



Tomografía Cuántica Escalable para Estados Puros

Tesis para optar al grado de
Doctor en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

por

Leonardo Zambrano Valenzuela



Diciembre, 2021

Director de Tesis: **Dr. Aldo Delgado Hidalgo**

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi familia por todo el apoyo, tiempo y dedicación otorgados. A mi profesor Aldo Delgado por las invaluable lecciones entregadas. A Luciano Pereira por la motivación y a Mariana Navarro por todo el ánimo y la compañía.



Tabla de Contenido

Índice de Ilustraciones	v
Resumen	vi
1 Introducción	1
2 Conceptos Fundamentales	7
2.1 Probabilidad y estadística	7
2.2 Árbol binario	12
2.3 Bootstrapping	13
2.4 Cálculo eficiente de productos matriciales	14
2.5 Uso dentro de este trabajo	16
3 Mecánica Cuántica	17
3.1 Postulados de la Mecánica Cuántica	17
3.2 Matriz densidad	20
3.3 Fidelidad	21
3.4 Tomografía cuántica	22
3.5 Computación Cuántica	24
4 Tomografía Cuántica Escalable para Estados Puros	28



4.1	Un vector arbitrario	29
4.2	Un vector de dimensión 2	31
4.3	Un estado cuántico arbitrario	33
4.4	Bases del protocolo	37
4.5	Ruido blanco	38
4.6	Simulaciones numéricas	40
4.7	Experimento	45
4.8	Otras simulaciones numéricas	51
5	Conclusión	57
	Bibliografía	60



Índice de Ilustraciones

2.1	Árbol binario completo de 7 nodos con su lista asociada en la parte inferior.	13
3.1	Circuito cuántico básico de 2 qubits, con compuertas H y $CNOT$ seguidas de mediciones en la base canónica.	26
4.1	Árbol para reconstruir estados en $d = 8$.	35
4.2	Árbol para reconstruir estados en $d = 5$.	36
4.3	Circuitos que implementan las bases de medición separables y entrelazadas.	41
4.4	Fidelidad simulada alcanzada midiendo sobre $2n$, $3n$ y $4n$ bases locales, y 2, 3 y 4 bases locales, en función del número de qubits.	44
4.5	Fidelidad experimental alcanzada midiendo sobre $2n$, $3n$ y $4n$ bases locales, y 2, 3 y 4 bases locales, en función del número de qubits.	46
4.6	A la izquierda, fidelidad simulada en función del número de qubits. A la derecha, tiempo promedio que tarda el algoritmo en reconstruir un estado en función del número de qubits.	50
4.7	Infidelidad simulada alcanzada midiendo sobre 2^{13} , 2^{15} , 2^{17} y 2^{19} shots en función del número de qubits para 3, 5 y 9 bases.	53
4.8	Infidelidad simulada alcanzada midiendo sobre 3, 5 y 9 bases en función del número de qubits para un total de 2^{15} y 2^{19} shots.	54

RESUMEN

En esta tesis introducimos un método eficiente de estimación de estados cuánticos en dimensión arbitraria. Este se basa en la medición del sistema utilizando un mínimo de 2 bases más la base computacional. En sistemas de n qubits, estas 2 bases son entrelazadas, por lo que también presentamos el método utilizando un mínimo de $2n + 1$ bases separables. Luego el escalamiento del algoritmo es muy favorable en el número de qubits comparado con otros métodos de estimación. Realizamos simulaciones numéricas que muestran que el protocolo puede alcanzar una gran fidelidad de estimación para grandes dimensiones. Por ejemplo, al utilizar 21 bases separables en el espacio de Hilbert de 10 qubits se alcanzan fidelidades de 0.88. El uso de bases separables hace que nuestro método de estimación sea particularmente apropiado para aplicaciones en dispositivos cuánticos actuales, donde las compuertas entrelazadas son mucho menos precisas que las compuertas locales. Mostramos resultados experimentales usando uno de los procesadores cuánticos de IBM estimando estados GHZ de 4 qubits con una fidelidad superior a 0.88. Otros estados separables y entrelazados de 10 qubits alcanzan fidelidades del orden de 0.85 y 0.7, respectivamente.

Capítulo 1

Introducción

Gracias a los rápidos desarrollos en hardware y control, la computación cuántica ha alcanzado un nivel de desarrollo sin precedentes, lo que ha permitido incluso mostrar experimentalmente supremacía cuántica en dispositivos superconductores [1]. Sin embargo, y a pesar de todos los avances tecnológicos logrados, existen restricciones que impiden ejecutar algoritmos cuánticos como el de Shor, de Grover, o de estimación de fase, que requieren operaciones cuánticas perfectas. El número de qubits en los procesadores cuánticos actualmente llega hasta unos pocos cientos, los tiempos de coherencia son bajos, y las fidelidades en las compuertas también. Lo anterior impide aplicar protocolos de corrección de errores y por lo tanto limita el tipo de aplicaciones que se pueden realizar en un procesador cuántico.

Las plataformas experimentales actuales, como por ejemplo, iones atrapados [2–5], circuitos superconductores [6–9], quantum dots [10] y plataformas fónicas [11–14] han evolucionado en dispositivos descritos como noisy intermediate-scale quantum (NISQ) technologies [15]. Estos dispositivos están sobre las capacidades de simulación de los computadores clásicos actuales, pero aún están lejos de exhibir una mejora suficiente en computación útil. Debido a esto, el diseño de métodos de caracterización, certificación y benchmarking de estos dispositivos es cada vez más relevante [16], ya que entregan la

retroalimentación necesaria para realizar mejoras en el hardware y control. Un problema de los métodos actuales de caracterización es que a menudo no escalan eficientemente con el número de qubits, o requieren el uso de operaciones difíciles de implementar exactamente. Por ejemplo, la estimación de estados generados por procesadores cuánticos requiere mediciones sobre un conjunto de bases cuyo tamaño es exponencial en el número de qubits. Para utilizar un conjunto de bases con mejor escalamiento se requieren transformaciones unitarias que involucran entrelazamiento, que generalmente están asociadas con errores significativos. Luego, la caracterización de estados generados por dispositivos NISQ puede ser afectada por una gran acumulación de inexactitudes provenientes del proceso de preparación y medición.

Existen varios protocolos para evaluar el desempeño de los dispositivos NISQ. Randomized benchmarking [17–19] y direct fidelity estimation [20, 21] se enfocan en obtener descripciones de tasas de error privilegiando la escalabilidad de los protocolos, mientras que los métodos tomográficos [22] entregan una gran cantidad de información pero usualmente no son escalables al aumentar el tamaño del sistema. Para el caso de tomografía de estados se intenta estimar los $d^2 - 1$ parámetros reales que caracterizan un operador densidad en dimensión d . El método estándar se basa en medir las $d^2 - 1$ matrices de Gell-Mann [23–25], mientras que si se utilizan mutuamente unbiased bases (MUBs) es necesario medir $d + 1$ bases [26–32]. Este número se puede reducir a un mínimo utilizando una medida SIC-POVM, [33–39], que entrega exactamente d^2 resultados de medición.

En sistemas de n qubits, esto es, $d = 2^n$, el escalamiento de tomografía de estados es exponencial, lo que se conoce como la maldición de la dimensionalidad. Para solucionar este problema se puede asumir que conocemos ciertas propiedades del estado a estimar. Por ejemplo, compressed sensing [40] permite una gran reducción en el número de mediciones a realizar siempre y cuando se conozca el rango de la matriz densidad. Otra alternativa es

considerar estados con propiedades especiales, como los matrix product states [41] o permutationally invariant states [42], lo que también reduce de forma significativa el número de mediciones. De la misma forma, podemos considerar el caso de los estados puros, que pueden ser estimados en principio utilizando 5 bases [43–45], o más recientemente, 3 bases [46]. Este último método encuentra todos los estados puros en dimensión d salvo un conjunto de medida nula.

En este trabajo presentamos un método para estimar estados puros desconocidos en espacios de Hilbert de dimensión arbitraria d , usando un mínimo de 3 bases. Gracias a esto, el número de operadores a medir es constante, lo cual es muy ventajoso comparado con los métodos estándar, que escalan de forma polinomial con d . Esto también es importante desde la teoría, ya que nuestro protocolo presenta una clara reducción con respecto de el método de 5 bases y con respecto al método que utiliza 3 bases de forma numérica, ya que este último necesita una cantidad de evaluaciones de la verosimilitud que escala exponencialmente con la dimensión. En el caso de los sistemas de n qubits, utilizar un número fijo de bases en el protocolo requiere aplicar compuertas que presentan entrelazamiento. Pensando en esto, presentamos también el método utilizando $2n + 1$ bases locales, lo que es conveniente dadas las propiedades de los dispositivos NISQ. En este caso las mediciones se pueden llevar a cabo sin tener que usar compuertas entrelazadas, que típicamente se implementan con mayor error que las compuertas locales.

Nuestro protocolo estima estados puros de dimensión d utilizando un proceso inductivo. Comenzamos midiendo un mínimo de 3 bases y construyendo para el estado desconocido un árbol binario completo con $d - 1$ nodos. Luego descomponemos el espacio de Hilbert de dimensión d donde vive el estado en subespacios de dimensión 2 y 1. En cada uno de estos subespacios de Hilbert vive una parte del estado, que reconstruimos excepto por una fase y ubicamos en las hojas del árbol. Luego generamos un proceso en el que a partir de

los vectores contenidos en los nodos hijos encontramos un vector que ubicamos en el nodo padre. Este contiene toda la información sobre el estado en un espacio de Hilbert que es la suma directa de los espacios de Hilbert de sus hijos. Al aplicar este proceso hasta llegar a la raíz del árbol encontramos una estimación para el estado del sistema. En cada uno de los pasos es necesario resolver varios sistemas de ecuaciones que pueden tener determinantes cero si las ecuaciones son linealmente dependientes. Sin embargo, la presencia de ruido experimental ayuda a mitigar este problema. Si esto no es suficiente, agregar más bases de medición entrega más información al sistema, resuelve el problema de los determinantes nulos y mejora la calidad de la estimación.

Estudiamos el presente método mediante simulaciones numéricas de Montecarlo para sistemas de n qubits, dada su importancia en la computación cuántica y su disponibilidad para realizar experimentos. Para un conjunto de estados puros aleatorios calculamos la fidelidad media de la estimación en función del número de qubits, simulando las mediciones sobre las bases usando una cantidad fija de 2^{13} shots, esto es, repetimos el proceso preparación de estado y medición 2^{13} veces por cada base. Mostramos que al usar $2n + 1$ bases separables alcanzamos fidelidades promedio de 0.88 para 10 qubits. Estos resultados se pueden mejorar considerando un número mayor de bases, esto es, $3n + 1$ y $4n + 1$, lo que nos lleva a valores de la fidelidad de 0.91 y 0.93 para $n = 10$. Por otra parte, si consideramos bases que requieren el uso de entrelazamiento, 3, 4 y 5 bases nos entregan estimaciones de menor calidad, con fidelidades promedio de 0.2, 0.6 y 0.8 respectivamente para $n = 6$. La gran diferencia en el desempeño entre las bases separables y las entrelazadas puede deberse a que la cantidad de bases a medir crece con la dimensión en las bases separables, mientras que en el otro caso el número está fijo. Luego en el primer caso el total de shots para la estimación es $(mn + 1)2^{13}$, $m = 1, 2, 3$, mucho mayor que los $(m + 1)2^{13}$ de las bases entrelazadas.

Como referencia, a partir de la cota de Cramer-Rao podemos encontrar una infidelidad (1 menos fidelidad) mínima que puede alcanzar un método de estimación para estados cuánticos arbitrarios. Este límite está dado por $(d^2 - 1)/(4N)$, con d la dimensión del sistema y N el número total de shots utilizados en la estimación [47]. Para alcanzar una infidelidad de 0.12 (fidelidad de 0.88) en 10 qubits necesitaríamos más de 2 millones de shots, a diferencia de los 172 mil shots totales necesarios en nuestro método. Esta diferencia se debe a que reconstruimos estados puros, que tienen menos parámetros que una matriz densidad cualquiera.

Las simulaciones numéricas anteriores se pueden comparar con experimentos que realizamos utilizando procesadores cuánticos provistos por IBM. Consideramos la estimación de estados cuánticos fijos desde 2 a 10 qubits utilizando las bases locales y estados de hasta 4 qubits usando las bases entrelazadas. Al medir se utilizaron 2^{13} shots por base. Primero estimamos estados completamente separables, que dadas sus propiedades son preparados con alta precisión en los dispositivos físicos. Para estos estados encontramos fidelidades de alrededor de 0.83 para $n = 10$ qubits utilizando $2n + 1$ bases locales, en relativa coincidencia con los resultados numéricos, mientras que las 3 bases entrelazadas entregaron fidelidades menores a 0.3 para $n = 4$. También consideramos la estimación de $n/2$ productos tensoriales de estados de Bell, donde las bases locales para $n = 10$ entregaron fidelidades de alrededor de 0.67. Finalmente, estimamos estados Greenberger-Horne-Zeilinger para 2, 3 y 4 qubits, donde el método propuesto entregó fidelidades cercanas a 0.87 for $n = 4$ usando bases locales, y a 0.47 para 4 bases entrelazadas más la base computacional. Los resultados menos favorables usando bases y estados entrelazados se pueden explicar por el gran número de compuertas entrelazadas necesarias en el algoritmo, que usualmente se preparan con menor precisión en dispositivos físicos.

También estudiamos numéricamente la fidelidad en función del número de qubits variando

los shots utilizados al medir cada base. Para 3, 5 y 9 bases encontramos que usar más shots incrementa la fidelidad usando una cantidad fija de bases. Finalmente, estudiamos el comportamiento de la fidelidad en función del número de qubits variando el número de bases sobre el que se distribuye una cantidad fija de shots. Para 2^{15} y 2^{19} shots encontramos que si bien aumentar desde 3 a 5 bases mejora el desempeño del algoritmo, al pasar desde 5 a 9 la mejora no es tan significativa, disminuyendo por esto la necesidad de distribuir el ensemble en un número mayor de observables. También mostramos que el algoritmo es eficiente en el uso de memoria y tiempos de cómputo clásicos, al reconstruir exitosamente estados de 20 qubits en minutos usando menos de 8 gigabytes de memoria.

Nuestras simulaciones y resultados experimentales indican que el método acá propuesto permite una estimación escalable y eficiente de estados puros de dimensión d usando un número de bases que escala logarítmicamente con la dimensión, lo que puede ofrecer una gran ventaja comparado con otros métodos contemporáneos de estimación de estados.

Esta tesis está organizada de la siguiente forma: En el capítulo 2 introduciremos ciertos conceptos fundamentales que usaremos en el desarrollo del trabajo, principalmente relacionados con teoría de probabilidades y estadística. Esto ayudará a fijar de mejor forma los conceptos utilizados en la descripción teórica de nuestro trabajo, así como en el análisis de datos. Luego, en el capítulo 3 veremos conceptos básicos en Mecánica Cuántica y estimación de estados, lo que nos permitirá poner en contexto nuestro trabajo. La principal contribución de esta tesis está en el capítulo 4. Aquí presentamos el método y sus propiedades. Mostramos un conjunto de simulaciones numéricas para estudiar el comportamiento general del método en diversas dimensiones. También presentamos los resultados y el análisis de la implementación experimental del presente protocolo en procesadores cuánticos de IBM. Finalmente, en el capítulo 5 resumimos los resultados y concluimos.

Capítulo 2

Conceptos Fundamentales

En este capítulo estudiaremos conceptos básicos necesarios para desarrollar nuestro trabajo. Principalmente presentamos teoría de probabilidades y estadística en sección 2.1, con breves menciones a los arboles binarios, al método de bootstrapping y al cálculo eficiente de productos matriciales en secciones 2.2, 2.3 y 2.4.

2.1 Probabilidad y estadística

En la naturaleza existen experimentos que, al ser repetidos bajo los mismos parámetros de control, entregan resultados diferentes dentro de un conjunto de alternativas. Esto puede ser porque el proceso es realmente aleatorio, como las mediciones en la Mecánica Cuántica, o porque existen variables inaccesibles o imposibles de controlar, como en el lanzamiento de un dado. La teoría de probabilidades entrega un modelo matemático para cuantificar las incertezas asociadas a estos fenómenos [48], como veremos a continuación. El espacio muestral Ω es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento. Los subconjuntos de Ω que contienen solo un elemento $\omega \in \Omega$ son llamados puntos muestrales, eventos elementales o sucesos elementales. El conjunto de puntos muestrales $A \subseteq \Omega$ para el cual se cumple una determinada condición es llamado evento. Un requerimiento

importante para definir la teoría de probabilidad es que los eventos formen una σ -álgebra, que es una familia \mathcal{A} de subconjuntos de Ω con las propiedades:

1. El espacio muestral completo Ω y el vacío \emptyset pertenecen a \mathcal{A} .
2. Si A_1 y A_2 pertenecen a \mathcal{A} , entonces $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ y $A_1 - A_2$ pertenecen a \mathcal{A} .
3. Dada una colección numerable de eventos A_1, A_2, \dots, A_n en \mathcal{A} , su unión también pertenece a \mathcal{A} .

Ahora, definimos una medida de probabilidad sobre la σ -álgebra. Esta es una función $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada evento A de la σ -álgebra un número real $\mu(A)$, llamado probabilidad del evento A . Debe satisfacer los axiomas de Kolmogorov:

1. La probabilidad de un evento cualquiera A es no negativa, $\mu(A) \geq 0$.
2. La probabilidad del evento seguro Ω es uno, $\mu(\Omega) = 1$.
3. Cualquier secuencia numerable de eventos disjuntos A_1, A_2, \dots satisface

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \quad (2.1)$$

En resumen, la teoría de probabilidad necesita un espacio muestral Ω , una σ -álgebra \mathcal{A} de eventos y una medida de probabilidad μ sobre \mathcal{A} .

Decimos que dos eventos A_1 y A_2 son independientes si $\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1)\mu(A_2)$. Esto significa que la ocurrencia de A_1 no afecta la ocurrencia de A_2 , y viceversa. La independencia también se puede definir a partir de la probabilidad condicional

$$\mu(A|B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} \quad (2.2)$$

siempre y cuando $\mu(B) > 0$. En este caso, si $\mu(A_1|A_2) = \mu(A_1)$, o equivalentemente, $\mu(A_2|A_1) = \mu(A_2)$, los eventos son independientes.

Un ejemplo de los conceptos previos es lanzar dos monedas: El espacio muestral es $\Omega = \{CC, CS, SC, SS\}$, con probabilidad 0.25 para cada uno de estos sucesos elementales (C corresponde a cara, S a sello). Un evento podría ser obtener cara en el primer lanzamiento. El subconjunto del espacio muestral asociado a este evento es $\{CS, CC\}$, con probabilidad de suceso dada por $\mu(CS) + \mu(CC) = 0.5$.

Como los elementos ω del espacio muestral pueden ser objetos arbitrarios, es deseable asignarles números para simplificar su descripción. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ asociado a un experimento, una variable aleatoria X es una función medible que mapea el espacio muestral a los reales, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Luego asigna a cada resultado $\omega \in \Omega$ un número real $X(\omega) = x$.

Definimos la probabilidad de obtener x como la probabilidad del evento ω tal que $X(\omega) = x$. Si X es discreta, podemos expresar esto como

$$P(X = x) = \mu(\{\omega : X(\omega) = x\}). \quad (2.3)$$

Si X es continua, la probabilidad de que x esté entre a y b es

$$P(a < X \leq b) = \mu(\{\omega : a < X(\omega) \leq b\}). \quad (2.4)$$

A partir de esto podemos definir distribuciones de probabilidad, que asignan a cada evento definido sobre X la probabilidad de que ocurra. Cuando la variable aleatoria X es discreta, generamos una lista con las probabilidades para cada valor que X puede tomar. Así, la distribución de probabilidad se denomina función de masa de probabilidad $p_X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$p_X(x) = P(X = x). \quad (2.5)$$

Para variables aleatorias continuas usualmente podemos definir una función densidad de probabilidad f_X , que satisface

$$\int_{x \in I} f_X(x) dx = P(X \in A), \quad (2.6)$$

con I el intervalo de la recta real asociado al evento A por la variable aleatoria X .

Análogamente a lo anterior, podemos estudiar vectores \mathbf{X} de variables aleatorias, con $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, esto es, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, donde cada elemento X_k es una variable aleatoria definida sobre el mismo espacio de probabilidad Ω . A partir de esto, dos variables aleatorias son independientes si $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)$ para todo x_1, x_2 .

Dos distribuciones relevantes para este trabajo son la distribución binomial

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (2.7)$$

y la multinomial

$$p(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k} & \text{cuando } \sum_{i=1}^k x_i = n, \\ 0 & \text{otros casos.} \end{cases} \quad (2.8)$$

La distribución binomial caracteriza el número de éxitos x en una secuencia de n experimentos independientes. En cada experimento independiente solo hay dos resultados posibles: los éxitos, con probabilidad p , y los fracasos, con probabilidad $1 - p$. Cuando existen más de dos resultados posibles, lo anterior se puede generalizar en la distribución multinomial, que dados n experimentos entrega la probabilidad de obtener simultáneamente x_1 sucesos del tipo 1, x_2 sucesos tipo 2, ..., y x_k sucesos k .

Una función que entrega información sobre distribuciones de probabilidad es el valor esperado o esperanza $E[g(X)]$ de una función $g(X)$ de la variable aleatoria, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si X es discreta con masa de probabilidad p_X tenemos

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x), \quad (2.9)$$

donde la suma es sobre todos los valores permitidos de la variable aleatoria. Si X es continua con densidad de probabilidad f_X , entonces el valor esperado de $g(X)$ es

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx. \quad (2.10)$$

En ambos casos la esperanza es una función lineal. Si $g(X) = x$, hablamos del valor esperado de la distribución, y obtenemos un valor típico o central para esta, que puede ser medido. Supongamos que la variable aleatoria X esta asociada a algún fenómeno que ocurre en un sistema S . El valor esperado de X se puede estimar a partir de mediciones sobre un conjunto de copias independientes e idénticamente preparadas S . Esto entrega una lista de variables aleatorias $\{X_k\}_{k=1}^n$ que siguen la misma distribución de probabilidad que X , de tal forma que definimos

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k. \quad (2.11)$$

Si $n \rightarrow \infty$ la ley débil de los grandes números dice que $P(|\bar{X}_n - E[X]| < \varepsilon) = 1$. Luego la probabilidad de un error mayor que ε al estimar $E[X]$ usando \bar{X}_n tiende a cero a medida que n crece.

La varianza de una variable aleatoria está definida por

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]. \quad (2.12)$$

Es una medida de las fluctuaciones de X , ya que cuantifica las desviaciones de las realizaciones de X con respecto al promedio. Usualmente, para tener una medida de dispersión en los datos con las mismas unidades que la esperanza, trabajamos con la desviación estándar $\sigma = \sqrt{Var(X)}$.

Por último, otra medida de tendencia central particularmente importante es la mediana, que corresponde al valor que se encuentra en el lugar central de todos los datos de una muestra

cuando éstos están ordenados de menor a mayor. La mediana se caracteriza por ser robusta frente a una pequeña proporción de valores extremadamente pequeños o grandes en los datos, a diferencia del promedio. Usualmente se presenta junto al rango intercuartil. Este es una medida de dispersión en los datos que es igual a la diferencia entre el percentil 75 y el 25. Luego concentra el 50 por ciento de los datos que se agrupan alrededor de la mediana.

2.2 Árbol binario

Un árbol binario es una estructura de datos en la cual cada nodo puede tener máximo dos hijos, llamados hijo izquierdo e hijo derecho [49]. Se dice que el árbol binario es completo si cada nivel, excepto posiblemente el último, está completamente lleno. Dado un nivel, los nodos deben estar lo más a la izquierda posible. Los árboles con estas características pueden ser representados por una lista, almacenando la raíz en la posición 1, el hijo izquierdo de la raíz en la posición 2 y el hijo y el derecho de la raíz en la posición 3. Para el siguiente nivel, el hijo izquierdo del hijo izquierdo de la raíz es almacenado en la posición 4, el hijo derecho del hijo izquierdo de la raíz es almacenado en la posición 5, etc. Ver la figura 2.1.

Lo anterior asegura que el hijo izquierdo del nodo con índice i en la lista tiene asociado el nodo con índice $2i$, y su hijo izquierdo el nodo con índice $2i + 1$ en la lista. El padre del nodo en el índice i tiene asociado el nodo con índice $i//2$, donde denotamos $i//2$ a la parte entera de $i/2$.

Un árbol binario lleno es un árbol en el cual cada nodo tiene 0 o 2 hijos. El árbol de la figura 2.1 también satisface esta definición. Si F es el número de hojas e I el de nodos

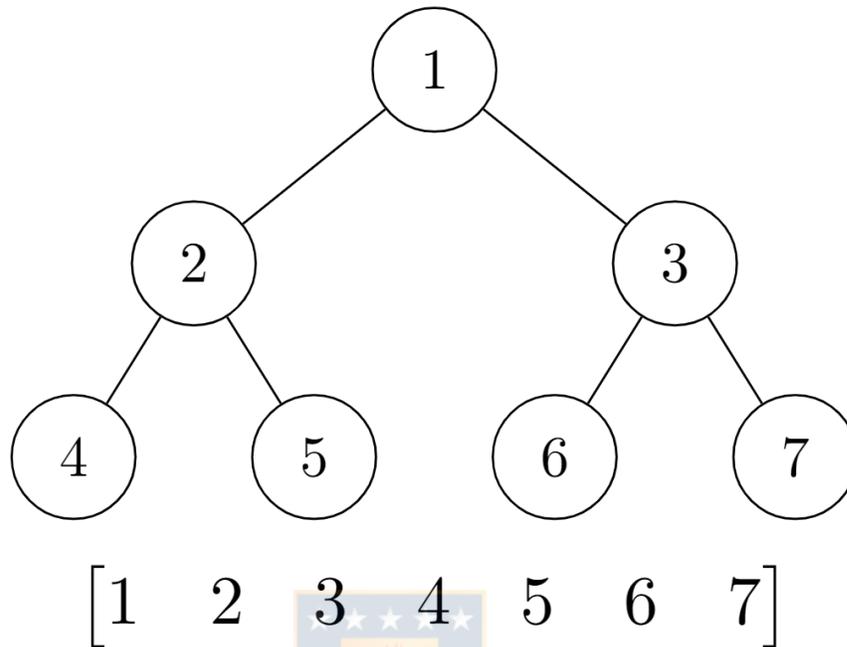


Figura 2.1: Árbol binario completo de 7 nodos con su lista asociada en la parte inferior.
Fuente: Elaboración propia.

internos, en este tipo de estructuras se cumple

$$I = F - 1. \quad (2.13)$$

La diferencia entre estos dos tipos de árbol es que en el árbol binario completo puede haber un nodo que tenga solo 1 hijo, y por lo tanto no satisface la definición de árbol binario lleno. Por otra parte, en los niveles de los árboles binarios llenos los nodos no necesariamente deben ubicarse a la izquierda.

2.3 Bootstrapping

El método de Bootstrap es una técnica utilizada para estimar la distribución que siguen cantidades como el promedio o la varianza de una variable aleatoria a partir de datos

experimentales. Dado un conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de n mediciones, el proceso de bootstrapping consta de los siguientes pasos:

- Seleccionar al azar n datos de X con reposición para generar un conjunto Y_k de datos experimentales remuestreados. Reposición significa que cada vez que seleccionamos un punto x_j lo volvemos a colocar en X , y luego cualquier valor en X se puede seleccionar un número arbitrario de veces.
- Calculamos la cantidad deseada μ_k (promedio, varianza, etc.) a partir del conjunto Y_k .
- Repetimos el procedimiento anterior m veces para obtener un conjunto $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$ a partir del cual calculamos la distribución de la cantidad de interés. Mientras más grande m , mejor será la calidad de la estimación.

2.4 Cálculo eficiente de productos matriciales

El algoritmo que desarrollamos en este trabajo requiere un gran número de cálculos de la forma

$$\mathbf{y} = (A_r \otimes \dots \otimes A_2 \otimes A_1) \cdot \mathbf{x}, \quad (2.14)$$

con A_1, A_2, \dots, A_r en $\mathbb{R}^{m \times m}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n = m^r$. Construir la matriz de forma explícita y calcular el producto con \mathbf{x} es ineficiente cuando el número r de matrices es grande, tanto en el tiempo de cálculo como en la memoria. Por suerte, existen formas inteligentes de realizar las operaciones en la ecuación (2.14), de tal forma de consumir menos recursos computacionales [50].

Si $Z \in \mathbb{R}^{u \times v}$, entonces $\text{vec}(Z)$ es un vector en \mathbb{R}^{uv} que se obtiene al concatenar las columnas

de la matriz Z :

$$\text{vec}(Z) = \begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{21} \\ \vdots \\ Z_{uv} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Definimos también el operador *reshape*. Si $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ y $m_1 n_1 = m_2 n_2$, entonces

$$A_2 = \text{reshape}(A, m_2, n_2) \quad (2.16)$$

es la matriz de m_2 por n_2 definida por $\text{vec}(B) = \text{vec}(A)$.

Por otra parte, si $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ y $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, entonces tenemos la siguiente equivalencia

$$Y = C \cdot X \cdot B^T \iff \text{vec}(Y) = (B \otimes C) \cdot \text{vec}(X), \quad (2.17)$$

con $X \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ e $Y \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_1}$. A partir de esto podemos construir un proceso recursivo para evaluar la ecuación (2.14). Esta última es equivalente a

$$\text{reshape}(y, m^{r-1}, m) = (A_{r-1} \otimes \dots \otimes A_1) \cdot \text{reshape}(x, m^{r-1}, m) \cdot A_r^T \quad (2.18)$$

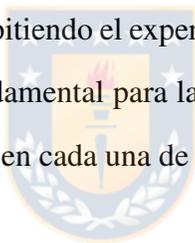
El término $D = \text{reshape}(x, m^{r-1}, m) \cdot A_r^T$ es una matriz de dimensión $m^{r-1} \times m$. Por lo tanto, cada una de sus columnas se puede pensar como un vector al que se le aplica nuevamente la relación en (2.17). Luego las columnas de $E = (A_{r-1} \otimes \dots \otimes A_1) \cdot D$ se pueden calcular usando

$$\text{reshape}(E(:, k), m^{r-2}, m) = (A_{r-2} \otimes \dots \otimes A_1) \cdot \text{reshape}(D(:, k), m^{r-2}, m) \cdot A_{r-1}^T \quad (2.19)$$

Lo anterior define un proceso recursivo que en su iteración final entrega el vector \mathbf{y}^T solución de (2.17). Este proceso consume mucho menos memoria y tiempo de cálculo que la forma directa, dado que en ningún momento tenemos que construir explícitamente la matriz $A_r \otimes \dots \otimes A_2 \otimes A_1$.

2.5 Uso dentro de este trabajo

La teoría de probabilidades y la estadística son importantes dentro de este trabajo porque las cantidades que estimamos en Mecánica Cuántica son usualmente probabilidades y valores esperados. Luego debemos comprender estas cantidades completamente. Mencionamos a los arboles binarios en este capítulo dado que esta es la estructura de datos que usa el proceso recursivo del algoritmo que desarrollamos. El método de bootstrapping lo utilizamos para estimar errores experimentales a partir del remuestreo de los datos, lo que nos evita tener que repetir muchas veces el mismo experimento. Esto es debido a que utilizar los dispositivos cuánticos de IBM requiere de largos tiempos de espera, lo que hace inviable calcular errores repitiendo el experimento. Por último, el cálculo de eficiente de productos matriciales es fundamental para la eficiencia del algoritmo, que requiere un gran número de estos productos en cada una de sus etapas.



Capítulo 3

Mecánica Cuántica

Para comprender de mejor forma este trabajo necesitamos revisar los conceptos básicos y el lenguaje de la Mecánica Cuántica. El contenido de este capítulo esta fundamentalmente basado en el libro de Nielsen and Chuang [51]. Así, comenzamos en las secciones 3.1 y 3.2 con los postulados de la Mecánica Cuántica y la descripción de estados mixtos a partir de la matriz densidad, para luego continuar con la introducción de la fidelidad en la sección 3.3. En la sección 3.4 describimos los métodos usuales de tomografía cuántica de estados, y finalizamos en la sección 3.5 con conceptos básicos de Computación Cuántica.

3.1 Postulados de la Mecánica Cuántica

La Mecánica Cuántica es la rama de la física que explica la naturaleza a pequeñas escalas y niveles de energía. Está gobernada por cuatro postulados que no pueden ser derivados a partir de otras leyes físicas sino que su validez está dada por experimentos. El primer postulado nos indica como describir matemáticamente las propiedades cuánticas de un sistema físico:

1. Todo sistema físico a cualquier tiempo t tiene asociado un vector unitario $|\psi(t)\rangle$ denominado estado que contiene toda la información sobre el sistema. Este vive en un espacio de Hilbert separable y complejo \mathcal{H} con producto interior.

Dada una base ortonormal $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^N$ en \mathcal{H} podemos representar el estado en forma de ket:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle u_1 | \Psi \rangle \\ \langle u_2 | \Psi \rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde los coeficientes c_j son números complejos y $\langle u_j |$ representa el vector asociado a $|u_j\rangle$ en el espacio dual, $\langle u_j | = (|u_j\rangle)^\dagger$. Si la dimensión del espacio es 2, llamamos a $|\psi\rangle$ qubit.

El segundo postulado describe como cambian los estados cuánticos en el tiempo.

2. La evolución de un sistema cuántico cerrado es descrita por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (3.2)$$

donde H es el operador Hamiltoniano. Este postulado es equivalente a decir que la evolución está dada por una transformación unitaria U (donde $UU^\dagger = I$), de tal forma que $|\psi(t_2)\rangle = U(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle$, con t_1 el tiempo inicial y t_2 el final.

El tercer postulado describe las mediciones sobre sistemas cuánticos:

3. Las mediciones sobre sistemas cuánticos son descritas por un conjunto $\{M_m\}$ de operadores de medición que actúan en el espacio de estados del sistema a medir. Estos operadores satisfacen la relación $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$. El índice m etiqueta los distintos resultados del experimento. Dado un estado $|\psi\rangle$ del sistema cuántico antes de la medición, la probabilidad de obtener el resultado etiquetado por m es

$$p_m = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle, \quad (3.3)$$

y el estado inmediatamente después de que el sistema es medido es

$$|\psi_m\rangle = \frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}}. \quad (3.4)$$

Así, mediciones sobre sistemas cuánticos perturban el sistema, consecuencia que será importante en el desarrollo de este trabajo. De forma experimental usualmente se mide un operador hermítico E (observable) cuyos autovectores generan el conjunto de operadores de medición $M_m = \{|m\rangle\langle m|\}$, de tal forma que $\{|m\rangle\}$ forma una base ortonormal del espacio de Hilbert. Luego en este caso decimos que medimos una base, y que los elementos $|m\rangle\langle m|$ son proyectores.

Finalmente, el postulado 4 entrega el formalismo para trabajar con sistemas compuestos:

4. El espacio de estados \mathcal{H} de un sistema físico de n partes es el producto tensorial del espacio de estados \mathcal{H}_i de cada uno de los subsistemas, esto es,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n. \quad (3.5)$$

Usualmente el sistema completo es descrito por un estado $|\psi\rangle$ que no puede ser descompuesto en estados separados para cada subsistema individual, esto es, $|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$. En este caso, ciertas propiedades físicas están ahora contenidas en correlaciones no locales, y no se pueden atribuir a solo uno de los subsistemas, lo cual es una diferencia significativa con el mundo clásico. Los estados con esta propiedad se denominan entrelazados. Como ejemplo de lo anterior, tenemos el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle). \quad (3.6)$$

Los vectores $|0\rangle$ y $|1\rangle$ pueden representar las componentes de polarización en dos fotones, o del espín en dos electrones. Supongamos que medimos el conjunto

$$\{M_0 = |0\rangle\langle 0| \otimes I, M_1 = |1\rangle\langle 1| \otimes I\}. \quad (3.7)$$

Estos operadores solo entregan información sobre el primer subsistema. Sin embargo, si el resultado es 0, la otra partícula necesariamente debe estar en 0, y viceversa. Luego las mediciones sobre una partícula afectan los resultados de la otra, efecto que no sucede en estados de la forma $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$.

A lo largo de este trabajo, abreviamos $|i\rangle \otimes |j\rangle$ por $|ij\rangle$.

3.2 Matriz densidad

Otra forma de representar el estado de un sistema físico está dada por el operador densidad, que es particularmente útil para describir estados mixtos. Estos últimos aparecen cuando existe información insuficiente sobre el estado del sistema: antes de la medición el observador no sabe cual estado $|\psi_i\rangle$ dentro de una lista $\{|\psi_i\rangle\}$ está preparado en el sistema. Luego solo puede asignarles probabilidades $\{p_i\}$ a cada uno de los estados. Llamamos matriz densidad u operador densidad a

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (3.8)$$

La evolución del operador densidad de un tiempo t_0 a t en un sistema cerrado está dada por

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0), \quad (3.9)$$

con U unitaria. Si medimos el conjunto $\{M_m\}$ de operadores de medición sobre el sistema preparado en ρ , la probabilidad de obtener el resultado m es

$$p(m) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho), \quad (3.10)$$

y el estado tras la medición es

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (3.11)$$

Matemáticamente, las matrices densidades están caracterizadas por el siguiente teorema:

Teorema 1. *Un operador ρ que actúa sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} es una matriz densidad si y solo si satisface las condiciones:*

- ρ tiene traza igual a uno.
- ρ es un operador semidefinido positivo, esto es, sus autovalores son mayores o iguales a cero.

Si la matriz densidad de un sistema cuántico se puede escribir como $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ la llamamos estado puro. De lo otra forma, se dice que el estado es mixto. Las matrices densidad cumplen $\rho^2 \leq \rho$, donde la igualdad se da si y solo si el estado es puro.



3.3 Fidelidad

Una medida común de cercanía entre estados cuánticos es la fidelidad. Para dos matrices densidad ρ y σ que actúan sobre el mismo espacio de Hilbert está dada por

$$F(\rho, \sigma) = \left(\text{tr} \sqrt{\rho^{1/2} \sigma \rho^{1/2}} \right)^2. \quad (3.12)$$

Algunas propiedades de esta medida son:

- Es preservada por evoluciones unitarias U , esto es, $F(\rho, \sigma) = F(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger)$.
- Es simétrica en sus argumentos, $F(\rho, \sigma) = F(\sigma, \rho)$
- $F(\rho, \sigma) \in [0, 1]$.
- $F(\rho, \sigma) = 1$ si y solo si $\rho = \sigma$.

Si uno de los estados es puro, la fidelidad se simplifica a

$$F(|\psi\rangle, \sigma) = \langle \psi | \sigma | \psi \rangle. \quad (3.13)$$

En este último caso la función puede ser estimada experimentalmente midiendo sobre un sistema preparado en el estado σ una base que contenga a $|\psi\rangle$, de tal forma que

$$F(|\psi\rangle, \sigma) \approx n_\psi / N, \quad (3.14)$$

donde n_ψ es el número de cuentas en el detector asociado al estado $|\psi\rangle$, y N es el número total de cuentas.

3.4 Tomografía cuántica

La tomografía cuántica de estados es un procedimiento que reconstruye el estado de un sistema físico utilizando los resultados de mediciones sobre un conjunto de estados idénticamente preparados. Luego, relaciona el modelo matemático de estado cuántico con cantidades experimentalmente medibles, y permite hacer predicciones probabilistas de futuras mediciones sobre el sistema. En un objeto clásico usualmente necesitamos una sola copia para obtener una caracterización completa del sistema. En el caso cuántico, el postulado de medición y el teorema de no-cloning demandan un conjunto de copias del sistema para realizar el protocolo tomográfico. El primero impide reconstruir el estado con una sola copia, ya que es imposible realizar mediciones arbitrarias sobre sistemas sin perturbarlos, y además los resultados de las mediciones son aleatorios. El segundo impide que a partir de un solo sistema preparado en el estado desconocido podamos obtener copias perfectas, y de esta forma saltarnos el impedimento anterior.

Dependiendo de los operadores de medición que se elijan, tenemos distintos protocolos

de tomografía. El más simple de todos es la tomografía estándar, que revisaremos a continuación. Si no tenemos información previa, asumimos en general que el sistema está en un estado mixto. La matriz densidad ρ que actúa sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H}_d de dimensión d tiene un total de $d^2 - 1$ coeficientes reales linealmente independientes, ya que es hermítica y satisface la condición $\text{tr}(\rho) = 1$. Por lo tanto, necesitamos un conjunto de $d^2 - 1$ ecuaciones lineales para poder reconstruir el estado del sistema, siempre y cuando estas ecuaciones sean linealmente independientes. Con esto nos aseguramos que la solución al problema sea única. Así, medimos un conjunto $\{E_i\}$ de al menos $d^2 - 1$ observables que generen el espacio de las matrices hermíticas que actúan sobre \mathcal{H}_d , esto es, cualquier ρ se puede escribir como combinación lineal de los E_i . Del postulado de medición vemos que el valor esperado está dado por

$$p_i = \text{tr}(E_i \rho), \quad (3.15)$$

donde p_i se estima a partir del histograma obtenido al medir repetidamente la base asociada a E_i sobre el sistema preparado en ρ .

Un operador X que vive en el espacio de las matrices de $d \times d$ puede escribirse en forma vectorial, concatenando sus d columnas en un vector \vec{X} de dimensión d^2 . En esta representación, tenemos que

$$\vec{X}^\dagger \cdot \vec{Y} = \text{tr}(X^\dagger Y), \quad (3.16)$$

donde \cdot representa el producto escalar en \mathbb{C}^2 . Ahora definimos la matriz A como

$$A = \begin{pmatrix} \vec{E}_1^\dagger \\ \vec{E}_2^\dagger \\ \vdots \\ \vec{E}_n^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Esta matriz contiene n observables medidos sobre el sistema en su forma vectorial. Aplicando esta matriz a $\vec{\rho}$ obtenemos el sistema de ecuaciones que asocia las probabilidades

estimadas experimentalmente con los coeficientes de la matriz densidad,

$$A\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \vec{E}_1^\dagger \vec{\rho} \\ \vec{E}_2^\dagger \vec{\rho} \\ \vdots \\ \vec{E}_n^\dagger \vec{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{tr}(E_1\rho) \\ \text{tr}(E_2\rho) \\ \vdots \\ \text{tr}(E_n\rho) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \vec{p}. \quad (3.18)$$

Si $n \geq d^2 - 1$ y el conjunto de observables es informacionalmente completo, la solución para $\vec{\rho}$ está dada por la pseudo-inversa de la matriz A , y luego obtenemos una estimación para el operador densidad del sistema

$$\vec{\rho} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{p}. \quad (3.19)$$

3.5 Computación Cuántica

La Computación Cuántica aprovecha las propiedades de la Mecánica Cuántica para resolver de forma mucho más eficiente ciertos problemas difíciles de tratar clásicamente. Dentro de estos están la descomposición de números enteros en sus factores primos, la búsqueda de términos en una base de datos no ordenada, simulación de sistemas cuánticos, problemas de optimización y machine learning, entre otros.

Usualmente el modelo que se utiliza para describir la computación cuántica está compuesto de cables y compuertas lógicas elementales, organizados en forma de circuito. Los primeros transportan la información entre las distintas partes del circuito, mientras que las compuertas son operaciones unitarias que manipulan y transforman la información contenida en los estados. Así, para ejecutar un algoritmo en un procesador cuántico necesitamos inicializar un estado conocido, aplicar un conjunto de compuertas lógicas y luego medir sobre alguna base para obtener información clásica a partir de la operación cuántica. Este proceso puede requerir ser repetido en algunos algoritmos.

No todos los sistemas físicos pueden ser utilizados para implementar computación cuan-

tica. Tradicionalmente, existe un conjunto de criterios que un sistema cuántico debe cumplir para ser capaz de albergar computación cuántica [52]:

1. Un sistema físico escalable: Debe haber una forma definida de aumentar el número de qubits.
2. La habilidad de inicializar el estado de los qubits, esto es, llevar el sistema a un estado de partida conocido y controlado.
3. Tiempo de coherencia más largo que la duración de las operaciones cuánticas a realizar.
4. Un conjunto universal de compuertas cuánticas, esto es, que sean capaces de reproducir cualquier otra compuerta posible.
5. Capacidad de medir los qubits.

Algunos sistemas candidatos para la computación cuántica son los circuitos superconductores [53], iones atrapados [54], quantum dots [55], átomos neutrales en optical lattices [56], etc.

Un conjunto universal de compuertas cuánticas para un sistema es una familia a partir del cual se puede descomponer cualquier compuerta arbitraria en el sistema, esto es, cualquier operación unitaria se puede aproximar con precisión arbitraria por una secuencia de elementos en el conjunto. Para simplificar la computación buscamos una familia finita de compuertas universales. Esto puede traer problemas de eficiencia, en el sentido que existen transformaciones unitarias que requieren un número exponencial de compuertas para ser aproximadas. Sin embargo, los algoritmos utilizados en computación cuántica usualmente trabajan con operaciones eficientes. En general, se utiliza como conjunto universal a las compuertas de un qubit

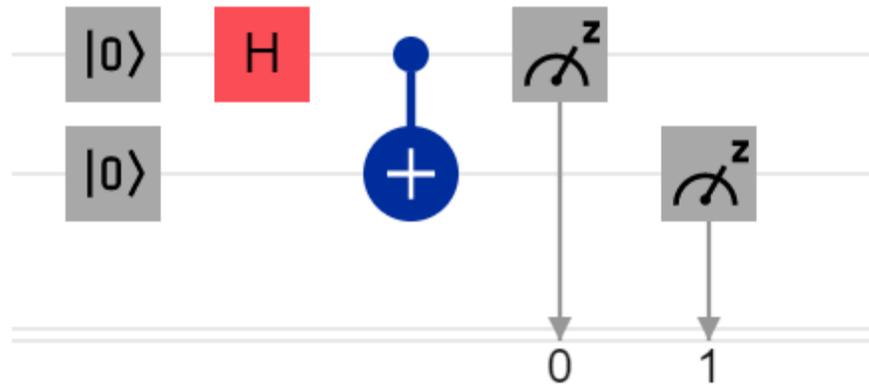


Figura 3.1: Circuito cuántico básico de 2 qubits, con compuertas H y $CNOT$ seguidas de mediciones en la base canónica. Fuente: Elaboración propia.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

y la compuerta de dos qubits

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

En la figura 3.1 vemos un ejemplo de circuito cuántico: preparamos un sistema de 2 qubits el estado $|\psi\rangle = |00\rangle$ y aplicamos la operación $H \otimes I$, esto es, una compuerta Hadamard sobre el primer qubit y la identidad sobre el segundo. Luego entrelazamos los 2 sistemas aplicando una compuerta $CNOT$ con el primer qubit como control y el segundo de target. Por último medimos utilizando la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, almacenando el resultado en dos bits clásicos.

Para poder realizar las operaciones unitarias requeridas en la computación cuántica es necesario tener un sistema cuántico aislado de forma casi perfecta del ambiente. Al mismo tiempo, necesitamos que los qubits interactuen entre sí para procesar la información, y

además, controlar el sistema desde el exterior y realizar mediciones. Estas dificultades provocan que actualmente los procesadores cuánticos estén sometidos a una gran cantidad de ruido. Luego, las operaciones a realizar son imperfectas, el número de qubits es de alrededor de unas pocas decenas, y la cantidad de operaciones que se pueden realizar en la ejecución de un algoritmo está limitada por el tiempo de coherencia del dispositivo cuántico.

No todas las compuertas cuánticas tienen el mismo nivel de error de preparación. Como es natural, controlar un sistema aplicando operaciones locales es más fácil que controlar dos al mismo tiempo utilizando operaciones globales, que requieren entrelazamiento. Es por esto que las compuertas de un solo qubit, representadas por H , S y T tienen un mejor desempeño que la compuerta de dos qubits $CNOT$. Actualmente, las primeras se preparan con un error de al menos un orden de magnitud menor que las segundas, y por lo tanto es importante desde el punto de vista experimental desarrollar algoritmos y protocolos que utilicen la menor cantidad de compuertas $CNOT$ posibles [57].

Capítulo 4

Tomografía Cuántica Escalable para Estados Puros

En este capítulo mostramos el trabajo desarrollado para solucionar el problema de la dimensión en tomografía de estados cuánticos. Para esto, presentamos un método analítico que reconstruye estados puros arbitrarios en cualquier espacio de Hilbert de dimensión finita d utilizando un mínimo de 3 observables o bases, esto es, al menos $3d$ medidas proyectivas. En la sección 4.1 consideramos un vector complejo arbitrario como la superposición de dos vectores mutuamente ortogonales con una fase relativa desconocida, que determinamos a partir de medir al menos 2 proyectores en el sistema. En la sección 4.2 mostramos que lo anterior se puede aplicar a un vector de dimensión 2, para luego, en la sección 4.3 mostrar el método tomográfico desarrollado para estados arbitrarios. Continuamos en secciones 4.4 y 4.5 con la discusión de las bases de medición necesarias, incluyendo el caso de sistemas de qubits, y la generalización del método a sistemas afectados por ruido blanco, para finalizar con simulaciones numéricas y resultados experimentales del protocolo en secciones 4.6, 4.7 y 4.8.

4.1 Un vector arbitrario

Sea $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_\alpha \oplus \mathcal{H}_\beta$ un espacio de Hilbert de dimensión d_n suma directa de dos subespacios \mathcal{H}_α y \mathcal{H}_β de dimensión d_α y d_β , respectivamente. Un vector arbitrario en \mathcal{H}_n se puede escribir como

$$|\tilde{\Psi}_n\rangle = |\tilde{\Psi}_\alpha\rangle + e^{i\varphi}|\tilde{\Psi}_\beta\rangle, \quad (4.1)$$

con $|\tilde{\Psi}_\alpha\rangle$ en \mathcal{H}_α , $|\tilde{\Psi}_\beta\rangle$ en \mathcal{H}_β y $0 \leq \varphi < 2\pi$. Estamos interesados en encontrar una ecuación para la fase relativa φ asumiendo que conocemos por completo $|\tilde{\Psi}_\alpha\rangle$ y $|\tilde{\Psi}_\beta\rangle$.

Sea

$$|n\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle \quad (4.2)$$

un vector unitario en \mathcal{H}_n tal que $|\alpha\rangle$ pertenece a \mathcal{H}_α y $|\beta\rangle$ pertenece a \mathcal{H}_β . Asumimos que $|n\rangle$ es una cantidad conocida. Luego calculamos

$$\begin{aligned} |\langle n|\tilde{\Psi}_n\rangle|^2 &= |\langle\alpha|\tilde{\Psi}_\alpha\rangle + e^{i\varphi}\langle\beta|\tilde{\Psi}_\beta\rangle|^2 \\ &= |\langle\alpha|\tilde{\Psi}_\alpha\rangle|^2 + |\langle\beta|\tilde{\Psi}_\beta\rangle|^2 + 2\Re [e^{i\varphi}\langle\tilde{\Psi}_\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\tilde{\Psi}_\beta\rangle]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Lo anterior expresa la fidelidad entre $|n\rangle$ y $|\tilde{\Psi}_n\rangle$ como la suma de fidelidades entre vectores que viven en mismos subespacios \mathcal{H}_α y \mathcal{H}_β más un término de interferencia que contiene información sobre la fase relativa φ . Ahora, definimos las cantidades

$$\tilde{p} \equiv \frac{|\langle n|\tilde{\Psi}_n\rangle|^2 - |\langle\alpha|\tilde{\Psi}_\alpha\rangle|^2 - |\langle\beta|\tilde{\Psi}_\beta\rangle|^2}{2} \quad (4.4)$$

y

$$N \equiv \langle\tilde{\Psi}_\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\tilde{\Psi}_\beta\rangle. \quad (4.5)$$

Si sustituimos las identidades (4.4) y (4.5) en la ecuación (4.3) podemos reescribirla como

$$\tilde{p} = \Re [e^{i\varphi}N]. \quad (4.6)$$

Luego, si conocemos el valor numérico de $|\langle n|\tilde{\psi}_n\rangle|^2$, y dado que conocemos $|\tilde{\psi}_\alpha\rangle$, $|\tilde{\psi}_\beta\rangle$ y $|n\rangle$, encontramos una ecuación para la fase relativa φ ,

$$\begin{pmatrix} \Re [N] & -\Im [N] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \tilde{p}. \quad (4.7)$$

Esta ecuación es fundamental para el proceso recursivo en el que se basa nuestro algoritmo, ya que nos permite construir sistemas de ecuaciones para fases relativas desconocidas.

Ahora, asumamos que el vector $|\tilde{\psi}_n\rangle$ en la ecuación (4.1) son componentes de un estado cuántico $|\psi_\gamma\rangle$ de dimension $d_\gamma \geq d_n$, esto es,

$$|\psi_\gamma\rangle = |\tilde{\psi}_l\rangle + |\tilde{\psi}_n\rangle + |\tilde{\psi}_m\rangle, \quad (4.8)$$

con $|\psi_\gamma\rangle$ en \mathcal{H}_γ y $|\tilde{\psi}_l\rangle, |\tilde{\psi}_m\rangle$ en \mathcal{H}_n^\perp . También asumamos un conjunto de estados $|n_1\rangle, |n_2\rangle, \dots, |n_f\rangle$ en \mathcal{H}_n con la forma de la ecuación (4.2). Dado que estos últimos tienen componentes no nulas solo en \mathcal{H}_n , se cumple que $|\langle n_j|\psi_\gamma\rangle|^2 = |\langle n_j|\tilde{\psi}_n\rangle|^2$ y tenemos ecuaciones de la forma (4.3).

Si $|\psi_\gamma\rangle$ es el estado de algún sistema físico, podemos estimar un conjunto de f probabilidades o fidelidades $p_j = |\langle n_j|\psi_\gamma\rangle|^2 = |\langle n_j|\tilde{\psi}_n\rangle|^2$ a partir de mediciones en bases que contengan los estados $|n_j\rangle$. Por lo tanto, suponiendo que conocemos $|\tilde{\psi}_\alpha\rangle$, $|\tilde{\psi}_\beta\rangle$ y usando las identidades (4.4), (4.5), (4.7) con el conjunto $\{p_j\}_{j=1}^f$ como estimados de $|\langle n_j|\tilde{\psi}_n\rangle|^2$, encontramos un sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \Re [N_1] & -\Im [N_1] \\ \Re [N_2] & -\Im [N_2] \\ \vdots & \vdots \\ \Re [N_f] & -\Im [N_f] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \vdots \\ \tilde{p}_f \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

para la fase relativa φ entre $|\tilde{\psi}_\alpha\rangle$ y $|\tilde{\psi}_\beta\rangle$. Dado que tenemos dos incógnitas, necesitamos al menos dos proyectores $|n_1\rangle, |n_2\rangle$ para que la matriz a la izquierda sea invertible y el sistema tenga una única solución para $e^{i\varphi}$. Con dos mediciones la matriz en (4.9) es de

tamaño 2×2 y la solución es

$$e^{i\varphi} = i \frac{\tilde{p}_2 N_1^* - \tilde{p}_1 N_2}{\Im [N_1 N_2^*]}. \quad (4.10)$$

La matriz no es invertible cuando $\Im(N_1 N_2^*) = \langle \tilde{\psi}_\alpha | \alpha_1 \rangle \langle \beta_1 | \tilde{\psi}_\beta \rangle \langle \tilde{\psi}_\beta | \beta_2 \rangle \langle \alpha_2 | \tilde{\psi}_\alpha \rangle = 0$ para este último caso. Una forma de solucionar este problema es medir otro proyector $|n_3\rangle \in \mathcal{H}_n$, agregarlo al sistema de ecuaciones, y encontrar la solución calculando la pseudo-inversa de Moore-Penrose.

4.2 Un vector de dimensión 2

Para ilustrar el procedimiento previo utilizamos un vector $|\tilde{\psi}_n^{(2)}\rangle$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_n^{(2)}$ de dimensión 2:

$$|\tilde{\psi}_n^{(2)}\rangle = c_k |k\rangle + c_{k+1} e^{i(\varphi_{k+1} - \varphi_k)} |k+1\rangle. \quad (4.11)$$

Este último es parte de un estado cuántico $|\psi\rangle = |\psi_l\rangle + e^{i\varphi_k} |\tilde{\psi}_n^{(2)}\rangle + |\psi_m\rangle$ que vive en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(d)}$ de dimensión d mayor o igual a 2, $\mathcal{H}_n^{(2)} \subseteq \mathcal{H}$ y donde $|\psi_l\rangle$ y $|\psi_m\rangle$ están en $\mathcal{H}_n^{(2)\perp}$. Nuestro objetivo es encontrar $|\tilde{\psi}_n^{(2)}\rangle$ utilizando el procedimiento de la sección anterior.

Primero medimos sobre el sistema preparado en el estado $|\psi\rangle$ la base canónica para obtener el conjunto de probabilidades $\{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_d\}$. Estos son valores estimados empíricos de las cantidades $\{|c_1|^2, \dots, |c_k|^2, |c_{k+1}|^2, \dots, |c_d|^2\}$. Luego fijamos $c_k = \sqrt{p_k}$, $c_{k+1} = \sqrt{p_{k+1}}$ y definimos

$$|\tilde{\psi}_\alpha^{(1)}\rangle = c_k |k\rangle, \quad |\tilde{\psi}_\beta^{(1)}\rangle = c_{k+1} |k+1\rangle. \quad (4.12)$$

Esto nos permite escribir $|\tilde{\psi}_n^{(2)}\rangle$ en la forma de la ecuación (4.1),

$$|\tilde{\psi}_n^{(2)}\rangle = |\tilde{\psi}_\alpha^{(1)}\rangle + e^{i(\varphi_{k+1} - \varphi_k)} |\tilde{\psi}_\beta^{(1)}\rangle, \quad (4.13)$$

donde dado que medimos la base canónica, la única cantidad desconocida es la fase relativa $(\varphi_{k+1} - \varphi_k)$.

Si uno de los coeficientes de $|\tilde{\psi}_n^{(2)}\rangle$ es cero, entonces $|\tilde{\psi}_n^{(2)}\rangle = c_k|k\rangle$ o $|\tilde{\psi}_n^{(2)}\rangle = c_{k+1}|k+1\rangle$, y encontramos el vector desconocido solo a partir de conocer c_k y c_{k+1} . Ahora, si ninguno de los 2 coeficientes es nulo, definimos f estados en $\mathcal{H}_n^{(2)}$ de la forma

$$\begin{aligned} |n_1\rangle &= a_1|k\rangle + b_1e^{i\phi_1}|k+1\rangle, \\ &\vdots \\ |n_f\rangle &= a_f|k\rangle + b_fe^{i\phi_f}|k+1\rangle, \end{aligned} \quad (4.14)$$

con a_j, b_j coeficientes reales. Proyectando $|\tilde{\psi}_n^{(2)}\rangle$ sobre $|n_1\rangle, \dots, |n_f\rangle$ y usando los valores experimentales de las fidelidades, $p_j = |\langle n_j | \tilde{\psi}_n^{(2)} \rangle|^2$, además de las ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.7), obtenemos

$$c_k c_{k+1} \begin{pmatrix} a_1 b_1 \cos \phi_1 & a_1 b_1 \sin \phi_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_f b_f \cos \phi_f & a_f b_f \sin \phi_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_k) \\ \sin(\varphi_{k+1} - \varphi_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \vdots \\ \tilde{p}_f \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

El sistema de ecuaciones anterior tiene solución única si y solo si la primera matriz a la izquierda es invertible. Los ángulos ϕ_j en los vectores $|n_j\rangle$ son arbitrarios y no dependen del estado $|\tilde{\psi}_n^{(2)}\rangle$. Luego, si medimos sobre un conjunto de bases que contengan al menos dos proyectores $|n_1\rangle$ y $|n_2\rangle$, siempre podemos escoger estos últimos para que se satisfaga la condición de invertibilidad. Con dos mediciones la solución es

$$e^{i(\varphi_{k+1} - \varphi_k)} = i \frac{\tilde{p}_2 e^{i\phi_1} / a_1 b_1 - \tilde{p}_1 e^{i\phi_2} / a_2 b_2}{c_k c_{k+1} \Im [e^{-i\phi_1} e^{i\phi_2}]}. \quad (4.16)$$

Por lo tanto, como conocemos c_k , c_{k+1} y $e^{i(\varphi_{k+1} - \varphi_k)}$, encontramos el vector $|\tilde{\psi}_n^{(2)}\rangle$ que estamos buscando. Todo lo anterior solo midiendo la base canónica y al menos dos proyectores en $\mathcal{H}_n^{(2)}$.

El procedimiento de esta sección se puede generalizar para reconstruir estados arbitrarios $|\psi^{(d)}\rangle$ en cualquier dimensión d de forma inductiva, como veremos en la próxima sección.

4.3 Un estado cuántico arbitrario

Consideremos un estado puro arbitrario

$$|\psi^{(d)}\rangle = \sum_{k=1}^d c_k e^{i\varphi_k} |k\rangle \quad (4.17)$$

en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(d)}$ de dimensión finita d . Los coeficientes en $|\psi^{(d)}\rangle$ son tales que $0 \leq c_k \leq 1$ y las fases satisfacen $0 \leq \varphi_k < 2\pi$.

Para comenzar el protocolo tomográfico descomponemos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(d)}$ en sumas directas de espacios de Hilbert de dimensión 2 y 1. En particular, si d es par, podemos elegir $d/2$ espacios de Hilbert de dimensión 2, esto es, $\mathcal{H}^{(d)} = \mathcal{H}_{d/2}^{(2)} \oplus \mathcal{H}_{d/2+1}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{d-1}^{(2)}$. Si d es impar, elegimos $(d-1)/2$ espacios de Hilbert de dimensión 2 y un espacio de Hilbert de dimensión 1: $\mathcal{H}^{(d)} = \mathcal{H}_{(d-1)/2+1}^{(2)} \oplus \mathcal{H}_{(d-1)/2+2}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{d-1}^{(2)} \oplus \mathcal{H}_d^{(1)}$. Los superíndices denotan la dimensión de los espacios de Hilbert, y dado que en el algoritmo utilizaremos una estructura de árbol binario, los subíndices denotarán nodos en el árbol. En cada espacio de Hilbert $\mathcal{H}_j^{(2)}$ vive una parte

$$\begin{aligned} |\psi_j^{(2)}\rangle &= c_{2k-1} e^{i\varphi_{2k-1}} |2k-1\rangle + c_{2k} e^{i\varphi_{2k}} |2k\rangle \\ &= e^{i\varphi_{2k-1}} \left(c_{2k-1} |2k-1\rangle + c_{2k} e^{i(\varphi_{2k}-\varphi_{2k-1})} |2k\rangle \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

del estado $|\psi^{(d)}\rangle$, mientras que si d es impar, en $\mathcal{H}_d^{(1)}$ vive la parte $c_d e^{i\varphi_d} |d\rangle$ de $|\psi^{(d)}\rangle$.

Midiendo la base canónica repetidamente sobre el sistema físico que contiene a $|\psi^{(d)}\rangle$ obtenemos un conjunto de probabilidades p_k que pueden ser usadas para estimar todos los módulos $c_k = \sqrt{p_k}$ en la ecuación (4.17). Luego para conocer por completo el estado solo necesitamos encontrar los valores de las fases φ_k .

Si medimos al menos dos proyectores de la forma de la ecuación (4.14) en cada $\mathcal{H}_j^{(2)}$ podemos encontrar todas las fases relativas de la forma $e^{i(\varphi_{2k}-\varphi_{2k-1})}$ que aparecen en la ecuación (4.18) empleando los resultados de estas mediciones, y las ecuaciones (4.4), (4.5)

y (4.7). Así, conocemos todos los términos $|\tilde{\psi}_j^{(2)}\rangle = c_{2k-1}|2k-1\rangle + c_{2k}e^{i(\varphi_{2k}-\varphi_{2k-1})}|2k\rangle$. Para encontrar el resto de las fases φ_{2k-1} utilizamos un árbol binario completo y lleno. Si d es par, el árbol tiene $d-1$ nodos, y las hojas son los $d/2$ vectores de dimensión 2 $|\tilde{\psi}_j^{(2)}\rangle$, con $j = d/2, d/2+1, \dots, d-1$. Si d es impar el árbol tiene d nodos y las hojas son $(d-1)/2+1$ vectores $|\tilde{\psi}_j^{(2)}\rangle$, donde $j = (d-1)/2+1, (d-1)/2+2, \dots, d-1$, más $|\tilde{\psi}_d^{(1)}\rangle = c_d|d\rangle$. Este último vector se obtiene de medir la base canónica. Dado que conocemos todas las hojas, ahora podemos comenzar a ascender en el árbol. Cada nodo interno $|\tilde{\psi}_j^{(n)}\rangle$ es un vector generado por la suma de sus hijos y una fase relativa, esto es, $|\tilde{\psi}_j^{(n)}\rangle = |\tilde{\psi}_{2j}^{(l)}\rangle + e^{i\varphi}|\tilde{\psi}_{2j+1}^{(m)}\rangle$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_j^{(n)} = \mathcal{H}_{2j}^{(l)} \oplus \mathcal{H}_{2j+1}^{(m)}$, $n = l+m$. Como de los pasos anteriores ya conocemos los hijos $|\tilde{\psi}_{2j}^{(l)}\rangle$ y $|\tilde{\psi}_{2j+1}^{(m)}\rangle$, para obtener $|\tilde{\psi}_j^{(j)}\rangle$ solo tenemos que encontrar la fase relativa φ midiendo al menos 2 proyectores de la forma de la ecuación (4.2) en $\mathcal{H}_j^{(n)}$ y usando las ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.7). Aplicando este procedimiento de forma recursiva para cada nodo, podemos encontrar el estado del sistema $|\psi^{(d)}\rangle$ cuando alcanzamos la raíz del árbol, excepto por una fase global.

Como ejemplo de lo anterior, en la figura 4.1 vemos la estructura necesaria para encontrar un estado arbitrario $|\psi^{(8)}\rangle$ en $d = 8$. Dado que la dimensión es par, tenemos 4 hojas y un total de 7 nodos. Los nodos con $j = 4, 5, 6, 7$ contienen vectores de la forma

$$|\tilde{\psi}_j^{(2)}\rangle = c_{2k-1}|2k-1\rangle + c_{2k}e^{i(\varphi_{2k}-\varphi_{2k-1})}|2k\rangle, \quad (4.19)$$

donde $k = 1, 2, 3, 4$ respectivamente. Los nodos con j igual a 2 y 3 representan los vectores

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_j^{(4)}\rangle &= c_{2k-1}|2k-1\rangle + c_{2k}e^{i(\varphi_{2k}-\varphi_{2k-1})}|2k\rangle \\ &\quad + c_{2k+1}e^{i(\varphi_{2k+1}-\varphi_{2k-1})}|2k+1\rangle + c_{2k+2}e^{i(\varphi_{2k+2}-\varphi_{2k-1})}|2k+2\rangle \\ &= \left[c_{2k-1}|2k-1\rangle + c_{2k}e^{i(\varphi_{2k}-\varphi_{2k-1})}|2k\rangle \right] \\ &\quad + e^{i(\varphi_{2k+1}-\varphi_{2k-1})} \left[c_{2k+1}|2k+1\rangle + c_{2k+2}e^{i(\varphi_{2k+2}-\varphi_{2k+1})}|2k+2\rangle \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

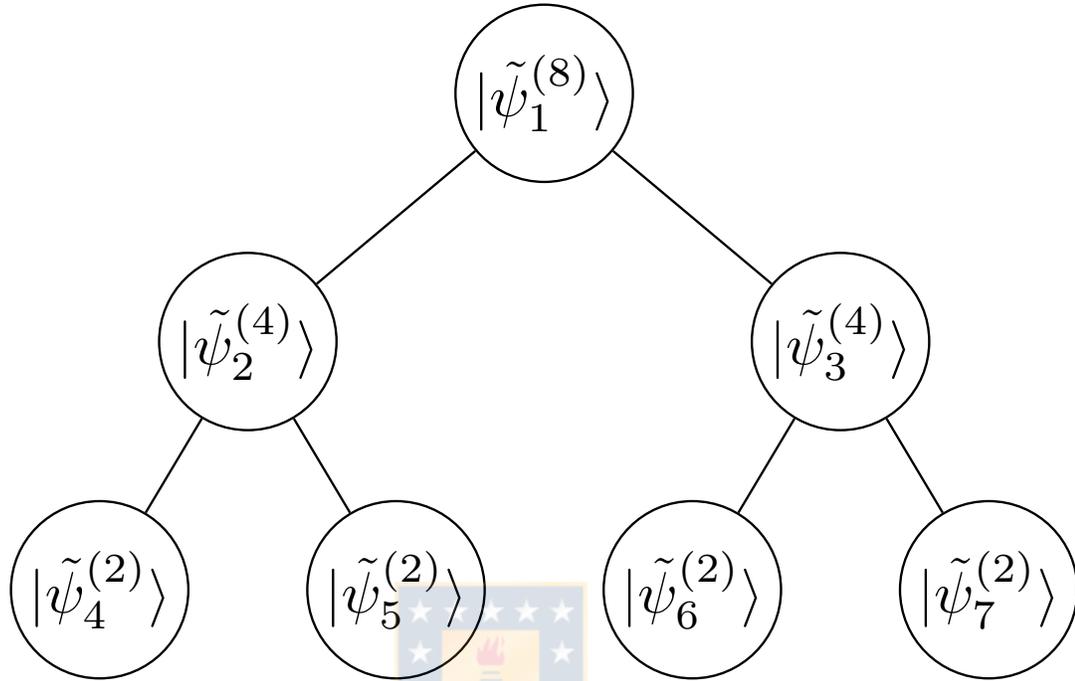


Figura 4.1: Árbol para reconstruir estados en $d = 8$. Las hojas contienen vectores de dimensión 2, los nodos 2 y 3 vectores de dimensión 4 y la raíz el estado del sistema. Fuente: Elaboración propia.

con $k = 1, 3$. De esta última ecuación vemos que los términos entre corchetes son conocidos del paso anterior, ya que son vectores de dimensión 2 contenidos en las hojas del árbol. Finalmente, la raíz (nodo 1) contiene el estado del sistema excepto por una fase global, $|\tilde{\psi}_1^{(8)}\rangle = |\tilde{\psi}_2^{(4)}\rangle + e^{i(\varphi_5 - \varphi_1)}|\tilde{\psi}_3^{(4)}\rangle = e^{-i\varphi_1}|\psi^{(8)}\rangle$. Como el árbol tiene un total de 7 nodos, y es necesario medir 2 proyectores por nodo, tenemos que medir al menos 14 proyectores, además de la base canónica, para desarrollar el algoritmo.

En la figura 4.2 vemos un ejemplo para un estado de dimensión 5. En este caso el número de hojas es 3 y el número total de nodos es 5. Los nodos 3 y 4 contienen vectores de

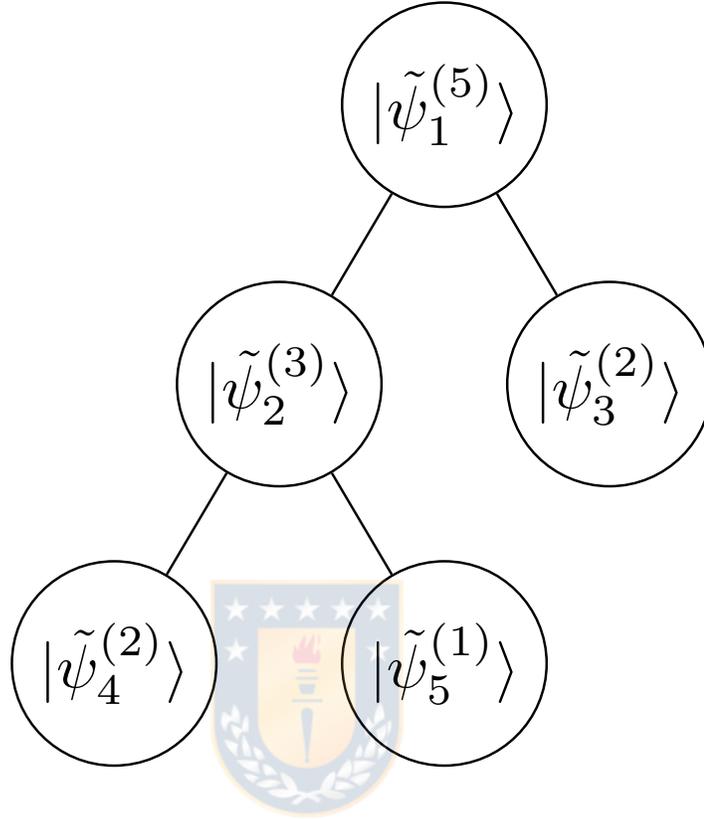


Figura 4.2: Árbol para reconstruir estados en $d = 5$. Los nodos 3 y 4 tienen vectores de dimensión 2, el nodo 5 un vector de dimensión 1, el nodo 2 contiene un vector de dimensión 3 y la raíz el estado del sistema. Fuente: Elaboración propia.

dimensión 2 dados por

$$|\tilde{\psi}_3^{(2)}\rangle = c_1|1\rangle + c_2e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}|2\rangle, \quad (4.21)$$

$$|\tilde{\psi}_4^{(2)}\rangle = c_3|3\rangle + c_4e^{i(\varphi_4-\varphi_3)}|4\rangle, \quad (4.22)$$

mientras que el nodo 5 contiene a $|\psi_5^{(1)}\rangle = c_5|5\rangle$. El nodo 2 se construye a partir de sus hijos $j = 4, 5$, y está dado por $|\tilde{\psi}_2^{(3)}\rangle = c_3|3\rangle + c_4e^{i(\varphi_4-\varphi_3)}|4\rangle + c_5e^{i(\varphi_5-\varphi_3)}|5\rangle$, mientras que la raíz se construye a partir de los nodos 2 y 3, llegando a $|\tilde{\psi}_1^{(5)}\rangle = |\tilde{\psi}_3^{(2)}\rangle + e^{i(\varphi_3-\varphi_1)}|\tilde{\psi}_2^{(3)}\rangle$. El número total de nodos en el árbol es 10. En este caso, para ejecutar el protocolo nece-

sitamos medir 18 proyectores más la base canónica, ya que esta última ya contiene la información para encontrar $|\psi_1^{(5)}\rangle = c_5|5\rangle$.

4.4 Bases del protocolo

Para reconstruir un estado arbitrario en dimensión d necesitamos medir la base canónica y al menos dos proyectores linealmente independientes por cada nodo en el árbol, excepto por los nodos que contienen vectores de dimensión 1, dado que la información necesaria para reconstruir estos últimos se encuentra en la base canónica. Para los estados en dimensión par, con $d - 1$ nodos, esto significa un total de $2d - 2$ proyectores. Esta es la misma cantidad de proyectores que se necesita para reconstruir los estados de dimensión impar, que tienen d nodos, pero con el último de estos conteniendo un vector de dimensión 1.

De lo anterior, podemos organizar los proyectores en un mínimo de 2 bases ortonormales, que a su vez representan un operador de medición. Una forma simple es generar $d - 1$ vectores aleatorios, uno en cada $\mathcal{H}_j^{(n)}$, $n > 1$. Luego estos vectores se ortonormalizan utilizando el método de Gram-Schmidt para formar una base, completando con un vector arbitrario. Este procedimiento se repite por cada una de las bases deseadas.

Siempre y cuando los proyectores que medimos en cada espacio de Hilbert sean linealmente independientes, podemos encontrar soluciones para las fases en el sistema de ecuaciones (4.9) excepto por un conjunto de estados de medida nula. Por ejemplo, en $d = 3$, un estado arbitrario se puede escribir como

$$|\psi_3\rangle = c_1|1\rangle + c_2e^{i\varphi_2}|2\rangle + c_3e^{i\varphi_3}|3\rangle. \quad (4.23)$$

Dos bases que podríamos utilizar en el algoritmo son

$$R_3 = \left\{ \begin{aligned} |r_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \\ |r_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|r_1^\perp\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle, \\ |r_2^\perp\rangle & \end{aligned} \right\}, \quad (4.24)$$

$$S_3 = \left\{ \begin{aligned} |s_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle, \\ |s_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|s_1^\perp\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|3\rangle, \\ |s_2^\perp\rangle & \end{aligned} \right\}, \quad (4.25)$$

donde los estados $|x^\perp\rangle$ son ortogonales a $|x\rangle$. Usando los proyectores $|r_1\rangle$ y $|s_1\rangle$ con sus mediciones asociadas podemos encontrar fácilmente $e^{i\varphi_2}$. Sin embargo, si las primeras dos componentes de $|\psi_3\rangle$ son proporcionales a $|r_1\rangle$ o $|s_2\rangle$, una de las ecuaciones en el sistema (4.9) es cero, y no podemos encontrar $e^{i\varphi_3}$ porque tenemos un número infinito de soluciones.

4.5 Ruido blanco

Una pregunta válida sobre el método es como afectan las imperfecciones asociadas a la preparación del estado y al experimento al desempeño de nuestro protocolo. Un modelo usado para caracterizar el ruido producido por el ambiente es el ruido blanco o Gaussiano, que afecta de la misma forma a todos los autovalores de la matriz densidad. Estados puros arbitrarios $|\psi\rangle$ afectados por ruido blanco son transformado en estados mixtos de la forma

$$\rho = (1 - \lambda)|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{\lambda}{d}\mathbb{I}, \quad (4.26)$$

donde \mathbb{I} es el operador identidad y λ es el parámetro de mixtura. La pureza $Tr(\rho^2)$ del estado y $\lambda \in [0, 1]$ se relacionan por la expresión

$$\lambda = 1 - \sqrt{\frac{Tr(\rho^2) - 1/d}{1 - 1/d}}. \quad (4.27)$$

Consideremos ahora el impacto del ruido blanco en el método. La medición de un proyector con solo dos coeficientes no nulos $|n\rangle = a|k\rangle + be^{i\phi}|k+1\rangle$ entrega

$$\begin{aligned} \langle n|\rho|n\rangle &= (1-\lambda)|c_k|^2|a|^2 + \frac{\lambda}{d}|a|^2 + (1-\lambda)|c_{k+1}|^2|b|^2 + \frac{\lambda}{d}|b|^2 \\ &\quad + 2(1-\lambda)|a||b|c_k c_{k+1} \Re \left[e^{-i\phi} e^{i(\varphi_{k+1}-\varphi_k)} \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

y la medición de los estados de la base canónica $|k\rangle, |k+1\rangle$ entrega

$$p_k^{(\rho)} = (1-\lambda)|c_k|^2 + \frac{\lambda}{d}, \quad (4.29)$$

$$p_{k+1}^{(\rho)} = (1-\lambda)|c_{k+1}|^2 + \frac{\lambda}{d}. \quad (4.30)$$

Ahora, definimos

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(\rho)} &= \left(\langle n|\rho|n\rangle - (1-\lambda)|c_k|^2|a|^2 - \frac{\lambda}{d}|a|^2 - (1-\lambda)|c_{k+1}|^2|b|^2 - \frac{\lambda}{d}|b|^2 \right) / (|a||b|) \\ &= \left(\langle n|\rho|n\rangle - p_k^{(\rho)}|a|^2 - p_{k+1}^{(\rho)}|b|^2 \right) / (|a||b|). \end{aligned} \quad (4.31)$$

De lo anterior, vemos que $\tilde{P}^{(\rho)}$ se puede expresar en función de las mediciones sobre la base canónica y sobre $|n\rangle$, además de los parámetros conocidos a y b . Con esto la ecuación (4.28) queda

$$\tilde{P}^{(\rho)} = 2(1-\lambda)|a||b|c_k c_{k+1} \Re \left[e^{-i\phi} e^{i(\varphi_{k+1}-\varphi_k)} \right]. \quad (4.32)$$

Basandonos en esto, medimos un conjunto de proyectores $|n_1\rangle, \dots, |n_f\rangle$, de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \phi_f & \sin \phi_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(1-\lambda)c_k c_{k+1} \cos(\phi_{k+1} - \phi_k) \\ 2(1-\lambda)c_k c_{k+1} \sin(\phi_{k+1} - \phi_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1^{(\rho)} \\ \vdots \\ \tilde{P}_f^{(\rho)} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

La solución para el sistema (4.33) entrega un valor para la cantidad

$$\Lambda^{(\rho)} = 2(1 - \lambda)c_k c_{k+1} e^{i(\phi_{k+1} - \phi_k)}, \quad (4.34)$$

que corresponde a una combinación lineal de las expresiones $\tilde{P}_j^{(\rho)}$. Dado que $\tilde{P}_j^{(\rho)}$ depende de $\langle n_j | \rho | n_j \rangle$, $p_k^{(\rho)}$ y $p_{k+1}^{(\rho)}$, que son cantidades que podemos estimar de mediciones proyectivas, podemos encontrar un estimado para $\Lambda^{(\rho)}$. Tomando el valor absoluto de la ecuación (4.34) obtenemos

$$|\Lambda^{(\rho)}|^2 = 4(1 - \lambda)^2 |c_k|^2 |c_{k+1}|^2. \quad (4.35)$$

Lo anterior permite estimar el valor del parámetro λ a partir de $\Lambda^{(\rho)}$, que a su vez es estimado de mediciones. Reemplazando $|c_k|^2$ y $|c_{k+1}|^2$ de las ecuaciones (4.29) y (4.30) en la ecuación (4.35) obtenemos

$$|\Lambda^{(\rho)}|^2 = 4 \left(p_k^{(\rho)} - \frac{\lambda}{d} \right) \left(p_{k+1}^{(\rho)} - \frac{\lambda}{d} \right), \quad (4.36)$$

que es una ecuación cuadrática para el parámetro λ con solución

$$\lambda = \frac{d}{2} \left[p_k^{(\rho)} + p_{k+1}^{(\rho)} - \sqrt{(p_k^{(\rho)} - p_{k+1}^{(\rho)})^2 + |\Lambda^{(\rho)}|^2} \right], \quad (4.37)$$

donde elegimos la solución con signo negativo dado que λ debe ser una cantidad pequeña. Así, obtenemos un estimado λ_{est} de λ , y a partir de la ecuación (4.27) un valor para la pureza. Usando esto, podemos corregir los valores de los coeficientes c_k y c_{k+1} en las ecuaciones (4.29) y (4.30) y a partir de esta corrección estimar $|\psi\rangle$.

4.6 Simulaciones numéricas

Para estudiar el desempeño del método realizamos simulaciones numéricas. Estamos interesados en conocer que tan parecidos son los estados reconstruidos de los preparados en

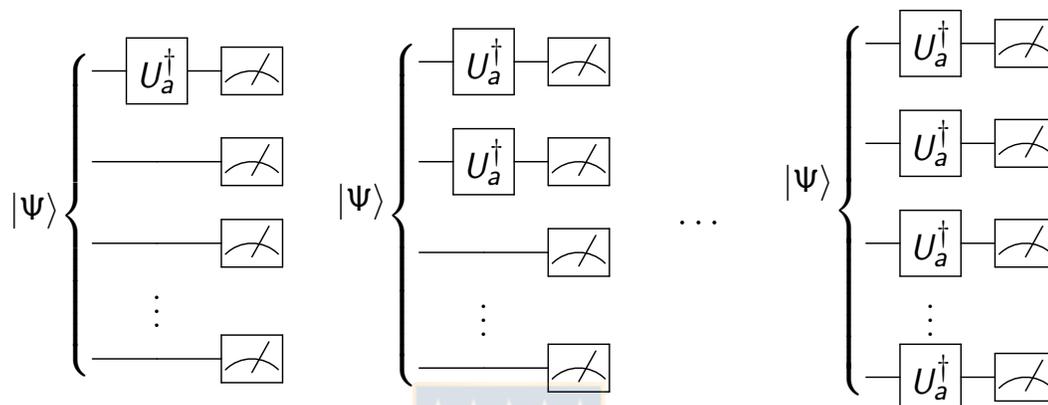
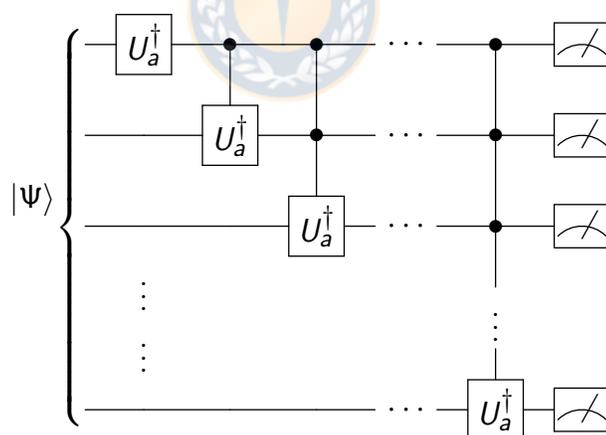
(a) Circuito que implementa las mediciones locales $\{\mathcal{L}_{ab}\}$ (b) Circuito que implementa las mediciones entrelazadas $\{\mathcal{E}_a\}$.

Figura 4.3: Circuitos que implementan las bases de medición separables y entrelazadas. La operación U_a satisface $|+_v\rangle = U_a|0\rangle$ y $|-_v\rangle = U_a|1\rangle$. Fuente: Elaboración propia.

el sistema. Para esto utilizamos la fidelidad

$$F = |\langle \psi | \psi^{est} \rangle|^2 \quad (4.38)$$

entre un estado arbitrario $|\psi\rangle$ y su estimado $|\psi^{est}\rangle$. Esperamos obtener fidelidades cercanas a 1, esto es, que ambos estados sean iguales. Además, trabajaremos con sistemas de qubits, dada la disponibilidad de plataformas en línea para realizar experimentos con estos. Lo anterior permitirá comparar los resultados numéricos con los obtenidos experimentalmente.

Queremos obtener el comportamiento de la fidelidad como función de la dimensión, o equivalentemente, del número de qubits, y el impacto de la estadística finita de las mediciones en el método. Para cada número de qubits $n = 2, 3, \dots, 10$ generamos un conjunto $\Omega^{(n)} = \{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^{100}$ de 100 estados puros. Estos serán los estados a estimar. Luego, simulamos mediciones proyectivas en cada uno de los $|\psi_i\rangle$ usando la base canónica más dos conjuntos de bases. El primer conjunto está compuesto de m bases \mathcal{E}_v , dadas por

$$\mathcal{E}_v = \{|\beta\rangle_{n-j} \otimes |+_v\rangle \otimes |-_v\rangle^{\otimes j-1}, |-_v\rangle^{\otimes n}\}, \quad (4.39)$$

con $1 \leq j \leq n$, β la representación en binario de los números enteros $0 \leq \beta \leq 2^{n-j} - 1$, $|+_v\rangle = a_v|0\rangle + b_v e^{i\phi_v}|1\rangle$ y $|-_v\rangle = a_v|0\rangle - b_v e^{i\phi_v}|1\rangle$. Estos últimos vectores son arbitrarios, pero deben estar normalizados. Con estas bases los resultados de las mediciones proyectivas se reparten de forma uniforme en cada nodo del árbol, y luego en cada nodo tenemos un sistema de m ecuaciones. La característica de estas bases es que para implementarlas en un sistema de n qubits es necesario disponer de operaciones entrelazadas.

El segundo conjunto de $n \times m$ ($m \geq 2$) bases se puede construir con solo operaciones locales sobre los qubits, y está dado por

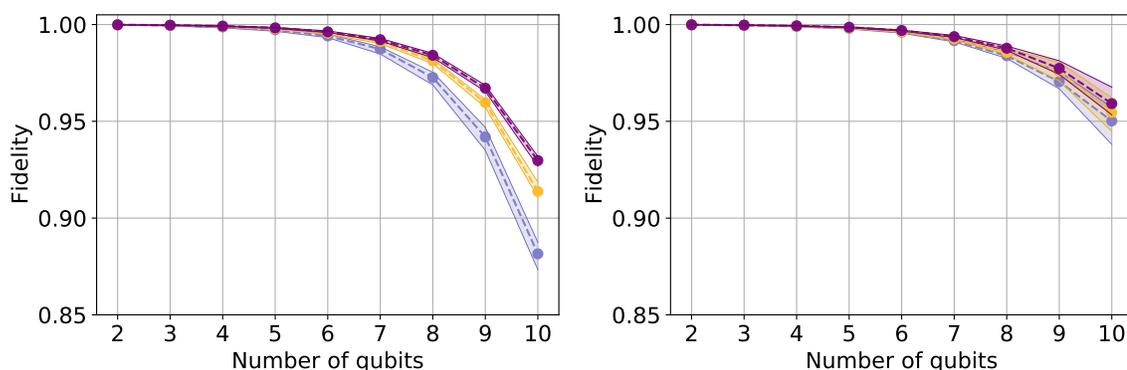
$$\mathcal{L}_{uv} = \{|\beta\rangle_{n-u} \otimes |\pm_v\rangle \otimes \dots \otimes |\pm_v\rangle\}, \quad (4.40)$$

donde $0 \leq \beta \leq 2^{n-u} - 1$. Con estas bases el número de mediciones por nodo va creciendo a medida que subimos en el árbol. Luego las hojas del árbol tienen asociados sistemas con $2m$ ecuaciones. Los nodos del penúltimo nivel tienen asociados $4m$ ecuaciones, y así, hasta llegar a la raíz que tiene asociada $2^n m$ ecuaciones. En la figura 4.3 vemos los circuitos cuánticos necesarios para construir ambos conjuntos de bases.

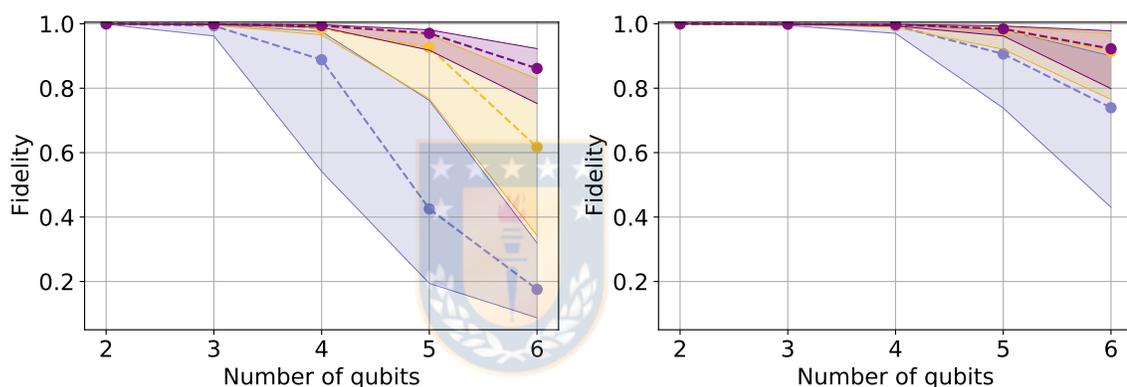
A partir de lo anterior, las mediciones sobre las bases (4.39) y (4.40) fueron simuladas considerando 2^{13} repeticiones por cada base, lo que es una cantidad razonable experimentalmente. A partir de los histogramas de las mediciones construimos distribuciones de probabilidad, y aplicamos nuestro método de estimación a cada estado $|\psi_i\rangle$, lo que entrega un conjunto de estimados $\{|\psi_i^{est}\rangle\}$. Luego, calculamos el valor de la fidelidad entre cada estado a reconstruir y su estimado como vemos en la ecuación (4.38), de donde obtenemos un conjunto de fidelidades para cada número n de qubits.

Usando los datos de las simulaciones anteriores, la figura 4.4(a) muestra la mediana de la fidelidad (4.38) en función del número n de qubits para $2n$, $3n$ y $4n$ bases locales más la identidad, desde abajo hacia arriba. Las zonas sombreadas corresponden al rango intercuartil. Los estados en Ω son elegidos aleatoriamente. Como es usual en los métodos de estimación de estados cuánticos, la fidelidad decrece a medida que se incrementa el número de qubits para todo número de bases a medir. Esta figura también muestra que la fidelidad se puede aumentar si usamos un mayor número de bases locales, lo que es razonable ya que más mediciones recolectan más información sobre el sistema. Una característica interesante de la figura 4.4(a) es que el rango intercuartil es angosto para cada curva, lo que indica que el método genera fidelidades muy similares para todos los estados simulados.

La figura 4.4(c) muestra la mediana de la fidelidad como función del número n de qubits para 2, 3 y 4 bases entrelazadas más la base canónica, desde abajo hacia arriba. Los es-



(a) Estados generados aleatoriamente, bases locales (b) Estados separables generados aleatoriamente, bases locales



(c) Estados generados aleatoriamente, bases entrelazadas (d) Estados separables generados aleatoriamente, bases entrelazadas

Figura 4.4: Fidelidad simulada alcanzada midiendo sobre $2n$ (azul), $3n$ (amarillo) y $4n$ (violeta) bases locales, fila superior, y 2 (azul), 3 (amarillo) y 4 (violeta) bases locales, fila inferior, en función del número de qubits. Fuente: Elaboración propia.

tados en Ω son elegidos aleatoriamente. En este caso, el método de estimación alcanza un desempeño menor en comparación con el uso de bases locales. Lo anterior se puede explicar por la insuficiente información que entrega un pequeño número de bases. Por ejemplo, el uso de 2 bases entrelazadas entrega dos ecuaciones por cada nodo. Si el sistema a resolver es mal condicionado en algún paso del algoritmo, la estimación de las fases relativas puede ser de mala calidad, y dado que el resultado entregado por un nodo se

utiliza como insumo para la siguiente iteración del proceso, este error se puede propagar, resultando por lo tanto en una mala fidelidad entre el estimado y el estado original. Sin embargo, si aumentamos el número de bases a medir podemos mejorar enormemente la calidad de la estimación, como vemos en la curva superior de la figura 4.4(c). La fidelidad también se puede mejorar aumentando el número de copias a medir por base, dado que las probabilidades que entran en los sistemas de ecuaciones se estiman de forma más precisa. El ensemble total usado en las bases locales y entrelazadas escala como $mn \times 2^{13}$ y $m \times 2^{13}$, respectivamente. Por lo tanto, la cantidad de shots en las bases locales es mucho más grande que en el caso de las bases entrelazadas, lo que puede explicar en parte los peores resultados con estas últimas. A pesar de todo, las bases entrelazadas son capaces de entregar una fidelidad cercana a 0.9 para $n = 6$.

Las figuras 4.4(b) y 4.4(d) también muestran la fidelidad mediana en función del número de qubits para las bases locales (2, 3 y 4, desde abajo hacia arriba) y entrelazadas ($2n$, $3n$, $4n$, desde abajo hacia arriba), respectivamente. Sin embargo, la simulación fue llevada a cabo utilizando un conjunto de estados aleatorios Ω completamente separables. En ambos casos obtenemos un incremento en el desempeño, alcanzando fidelidad de alrededor de 0.95 para 10 qubits cuando utilizamos las bases locales.

4.7 Experimento

Probamos nuestro método de estimación experimentalmente utilizando el procesador cuántico *ibmq_manhattan*, provisto por la compañía IBM. A este dispositivo NISQ se puede acceder mediante internet, y se controla utilizando Qiskit, una plataforma abierta para trabajar y controlar dispositivos cuánticos desarrollada en el lenguaje de programación Python.

Para realizar los experimentos es necesario preparar el estado a reconstruir en el dispo-

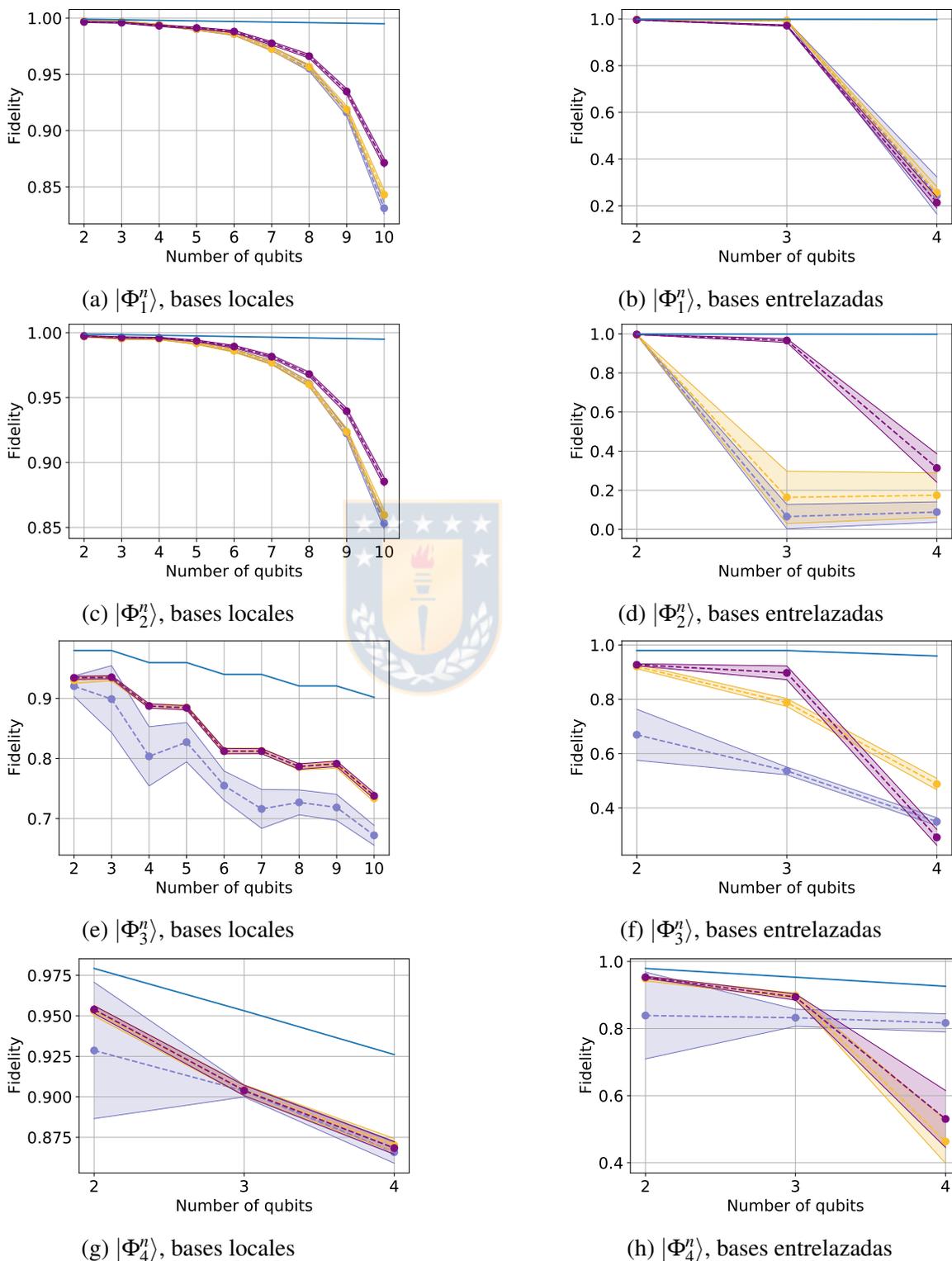


Figura 4.5: Fidelidad experimental alcanzada midiendo sobre $2n$ (azul), $3n$ (amarillo) y $4n$ (violeta) bases locales, columna izquierda, y 2 (azul), 3 (amarillo) y 4 (violeta) bases locales, columna derecha, en función del número de qubits. Fuente: Elaboración propia.

itivo y luego medir las bases necesarias con una determinada cantidad de shots. Si queremos estimar un estado $|\Phi^n\rangle$ de n qubits, inicializamos el procesador cuántico en el estado $|0_n \dots 0_1 0_0\rangle$. Luego aplicamos cualquier unitaria que mapee el estado inicial a $|\Phi^n\rangle$. No todas estas unitarias se implementan con la misma precisión, pero Qiskit provee comandos para preparar estados de forma optima. Una vez preparado el estado, realizamos las mediciones. Dado que los procesadores cuánticos de IBM están diseñados para medir solo en la base computacional, debemos aplicar operaciones que mapeen la base computacional a las bases separables o entrelazadas que debemos medir, como se ilustra en la figura 4.3. Después de medir y obtener las cuentas para cada elemento de las bases, normalizamos para obtener probabilidades y post-procesamos clásicamente utilizando nuestro algoritmo, estimando de esta forma el estado.

Para probar el protocolo preparamos los siguientes estados de n qubits

$$|\Phi_1^n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(|0\rangle - e^{i\pi/4} |1\rangle \right)^{\otimes n}, \quad (4.41)$$

$$|\Phi_2^n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(|0\rangle + e^{i\pi/4} |1\rangle \right)^{\otimes n}, \quad (4.42)$$

y

$$|\Phi_3^n\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/4}} (|00\rangle + |11\rangle)^{\otimes n/2}, & n \text{ par.} \\ \frac{1}{2^{(n-1)/4}} (|00\rangle + |11\rangle)^{\otimes (n-1)/2} \otimes |0\rangle, & n \text{ impar.} \end{cases} \quad (4.43)$$

Los estados $|\Phi_1^n\rangle$ y $|\Phi_2^n\rangle$ son separables, y pueden ser preparados de forma eficiente usando compuertas de un solo qubit. El estado $|\Phi_3^n\rangle$ es maximalmente entrelazado entre pares de qubits. Para n par (impar) puede ser preparado con $n/2$ ($[n-1]/2$) compuertas CNOT y $n/2$ ($[n-1]/2$) compuertas de un qubit. Así, los estados $|\Phi_1^n\rangle$, $|\Phi_2^n\rangle$, y $|\Phi_3^n\rangle$ pueden ser generados por circuitos con baja profundidad. Sin embargo, el estado $|\Phi_3^n\rangle$ tiene un mayor error de preparación comparado con $|\Phi_1^n\rangle$ y $|\Phi_2^n\rangle$ debido a que las compuertas CNOT se

implementan con un error experimental mucho mayor que las operaciones sobre un qubit. También realizamos la estimación de estados GHZ de n partes,

$$|\Phi_4^n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n}). \quad (4.44)$$

Estos estados se implementan en circuitos de gran profundidad, que contienen $n - 1$ compuertas CNOT. Esto implica que la fidelidad en la preparación puede ser bastante baja. Considerando lo anterior, nos enfocamos en el estudio de estos estados en un pequeño número de qubits, $n = 2, 3, 4$, para las bases locales y entrelazadas. Cada base fue medida empleando 2^{13} copias del estado desconocido. Actualmente, este es el tamaño de muestra más grande que se puede emplear en los procesadores cuánticos de IBM.

La figura 4.5 resume los resultados experimentales. Mostramos fidelidad entre los estados $|\Phi_1^n\rangle, |\Phi_2^n\rangle, |\Phi_3^n\rangle, |\Phi_4^n\rangle$ y sus estimados correspondientes en función del número n de qubits para $2n, 3n$ y $4n$ bases locales más la base canónica (columna izquierda) y 2, 3 y 4 bases entrelazadas más la base canónica (columna derecha). Las áreas sombreadas corresponden al error en los valores de la fidelidad obtenidos por el método de bootstrapping. La línea sólida azul es la fidelidad máxima alcanzable \mathcal{E} en la preparación del estado considerando error de ruido blanco para el dispositivo. Este modelo se basa en el error promedio por compuerta provisto por IBM,

$$\mathcal{E}_{noise}(|0\rangle^{\otimes n}) = \left(1 - \frac{2^n r}{2^n - 1}\right) \mathcal{E}(|0\rangle^{\otimes n}) + \frac{2^n r}{2^n - 1} I. \quad (4.45)$$

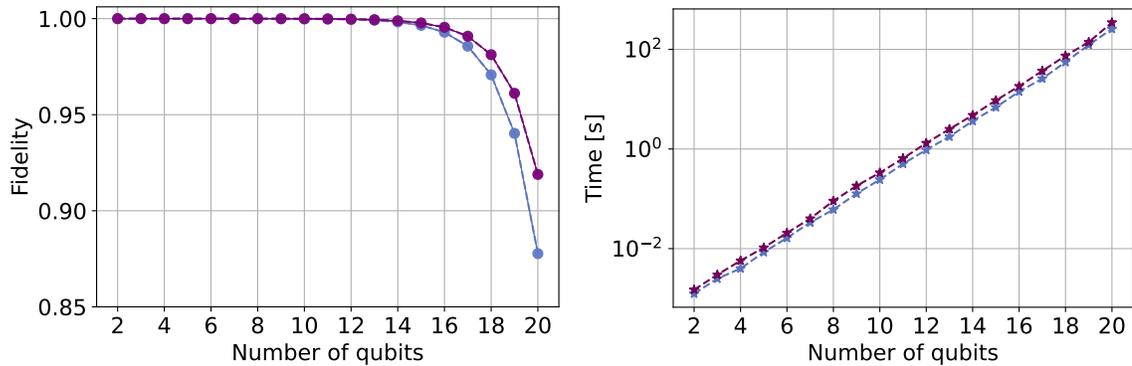
El modelo fue aplicado a cada compuerta necesaria para preparar los estados. Utilizamos como error promedio por compuerta $r_1 = 5 \times 10^{-4}$ para operaciones locales y $r_2 = 2 \times 10^{-2}$ para compuertas CNOT.

De acuerdo a las figuras 4.5(a) y 4.5(c), la estimación de los estados locales $|\Phi_1^n\rangle$ y $|\Phi_2^n\rangle$ a través de bases locales entrega valores de fidelidad que son comparables con las predicciones teóricas mostradas en las figuras 4.4(a) y 4.4(b), que solo consideran ruido prove-

niente de la estadística finita. Para el caso particular de $n = 10$ qubits, las predicciones teóricas usando bases locales están dentro de los intervalos $[0.88, 0.93]$ para estados generados aleatoriamente, y $[0.95, 0.96]$ para estados separables aleatorios, mientras que el experimento entrega fidelidades en el intervalo $[0.82, 0.89]$.

La estimación de los estados entrelazados $|\Phi_3^n\rangle$ y $|\Phi_4^n\rangle$ usando bases locales, que vemos en las figuras 4.5(e) y 4.5(g), respectivamente, también entrega buenos resultados, aunque la fidelidad es un poco más baja que en el caso de $|\Phi_1^n\rangle$ y $|\Phi_2^n\rangle$. Esto es esperable, ya que los estados $|\Phi_3^n\rangle$ y $|\Phi_4^n\rangle$, al presentar entrelazamiento, se generan aplicando compuertas CNOT, que incrementan el error en la preparación. Los resultados experimentales del método muestran que el uso de bases locales permite estimar estados puros para un gran número de qubits, a diferencia de otros métodos donde la complejidad del problema escala exponencialmente. La calidad de la estimación es afectada principalmente por el número de copias del estado disponibles, y la cantidad de bases locales. Un incremento de cualquiera de estas cantidades genera una mejora en la calidad de la estimación. En particular, estados con un número mayor de qubits se pueden estimar incrementando la cantidad de bases locales. Como vemos en las figuras 4.5(a), 4.5(c), y 4.5(e) el uso de $4n + 1$ bases locales entrega valores más grandes para la fidelidad que los casos con $2n + 1$ y $3n + 1$ bases locales.

El uso de bases entrelazadas en el experimento muestra una reducción en las fidelidades comparada con las obtenidas usando bases locales. Las figuras 4.5(b) y 4.5(d) muestran los resultados de estimar los estados $|\Phi_1^n\rangle$ y $|\Phi_2^n\rangle$, respectivamente. Al comparar para $n = 4$ con las figuras 4.5(a) y 4.5(c) vemos una gran caída en la fidelidad, de aproximadamente 0.99 a 0.2. Una pérdida similar se puede observar en el caso de los estados $|\Phi_3^n\rangle$ y $|\Phi_4^n\rangle$. Los resultados tampoco son parecidos a los obtenidos en las simulaciones. Esto se puede explicar a partir de los circuitos empleados para implementar las mediciones en las bases



(a) Fidelidad para estados aleatorios usando bases locales. (b) Tiempo promedio que tarda en reconstruirse un estado.

Figura 4.6: A la izquierda, fidelidad simulada en función del número de qubits. A la derecha, tiempo promedio que tarda el algoritmo en reconstruir un estado en función del número de qubits. Los colores etiquetan la cantidad de bases a medir: para (a) y (b) tenemos $2n$ (azul) y $4n$ (violeta) bases locales. Fuente: Elaboración propia.

entrelazadas. Para $n = 2, 3$, y 4 , usar 2 bases entrelazadas requiere el uso de 2, 7 y 27 CNOT gates, respectivamente. Este número se convierte en 3027 para $n = 10$. Ya que esta compuerta se caracteriza por una alta tasa de error en los dispositivos NISQ, las bases implementadas difieren significativamente de las bases \mathcal{E}_a que se deberían implementar. Además, esto también afecta a los estados generados. La figura 4.5(d) muestra que para $n = 3$ el uso de 2 y 3 bases más la base computacional entrega un valor para la fidelidad de 0.1, mucho más pequeño que para el caso de usar 4 bases entrelazadas. El estado $|\Phi_2^3\rangle$ a ser reconstruido se caracteriza por un sistema de ecuaciones mal condicionado para 2 y 3 bases. Sin embargo, para 4 bases entrelazadas esto mejora, y la fidelidad es del orden de 0.95. Notemos que este efecto no aparece en la figura 4.5(c), donde el uso de $mn + 1$ bases locales permite obtener sistemas de ecuaciones con buen número de condición.

4.8 Otras simulaciones numéricas

Una vez que obtenemos los datos de mediciones en el método, debemos procesarlos clásicamente para obtener un estimado del estado del sistema. Luego un aspecto importante a comprender del método es su escalabilidad en términos de recursos computacionales clásicos. Para esto simulamos un conjunto de 100 estados puros aleatorios para cada número de qubits $n = 2, 3, \dots, 20$, y los reconstruimos utilizando las bases locales con 2^{23} shots. En la figura 4.6(a) vemos la fidelidad mediana en función del número de qubits midiendo $2n + 1$ y $4n + 1$ bases locales, desde abajo hacia arriba. La dispersión en los datos es despreciable. Dado que aumentamos la cantidad de shots en un factor 2^{10} , los resultados para 10 qubits son mucho mejores que los de la figura 4.4(c). Sin embargo, a medida que nos acercamos a 20 qubits la fidelidad es nuevamente cercana a 0.85. La figura 4.6(b) muestra el tiempo que el algoritmo tarda en reconstruir un estado una vez que tenemos los resultados de las mediciones para $2n + 1$ y $4n + 1$ bases locales. Ambas curvas son lineales en escala logarítmica, lo que es razonable dado que el número de sistemas de ecuaciones que debemos resolver escala como 2^n . Dado que las simulaciones se realizaron en un computador portátil promedio con 8 gigabytes de memoria, los resultados son muy favorables, ya que estimar un estado en 20 qubits toma alrededor de 4 minutos. El uso de memoria tampoco es excesivo, a pesar de que para representar un estado de 20 qubits se necesitan más de dos millones de parámetros reales.

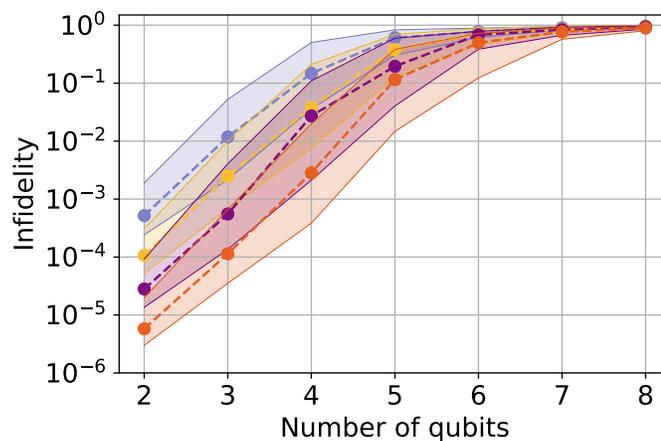
Para comprender completamente el desempeño del algoritmo necesitamos conocer como mejora la calidad de la reconstrucción en función de la cantidad de shots y de bases que elijamos medir. En esta dirección, generamos un conjunto $\{|\psi_i\rangle\}$ de 100 estados aleatorios para 2, 3, ..., 8 qubits. Reconstruimos estos estados fijando la cantidad de bases y utilizando el método con 2^{13} , 2^{15} , 2^{17} y 2^{19} shots por base. Luego calculamos su infidel-

idad I con respecto a los estados originales $|\psi_i\rangle$, $I = 1 - F$. Esperamos que esta cantidad sea cercana a cero.

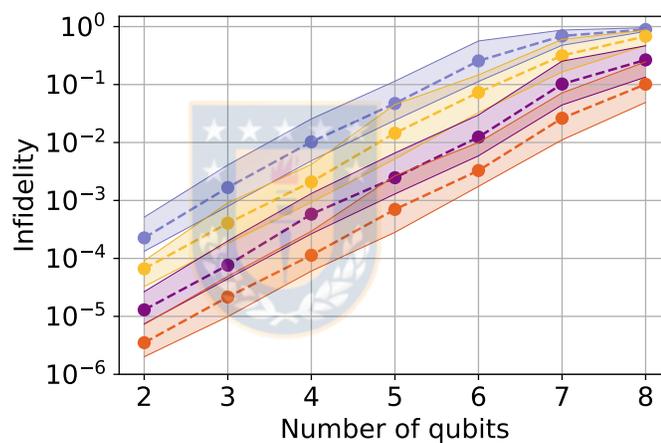
En la figura 4.7(a) vemos la infidelidad mediana en función del número de qubits obtenida midiendo sobre 3 bases. La cantidad de shots por base para cada curva es 2^{13} , 2^{15} , 2^{17} y 2^{19} , desde abajo hacia arriba, mientras que las cantidades sombreadas son los rangos intercuartiles. En general, podemos ver que a medida que se incrementa la dimensión de los estados la calidad de la reconstrucción empeora. Para 2 y 3 qubits se observa una clara separación entre las medianas, mostrando que estimar las probabilidades que entran en el método con más shots agrega precisión a la estimación. Sin embargo, a medida que se incrementa la dimensión de los estados a reconstruir, las curvas comienzan a acercarse, llegando prácticamente al mismo punto desde los 6 qubits. Esto es natural, ya que la infidelidad está acotada por 1, punto al que converge la infidelidad para estados de más de 5 qubits.

En la figura 4.7(b) vemos la infidelidad mediana en función del número de qubits utilizando 5 bases y midiendo 2^{13} , 2^{15} , 2^{17} y 2^{19} shots por base, desde abajo hacia arriba. Para un número bajo de qubits, los resultados son similares a usar 3 bases. Sin embargo, a diferencia de la figura anterior, la pendiente de las curvas es menor, y la separación entre estas es notoria para todos los puntos, lo que también se refleja en los rangos intercuartiles. Al llegar a 7 qubits las curvas dejan de ser rectas y comienzan a acercarse, observándose el mismo efecto de convergencia en las curvas que en la figura anterior, pero en menor medida.

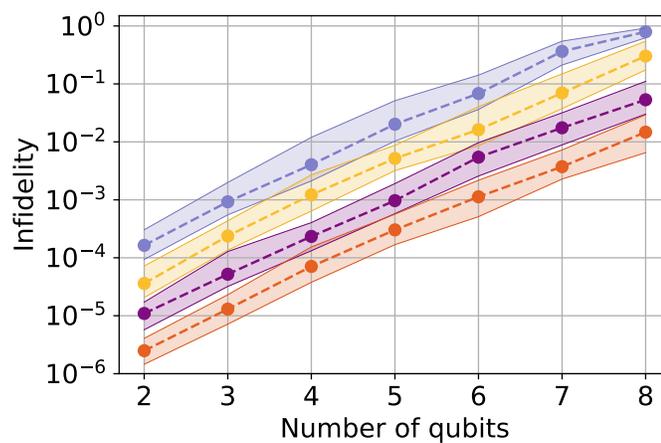
Finalmente, en la figura 4.7(c) vemos la infidelidad mediana en función del número de qubits utilizando 9 bases. Al igual que en las figuras anteriores, las curvas desde abajo hacia arriba están construidas utilizando 2^{13} , 2^{15} , 2^{17} y 2^{19} shots por base. En este caso se observan rangos intercuartiles más estrechos, disminuyendo por lo tanto la dispersión en



(a) Estados aleatorios reconstruidos usando 3 bases.

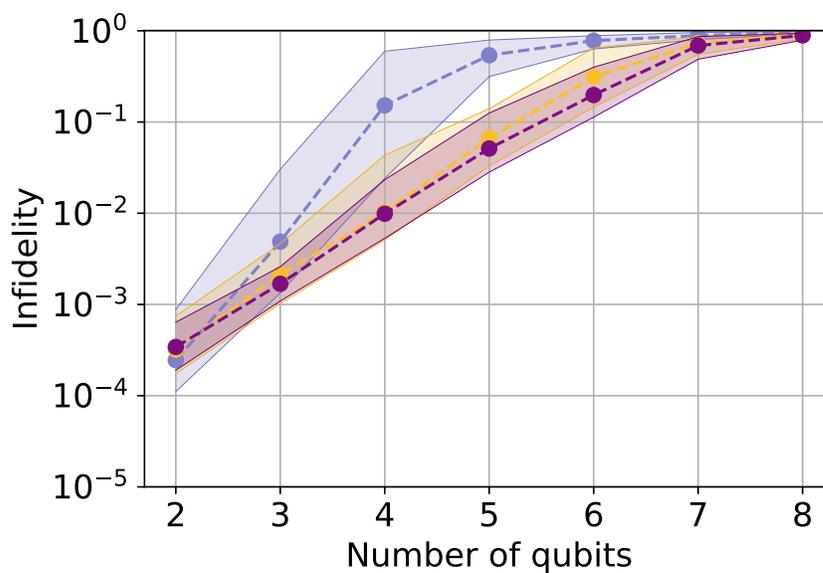


(b) Estados aleatorios reconstruidos usando 5 bases.

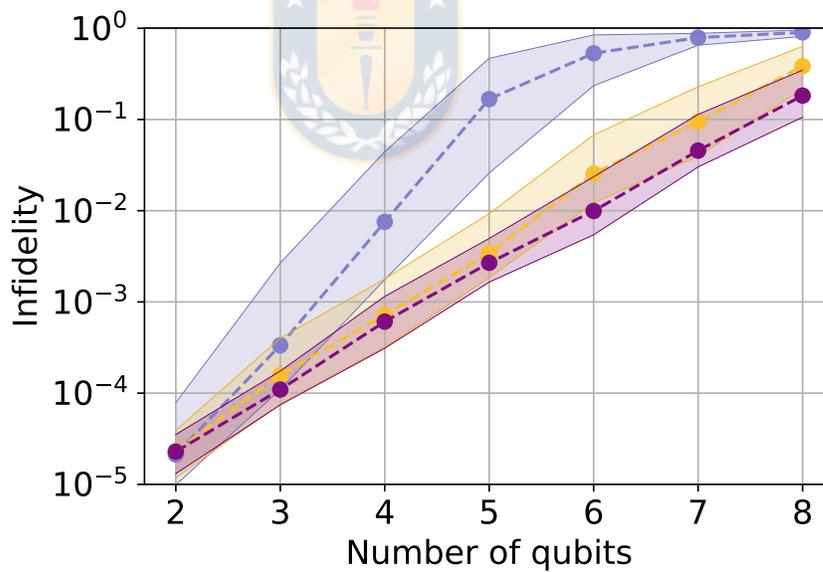


(c) Estados aleatorios reconstruidos usando 9 bases.

Figura 4.7: Infidelidad simulada alcanzada midiendo sobre 2^{13} (azul), 2^{15} (amarillo), 2^{17} (violeta) y 2^{19} (rojo) shots en función del número de qubits para 3, 5 y 9 bases. Fuente: Elaboración propia.



(a) Estados aleatorios reconstruidos usando un total de 2^{15} shots por punto. Desde abajo hacia arriba, 9, 5 y 3 bases.



(b) Estados aleatorios reconstruidos usando un total de 2^{19} shots por punto. Desde abajo hacia arriba, 9, 5 y 3 bases.

Figura 4.8: Infidelidad simulada alcanzada midiendo sobre 3 (azul), 5 (amarillo) y 9 (violeta) bases en función del número de qubits para un total de 2^{15} y 2^{19} shots. Fuente: Elaboración propia.

los resultados. Para 2 qubits no se observa una diferencia significativa entre los resultados de medir 9 bases con medir 5 o 3 bases, pero dado que la pendiente de las rectas es menor en la figura 4.7(c), a medida que aumenta la dimensión se aprecia una caída menos pronunciada de la infidelidad. Luego, como podríamos esperar, medir una mayor cantidad de bases y un mayor número de shots por base entrega mejores resultados.

De la figura 4.7 es importante destacar que el total de shots en cada curva es diferente, lo que dificulta la comparación entre distintas estrategias del método cuando el objetivo es optimizar la cantidad de shots. La figura 4.8 nos da información en este sentido. Para construirla generamos un conjunto $\{|\psi_i\rangle\}$ de 100 estados aleatorios para 2, 3, ..., 8 qubits. Luego fijamos el total de shots y reconstruimos los estados repartiendo los shots entre 3, 5 y 9 bases.

La figura 4.8(a) ilustra el procedimiento anterior para un total de 2^{15} shots por punto. La curva violeta aplica el método con 9 bases, la amarilla con 5 y la azul con 3. Todas las infidelidades aumentan a medida que crece la dimensión. Sin embargo, vemos que los resultados utilizando 3 bases son en general desfavorables comparados con usar 5 y 9 bases, excepto para 2, 7 y 8 qubits. Por otra parte, las diferencias no son tan marcadas al pasar desde 5 a 9 bases. Esto podría explicarse a partir del número de condición de las matrices a invertir en el método, que mejora al agregar más ecuaciones, pero solo hasta cierto punto. Por otra parte, la figura 4.8(b) se construye con un total de 2^{19} shots por punto. Dado que el total de shots ahora es mayor, en general los valores de la infidelidad son mejores que en la figura 4.8(a). Al igual que en esta, existe una diferencia significativa al utilizar 3 bases comparado con usar 5 o 9. Esto es incluso más marcado ahora, dado que el único punto donde las infidelidades son comparables es para 2 qubits. Las curvas entre 5 y 9 bases ahora se separan un poco más, sobre todo para alto número de qubits. Esto muestra que es más conveniente dividir el ensemble en un mayor número de bases que medir pocas bases

con más precisión, pero que la diferencia entre medir 5 bases y 9 bases no es tan significativa. Luego, dependiendo de la dimensión, existe un punto donde medir más observables deja de entregar mas información.



Capítulo 5

Conclusión

Estimar estados cuánticos en sistemas de dimensión d requiere medir un número mínimo de observables que escala polinomialmente con la dimensión. Para el caso de sistemas compuestos, como los computadores cuánticos, lo anterior indica que el escalamiento es exponencial en el número de subsistemas, lo que hace la estimación utilizando métodos genéricos imposible al crecer el número de componentes. Otra dificultad es que los dispositivos NISQ actuales se caracterizan por una baja precisión al implementar compuertas lógicas, en especial las que requieren entrelazamiento, las cuales son indispensables para generar observables arbitrarios. Además, existen restricciones en el número de shots con los que se pueden medir observables, lo que restringe la precisión con la que se estiman probabilidades. Luego, reconstruir estados de n qubits en computadores NISQ es una tarea difícil.

Para solucionar las dificultades anteriores hemos propuesto un método para estimar estados puros en sistemas de n qubits con buen desempeño en dispositivos cuánticos actuales. Dados los resultados de un conjunto de mediciones, el método se basa en construir un árbol binario para el estado a estimar, donde el espacio de Hilbert total \mathcal{H} se descompone en subespacios de Hilbert tal que su suma directa es \mathcal{H} . En particular, las hojas contienen la descomposición de \mathcal{H} en subespacios de dimensión 2 y 1. Así, en el protocolo

comenzamos estimando las partes del estado que viven en las hojas y luego, a través de un proceso recursivo, ascendemos en el árbol hasta encontrar el estado del sistema en la raíz. El conjunto de mediciones empleado por el método propuesto corresponde a mediciones proyectivas sobre un conjunto de bases. Primero mostramos que un mínimo de 3 bases permite estimar la mayoría de los estados puros. Para el caso de sistemas de n qubits, el total de medidas proyectivas es 3×2^n . Este número se compara favorablemente con otros métodos de estimación como MUBs, SIC-POVM y compressed sensing, que requieren $(2^n + 1)2^n$, 2^{2n} y del orden de $2^{2n}n^2$ resultados de medición, respectivamente, para reconstruir estados puros. Para llevar el método con 3 bases al terreno experimental, se necesitan compuertas entrelazadas precisas, lo que presenta un problema para los dispositivos NISQ. Para solucionar esto, podemos utilizar $2n + 1$ bases locales, esto es, que pueden ser escritas como el producto tensorial de n bases de un qubit. Luego al construir estas bases no es necesario aplicar entrelazamiento, y solo escalan linealmente en el número de qubits. Probamos el protocolo en los procesadores cuánticos de IBM. La estimación de estados locales utilizando bases locales hasta 10 qubits entrega fidelidades que coinciden con simulaciones numéricas, y que están sobre el 90%. También probamos con estados entrelazados usando las bases locales. La estimación del producto tensorial de estados de Bell hasta 10 qubits entregó fidelidades sobre el 70%. En este caso, la preparación del estado es afectada por grandes errores debido al uso de compuertas entrelazadas. Finalmente, probamos la estimación de estados GHZ para $n = 2, 3$ y 4 qubits, obteniendo fidelidades sobre 86%. Las bases entrelazadas también se probaron. Sin embargo, debido a la gran cantidad de compuertas CNOT necesarias en su preparación la calidad de las reconstrucciones disminuyó, como era de esperar. La estimación usando k bases entrelazadas más la base computacional, donde k es lo suficientemente grande pero no escala con el número n de qubits, puede llevar a buenas fidelidades en futuras arquitecturas tolerantes a errores [58],

donde se requiere un gran número de qubits y compuertas entrelazadas de alta precisión. También puede ser posible estimar la fidelidad usando implementaciones alternativas de compuertas multi-CNOT que emplean qubits ancilla. Esto permite reducir la profundidad de los circuitos requeridos para implementar mediciones en las bases entrelazadas propuestas [59]. La principal característica de nuestro protocolo es su escalabilidad, que es una consecuencia de la información previa sobre los estados a estimar. Para esto, mostramos mediante simulaciones que se pueden reconstruir estados de 20 qubits en unos pocos minutos, sin gastar demasiada memoria computacional y midiendo un número de observables lineal en el número de qubits. Tener información previa es un enfoque común entre muchos métodos de estimación, como por ejemplo, compressed sensing y matrix product states. La suposición de pureza es razonable en sistemas que son capaces de preparar estados con alta pureza, o en sistemas cuya pureza puede ser certificada, por ejemplo, a través de randomized benchmarking [60]. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto en dispositivos NISQ. Decoherencia y errores en las compuertas pueden reducir la calidad del estado puro preparado. En este caso nuestro protocolo no podría ser aplicado. Sin embargo, se ha mostrado que resultados experimentales se pueden mejorar reduciendo el error de la data original empleando técnicas de mitigación de errores [44, 61, 62]. Al combinar nuestro protocolo con métodos de mitigación de errores se podría extender su aplicabilidad a sistemas sometidos a un alto nivel de ruido.

Bibliografía

- [1] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. Brandao, D. A. Buell et al., *Nature* **574**, 7779 (2019).
- [2] J. I. Cirac y P. Zoller, *Physical Review Letters* **74**, 4091 (1995).
- [3] B. P. Lanyon, C. Hempel, D. Nigg, M. Müller, R. Gerritsma, F. Zähringer, P. Schindler, J. T. Barreiro, M. Rambach y G. Kirchmair, *Science* **334**, 57 (2011).
- [4] W. Hänsel, C. F. Roos, J. Benhelm, D. Chek-al kar, M. Chwalla, T. Körber, U. D. Rapol, M. Riebe, P. O. Schmidt y H. Häffner, *Nature* **438**, 643 (2005).
- [5] J. M. Pino, J. M. Dreiling, C. Figgatt, J. P. Gaebler, S. A. Moses, M. S. Allman, C. H. Baldwin, M. Foss-Feig, D. Hayes, K. Mayer, C. Ryan-Anderson y B. Neyenhuis, *Nature* **592**, 209–213 (2021).
- [6] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin y R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004).
- [7] A. Blais, A. L. Grimsmo, S. M. Girvin y A. Wallraff, *Rev. Mod. Phys.* **93**, 025005 (2021).
- [8] J. M. Chow, J. M. Gambetta, A. D. Córcoles, S. T. Merkel, J. A. Smolin, C. Rigetti, S. Poletto, G. A. Keefe, M. B. Rothwell, J. R. Rozen, M. B. Ketchen y M. Steffen, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 060501 (2012).

- [9] M. W. Johnson, P. Bunyk, F. Maibaum, E. Tolkacheva, A. J. Berkley, E. M. Chapple, R. Harris, J. Johansson, T. Lanting, I. Perminov, E. Ladizinsky, T. Oh y G. Rose, *Superconductor Science and Technology* **23**, 065004 (2010).
- [10] D. Loss y D. P. DiVincenzo, *Phys. Rev. A* **57**, 120 (1998).
- [11] M. Reck, A. Zeilinger, H. J. Bernstein y P. Bertani, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 58 (1994).
- [12] W. R. Clements, P. C. Humphreys, B. J. Metcalf, W. S. Kolthammer y I. A. Walsmley, *Optica* **3**, 1460 (2016).
- [13] T. Kalajdziewski y J. M. Arrazola, *Phys. Rev. A* **99**, 022341 (2019).
- [14] J. Arrazola, V. Bergholm, K. Brádler, T. Bromley, M. Collins, I. Dhand, A. Fumagalli, T. Gerrits, A. Goussev, L. Helt et al., *Nature* **591**, 54 (2021).
- [15] J. Preskill, *Quantum* **2**, 79 (2018).
- [16] J. Eisert, D. Hangleiter, N. Walk, I. Roth, D. Markham, R. Parekh, U. Chabaud y E. Kashefi, *Nature Reviews Physics* (2020).
- [17] J. Emerson, R. Alicki y K. Życzkowski, *Journal of Optics B: Quantum and Semi-classical Optics* **7**, S347 (2005).
- [18] C. Dankert, R. Cleve, J. Emerson y E. Livine, *Phys. Rev. A* **80**, 012304 (2009).
- [19] E. Magesan, J. M. Gambetta, B. R. Johnson, C. A. Ryan, J. M. Chow, S. T. Merkel, M. P. da Silva, G. A. Keefe, M. B. Rothwell, T. A. Ohki, M. B. Ketchen y M. Steffen, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 080505 (2012).
- [20] M. P. da Silva, O. Landon-Cardinal y D. Poulin, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 210404 (2011).

- [21] S. T. Flammia y Y.-K. Liu, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 230501 (2011).
- [22] K. Banaszek, M. Cramer y D. Gross, *New Journal of Physics* **15**, 12 (2013).
- [23] D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro y A. G. White, *Phys. Rev. A* **64**, 052312 (2001).
- [24] R. T. Thew, K. Nemoto, A. G. White y W. J. Munro, *Phys. Rev. A* **66**, 012303 (2002).
- [25] G. Lima, F. A. Torres-Ruiz, L. Neves, A. Delgado, C. Saavedra y S. Pádua, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **41**, 18 (2008).
- [26] J. Schwinger, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **46**, 4 (1960).
- [27] I. D. Ivonovic, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **14**, 12 (1981).
- [28] W. K. Wootters y B. D. Fields, *Annals of Physics* **191**, 2 (1989).
- [29] A. B. Klimov, C. Muñoz, A. Fernández y C. Saavedra, *Phys. Rev. A* **77**, 060303 (2008).
- [30] S. N. Filippov y V. I. Man'ko, *Physica Scripta* **T143**, 014010 (2011).
- [31] R. B. A. Adamson y A. M. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 030406 (2010).
- [32] G. Lima, L. Neves, R. Guzmán, E. S. Gómez, W. A. T. Nogueira, A. Delgado, A. Vargas y C. Saavedra, *Opt. Express* **19**, 4 (2011).
- [33] E. Prugovečki, *International Journal of Theoretical Physics* **16**, 321 (1977).
- [34] S. T. Flammia, A. Silberfarb y C. M. Caves, *Foundations of Physics* **35**, 12 (2005).
- [35] J. M. Renes, R. Blume-Kohout, A. J. Scott y C. M. Caves, *Journal of Mathematical Physics* **45**, 6 (2004).

- [36] T. Durt, C. Kurtsiefer, A. Lamas-Linares y A. Ling, *Phys. Rev. A* **78**, 042338 (2008).
- [37] Z. E. D. Medendorp, F. A. Torres-Ruiz, L. K. Shalm, G. N. M. Tabia, C. A. Fuchs y A. M. Steinberg, *Phys. Rev. A* **83**, 051801 (2011).
- [38] N. Bent, H. Qassim, A. A. Tahir, D. Sych, G. Leuchs, L. L. Sánchez-Soto, E. Karimi y R. W. Boyd, *Phys. Rev. X* **5**, 041006 (2015).
- [39] W. M. Pimenta, B. Marques, T. O. Maciel, R. O. Vianna, A. Delgado, C. Saavedra y S. Pádua, *Phys. Rev. A* **88**, 012112 (2013).
- [40] D. Gross, Y.-K. Liu, S. T. Flammia, S. Becker y J. Eisert, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 150401 (2010).
- [41] M. Cramer, M. B. Plenio, S. T. Flammia, R. Somma, D. Gross, S. D. Bartlett, O. Landon-Cardinal, D. Poulin y Y.-K. Liu, *Nature Communications* **1**, 149 (2010).
- [42] G. Tóth, W. Wieczorek, D. Gross, R. Krischek, C. Schwemmer y H. Weinfurter, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 250403 (2010).
- [43] D. Goyeneche, G. Cañas, S. Etcheverry, E. S. Gómez, G. B. Xavier, G. Lima y A. Delgado, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 090401 (2015).
- [44] L. Zambrano, L. Pereira y A. Delgado, *Phys. Rev. A* **100**, 022340 (2019).
- [45] C. Carmeli, T. Heinosaari, M. Kech, J. Schultz y A. Toigo, *EPL (Europhysics Letters)* **115**, 3 (2016).
- [46] L. Zambrano, L. Pereira, D. Martínez, G. Cañas, G. Lima y A. Delgado, *Phys. Rev. Applied* **14**, 064004 (2020).

- [47] Z. Huangjun, *Quantum State Estimation and Symmetric Informationally Complete POMs* (Tesis Doctoral, National University of Singapore, 2012).
- [48] H.-P. Breuer y F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, 2002).
- [49] M. T. Goodrich y R. Tamassia, *Data Structures and Algorithms in Java* (Wiley, 2005), cuarta edición.
- [50] G. H. Golub y C. F. van Loan, *Matrix Computations* (JHU Press, 2013), cuarta edición.
- [51] M. A. Nielsen y I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition* (Cambridge University Press, 2011), décimo aniversario edición.
- [52] David P. DiVincenzo, *Fortschritte der Physik* **48**, 771 (2000).
- [53] Frank K. Wilhelm and John Clarke, *Nature* **453**, 1031–1042 (2008).
- [54] J. I. Cirac y P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995).
- [55] A. Imamoglu, D. D. Awschalom, G. Burkard, D. P. DiVincenzo, D. Loss, M. Sherwin y A. Small, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4204 (1999).
- [56] L. Henriët, L. Beguin, A. Signoles, T. Lahaye, A. Browaeys, G.-O. Raymond y C. Jurczak, *Quantum* **4**, 327 (2020).
- [57] J. Preskill, *Quantum* **2**, 79 (2018).
- [58] E. Knill, R. Laflamme y W. H. Zurek, *Science* **279**, 5349 (1998).

- [59] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin y H. Weinfurter, *Phys. Rev. A* **52**, 3457 (1995).
- [60] E. Magesan, J. M. Gambetta y J. Emerson, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180504 (2011).
- [61] K. Temme, S. Bravyi y J. M. Gambetta, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 180509 (2017).
- [62] S. Endo, S. C. Benjamin y Y. Li, *Phys. Rev. X* **8**, 031027 (2018).

