinguir el efecto de la dilatación temporal y el acople a los grados de libertad internos (que provienen de la generalización de la relación masa energía). Éste podría ser implementado al medir el resurgimiento de la violación de la desigualdad CHSH en cierto intervalo, debido a que el entrelazamiento se pierde totalmente para una partícula con dispersión en momentum.

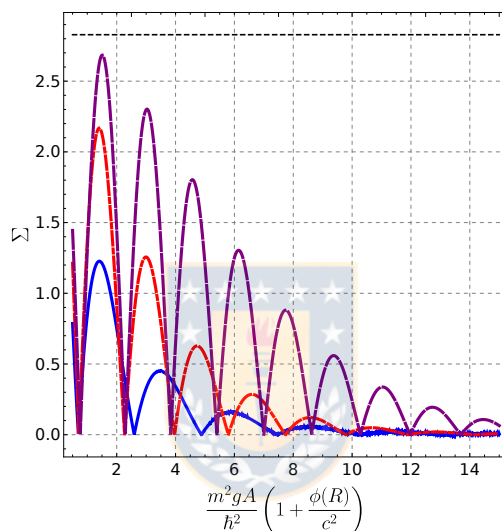


Figura 4.17: Valor de Σ para un paquete de ondas con dispersión en momentum para un hamiltoniano con correcciones relativistas, en términos del área A de los interferómetros Mach-Zehnder, y la masa de la partícula m . Para ver el comportamiento del funcional Σ , elegimos los valores del paquete de onda con número de onda $k_0 = 1$, $\sigma = 0,8$ (línea púrpura segmentada), $\sigma = 0,4$ (línea roja punteada), y $\sigma = 0,2$ (línea azul continua).

Capítulo 5

Tomografía cuántica por medio de CSPSA

En este capítulo estudiamos el proceso de tomografía cuántica a través de un proceso iterativo. El proceso iterativo es llevado a cabo mediante un algoritmo de optimización estocástico, el cual es conocido como CSPSA (Complex Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation).

5.1. Tomografía Cuántica Autoguiada

Uno de los primeros métodos en estudiar tomografía cuántica a través de un programa de optimización se conoce como *Self Guided Quantum Tomography* (SGQT, por sus siglas en inglés), éste método está basado en un método de optimización estocástico llamado Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation, originalmente ideado en 1992 por J. C Spall ref. [51]. Para Aplicar SGQT se formula el proceso de tomografía cuántica de la siguiente manera, comencemos con una medida de distancia entre dos estados ρ y σ , σ corresponde a un estado que puede ser generado experimentalmente, y ρ es el estado que queremos conocer. Dada la

medida de distancia $D(\rho, \sigma)$ podemos escribir

$$f(\sigma) = \langle D(\rho, \sigma) \rangle, \quad (5.1)$$

en donde $\langle \rangle$ es el valor promedio de la medida de distancia. Consideremos la infidelidad entre dos estados como la medida de distancia, esta está definida como

$$D(\rho, \sigma) = 1 - F(\rho, \sigma), \quad (5.2)$$

en donde $F(\rho, \sigma)$ es la fidelidad entre los estados ρ y σ , la cual es definida de la siguiente forma

$$F(\rho, \sigma) = \text{Tr} \left\{ \sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}} \right\}. \quad (5.3)$$

Además, en el caso en que ρ y σ sean estados puros, con $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ y $\sigma = |\varsigma\rangle\langle\varsigma|$, la fidelidad (5.3) adopta la forma

$$F(\psi, \varsigma) = |\langle\psi|\varsigma\rangle|. \quad (5.4)$$

La que es máxima cuando $|\varsigma\rangle$ es igual al estado desconocido $|\psi\rangle$. Entonces, la infidelidad (5.2) adopta la forma $D(\psi, \varsigma) = 1 - |\langle\psi|\varsigma\rangle|$. En este caso estudiamos el caso de tomografía cuántica para estados puros. De este modo, dado que tenemos un estimado de la distancia $D(|\psi\rangle, |\varsigma\rangle)$, el algoritmo propone un nuevo estado $|\varsigma\rangle$ que convergerá a $|\psi\rangle$ a través de diversas iteraciones de $D(|\psi\rangle, |\varsigma\rangle)$. Las estimaciones de esta distancia se generan a través de SPSA.

Supongamos que queremos estimar el valor mínimo de una función $G(\theta)$, en donde θ un vector d-dimensional. El problema de optimización consiste entonces en encontrar un mínimo θ^* tal que $\partial G/\partial\theta = 0$. Supongamos que podemos tener una medición \bar{G} de $G(\theta)$ de tal modo que el valor de θ que minimice G esté dado

por

$$\theta_{k+1} = \theta_k - a_k g_k(\theta_k), \quad (5.5)$$

en donde $g(\theta_k)$ es un estimado del gradiente $g(\theta) \equiv \partial G / \partial \theta$, en este caso la estimación del gradiente viene dada por

$$g_k(\theta_k) = \frac{\bar{G}(\theta_k + c_k \Delta_k) - \bar{G}(\theta_k - c_k \Delta_k)}{2c_k \Delta_k}, \quad (5.6)$$

en donde c_k denota número positivo, que usualmente decrece su tamaño a medida que k crece. $\Delta_k = (\Delta_{k1}, \Delta_{k2}, \dots, \Delta_{kp})^T$, vector con valores Δ_{ki} elegidos de manera aleatoria a través de una distribución de Bernoulli con valores ± 1 con probabilidad $1/2$ para cada valor. Los valores de a_k y c_k son elegidos de manera arbitraria según el tipo de problemas en que se esté trabajando. Una de las principales ventajas de SPSA es que solo emplea dos evaluaciones de la función \bar{G} por iteración para así estimar el gradiente. El algoritmo SPSA trabaja del siguiente modo, consideremos los pasos

1. Ponemos contador en $k = 1$. Generamos al azar un valor para θ y damos valores positivos para los coeficientes a, c, A, α , y γ en las funciones a_k y c_k

$$a_k = \frac{a}{(A + k)^\alpha}, \quad (5.7)$$

$$c_k = c/k^\gamma. \quad (5.8)$$

2. Generación de Δ_k .
3. Evaluación de \bar{G} con dos perturbaciones, es decir, obtener $\bar{G}(\theta_k + c_k \Delta_k)$ y $\bar{G}(\theta_k - c_k \Delta_k)$.
4. Generar la aproximación del gradiente $g(\theta_k)$.

5. Actualizar el estimado de θ .
6. Volver al paso 2, o terminar ejecución del algoritmo, todo en caso de que ya se haya alcanzado el máximo de iteraciones.

En el caso de SGQT generamos la aproximación del gradiente g en función de la infidelidad (5.1) en términos del estado ς_k

$$g_k = \frac{f(|\varsigma_k + c_k \Delta k\rangle) - f(|\varsigma_k - c_k \Delta k\rangle)}{2c_k \Delta k}, \quad (5.9)$$

con la actualización del estado dada por

$$\varsigma_{k+1} = \varsigma_k - \alpha_k g_k, \quad (5.10)$$

en donde el estado inicial $|\varsigma_0\rangle$ es generado al azar, según la medida de Haar. Los valores de α y γ son elegidos basados en el comportamiento del algoritmo para diversas realizaciones numéricas, para SGQT los valores óptimos son $\alpha = 0,602$ y $\gamma = 0,101$. Como se ha mostrado, SGQT ofrece una mejor aproximación al estado cuántico que tomografía cuántica estándar al emplear la misma cantidad de recursos. Además la ventaja de SGQT reside en que el protocolo no necesita una reconstrucción clásica, ya que se guía al estado cuántico del sistema. Además es un algoritmo que es robusto respecto a errores pequeños en la preparación del estado, como en el proceso de medición.

5.2. Tomografía cuántica a través de CSPA

En la sección anterior describimos el método de optimización estocástica conocido como SPSA, y vimos como este podría ser aplicado a el proceso de tomografía cuántica. Aquí estudiamos la extensión de SPSA a funciones reales de variables

complejas. Para poder realizar la extensión del algoritmo necesitamos las herramientas del cálculo complejo, en específico el cálculo de Wirtinger. Revisamos esto a continuación

5.2.1. Cálculo de Wirtinger

Consideremos los espacios $\mathcal{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n\}$, $\mathcal{C} = \{(z, \bar{z}) : z \in \mathbb{C}^n\}$ y $\mathcal{C}^* = \{(\bar{z}, z) : z \in \mathbb{C}^n\}$. Dado $z \in \mathbb{C}^n$, entonces definimos $\chi = (\text{Re}\{z\}, \text{Im}\{z\}) \in \mathcal{R}$. Además existe un isomorfismo entre \mathcal{R} y \mathcal{C} a través del mapeo lineal

$$J \equiv \begin{bmatrix} \mathbb{I} & i\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & -i\mathbb{I} \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

de aquí podemos escribir $(z, z^*) = J\chi$. Además el operador *swap* define un isomorfismo entre \mathcal{C} y el espacio dual \mathcal{C}^* , el cual está dado por

$$S \equiv \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

de tal modo que $(z, z^*) = S(z^*, z)$. Entonces, dado $z \in \mathbb{C}^n$ y dado $x = \text{Re}\{z\}$, e $y = \text{Im}\{z\}$. Por lo que los operadores cogradiente $\partial/\partial z$ y el operador cogradiente conjugado $\partial/\partial \bar{z}$ están definidos como

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} - i \frac{\partial}{\partial y_n} \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} + i \frac{\partial}{\partial y_n} \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

respectivamente. El operador cogradiente (conjugado) actúa como una derivada parcial respecto a z (\bar{z}), tratando \bar{z} (z) como una constante.

Considerando $\eta = (z, z^*)$, el operador gradiente conjugado se define como

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right). \quad (5.15)$$

Este operador define una relación entre el gradiente real y el gradiente conjugado a través de

$$\frac{\partial}{\partial \chi} = J^T \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (5.16)$$

De manera similar, la hessiana real $\partial^2/\partial\chi\partial\chi^T$ no es única, sino que puede ser varias hessianas complejas, por ejemplo

$$\frac{\partial^2}{\partial\chi\partial\chi^T} = \frac{\partial}{\partial\chi} \left(\frac{\partial}{\partial\chi} \right)^T = J^T \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{\partial}{\partial\eta^T} J \right) = J^T \frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^T} J, \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\chi\partial\chi^T} = \frac{\partial}{\partial\chi} \left(\frac{\partial}{\partial\chi} \right)^T = J^H \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}} \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}^T} J \right) = J^H \frac{\partial^2}{\partial\bar{\eta}\partial\bar{\eta}^T} J, \quad (5.18)$$

en donde J^H denota el conjugado hermítico de J .

Bajo el cálculo de Wirtinger podemos determinar el gradiente de una función no holomórfica, en particular, de una función real con variables complejas. Para que una función sea holomorfica debe satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann. Entonces, consideremos $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces la función g es holomorfica sí y solo sí $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$, y $\partial v/\partial x = -\partial u/\partial y$. La derivada compleja adopta la forma

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.19)$$

Además, el cogradiente adopta la forma

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (5.20)$$

el que es igual a la derivada total compleja. El cogradiente conjugado adopta la forma

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (5.21)$$

Entonces, para satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann exigimos que $\partial f / \partial \bar{z} = 0$.

5.2.2. SPSA Complejo (CSPSA)

La idea principal de SPSA es dada una función $G(\theta)$ encontrar un estimado de θ que minimice el valor de G . Aquí consideremos una función real de variable compleja $f(z, \bar{z}) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, en la que buscamos una secuencia de estimaciones \hat{z}_k del vector \tilde{z} que minimiza $f(z, \bar{z})$, esto es $\partial f(\tilde{z}, \tilde{\bar{z}}) / \partial \bar{z} = 0$. Entonces, el estimado de \hat{z}_k de \tilde{z} a la k -ésima iteración está dado por

$$\hat{z}_{k+1} = \hat{z}_k - \alpha_k \hat{g}_k(\hat{z}_k, \hat{\bar{z}}_k), \quad (5.22)$$

en donde α_k es una constante positiva, y $\hat{g}_k(\hat{z}_k, \hat{\bar{z}}_k)$ es un estimado del gradiente g de f . Así, la j -ésima componente $\hat{g}_{k,i}$ de la estimación del gradiente está dada por

$$\hat{g}_{k,i} = \frac{f(\hat{z}_{k+}, \hat{\bar{z}}_{k+}) + \epsilon_{k,+} - f(\hat{z}_{k-}, \hat{\bar{z}}_{k-}) + \epsilon_{k,-}}{2c_k \Delta_{k,i}^*}, \quad (5.23)$$

en donde $\hat{z}_{k+} = \hat{z}_k \pm c_k \Delta_k$, y c_k una constante positiva. El vector $\Delta_k \in \mathbb{C}^n$ es un vector generado aleatoriamente. Además asegurando una estimación asintóti-

ca sin sesgo para g , y una convergencia asintótica de \hat{z}_k a \tilde{z} , se obtiene que las componentes de Δ_k deben ser generadas de manera independiente al seleccionar con igual probabilidad valores en el conjunto $\{\exp(2i\nu_p)\}$ con $p = 0, \dots, 3$. También se tiene libertad para escoger los valores de ν_p de modo que en este caso son $\nu_p = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$. Los coeficientes α_k y c_k son elegidos de la misma manera que para SGQT.

5.2.3. Tomografía cuántica con CSPSA

En este caso, al igual que en el caso de SGQT, podemos aplicar el algoritmo de optimización CSPSA al problema de tomografía cuántica. Entonces, asumamos entonces que tenemos acceso a una medida de distancia, en este caso nos centramos en la infidelidad, dada por la ec. (5.2) entre dos estados ρ y σ . Asumamos entonces que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ y $\sigma = |\varsigma\rangle\langle\varsigma|$ son estados puros, con

$$|\varsigma\rangle = \frac{\sum_j z_j |j\rangle}{\sqrt{\sum_j |z_j|^2}}. \quad (5.24)$$

Para implementar CSPSA la actualización de los coeficientes

$$z_{k+1} = \frac{z_k - a_k g(z_k)}{\|z_k - a_k g(z_k)\|}, \quad (5.25)$$

en donde el gradiente está dado por la ec. (5.23). Este protocolo requiere evaluar la infidelidad para dos estados objetivos diferentes. Cada uno de los valores de la infidelidad son obtenidos al proyectar el sistema en las bases de los estados objetivos. Los coeficientes que describen a los estados objetivos son

$$z_{k\pm} = z_k \pm c_k \Delta_k, \quad (5.26)$$

5.2 Tomografía cuántica a través de CSPSA

con los estados objetivos dados por $|\varsigma(z_{k\pm})\rangle$. La medida de distancia (5.2) se expresa a través del número de veces en que los estados $|\varsigma(z_{k\pm})\rangle$ es detectado, dado por $n_{k\pm}$ y el número total de detecciones N

$$I(\varsigma(z_{k\pm})) = 1 - \frac{n_{k\pm}}{N}. \quad (5.27)$$

De este modo, el número total de copias disponibles N_{total} del sistema cuántico desconocido se distribuye a través del número total de experimentos para la estimación de dos valores la infidelidad (5.27) en cada iteración (para calcular la aproximación del gradiente), y el número total de iteraciones k , es decir, $N_{\text{total}} = 2Nk$.

Para poder comparar la eficiencia de la tomografía autoguiada a través de CSPSA, la comparamos respecto a SGQT, en escenarios claves, es decir, el comportamiento respecto al número de iteraciones k , y al número de dimensiones del estado a encontrar. La fig.5.1 se muestra la infidelidad promedio, la que es obtenida a través de una muestra de 10^4 pares de estados desconocidos y el estado ς inicial, esta muestra es obtenida de acuerdo a una distribución de Haar. La infidelidad promedio está expresada en términos de k y N . De la figura podemos ver que CSPA logra alcanzar una infidelidad promedio al menos un orden de magnitud menos que SGQT para $k = 100$, considerando una cantidad fija de recursos N_{total} . Pues para $k = 100$ la infidelidad promedio para SGQT $\bar{I} \approx 5 \times 10^{-4}$ con $N = 10^4$, y $N_{\text{total}} = 2 \times 10^6$; en cambio para CSPA se alcanza la misma infidelidad con $k = 40$, $N = 10^2$, y $N_{\text{total}} = 8 \times 10^3$. También es importante destacar que considerando la mediana CSPA tiene una eficiencia mejor que SGQT, además tanto la varianza como el rango intercuartil para CSPA exhiben valores cercanos, mientras que para SGQT existe una gran diferencia, por lo que este método produce una distribución asimétrica para la infidelidad. En la fig 5.2 se muestra el comportamiento de CSPA y SGQT en función de la dimensión del estado a

5.2 Tomografía cuántica a través de CSPA

caracterizar, aquí vemos como el algoritmo propuesto supera a SGQT bajo una cantidad de recursos fijos. Notemos que a dimensiones mayores para $N = 10, 10^2$ el comportamiento es similar, en cambio para $N = 10^3$ CSPA tiene una infidelidad promedio más baja que SGQT. En la fig. 5.3 vemos el comportamiento de CSPA en función de la dimensión d e iteraciones k , aquí vemos que a medida que aumenta d , los recursos necesarios para obtener \bar{I} se incrementan con k . En la fig. 5.4 vemos los histogramas para la infidelidad I sobre 10^6 estados generados al azar, en rojo CSPA, y en azul SPSA. Aquí vemos que en el caso de un número de detecciones menores, CSPA presenta una menor dispersión y una mayor frecuencia para infidelidades más bajas, lo contrario a SGQT, pero a medida que aumenta el número de detecciones ocurre lo contrario, lo que ocurre en el caso de 10^4 detecciones. Si bien existe una leve diferencia, debemos notar que el estado caracterizado es mucho más cercano al desconocido para CSPA que con SGQT.



5.2 Tomografía cuántica a través de CSPSA

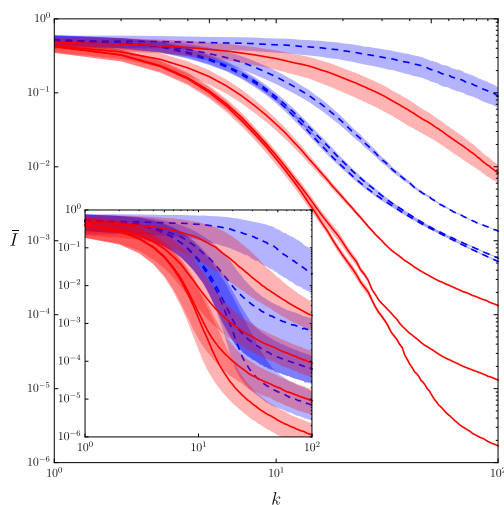


Figura 5.1: Infidelidad promedio \bar{I} , con promedio sobre el espacio de Hilbert con 10^4 pares de estados desconocidos y estados iniciales en función del número de iteraciones k para tomografía cuántica de un solo qubit a través de \mathbb{C} SPSA (línea continua roja) y SPSA (línea segmentada azul). áreas sombreadas indican la varianza alrededor del promedio. En el recuadro se exhibe la mediana y el rango intercuartil. Desde la parte superior hasta la inferior líneas continuas rojas (líneas segmentadas azules) corresponden a $N = 10, 10^2, 10^3$ y 10^4 . Para SPSA $\alpha = 1$ y $\gamma = 0,166$ y para \mathbb{C} SPSA $\alpha = 0,602$ and $\gamma = 0,101$. Para ambos métodos $A = 0, a = 3$ y $c = 0,1$

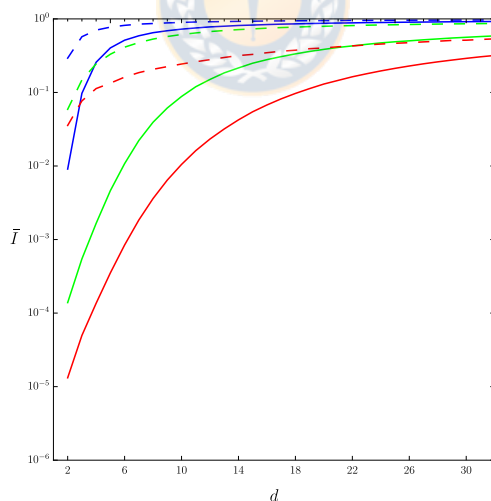


Figura 5.2: Infidelidad promedio \bar{I} , calculada sobre 10^4 realizaciones, como función de la dimensión d del espacio de Hilbert después de $k = 100$ iteraciones. Líneas continuas azul, verde, y roja representan a \mathbb{C} SPSA (SPSA) para $N = 10, 10^2$ y 10^3 , respectivamente. Los demás valores como los considerados en la fig. 5.1.

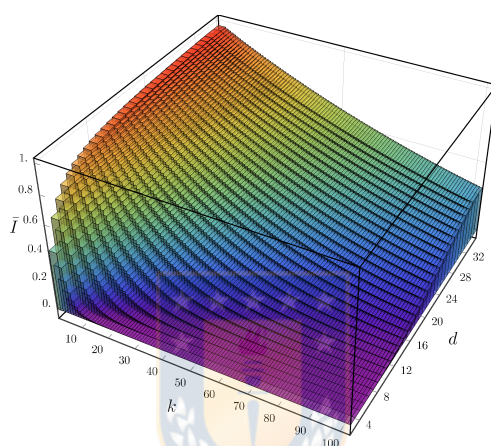


Figura 5.3: Infidelidad promedio \bar{I} , calculada sobre 10^4 realizaciones, en función de la dimensión d del espacio de Hilbert y el número de iteraciones k para un ensemble de tamaño $N = 10^3$. Los demás valores corresponden a los empleados en la fig. 5.1.

5.2 Tomografía cuántica a través de CSPA

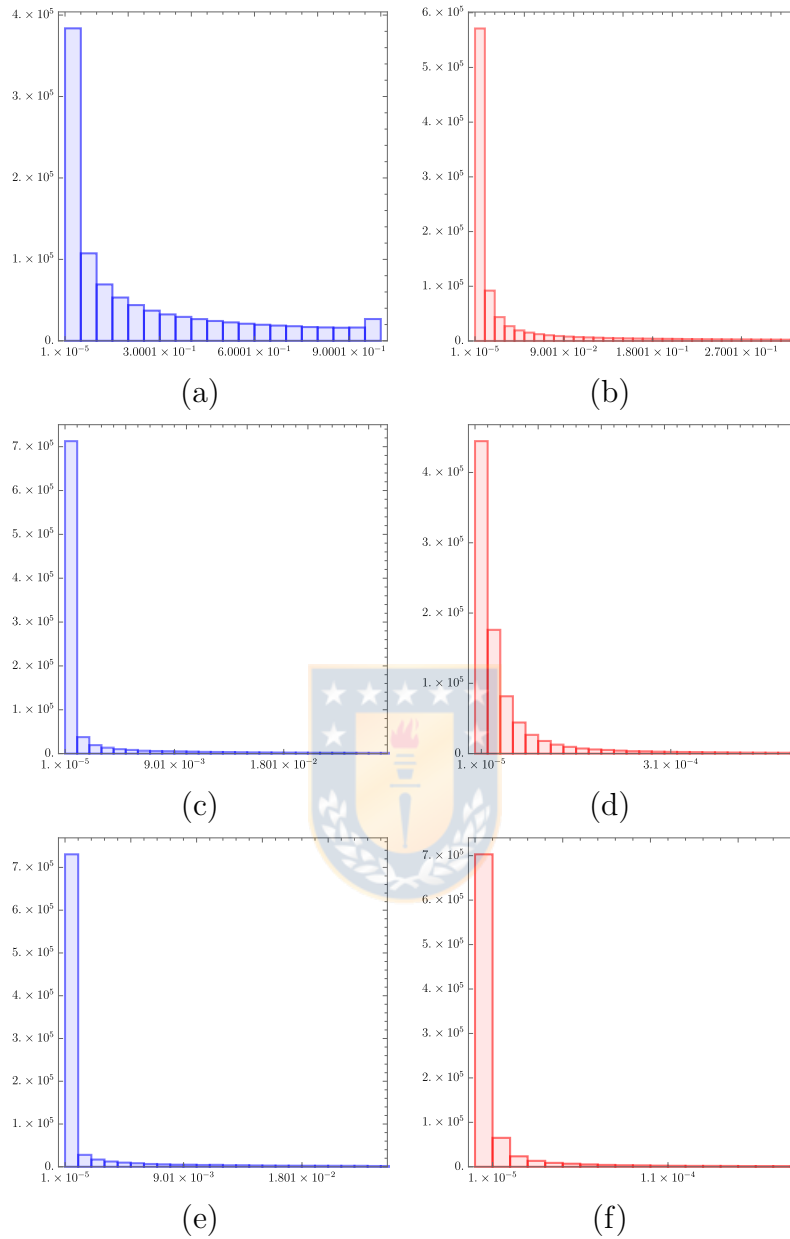


Figura 5.4: Distribución de las infidelidades promedio \bar{I} para 10^6 realizaciones de SGQT (en azul) y CSPA (en rojo) para diversos número de detecciones. (a) y (b) distribución para 10 detecciones. (c) y (d) distribución para 1000 detecciones. (e) y (f) distribución

Capítulo 6

Conclusiones generales

La primera parte de esta tesis se centró en los efectos gravitacionales sobre sistemas cuánticos, en tests de no localidad al emplear los arreglos interferométricos Franson y abrazado. Específicamente en el caso de la influencia del campo gravitacional débil en la generación estados entrelazados tipo energía-tiempo de dos fotones. Como vimos, en la ausencia de una diferencia de potencial gravitacional entre los brazos del arreglo, los fotones generados pueden ser detectados en coincidencia, lo que indica la propagación a través de caminos ópticos de la misma longitud, o separados por un intervalo de tiempo (es decir, propagación a lo largo de caminos de longitud distinta). La detección simultánea de los fotones está descrita por un estado maximalmente entrelazado, descritos por la superposición de estados que describen la propagación de dos fotones a lo largo de un camino óptico de igual longitud. La dilatación temporal gravitacional genera dos efectos: un corrimiento de fase y una disminución en la visibilidad interferométrica. El corrimiento de fase está determinado por la dilatación temporal y la frecuencia promedio de los fotones. Además las probabilidades de detección en coincidencia se encuentran expresadas en términos de una función coseno de la frecuencia de los fotones generados por la fuente. Esta dependencia no está presente en el caso en que se tenga una fuente monocromática. En cambio para una fuente que genere fotones

con una dispersión en frecuencia la amplitud de la oscilación armónica decrece exponencialmente, es decir, la visibilidad interferométrica del arreglo es reducida, y esta reducción depende explícitamente de la dilatación temporal gravitacional. Esta disminución afecta de tal forma la desigualdad CHSH que ésta no puede ser violada si el área propia de los interferómetros Mach-Zehnder es mayor o igual a $A_* = \sqrt{\ln 4} \left(c^3 / g \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)$, y así los resultados del experimento pueden ser explicados a través de una teoría de variables ocultas. Además, los interferómetros Franson y abrazado generan estados entrelazados cuando $A < A_*$.

Un resultado interesante es que el campo gravitacional débil puede ser empleado en la generación de un estado entrelazado. Este resultado es complementario a los anteriores estudios en esta misma área, ya que se centraban en cómo el campo gravitacional afectaba el entrelazamiento. Para esto se consideró los arreglos Franson y abrazado en una superficie equipotencial, y se asumió que los interferómetros Mach-Zehnder, que componen a estos arreglos, están balanceados y son geoméricamente equivalentes (es decir, sus longitudes propias son iguales). De este modo no es posible distinguir entre pares de caminos debido a que todos ellos están asociados con detecciones en coincidencia, y así no es posible generar un estado entrelazado. Ahora, si el arreglo interferométrico es rotado, de tal forma que ahora los brazos de los Mach-Zehnder experimentan potenciales gravitacionales diferentes, y además exigimos que estos se mantengan idénticos y geoméricamente equivalentes, entonces los fotones seguirán caminos con potenciales gravitacionales distintos y por ende experimentarán un retraso temporal gravitacional. Este retraso conlleva a que exista una diferencia de tiempo propio (de acuerdo a los relojes situados en los detectores). De este modo, los fotones que siguen los caminos a igual potencial gravitacional se detectan en coincidencia. Por lo que, es posible distinguir entre las trayectorias, realizar un proceso de post-selección y obtener un estado maximalmente entrelazado. Así, bajo éstas configuraciones, el campo

gravitacional puede generar un estado maximalmente entrelazado. Es interesante notar que el loophole de post-selección en el arreglo abrazado ha sido cerrado, pero éste también puede ser cerrado en un arreglo Franson al considerar el uso de corredores de fase (phase shifters) rápidos ref. [42].

Es posible estudiar el rol del entrelazamiento tipo energía-tiempo y la coincidencia de eventos para el caso en que los arreglos interferométricos Franson y abrazado tengan detectores ubicados en diferentes potenciales gravitacionales, y por ende distintos relojes midiendo los tiempos de arribo. De este modo es posible estudiar este tipo de entrelazamiento en el caso en que dos participantes empleen dos relojes y cómo la desigualdad CHSH cambia. Otras extensiones posibles consideran la inclusión de un campo gravitacional generado por una masa rotante (siguiendo los resultados de Kolhurs *et al.* ref. [52]) y también considerar satélites con velocidades relativas, en los cuales se requiere considerar los efectos del corrimiento Doppler, y formas de poder eliminarlo (para una propuesta reciente de un test óptico del principio de equivalencia de Einstein en que se consideran velocidades relativistas ver ref. [17]).

En el caso de partículas masivas con grados de libertad internos, en ausencia de un campo gravitacional, y considerando nuevamente a los arreglos Franson y abrazado con interferómetros Mach-Zehnder balanceados e idénticos, no es posible generar un estado entrelazado, y por ende el estado generado satisface la desigualdad CHSH. Considerando que los interferómetros tienen una diferencia de potencial gravitacional entre sus brazos es posible entonces generar un estado entrelazado, y así violar maximalmente la desigualdad CHSH. El valor alcanzado por el funcional CHSH se aproxima al valor que satisface la desigualdad, es decir, el resultado puede ser descrito mediante una teoría clásica. Este decrecimiento del funcional CHSH depende de la diferencia de tiempo coordinado de arribo ΔT entre cada partícula en el arreglo, y de la diferencia de energía ΔE entre cada estado del

reloj. El tiempo propio necesario para que la desigualdad se satisfaga está dado por $\Delta\tau = 2\hbar \arccos(2^{-1/4})/\Delta E$, o para un área $A_* = 2\hbar pc^2 \arccos(2^{-1/4})/(mg\Delta E)$. Esto significa que para una partícula con una masa mayor, o con una gran diferencia entre los niveles de energía ΔE el efecto de la dilatación temporal gravitacional lleva a que el estado generado por el arreglo no viola la desigualdad CHSH. Notemos que para los arreglos Mach-Zehnder con un área $A < A_*$ el arreglo Franson y abrazado generan estados entrelazados debido a la dilatación temporal gravitacional.

Además, los estados generados por los arreglos Franson y abrazado son estados puros, que comienzan a transformarse en estados mezclas a medida que la diferencia de tiempo propio $\Delta\tau$ se incrementa, o el área de cada interferómetro Mach-Zehnder se incrementa. Además para cuantificar la evolución del estado generado por los arreglos en estudio se calculó el criterio PPT y la negatividad, ambos test muestran cómo el entrelazamiento se pierde a medida que la diferencia de tiempo propio se incrementa.

En el caso de un haz de partículas, una integración numérica muestra un comportamiento similar al caso descrito por fotones, esto es, para la probabilidad de detección en coincidencia existe una dependencia del momentum de la partícula y el tiempo propio transcurrido en la detección de éstas. Además, la probabilidad de detección posee una oscilación armónica amortiguada de tal modo que la desigualdad CHSH comienza a acercarse al valor clásico a medida que aumenta el área de los arreglos, o la masa de las partículas se incrementa. Es interesante notar que la disminución exponencial también está presente en un interferómetro Mach-Zehnder incluso en la presencia de un potencial gravitacional newtoniano. Esto implica que la disminución de la visibilidad interferométrica no puede ser considerada una evidencia de la dilatación temporal gravitacional, sino una evidencia de la extensión cuántica de la relación masa-energía de Einstein. En este sentido,

es posible extender nuestro trabajo al considerar una modificación a la extensión cuántica de la relación masa-energía de Einstein, o incluso considerar la inclusión de partículas con grados de libertad internos a través del espín.

En ambas propuestas podemos considerar extensiones más abstractas. En un principio se puede estudiar el rol del entrelazamiento de camino en el caso en que exista una superposición de los relojes que miden los eventos, o incluso que la masa que genera el campo gravitacional se encuentre en un estado de superposición. Aquí nos preguntamos entonces, como cambia la desigualdad CHSH en estos escenarios y como podría implementarse con tecnología actual.

La segunda parte de este trabajo se centró en proponer un sistema tomográfico autoguiado en función de un algoritmo de optimización sobre funciones reales de variable compleja. Se demostró que el uso de \mathbb{C} SPSA es más eficiente que SGQT en términos del número de recursos, es decir, el número de iteraciones k , y el número de experimentos realizados N . Además, emplear un método tomográfico a través de \mathbb{C} SPSA genera una estimación del estado a caracterizar con mayor precisión que emplear solo SPSA. Además, \mathbb{C} SPSA puede ser aplicado a otros problemas físicos, como por ejemplo la medida geométrica del entrelazamiento, violación de desigualdades de Bell. Este último punto puede ser implementado a través de una optimización de los observables a ser medidos, aun sin conocer el estado cuántico. Además se pueden implementar mejoras al algoritmo, por ejemplo aplicar inferencia estadística a través de máxima verosimilitud. Por otro lado, el empleo de algoritmos de optimización para tomografía cuántica abre las puertas al empleo de otros tipos de algoritmos, como por ejemplo optimización de enjambre de partículas, algoritmos genéticos, etc.

Apéndice A

Derivación desigualdad CHSH para un campo eléctrico en un campo débil

Consideremos un campo eléctrico dependiente del tiempo, el cual ingresa en un arreglo interferométrico Franson o abrazado. El campo eléctrico que ingresa al interferómetro a la izquierda ($i=1$), luego de pasar por el primer divisor de haces, adopta la forma

$$E_{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}} [E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1}) + iE_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2})], \quad (\text{A.1})$$

en donde $\Delta\tau_{\gamma_1}$ ($\Delta\tau_{\gamma_2}$) es el retraso temporal en el camino γ_1 (γ_2). La expresión para el campo eléctrico después de pasar por el último divisor de haces

$$E_{\text{out}} = \frac{1}{2} [(E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1}) + iE_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1})) + i(iE_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2}) + E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2}))]. \quad (\text{A.2})$$

Finalmente, el campo eléctrico en cada detector está dado por

$$E_{\text{out}}^{A_1} = \frac{1}{2} [E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1}) - E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2})e^{i\phi_A}], \quad (\text{A.3})$$

$$E_{\text{out}}^{A_2} = \frac{i}{2} [E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1}) + E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2})e^{i\phi_A}]. \quad (\text{A.4})$$

La intensidad instantánea en cada detector viene dada por $I_{A_i} \propto |E_{\text{out}}^{A_i}|^2$. La intensidad normalizada se relaciona con la probabilidad de detección $p = I/I_0$. Así, la intensidad del campo en los puertos de salida $a_{1,1}$ está dada por

$$I_{1,1} = \frac{1}{4} \left[|E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1})|^2 + |E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2})|^2 - E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_1})E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2})e^{i\phi_A} - E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_2})E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1})e^{-i\phi_A} \right]. \quad (\text{A.5})$$

Para el puerto $a_{1,2}$ tenemos

$$I_{1,2} = \frac{1}{4} \left[|E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1})|^2 + |E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2})|^2 + E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_1})E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2})e^{i\phi_A} + E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_2})E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1})e^{-i\phi_A} \right]. \quad (\text{A.6})$$

De manera análoga, para el campo eléctrico en el interferómetro Mach-Zhender de la derecha ($i = 2$), las intensidades del campo están dadas por

$$I_{2,1} = \frac{1}{4} \left[|E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})|^2 + |E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2})|^2 - E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2})e^{i\phi_B} - E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_2})E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})e^{-i\phi_B} \right], \quad (\text{A.7})$$

Y

$$I_{2,2} = \frac{1}{4} \left[|E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})|^2 + |E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2})|^2 + E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2})e^{i\phi_B} + E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_2})E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})e^{-i\phi_B} \right]. \quad (\text{A.8})$$

La probabilidad de detección conjunto en los puertos $a_{1,1}$ y $a_{2,1}$ está dada por

$$p_{1,1} = \langle I_{1,1} I_{2,1} \rangle / I_0^2$$

$$\begin{aligned}
p_{1,1} \propto & \frac{1}{16} \langle [|E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1})|^2 + |E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2})|^2 \\
& - E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_1}) E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2}) e^{i\phi_A} \\
& - E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_2}) E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1}) e^{-i\phi_A}] \\
& \times [|E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})|^2 + |E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2})|^2 \\
& - E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1}) E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2}) e^{i\phi_B} \\
& - E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_2}) E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_1}) e^{-i\phi_B}] \rangle.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

De manera análoga, para los puertos $a_{1,1}$ y $a_{2,2}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
p_{1,2} \propto & \frac{1}{16} \langle [|E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1})|^2 + |E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2})|^2 \\
& - E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_1}) E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2}) e^{i\phi_A} \\
& - E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_2}) E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1}) e^{-i\phi_A}] \\
& \times [|E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})|^2 + |E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2})|^2 \\
& + E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1}) E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2}) e^{i\phi_B} \\
& + E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_2}) E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_1}) e^{-i\phi_B}] \rangle.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

De manera similar para $p_{2,1}$. Para los detectores $a_{1,2}$ y $a_{2,2}$, la probabilidad de

detección está dada por

$$\begin{aligned}
p_{2,2} \propto & \frac{1}{16} \langle [|E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1})|^2 + |E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2})|^2 \\
& + E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_1})E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2})e^{i\phi_A} \\
& + E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_2})E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_1})e^{-i\phi_A}] \\
& \times [|E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})|^2 + |E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2})|^2 \\
& + E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2})e^{i\phi_B} \\
& + E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_2})E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})e^{-i\phi_B}] \rangle.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

La desigualdad CHSH está dada por $|\Sigma| \leq 2$, con $\Sigma = E(\phi_1, \phi_2) + E(\phi'_1, \phi_2) + E(\phi_1, \phi'_2) - E(\phi'_1, \phi'_2)$, en donde los valores esperados $E(\phi_1, \phi_2)$ tienen la forma $E(\phi_1, \phi_2) = p_{1,1} + p_{2,2} - p_{1,2} - p_{2,1}$. Así, los términos no nulos de los valores esperados son

$$\begin{aligned}
E(\phi_1, \phi_2) = & \frac{1}{4} \left[\frac{\langle E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_1})E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2})E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2})e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \rangle}{\langle |E_1(t)|^2 |E_2(t)|^2 \rangle} + c.c. \right. \\
& \left. + \frac{\langle E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})E_1(t + \Delta\tau_{\gamma'_2})E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma_1})E_2(t + \Delta\tau_{\gamma_2})e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \rangle}{\langle |E_1(t)|^2 |E_2(t)|^2 \rangle} + c.c. \right].
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Sin embargo, el promedio temporal entre los campos $\langle E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_1})E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2})E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1})E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2}) \rangle$ puede ser considerado como un producto de promedios temporales [45; 46] siempre que los tiempos de coherencia de cada campo sean menores que el tiempo de coherencia del producto de los campos. De este

modo

$$\begin{aligned}
& \langle E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_1}) E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2}) E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1}) E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2}) \rangle \\
& = \langle E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_1}) E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2}) \rangle \langle E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1}) E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2}) \rangle.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Y

$$\begin{aligned}
E(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{4} \left[\frac{\langle E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_1}) E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2}) \rangle}{\langle |E_1(t)|^2 \rangle} \right. \\
\frac{\langle E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1}) E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2}) e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \rangle}{\langle |E_2(t)|^2 \rangle} + c.c. \\
+ \frac{\langle E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1}) E_1(t + \Delta\tau_{\gamma'_2}) \rangle}{\langle |E_1(t)|^2 \rangle} \\
\left. \frac{\langle E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1}) E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2}) e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \rangle}{\langle |E_2(t)|^2 \rangle} + c.c. \right].
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Reemplazando los valores usuales de las fases locales, se obtiene

$$\Sigma_{\text{class}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\langle E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_1}) E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2}) \rangle}{\langle |E_1(t)|^2 \rangle} \frac{\langle E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1}) E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2}) \rangle}{\langle |E_2(t)|^2 \rangle} + c.c. \right] \tag{A.15}$$

Considerando el campo eléctrico como en la ec. (??), el promedio temporal (A.13) adopta la forma

$$\begin{aligned}
& \langle E_1^*(t + \Delta\tau_{\gamma_1}) E_1(t + \Delta\tau_{\gamma_2}) \rangle \langle E_2^*(t + \Delta\tau_{\gamma'_1}) E_2(t + \Delta\tau_{\gamma'_2}) \rangle = \\
& \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu |\tilde{E}_1(\nu)|^2 e^{2\pi i \nu \Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\nu} |\tilde{E}_2(\tilde{\nu})|^2 e^{2\pi i \tilde{\nu} \Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2}} e^{-i\phi_{12}}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

El funcional CHSH Σ de la ec. (A.15) adopta la siguiente expresión

$$\Sigma_{\text{class}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu d\tilde{\nu} |\tilde{E}(\nu)|^2 |\tilde{E}(\tilde{\nu})|^2 \cos(2\pi\nu\Delta\tau_{\gamma_2, \gamma_1} + 2\pi\tilde{\nu}\Delta\tau_{\gamma'_2, \gamma'_1})}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu d\tilde{\nu} |\tilde{E}(\nu)|^2 |\tilde{E}(\tilde{\nu})|^2}. \quad (\text{A.17})$$

Considerando una distribución gaussiana para la amplitud del campo eléctrico como en la ec. (??), el funcional CHSH Σ de la ec. (A.17) adopta la forma

$$\Sigma_{\text{class}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left| e^{-\frac{1}{4}(\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2}^2 \sigma_1^2 + \Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2}^2 \sigma_2^2)} \cos(2\pi\nu_1\Delta\tau_{\gamma_1, \gamma_2} + 2\pi\nu_2\Delta\tau_{\gamma'_1, \gamma'_2}) \right|. \quad (\text{A.18})$$

Esta ecuación está claramente acotado superiormente por 2, entonces para un campo clásico es imposible violar la desigualdad CHSH. Además, si los retrasos temporales corresponden a la diferencia de tiempo propio transcurrido en cada uno de los caminos del arreglo, el funcional CHSH muestra una disminución en la visibilidad interferométrica y un corrimiento de fase que depende de la dilatación temporal gravitacional, pero no una violación de la desigualdad CHSH. Así, en caso de un test de Bell realizado con un par de fotones la violación de la desigualdad CHSH asegura un efecto netamente cuántico en el régimen de un campo débil.

Apéndice B

Métodos alternativos para el cálculo de la probabilidad de detección en un interferómetro Mach-Zehnder

B.0.1. Demostración I

El estado (2.45) luego de ingresar al interferómetro, pasa por el primer *BS* quedando en una superposición de estados. Al arribar al detector tiene la siguiente forma

$$|1\rangle_{\omega\pm} \propto \int d\omega f(\omega) \left(e^{i\frac{\omega}{c}(x_r - c\tau_r)} \pm e^{i\frac{\omega}{c}(x_r - c(\tau_r + \Delta\tau))} \right) a_0^\dagger(\omega) |0\rangle. \quad (\text{B.1})$$

La probabilidad de detección viene dada entonces por la expresión $p_{\pm} = \langle 1|1 \rangle_{\omega_{\pm}}$

$$\begin{aligned}
p_{\pm} &= \langle 0| a_0(\omega') \int d\omega d\omega' f(\omega) f^*(\omega') (e^{i\frac{\omega}{c}(x_r - c\tau_r)} \pm e^{i\frac{\omega}{c}(x_r - c(\tau_r + \Delta\tau))}) \\
&\quad \left(e^{-i\frac{\omega'}{c}(x_r - c\tau_r)} \pm e^{-i\frac{\omega'}{c}(x_r - c(\tau_r + \Delta\tau))} \right) a_0^\dagger(\omega) |0\rangle \\
&= \int d\omega d\omega' f(\omega) f^*(\omega') (e^{i\frac{\omega}{c}(x_r - c\tau_r)} \pm e^{i\frac{\omega}{c}(x_r - c(\tau_r + \Delta\tau))}) \\
&\quad \left(e^{-i\frac{\omega'}{c}(x_r - c\tau_r)} \pm e^{-i\frac{\omega'}{c}(x_r - c(\tau_r + \Delta\tau))} \right) \delta(\omega - \omega') \\
&= \int d\omega |f(\omega) (e^{i\frac{\omega}{c}(x_r - c\tau_r)} \pm e^{i\frac{\omega}{c}(x_r - c(\tau_r + \Delta\tau))})|^2 \\
&= \int d\omega |f(\omega)|^2 (2 \pm e^{i\omega\Delta\tau} + e^{-i\omega\Delta\tau}) \tag{B.2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 \pm \int d\omega |f(\omega)|^2 \cos(\omega\Delta\tau) \right). \tag{B.3}$$

B.0.2. Demostración II

Para calcular la probabilidad de detección calculamos el valor esperado del operador número (B.11) con respecto al estado inicial (2.45). Entonces considere v_ω como el operador de aniquilación de los modos de salida sin ocupar, tal que la evolución del operador para los modos viene dada por

$$\begin{pmatrix} c(\omega) \\ b(\omega) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} v(\omega) \\ a_0(\omega) \end{pmatrix}, \tag{B.4}$$

donde en este caso $b(\omega)$ es el modo de salida para el puerto horizontal y $c(\omega)$ corresponde al modo de salida vertical. La matriz U es el conjunto de transformaciones unitarias del interferómetro, como en este caso estamos trabajando con un Mach-Zehnder, la matriz de transformación para el BS está dada por

$$U_{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{B.5}$$

y para el cambio de fase

$$U_{PS} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

ϕ_i con $i = 1, 2$ denota el cambio de fase para cada uno de los caminos del interferómetro. Utilizando (B.5) y (B.6) la matriz $U = U_{BS}U_{PS}U_{BS}$, entonces la transformación para el operador horizontal b_ω es

$$\begin{aligned} b_\omega &= \frac{1}{2} [(-e^{-i\phi_1} + e^{-i\phi_2}) a(\omega)_0 - (e^{-i\phi_1} + e^{-i\phi_2}) v(\omega)] \\ &= \frac{-e^{-i\phi_1}}{2} [(1 - e^{i(\phi_1 - \phi_2)}) a(\omega)_0 - (1 + e^{i(\phi_1 - \phi_2)}) v(\omega)] \\ &= \frac{1}{2} [(1 - e^{i\Delta\phi}) a(\omega)_0 - (1 + e^{i\Delta\phi}) v(\omega)], \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

con $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$. El valor de expectación $\langle a_0^\dagger(\omega)a_0(\omega) \rangle$ al reemplazar (B.11) y (B.7) es

$$\begin{aligned} \langle a_0^\dagger(\omega)a_0(\omega) \rangle &= \frac{1}{4} \int d\omega |f(\omega)|^2 (1 - e^{-i\Delta\phi}) (1 - e^{i\Delta\phi}) \\ &= \frac{1}{4} \int d\omega |f(\omega)|^2 |1 - e^{i\Delta\phi}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \int d\omega |f(\omega)|^2 (2 + 2 \cos \Delta\phi) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \int d\omega |f(\omega)|^2 \cos \Delta\phi \right). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Aquí hemos utilizado la condición de normalización $\int d\omega |f(\omega)|^2 = 1$. Como el valor esperado puede escribirse como $\langle O \rangle = \sum_j \lambda_j p_j$, en donde λ_j corresponde a los valores propios del observable y p_j la probabilidad correspondiente; el operador (B.8) tiene un valor propio $\lambda = 1$, por lo tanto la probabilidad de detección en el modo horizontal o vertical es

$$p_\pm = \frac{1}{2} \left(1 \pm \int d\omega |f(\omega)|^2 \cos \Delta\phi \right). \quad (\text{B.9})$$

La diferencia de fase $\Delta\phi$ corresponde, en este caso, a la diferencia de fases adquiridas en los segmentos horizontales del interferómetro, debido a la simetría de éste. La diferencia de fase en este caso será $\Delta\phi = \frac{1}{c}(l - c\tau_{r+\Delta h}) - \frac{1}{c}(l - c\tau_r) = \tau_r - \tau_{r+\Delta h} = \Delta\tau$ y así, la probabilidad de detección (B.9) adopta la forma

$$p_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \int d\omega |f(\omega)|^2 \cos \omega \Delta\tau \right). \quad (\text{B.10})$$

Reemplazando la expresión (2.42) se obtiene la expresión para la probabilidad de detección.

Para el proceso de medición, consideremos que la fuente del interferómetro es ideal y que solo emite un fotón. Definimos la detección de los modos de salida tal que el ancho de banda en frecuencia es mucho mayor que la fuente e integramos en el tiempo, tal que el tiempo de detección es mucho mayor que el ancho del pulso. Así el operador número $a_0^\dagger a_0$ como

$$\begin{aligned} a_0^\dagger a_0 &= \int \frac{d\tau_{r'}}{2\pi} \int d\omega e^{i\frac{\omega}{c}(x_{r'} - c\tau_{r'})} b_\omega^\dagger \int d\omega' e^{-i\frac{\omega'}{c}(x_{r'} - c\tau_{r'})} b_{\omega'} \\ &= \int d\omega d\omega' \delta(\omega - \omega') b_\omega^\dagger b_\omega \\ &= \int d\omega b_\omega^\dagger b_\omega, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

donde b_ω es un operador de destrucción para los modos de salida.

Referencias

- [1] A. Vanselow, P. Kaufmann, H. M. Chrzanowski, and S. Ramelow, “Ultra-broadband spdc for spectrally far separated photon pairs,” *Opt. Lett.*, vol. 44, pp. 4638–4641, Oct 2019.
- [2] M. Zych, F. Costa, I. Pikovski, and v. C. Brukner, “Quantum interferometric visibility as a witness of general relativistic proper time,” *Nature Communications*, vol. 2, no. 505, 2011.
- [3] J. Yin, Y. Cao, Y.-H. Li, S.-K. Liao, L. Zhang, J.-G. Ren, W.-Q. Cai, W.-Y. Liu, B. Li, H. Dai, G.-B. Li, Q.-M. Lu, Y.-H. Gong, Y. Xu, S.-L. Li, F.-Z. Li, Y.-Y. Yin, Z.-Q. Jiang, M. Li, J.-J. Jia, G. Ren, D. He, Y.-L. Zhou, X.-X. Zhang, N. Wang, X. Chang, Z.-C. Zhu, N.-L. Liu, Y.-A. Chen, C.-Y. Lu, R. Shu, C.-Z. Peng, J.-Y. Wang, and J.-W. Pan, “Satellite-based entanglement distribution over 1200 kilometers,” *Science*, vol. 356, no. 6343, pp. 1140–1144, 2017.
- [4] J.-G. Ren, P. Xu, H.-L. Yong, L. Zhang, S.-K. Liao, J. Yin, W.-Y. Liu, W.-Q. Cai, M. Yang, L. Li, K.-X. Yang, X. Han, Y.-Q. Yao, J. Li, H.-Y. Wu, S. Wan, L. Liu, D.-Q. Liu, Y.-W. Kuang, Z.-P. He, P. Shang, C. Guo, R.-H. Zheng, K. Tian, Z.-C. Zhu, N.-L. Liu, C.-Y. Lu, R. Shu, Y.-A. Chen, C.-Z. Peng, J.-Y. Wang, and J.-W. Pan, “Ground-to-satellite quantum teleportation,” *Nature*, vol. 549, pp. 1476–4687, sep 2017.

- [5] S.-K. and Liao, W.-Q. Cai, W.-Y. Liu, L. Zhang, Y. Li, J.-G. Ren, J. Yin, Q. Shen, Y. Cao, Z.-P. Li, F.-Z. Li, X.-W. Chen, L.-H. Sun, J.-J. Jia, J.-C. Wu, X.-J. Jiang, J.-F. Wang, Y.-M. Huang, Q. Wang, Y.-L. Zhou, L. Deng, T. Xi, L. Ma, T. Hu, Q. Zhang, Y.-A. Chen, N.-L. Liu, X.-B. Wang, Z.-C. Zhu, C.-Y. Lu, R. Shu, C.-Z. Peng, J.-Y. Wang, and J.-W. Pan, “Satellite-to-ground quantum key distribution,” *Nature*, vol. 549, pp. 1476–4687, sep 2017.
- [6] D. K. Oi, A. Ling, G. Vallone, P. Villoresi, S. Greenland, E. Kerr, M. Macdonald, H. Weinfurter, H. Kuiper, E. Charbon, and R. Ursin, “Cubesat quantum communications mission,” *EPJ Quantum Technology*, vol. 4, pp. 2196–0763, apr 2017.
- [7] S.-K. Liao, W.-Q. Cai, J. Handsteiner, B. Liu, J. Yin, L. Zhang, D. Rauch, M. Fink, J.-G. Ren, W.-Y. Liu, Y. Li, Q. Shen, Y. Cao, F.-Z. Li, J.-F. Wang, Y.-M. Huang, L. Deng, T. Xi, L. Ma, T. Hu, L. Li, N.-L. Liu, F. Koidl, P. Wang, Y.-A. Chen, X.-B. Wang, M. Steindorfer, G. Kirchner, C.-Y. Lu, R. Shu, R. Ursin, T. Scheidl, C.-Z. Peng, J.-Y. Wang, A. Zeilinger, and J.-W. Pan, “Satellite-relayed intercontinental quantum network,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 120, p. 030501, Jan 2018.
- [8] E. Kerstel, A. Gardelein, M. Barthelemy, M. Fink, S. K. Joshi, R. Ursin, and T. C. Team, “Nanobob: a cubesat mission concept for quantum communication experiments in an uplink configuration,” *EPJ Quantum Technology*, vol. 5, pp. 2196–0763, jun 2018.
- [9] P. Xu, Y. Ma, J.-G. Ren, H.-L. Yong, T. C. Ralph, S.-K. Liao, J. Yin, W.-Y. Liu, W.-Q. Cai, X. Han, H.-N. Wu, W.-Y. Wang, F.-Z. Li, M. Yang, F.-L. Lin, L. Li, N.-L. Liu, Y.-A. Chen, C.-Y. Lu, Y. Chen, J. Fan, C.-Z. Peng, and J.-

- W. Pan, “Satellite testing of a gravitationally induced quantum decoherence model,” *Science*, vol. 366, no. 6461, pp. 132–135, 2019.
- [10] “IBM quantum experience.” <https://quantum-computing.ibm.com>.
- [11] A. W. Overhauser and R. Colella, “Experimental test of gravitationally induced quantum interference,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 33, pp. 1237–1239, Nov 1974.
- [12] R. Colella, A. W. Overhauser, and S. A. Werner, “Observation of gravitationally induced quantum interference,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 34, pp. 1472–1474, Jun 1975.
- [13] H. Rauch and S. A. Werner, *Neutron Interferometry 2nd Edn: Lessons in Experimental Quantum Mechanics, Wave-Particle Duality, and Entanglement*. Oxford University Press.
- [14] M. Zych, F. Costa, I. Pikovski, T. C. Ralph, and Č. Brukner, “General relativistic effects in quantum interference of photons,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 29, p. 224010, oct 2012.
- [15] M. Zych and Brukner, “Quantum formulation of the Einstein equivalence principle,” *Nature Physics*, vol. 14, pp. 1027–1031, Oct. 2018.
- [16] I. Pikovski, M. Zych, F. Costa, and Č. Brukner, “Time dilation in quantum systems and decoherence,” *New Journal of Physics*, vol. 19, p. 025011, feb 2017.
- [17] D. R. Terno, F. Vedovato, M. Schiavon, A. R. H. Smith, P. Magnani, G. Vallone, and P. Villoresi, “Proposal for an optical test of the einstein equivalence principle,” *arXiv: General Relativity and Quantum Cosmology*, 2018.

- [18] C. Sabín, “Quantum detection of wormholes,” *Scientific Reports*, vol. 7, pp. 1–6, Apr. 2017.
- [19] A. Delgado, W. P. Schleich, and G. Süssmann, “Quantum gyroscopes and gödel's universe: entanglement opens a new testing ground for cosmology,” *New Journal of Physics*, vol. 4, pp. 37–37, jun 2002.
- [20] J. Yin, Y.-H. Li, S.-K. Liao, M. Yang, Y. Cao, L. Zhang, J.-G. Ren, W.-Q. Cai, W.-Y. Liu, S.-L. Li, R. Shu, Y.-M. Huang, L. Deng, L. Li, Q. Zhang, N.-L. Liu, Y.-A. Chen, C.-Y. Lu, X.-B. Wang, F. Xu, J.-Y. Wang, C.-Z. Peng, A. K. Ekert, and J.-W. Pan, “Entanglement-based secure quantum cryptography over 1,120 kilometres,” *Nature*, vol. 582, pp. 501–505, June 2020.
- [21] J. S. Bell, “On the einstein podolsky rosen paradox,” *Physics Physique Fizika*, vol. 1, pp. 195–200, Nov 1964.
- [22] I. Fuentes-Schuller and R. B. Mann, “Alice falls into a black hole: Entanglement in noninertial frames,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 120404, Sep 2005.
- [23] D. Rideout, T. Jennewein, G. Amelino-Camelia, T. F. Demarie, B. L. Higgins, A. Kempf, A. Kent, R. Laflamme, X. Ma, R. B. Mann, E. Martín-Martínez, N. C. Menicucci, J. Moffat, C. Simon, R. Sorkin, L. Smolin, and D. R. Terno, “Fundamental quantum optics experiments conceivable with satellites—reaching relativistic distances and velocities,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 29, p. 224011, oct 2012.
- [24] P. M. Alsing, I. Fuentes-Schuller, R. B. Mann, and T. E. Tessier, “Entanglement of dirac fields in noninertial frames,” *Phys. Rev. A*, vol. 74, p. 032326, Sep 2006.
- [25] J. Doukas, G. Adesso, S. Pirandola, and A. Dragan, “Discriminating quantum

- field theories in non-inertial frames,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 32, p. 035013, jan 2015.
- [26] S. Aerts, P. Kwiat, J.-A. Larsson, and M. Żukowski, “Two-photon franson-type experiments and local realism,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, pp. 2872–2875, Oct 1999.
- [27] J.-Å. Larsson, “Loopholes in bell inequality tests of local realism,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 47, p. 424003, oct 2014.
- [28] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, “Proposed experiment to test local hidden-variable theories,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 23, pp. 880–884, Oct 1969.
- [29] A. Brodutch, T. F. Demarie, and D. R. Terno, “Photon polarization and geometric phase in general relativity,” *Phys. Rev. D*, vol. 84, p. 104043, Nov 2011.
- [30] A. Brodutch, A. Gilchrist, T. Guff, A. R. H. Smith, and D. R. Terno, “Post-newtonian gravitational effects in optical interferometry,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, p. 064041, Mar 2015.
- [31] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1982.
- [32] C. Lämmerzahl, “A hamilton operator for quantum optics in gravitational fields,” *Physics Letters A*, vol. 203, no. 1, pp. 12 – 17, 1995.
- [33] C. Kiefer and T. P. Singh, “Quantum gravitational corrections to the functional schrödinger equation,” *Phys. Rev. D*, vol. 44, pp. 1067–1076, Aug 1991.

- [34] Y. N. Obukhov, “Spin, gravity, and inertia,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 86, pp. 192–195, Jan 2001.
- [35] S. Wajima, M. Kasai, and T. Futamase, “Post-newtonian effects of gravity on quantum interferometry,” *Phys. Rev. D*, vol. 55, pp. 1964–1970, Feb 1997.
- [36] S. Y. Chen and T. C. Ralph, “Estimation of gravitational acceleration with quantum optical interferometers,” *Phys. Rev. A*, vol. 99, p. 023803, Feb 2019.
- [37] V. Dvoyrin, N. Tarasov, and S. Turitsyn, “Ultra-broadband tunable fiber laser,” in *Optical Fiber Communication Conference*, p. W1F.3, Optical Society of America, 2017.
- [38] Y. Nakajima, Y. Hata, and K. Minoshima, “High-coherence ultra-broadband bidirectional dual-comb fiber laser,” *Opt. Express*, vol. 27, pp. 5931–5944, Mar 2019.
- [39] C. Gmachl, D. L. Sivco, R. Colombelli, F. Capasso, and A. Y. Cho, “Ultra-broadband semiconductor laser,” *Nature*, vol. 415, pp. 883–887, Feb 2002.
- [40] C. M. Will, “The confrontation between general relativity and experiment,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 9, p. 3, Mar 2006.
- [41] D. V. Strekalov, T. B. Pittman, A. V. Sergienko, Y. H. Shih, and P. G. Kwiat, “Postselection-free energy-time entanglement,” *Phys. Rev. A*, vol. 54, pp. R1–R4, Jul 1996.
- [42] F. Vedovato, C. Agnesi, M. Tomasin, M. Avesani, J.-A. Larsson, G. Vallone, and P. Villoresi, “Postselection-loophole-free bell violation with genuine time-bin entanglement,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 121, p. 190401, Nov 2018.

- [43] C.-Z. Peng, T. Yang, X.-H. Bao, J. Zhang, X.-M. Jin, F.-Y. Feng, B. Yang, J. Yang, J. Yin, Q. Zhang, N. Li, B.-L. Tian, and J.-W. Pan, “Experimental free-space distribution of entangled photon pairs over 13 km: Towards satellite-based global quantum communication,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, p. 150501, Apr 2005.
- [44] J. Yin, J.-G. Ren, H. Lu, Y. Cao, H.-L. Yong, Y.-P. Wu, C. Liu, S.-K. Liao, F. Zhou, Y. Jiang, X.-D. Cai, P. Xu, G.-S. Pan, J.-J. Jia, Y.-M. Huang, H. Yin, J.-Y. Wang, Y.-A. Chen, C.-Z. Peng, and J.-W. Pan, “Quantum teleportation and entanglement distribution over 100-kilometre free-space channels,” *Nature*, vol. 488, pp. 185–188, Aug 2012.
- [45] M. Markiewicz, D. Kaszlikowski, P. Kurzyński, and A. Wójcik, “From contextuality of a single photon to realism of an electromagnetic wave,” *npj Quantum Information*, vol. 5, p. 5, Jan 2019.
- [46] Z. Y. Ou and L. Mandel, “Classical treatment of the franson two-photon correlation experiment,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 7, pp. 2127–2131, Oct 1990.
- [47] A. Cabello, A. Rossi, G. Vallone, F. De Martini, and P. Mataloni, “Proposed bell experiment with genuine energy-time entanglement,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, p. 040401, Jan 2009.
- [48] S. Sinha and J. Samuel, “Atom interferometry and the gravitational redshift,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 28, p. 145018, jun 2011.
- [49] M. Rivera-Tapia, A. Delgado, and G. F. Rubilar, “Weak gravitational field effects on large-scale optical interferometric bell tests,” *Classical and Quantum Gravity*, 2020.
- [50] *Quantum Systems under Gravitational Time Dilation*. Springer International Publishing, 2017.

- [51] J. C. Spall, “Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 3, pp. 332–341, 1992.
- [52] J. Kohlrus, D. E. Bruschi, J. Louko, and I. Fuentes, “Quantum communications and quantum metrology in the spacetime of a rotating planet,” *EPJ Quantum Technology*, vol. 4, p. 7, Apr 2017.
- [53] A. D. Ludlow, M. M. Boyd, J. Ye, E. Peik, and P. O. Schmidt, “Optical atomic clocks,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 87, pp. 637–701, Jun 2015.
- [54] N. Ward, “Understanding gps — principles and applications. elliot d. kaplan (editor). £75. isbn: 0-89006-793-7. artech house publishers, boston amp; london. 1996.,” *Journal of Navigation*, vol. 50, no. 1, p. 151–152, 1997.
- [55] E. Kajari, R. Walser, W. P. Schleich, and A. Delgado, “Sagnac effect in gödel’s universe,” in *Frontiers in Optics*, p. JWD48, Optical Society of America, 2006.
- [56] G. Vallone, D. Dequal, M. Tomasin, F. Vedovato, M. Schiavon, V. Luceri, G. Bianco, and P. Villoresi, “Interference at the single photon level along satellite-ground channels,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 253601, Jun 2016.
- [57] F. Vedovato, C. Agnesi, M. Schiavon, D. Dequal, L. Calderaro, M. Tomasin, D. G. Marangon, A. Stanco, V. Luceri, G. Bianco, G. Vallone, and P. Villoresi, “Extending wheeler’s delayed-choice experiment to space,” *Science Advances*, vol. 3, no. 10, 2017.
- [58] S. Pallister, S. Coop, V. Formichella, N. Gampierakis, V. Notaro, P. Knott, R. Azevedo, N. Buchheim, S. de Carvalho, E. Järvelä, M. Laporte, J.-P. Kaikonen, N. Meshksar, T. Nikkanen, and M. Yttergren, “A blueprint for a simultaneous test of quantum mechanics and general relativity in a space-based

- quantum optics experiment,” *EPJ Quantum Technology*, vol. 4, pp. 2196–0763, feb 2017.
- [59] I. Pikovski, M. Zych, F. Costa, and Č. Brukner, “Universal decoherence due to gravitational time dilation,” *Nature Physics*, vol. 11, pp. 1745–2481, aug 2015.
- [60] M. Pfennigbauer, M. Aspelmeyer, W. Leeb, G. Baister, T. Dreischer, T. Jennewein, G. Neckamm, J. Perdignes, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “Satellite-based quantum communication terminal employing state-of-the-art technology,” *J. Opt. Netw.*, vol. 4, pp. 549–560, Sep ts .
- [61] L. Calderaro, C. Agnesi, D. Dequal, F. Vedovato, M. Schiavon, A. Santamato, V. Luceri, G. Bianco, G. Vallone, and P. Villoresi, “Towards quantum communication from global navigation satellite system,” *Quantum Science and Technology*, vol. 4, p. 015012, dec 2018.
- [62] D. Feng, “Review of quantum navigation,” *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, vol. 237, p. 032027, mar 2019.
- [63] J. D. Franson, “Bell inequality for position and time,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 62, pp. 2205–2208, May 1989.
- [64] S. Friberg, C. K. Hong, and L. Mandel, “Measurement of time delays in the parametric production of photon pairs,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 54, pp. 2011–2013, May 1985.
- [65] C. K. Hong and L. Mandel, “Theory of parametric frequency down conversion of light,” *Phys. Rev. A*, vol. 31, pp. 2409–2418, Apr 1985.
- [66] C. K. Hong and L. Mandel, “Experimental realization of a localized one-photon state,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, pp. 58–60, Jan 1986.

- [67] R. Ghosh and L. Mandel, “Observation of nonclassical effects in the interference of two photons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 59, pp. 1903–1905, Oct 1987.
- [68] Z. Y. Ou and L. Mandel, “Observation of spatial quantum beating with separated photodetectors,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, pp. 54–57, Jul 1988.
- [69] S. Aerts, P. Kwiat, J.-A. Larsson, and M. Żukowski, “Two-photon franson-type experiments and local realism,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, pp. 2872–2875, Oct 1999.
- [70] A. Cuevas, G. Carvacho, G. Saavedra, J. Cariñe, W. Nogueira, M. Figueroa, A. Cabello, P. Mataloni, G. Lima, and G. Xavier, “Long-distance distribution of genuine energy-time entanglement,” *Nature Communications*, vol. 4, no. 2871, pp. 2041–1723, 2013.
- [71] G. Ribordy, J. Brendel, J.-D. Gautier, N. Gisin, and H. Zbinden, “Long-distance entanglement-based quantum key distribution,” *Phys. Rev. A*, vol. 63, p. 012309, Dec 2000.
- [72] T. Zhong, H. Zhou, R. D. Horansky, C. Lee, V. B. Verma, A. E. Lita, A. Restelli, J. C. Bienfang, R. P. Mirin, T. Gerrits, S. W. Nam, F. Marsili, M. D. Shaw, Z. Zhang, L. Wang, D. Englund, G. W. Wornell, J. H. Shapiro, and F. N. C. Wong, “Photon-efficient quantum key distribution using time–energy entanglement with high-dimensional encoding,” *New Journal of Physics*, vol. 17, p. 022002, feb 2015.
- [73] S. Ecker, F. Bouchard, L. Bulla, F. Brandt, O. Kohout, F. Steinlechner, R. Fickler, M. Malik, Y. Guryanova, R. Ursin, and M. Huber, “Overcoming noise in entanglement distribution,” *Phys. Rev. X*, vol. 9, p. 041042, Nov 2019.
- [74] S. J. Freedman and J. F. Clauser, “Experimental test of local hidden-variable theories,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 28, pp. 938–941, Apr 1972.

- [75] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, “Experimental tests of realistic local theories via bell’s theorem,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 47, pp. 460–463, Aug 1981.
- [76] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, and N. Gisin, “Violation of bell inequalities by photons more than 10 km apart,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 3563–3566, Oct 1998.
- [77] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “Violation of bell’s inequality under strict einstein locality conditions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 5039–5043, Dec 1998.
- [78] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, “Quantum entanglement,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 81, pp. 865–942, Jun 2009.
- [79] B. Hensen, H. Bernien, A. E. Dréau, A. Reiserer, N. Kalb, M. S. Blok, J. Ruitenberg, R. F. L. Vermeulen, R. N. Schouten, C. Abellán, W. Amaya, V. Pruneri, M. W. Mitchell, M. Markham, D. J. Twitchen, D. Elkouss, S. Wehner, T. H. Taminiau, and R. Hanson, “Loophole-free bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres,” *Nature*, vol. 526, pp. 682–686, Oct 2015.
- [80] C. Abellán, A. Acín, A. Alarcón, O. Alibart, C. K. Andersen, F. Andreoli, A. Beckert, F. A. Beduini, A. Bendersky, M. Bentivegna, P. Bierhorst, D. Burchardt, A. Cabello, J. Cariñe, S. Carrasco, G. Carvacho, D. Cavalcanti, R. Chaves, J. Cortés-Vega, A. Cuevas, A. Delgado, H. de Riedmatten, C. Eichler, P. Farrera, J. Fuenzalida, M. García-Matos, R. Garthoff, S. Gasparinetti, T. Gerrits, F. Ghafari Jouneghani, S. Glancy, E. S. Gómez, P. González, J.-Y. Guan, J. Handsteiner, J. Heinsoo, G. Heinze, A. Hirschmann, O. Jiménez, F. Kaiser, E. Knill, L. T. Knoll, S. Krinner, P. Kurpiers, M. A. Larotonda, J.-Å. Larsson, A. Lenhard, H. Li, M.-H. Li, G. Lima, B. Liu, Y. Liu, I. H.

- López Grande, T. Lunghi, X. Ma, O. S. Magaña-Loaiza, P. Magnard, A. Magnoni, M. Martí-Prieto, D. Martínez, P. Mataloni, A. Mattar, M. Mazzer, R. P. Mirin, M. W. Mitchell, S. Nam, M. Oppliger, J.-W. Pan, R. B. Patel, G. J. Pryde, D. Rauch, K. Redeker, D. Rieländer, M. Ringbauer, T. Roberson, W. Rosenfeld, Y. Salathé, L. Santodonato, G. Sauder, T. Scheidl, C. T. Schmiegelow, F. Sciarrino, A. Seri, L. K. Shalm, S.-C. Shi, S. Slussarenko, M. J. Stevens, S. Tanzilli, F. Toledo, J. Tura, R. Ursin, P. Verkyris, V. B. Verma, T. Walter, A. Wallraff, Z. Wang, H. Weinfurter, M. M. Weston, A. G. White, C. Wu, G. B. Xavier, L. You, X. Yuan, A. Zeilinger, Q. Zhang, W. Zhang, J. Zhong, and T. B. B. T. Collaboration, “Challenging local realism with human choices,” *Nature*, vol. 557, pp. 212–216, May 2018.
- [81] J. Handsteiner, A. S. Friedman, D. Rauch, J. Gallicchio, B. Liu, H. Hosp, J. Kofler, D. Bricher, M. Fink, C. Leung, A. Mark, H. T. Nguyen, I. Sanders, F. Steinlechner, R. Ursin, S. Wengerowsky, A. H. Guth, D. I. Kaiser, T. Scheidl, and A. Zeilinger, “Cosmic bell test: Measurement settings from milky way stars,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 118, p. 060401, Feb 2017.
- [82] D. Rauch, J. Handsteiner, A. Hochrainer, J. Gallicchio, A. S. Friedman, C. Leung, B. Liu, L. Bulla, S. Ecker, F. Steinlechner, R. Ursin, B. Hu, D. Leon, C. Benn, A. Ghedina, M. Cecconi, A. H. Guth, D. I. Kaiser, T. Scheidl, and A. Zeilinger, “Cosmic bell test using random measurement settings from high-redshift quasars,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 121, p. 080403, Aug 2018.
- [83] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, 2 ed., 2018.